Georg Freyherrn von Vega

Vorlesungen
über die
Mathematik

Vierter Band

die Grundlehren der Hydrostatik, Aerostatik, Hydraulik, und der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel enthaltend

**Zu
mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, und zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps**

Zweyte verbesserte Auflage

Mit IX. Kupfertafeln

Wien, 1819.

**Transkribiert von Dr. Egon Zakrajšek
Ljubljana, 2. August 2001**

KAPITEL 4

Von der Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel

1. Geradlinige Bewegung der festen Körper in einer widerstehenden flüssigen Masse mit Beseitigung der Schwerkraft

§. 152.

Ein fester Körper, der sich in einer flüssigen Materie beweget, dergleichen z. B. die Luft und das Wasser ist, kann nicht fortgehen, ohne die ihm im Wege liegenden Theilchen derselben in Bewegung zu setzen. Aber eben dadurch muß seine Geschwindigkeit in jedem Augenblicke vermindert werden. Die Elementar-Theilchen der flüssigen Materie widerstehen der Bewegung des in derselben fortgehenden festen Körpers beynahe eben so, wie ein fester Körper der Bewegung eines andern widersteht, der an ihn stößt. Durch einen solchen Widerstand wird in einer gewissen Zeit dem bewegten Körper von seiner Geschwindigkeit etwas entzogen. Der Erfolg ist eben so, als wenn eine bewegende Kraft nach einer Richtung auf den festen Körper wirkete, die der Richtung seiner Bewegung entgegen gesetzet ist. Die Größe dieses Widerstandes, oder dieser negativen bewegenden Kraft hänget von verschiedenen Umständen ab. Erstlich von der Dichtigkeit der flüssigen Materie. Der Widerstand ist desto größer, je größer diese Dichtigkeit ist. Ein Körper leidet z. B. bey seiner Bewegung im Wasser einen größeren Widerstand, als bey einer solchen Bewegung in der Luft. Zweytens die Stärke des Widerstandes richtet sich nach der Größe und Gestalt der Oberfläche des festen Körpers, vorzüglich nach der Größe und Gestalt desjenigen Theiles seiner Oberfläche, mit welchem er während der Bewegung gegen die Theilchen der flüssigen Masse unausgesetzt anstößt. Drittens richtet sich die Stärke des Widerstandes nach der Geschwindigket, womit sich der feste Körper in einer flüssigen Masse beweget. Man sieht leicht ein, daß bey einer größeren Geschwindigkeit der Widerstand größer seyn müsse, als bey einer kleineren. Bey einer größeren Geschwindigkeit werden nähmlich die anstoßenden Theilchen der vorderen Oberfläche des bewegten Körpers an die vorliegenden Elementar-Theilchen der flüssigen Masse gleichsam näher angerücket, und dadurch einer stärkeren Wirkung der Abstoßungskräfte dieser Elementar-Theilchen augesetzet, als bey einer kleineren Geschwindigkeit (3. Th. §. 59. Anmerk.). Deßwegen ist der Widerstand, welchen die vordere Oberfläche eines festen Körpers bey seiner Bewegung in einem flüssigen Mittel leidet, eine gewisse Function der Geschwindigkeit. Diese Function werden wir bald kennen lernen.

§. 153.

Was im §. 109. der Stoß einer bewegten flüssigen Masse gegen eine unbeweglich gehaltene feste Fläche war, das ist nun hier der Widerstand, welchen eine bewegte feste Fläche, oder die vordere Oberfläche eines bewegten festen Körpers in einer als ruhend betrachteten flüssigen Masse leidet. Der Druck zwischen einer festen Fläche und zwischen den anliegenden Theilchen der flüssigen Masse, welcher von der Abstoßungskraft der Elementar-Theilchen der Materie entsteht, ist nämlich eben derselbe; es bewege sich entweder eine feste Fläche nach einerley Richtung mit einer gewissen Geschwindigkeit in einer flüssigen Masse; oder aber es werde die Fläche unbeweglich gehalten, und die flüssige Masse bewege sich gegen dieselbe nach eben derselben Richtung mit eben derselben Geschwindigkeit.

