PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 1
Strani 46–49

Dragoljub M. Milošević, prevedel in priredil Mirko Dobovišek:

O KOLINEARNOSTI TREH TOČK

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/19/1075-Milosevic-Dobovisek.pdf

MATEMATIKA

O KOLINEARNOSTI TREH TOČK

Učenci se že zelo zgodaj srečajo s pojmom kolinearnosti. Če točke ležijo na isti premici, rečemo, da so kolinearne. Namen tega sestavka je, pokazati, kako kolinearnost lahko opišemo s pomočjo vektorjev. Najprej bomo povedali, kdaj so tri točke kolinearne, nato pa bomo trditev uporabili v dveh zanimivih primerih. Vektor od točke A do točke B označimo z $\overrightarrow{AB}$, dolžino tega vektorja (dolžino daljice med A in B) pa z $\overline{AB}$.

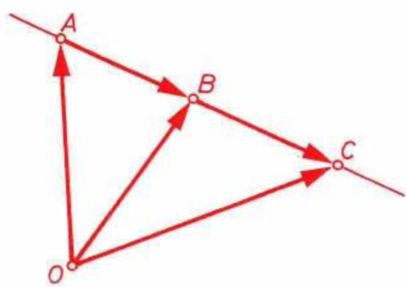
Trditev. Če so A, B in C tri kolinearne točke, $A \neq C$ in O poljubna točka, potem obstaja realno število k, da velja:

$$\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \qquad (*)$$

Če je $0 \leq k \leq 1$, je točka B na daljici AC.

Dokaz. Naj bodo točke A, B in C na isti premici (slika 1). Ker sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ vzporedna, je $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Ker je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, je $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$. Izračunajmo $\overrightarrow{OB}$. Dobimo:

$$\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC},$$



Slika 1

kar smo hoteli dokazati.

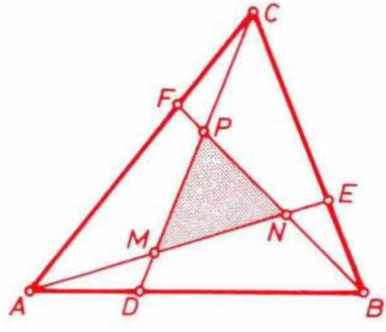
S pomočjo zgornje trditve rešimo dve nalogi.

Naloga 1. Na stranicah AB, BC in CA trikotnika ABC ležijo tri točke D, E in F tako, da je $\overline{AD} = (1/3)\overline{AB}$, $\overline{BE} = (1/3)\overline{BC}$ in $\overline{CF} = (1/3)\overline{CA}$. Z M, N in P označimo zaporedoma preseke daljic CD in AE, BF in AE ter CD in BF (slika 2). Dokaži, da je ploščina $p(MNP)$ trikotnika MNP sedmina ploščine trikotnika ABC.

Rešitev. Trikotnika ABC in ABE imata skupno višino, ki izhaja iz ogljišča A. Ker je $\overline{BE} : \overline{BC} = 1 : 3$, je

$$p(ABE) = \frac{1}{3}p(ABC) \qquad (1)$$

Ker točka N leži na daljicah AE in BF, torej na premici skozi točki A in E ter na premici skozi točki B in F, iz naše trditve sledi, da obstajata števili m in n, za kateri velja:



Slika 2

$$\overrightarrow{CN} = (1-m)\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + m\overrightarrow{CA} \quad \text{in} \quad \overrightarrow{CN} = (1-n)\overrightarrow{CB} + n\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Če zgornja dva izraza za $\overrightarrow{CN}$ izenačimo ter vse prenesemo na levo stran, dobimo:

$$(m - \frac{n}{3})\overrightarrow{CA} + (n - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3})\overrightarrow{CB} = 0$$

Ker A, B in C ne ležijo na isti premici, ta enakost lahko velja le, če je

$$m - \frac{n}{3} = 0 \quad \text{in} \quad n - \frac{2m}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Sledi $m = 1/7$ in $n = 3/7$. Zato je

$$\overrightarrow{CN} = \frac{6}{7}(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}) + \frac{1}{7}\overrightarrow{CA} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CA}$$

Ker je

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = \frac{6}{7}(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA}) = \frac{6}{7}\overrightarrow{AE}$$

je $\overline{AN} : \overline{AE} = 6 : 7$.

Trikotnika ABN in ABE imata skupno višino (iz oglišča B). Zato je

$$p(ABN) = \frac{6}{7}p(ABE) \qquad (2)$$

Iz (1) in (2) dobimo

$$p(ABN) = \frac{2}{7}p(ABC)$$

Podobno dobimo

$$p(BPC) = \frac{2}{7}p(ABC) \quad \text{in} \quad p(AMC) = \frac{2}{7}p(ABC)$$

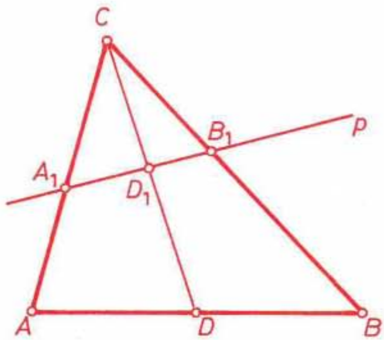
Sedaj pa že lahko izračunamo ploščino trikotnika MNP.

$$p(MNP) = p(ABC) - (p(ABN) + p(BPC) + p(AMC)) =$$

$$= p(ABC) - \frac{6}{7}p(ABC) = \frac{1}{7}p(ABC)$$

Naloga 2. Podan je trikotnik ABC s težiščnico CD. Premica p, ki ne gre skozi nobeno oglišče trikotnika, naj seka daljice CA, CB in CD v točkah A_1, B_1 in D_1 (slika 3). Dokaži, da velja

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA_1}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{CB_1}} = 2\frac{\overline{CD}}{\overline{CD_1}} \qquad (3)$$



Slika 3.

Rešitev. Oglejmo si vektorje $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$ in $\overrightarrow{CD_1}$. Izrazimo jih lahko takole:

$$\overrightarrow{CA_1} = k\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CB_1} = n\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CD_1} = m\frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} \qquad (4)$$

Enakost (3) sedaj lahko zapišemo tudi takole:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = 2\frac{1}{m} \qquad (5)$$

Za točke A_1, D_1 in B_1, ki so kolinearne, uporabimo (*).

$$\overrightarrow{CD_1} = (1 - p)\overrightarrow{CB_1} + p\overrightarrow{CA_1}$$

Ko izraze v (4) vstavimo v to enakost in preuredimo, dobimo

$$(\frac{m}{2} - pk)\overrightarrow{CA} + (\frac{m}{2} - n + pn)\overrightarrow{CB} = 0$$

Zgornji enakosti je zadoščeno le, če je

$$\frac{m}{2} - pk = 0 \quad \text{in} \quad \frac{m}{2} - n + pn = 0$$

Od tod dobimo:

$$\frac{m}{2k} = p \quad \text{in} \quad \frac{m}{2n} = 1 - p$$

Ko zgornji enakosti seštejemo, vidimo, da velja:

$$\frac{m}{2k} + \frac{m}{2n} = 1$$

Če zgornjo enakost delimo z m in množimo z 2, dobimo (5), kar smo želeli dokazati.

Naloga: V kakšnem razmerju sta ploščini trikotnikov ABC in MNP, če je $\overline{AD} = (1/r)\overline{AB}$, $\overline{BE} = (1/r)\overline{BC}$ in $\overline{CF} = (1/r)\overline{CA}$. Kaj se zgodi pri $r = 2$?

Dragoljub M. Milošević, prevedel in priredil M. Dobovišek