Nun ist im §. 109. gezeiget worden, wie man den Stoß einer flüssigen Masse von gegebener Dichtigkeit bey einer gegebenen Geschwindigkeit gegen eine gegebene Stoßfläche ausdrucken könne. Man kann daher auf eben diese Art auch den Widerstand ausdrucken, welchen eben dieselbe Fläche leidet, wenn sie sich mit einer eben so großen Geschwindigkeit in eben derselben flüssigen Masse beweget.

§. 154.

Der senkrechte Stoß einer flüssigen Masse gegen eine feste Ebene ist (§. 109.) gleich dem Gewichte eines Prisma der flüssigen Masse, welches die Stoßfläche zur Grundfläche, und die Geschwindigkeitshöhe des anstoßenden Flüssigen zur Höhe hat. Es ist daher der Widerstand, welchen eine feste Ebene während ihrer Bewegung nach einer auf ihr senkrechten Richtung in einer flüssigen Masse bey einer gegebenen Geschwindigkeit in einem gegebenen Zeitpuncte leidet, dem Gewichte eines Prisma dieser flüssigen Masse gleich, welches die bewegte feste Ebene zur Grundfläche, und die gegebene Geschwindigkeitshöhe zu seiner Höhe hat.

Eben so ist auch der Widerstand, welchen ein gerades Prisma oder ein gerader Cylinder bey einer Bewegung nach der Richtung seiner Achse in einer flüssigen Masse in einem gegebenen Zeitpuncte bey einer gegebenen Geschwindigkeit leidet, dem Gewichte eines Prisma dieser Flüssigkeit gleich, welches die Anstoßfläche des bewegten Prisma zur Grundfläche, und die in dem gegebenen Zeitpuncte statt findende Geschwindigkeitshöhe zu seiner Höhe hat.

Der Widerstand aber, welchen eine feste Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel in einem gegebenen Zeitpuncte bey einer gegebenen Geschwindigkeit leidet, ist (vermöge §. 117.) dem Gewichte eines Cylinders der flüssigen Masse gleich, welcher den größten Durchschnitt einer solchen bewegten Kugel zur Grundfläche, und die Hälfte der im gegebenen Zeitpuncte statt findenden Geschwindigkeitshöhe zu seiner Höhe oder Länge hat.

Ist nun

D der Durchmesser einer gegebenen festen Kugel, die sich in einer flüssigen Masse beweget,
q das eigenthümliche Gewicht dieser Flüssigkeit,
g wie bisher die Beschleunigung der Schwere,
v die Geschwindigkeit der bewegten Kugel in einem gegebenen Zeitpuncte während ihrer veränderlichen Bewegung, und
R der Widerstand, welcher in diesem Augenblicke bey der gegebenen Geschwindigkeit die Bewegung verzögert;

so ist

$$R = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g} \cdot q = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}.$$

Wenn man z. B. eine bleyerne Kugel von $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser in einen tiefen mit Wasser angefüllten Behälter durch das Wasser gegen den Boden fallen läßt; so wird die Kugel wegen der Schwerkraft mit gleichförmig beschleunigter Bewegung zu fallen trachten. Allein durch den Auftrieb, und durch den Widerstand des Wassers wird diese Bewegung verzögert, daß die Kugel nicht so schnell sinket, als in freyer Luft. Nach einer gewissen Zeit sey die Geschwindigkeit der sinkenden Kugel $v = 10$ Fuß; so ist für $g = 15\frac{1}{2}$ Fuß, und für $q = 56\frac{1}{2}$ Pfund, in diesem Augenblicke der Widerstand $R = 8{,}94657$ Pfund, der mittelst der angeführten Formel auf folgende Art gefunden wird.

Log.	π	=	0,4971499	Log.	4	=	0,6020600
Log.	100	=	2,0000000	Log.	32	=	1,5051500
Log.	56,5	=	1,7520484	Log.	15,5	=	1,1903317
			4,2491983				3,2975417
	Subtr.		3,2975417				
			0,9516566		die Zahl	=	8,94657 Pf.

Es werde nun eine eiserne Kugel von $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser aus einem Geschützrohre mit einer angemessenen Pulverladung hinausgeschossen; und ihre anfängliche Geschwindigkeit, mit der sie aus der Mündung des Geschützrohres hinausfährt, sey gleich 1500 Fuß. Diese Geschwindigkeit wird durch den Widerstand der Luft, als durch eine nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft nach und nach vermindert. In einem gewissen Puncte der Bahn, oder nach einer gewissen Zeit sey die Geschwindigkeit der Kugel nur noch = 1000 Fuß. Man fragt, wie groß wird in einem solchen Zeitpuncte der Widerstand seyn, wenn die Luft, worin die Kugel fortschießt, von der Beschaffenheit ist, daß 1 Kubikfuß von ihr 2 Loth wiegt? Diesen Widerstand findet man mittelst der angeführten Formel für $D = \frac{1}{2}$, $v = 1000$, $g = 15{,}5$ Fuß, und für $q = 2$ Loth $= \frac{1}{16}$ Pfund durch folgende Rechnung

Log.	π	=	0,4971499	Log.	4	=	0,6020600
Log.	$(1000)^2$	=	6,0000000	Log.	32	=	1,5051500
			6,4971499	Log.	15,5	=	1,1903317
		Subtr.	4,5016617	Log.	16	=	1,2041200
			1,9954882				4,5016617
Hierzu gehöret die Zahl			98,9665;				

der gesuchte Widerstand ist daher in einem solchen Falle so groß, als wenn in dem festgesetzten Zeitpuncte die Kugel in ihrer Bewegung nach entgegen gesetzter Richtung von einer Kraft von 98,9665 Pfund gepresset würde.

§. 155.

Aus der angeführten Formel für den Widerstand, den eine feste Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel leidet, lassen sich verschiedene Folgerungen ableiten; als z. B.

(1) Bey Kugeln von gleichen Durchmessern, und bey verschiedenen Geschwindigkeiten sind die Widerstände in eben demselben flüssigen Mittel den quadrirten Geschwindigkeiten proportional.

Denn es ist (§. 154.) $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$; und für eine andere Geschwindigkeit V ist $R' = \frac{\pi D^2 V^2 q}{32g}$. Folglich $R : R' = v^2 : V^2$.

(2) Bey gleichen Geschwindigkeiten, und verschiedenen Kugeln sind die Widerstände in eben demselben flüssigen Mittel den quadrirten Durchmessern, oder den quadrirten Halbmessern, oder auch den Oberflächen der Kugeln proportional.

Denn aus $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$, und $R' = \frac{\pi \delta^2 v^2 q}{32g}$ folget

$$R : R' = D^2 : \delta^2 = \left(\frac{1}{2}D\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\delta\right)^2 = D^2\pi : \delta^2\pi.$$

(3) Bey Kugeln von gleichen Durchmessern, und bey gleich großen Geschwindigkeiten sind die Widerstände in flüssigen Massen von verschiedenen Dichtigkeiten, oder von verschiedenen eigenthümlichen Gewichten, diesen eigenthümlichen Gewichten proportional.

Denn aus $R = \frac{\pi D^2 v^2 q}{32g}$, und $R' = \frac{\pi D^2 v^2 Q}{32g}$, folget $R : R' = q : Q$.

§. 156.

Wenn ein schwimmender fester Körper, der zum Theile aus dem Wasserspiegel hervorraget, z. B. ein beladenes Schiff in einem Canale, mit einer gegebenen Geschwindigkeit fortbeweget werden soll; so ist nebst dem Widerstande gegen die Oberfläche des vorderen Theiles auch noch derjenige hydrostatische Druck zu überwinden, welcher daraus entsteht, daß während der Bewegung des Schiffes das Wasser an dem vorderen Theile sich etwas aufstauet, am Hintertheile aber sich etwas vertiefet. Wie nun in dergleichen Fällen der gesammte Widerstand zu bestimmen sey, und wie die Figur des Schiffes beschaffen seyn müsse, damit der gesammte Widerstand ein Kleinstes sey, gehöret eigentlich in die Schiffbaukunst, mit der wir uns nicht beschäftigen können. Hier soll nur von demjenigen Widerstande die Rede seyn, den feste Körper, und zwar vorzüglich Kugeln bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel zu leiden haben, wenn sie darin ganz eingetauchet sich befinden; als z. B. da eine geschossene eiserne Kugel, oder eine geworfene Bombe in der gewöhnlichen Luft sich beweget.

Selbst in der Bestimmung des Widerstandes welchen eine Kugel bey ihrer Bewegung in einem flüssigen Mittel leidet, sind die Schriftsteller nicht einig. Die meisten setzen denselben so groß, als er im §. 154. bestimmet worden ist; daß nähmlich der Widerstand gegen eine Kugel dem Gewichte eines Cylinders der flüssigen Masse gleich sey, welcher die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die halbe Geschwindigkeitshöhe zu seiner Länge oder Höhe hat. Einige hingegen sind der Meinung, daß man drey Viertheile der Geschwindigkeitshöhe, zuweilen noch mehr für die Höhe des erwähnten Cylinders annehmen soll. Wenn die Bewegung der Kugel in einer flüssigen Masse so schnell ist, daß hinter der Kugel ein leerer Raum entsteht, weil die Theilchen der flüssigen Masse sich nicht so geschwind schließen können, als die Kugel ausweichet; so ist nebst dem bisher erwähnten Widerstande, den man den hydrodynamischen zu nennen pflegt, auch noch der hydrostatische Druck zu überwinden, der von dem ungleichen Drucke der schweren flüssigen Masse an der vorderen und hinteren Oberfläche der bewegten Kugel herrühret.

Bey der Bewegung der kugelförmigen Körper in der atmosphärischen Luft, womit diese Untersuchung sich vorzüglich beschäftigen soll, ist selten die Geschwindigkeit so groß, daß hinter der Kugel ein leerer Raum entstehen könnte, weil die Luft mit einer Geschwindigkeit von beynahe 1336 Wien. Fuß[1] in einen leeren Raum einströhmet (§. 108.) Ist aber die Geschwindigkeit einer bewegten Kugel größer, als 1336 Wien. Fuß; so ist allerdings der nach §. 154. bestimmte Widerstand noch um den Druck der Atmosphäre zu vermehren, welchen die vordere Kugelfläche wegen des rückwärts entstehenden leeren Raumes leidet. Dieser Druck ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und die an dem Orte der Bewegung statt findende Barometerhöhe zu ihrer Höhe hat.

§. 157.

Aufgabe

[1]Po Vegi [2] je en dunajski čevelj 140,13 pariške linije. Kot vsaka druga linija je tudi pariška enaka 1/144 pariškega čevlja, ki je po S. J. Schmidtu [1] enak 0,32488406 m ali pariška linija je 2,256 mm.

Eine feste Kugel wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit in einer flüssigen Masse in Bewegung gesetzet; man soll die Bewegung in der Voraussetzung bestimmen, daß die Schwerkraft aufgehoben, und außer dem Widerstande der flüssigen Masse sonst alle Hindernisse der Bewegung beseitiget sind.

Auflösung

1) Wenn die flüssige Masse keinen Widerstand äußerte; so würde, bey vorausgesetzter Beseitigung der Schwerkraft und aller übrigen Hindernisse, die Kugel in geradliniger Richtung immer mit gleichförmiger Bewegung fortgehen. Weil aber die flüssige Masse der bewegten Kugel einen Widerstand entgegensetzet, der von der Geschwindigkeit der Bewegung abhänget, und nach gerade entgegengesetzter Richtung wirket; so wird dadurch die Geschwindigkeit der Kugel bey der geradlinigen Bewegung beständig vermindert. Der Widerstand ist hier eine veränderliche Kraft, die nach gerade entgegen gesetzter Richtung die Geschwindigkeit unausgesetzt vermindert.
2) Es sey nun D der Durchmesser der in einer flüssigen Masse in Bewegung gesetzten Kugel, und ihr Gewicht oder ihre Masse sey Nmahl so groß, als das Gewicht der flüssigen Masse unter einem der Kugel gleichen Inhalte. Ferner sey die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, womit die Kugel in der flüssigen Masse in Bewegung gesetzet wird. Nachdem die Kugel nach einer gewissen Zeit $= t$ einen gewissen Weg $= x$ zurückgeleget hat, sey ihre noch übrige Geschwindigkeit $= v$ nach eben derselben geradlinigen Richtung weiter fortzugehen. Im nächst darauf folgenden Zeit-Elemente, oder Differenziale dt rücket die Kugel auf ihrem geradlinigen Wege um das Differenziale dx weiter fort, und die durch den Widerstand der flüssigen Masse verursachte Verminderung der Geschwindigkeit in einem solchen Zeit-Elemente ist $= dv$.
3) Wenn man nun weiters den Widerstand des flüssigen Mittels, als eine verzögernde Kraft P, und die bewegte Masse M gehörig ausdrucket, so wird man mittelst der allgemeinen Formeln der veränderlichen Bewegung (3. Th. §. 56.)

$$dv = \pm\frac{2gP\,dt}{M}. \tag{1.1}$$
$$dx = v\,dt. \tag{1.2}$$
$$v\,dv = \pm\frac{2gP\,dx}{M}. \tag{1.3}$$
$$ddx = \pm\frac{2gP\,dt^2}{M}. \tag{1.4}$$

hier, wie in allen übrigen Fällen, die Bewegung vollständig bestimmen können.

4) Aus dem Differenziale dv der veränderlichen Geschwindigkeit, und aus dem Differenziale dt der Zeit läßt sich nämlich die nach Verlauf der Zeit noch statt findende Geschwindigkeit $= v$ mittelst der ersten Formel $dv = -\frac{2gP\,dt}{M}$ angeben, wenn man hier $P = \frac{1}{4}D^2\pi\frac{v^2}{8g}$ (§. 154.), und $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$ setzet für das eigenthümliche Gewicht der flüssigen Masse $= 1$. Bringet man nun diese Werthe für P und M in die angeführte Gleichung; so erhält man, mit Beybehaltung des Zeichens $-$ wegen der entgegengesetzten Richtung der bewegenden Kraft P, folgende Differenzial-Gleichung

$$dv = -\frac{3v^2\,dt}{8DN}$$

und ferner nach Absonderung der veränderlichen Größen

$$dt = -\frac{4}{3}DN \cdot 2v^{-2}\,dv.$$

Um diese Formel noch einfacher auszudrucken, sey

$$\frac{4}{3}DN = a$$

so ist

$$dt = -2av^{-2}\,dv.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$t = \text{Const.} + \frac{2a}{v}.$$

Es ist aber für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$; folglich

$$\text{Const.} = -\frac{2a}{c};$$

und

$$t = 2a \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right). \tag{1.5}$$

Hieraus folget ferner

$$v = \frac{2ac}{2a + ct} \tag{1.6}$$

$$c = \frac{2av}{2a - vt}. \tag{1.7}$$

Mittelst der Formel (1.5) läßt sich für gegebene c, v, und $a = \frac{4}{3}DN$, die Zeit t berechnen, nach deren Verlauf die anfängliche Geschwindigkeit c bis zu einer gegebenen Größe v abgenommen hat. Setzet man da $v = 0$, und suchet die dazugehörige Zeit t; so findet man t unendlich groß. Die

Geschwindigkeit eines bewegten festen Körpers wird daher durch den Widerstand der flüssigen Masse niemahls gänzlich getilget, obschon dieselbe unausgesetzt vermindert wird.

Durch die Formeln (1.6) und (1.7) kann man für eine gegebene Zeit $= t$, und für eine der zwey Geschwindigkeiten, die im Anfange und zu Ende dieser Zeit statt finden; die andere Geschwindigkeit berechnen.

5) Aus den in 2) festgesetzten Bezeichnungen kann man nun auch mittelst der in 3) angeführten allgemeinen Formel $dx = v\,dt$ eine Gleichung ableiten, welche den Zusammenhang der veränderlichen Geschwindigkeit v mit dem zurückgelegten Wege x darstellet. Wenn man nähmlich in dieser allgemeinen Formel $dx = v\,dt$ für dt den Werth $dt = 2av^{-2}\,dv$ aus 4) setzet; so ist

$$dx = -2av^{-1}\,dv = -2a \cdot \frac{dv}{v}$$

daraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - 2a \cdot \log v$$

nun ist für $x = 0$, die Geschwindigkeit $v = c$; folglich

$$\text{Const.} = 2a \cdot \log c\,;$$

und

$$x \;=\; 2a \cdot \log \frac{c}{v}\,. \tag{1.8}$$

Hieraus folget ferner, wenn man die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systemes mit h bezeichnet,

$$\frac{x}{2a} \log h \;=\; \log \frac{c}{v}$$

folglich auch $h^{\frac{x}{2a}} = \frac{c}{v}$; und endlich

$$v \;=\; ch^{-\frac{x}{2a}} \tag{1.9}$$

$$c \;=\; vh^{\frac{x}{2a}}\,. \tag{1.10}$$

Die Formeln (1.8–1.10) findet man auch, wenn man in der Grundformel (1.3) in 3) für P und M die in 4) angegebenen Werthe setzet, und gehörig integriret.

Mittelst der Formel (1.8) läßt sich für gegebene $a = \frac{4}{3}DN$, für c und v der Weg x berechnen, an dessen Endpuncte die anfängliche Geschwindigkeit c bis zur Größe v abgenommen hat.

Durch die Formeln (1.9) und (1.10) kann man für ein gegebenes x, und für die gegebene Geschwindigkeit an dem einen Endpuncte dieses Weges, die Geschwindigkeit berechnen welche zu dem anderen Endpuncte desselben Weges gehöret.

6) Um den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der dazu verwendeten Zeit analytisch auszudrucken, substituire man in (1.8) für v den Werth aus (1.6); so ist

$$x = 2a \cdot \log\left(1 + \frac{ct}{2a}\right) \tag{1.11}$$

$$t = \frac{2a}{c} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right) \tag{1.12}$$

$$c = \frac{2a}{t} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right). \tag{1.13}$$

Mittelst der Formel (1.11) findet man den Weg x, welcher in einer gegebenen Zeit t bey einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c zurückgeleget wird. Umgekehrt aus x und c findet man t mittelst der Formel (1.12). Und endlich kann durch die Formel (1.13) die anfängliche Geschwindigkeit c berechnet werden, damit bey einer solchen Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel ein bestimmter Weg x in einer bestimmten Zeit t zurückgeleget werde.

§. 158.

Um die Formeln für die geradlinige Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel, bey Vernachläßigung der Schwerkraft und sonstigen Hindernisse, in einer bequemen Uebersicht kurz beysammen zu haben, werden dieselben allhier in eben der Ordnung, wie sie erwiesen wurden, wiederhohlet.

D Durchmesser der in Bewegung gesetzten festen Kugel.
N die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl das Gewicht der festen Kugel größer ist, als das Gewicht der Flüssigkeit unter einem der Kugel gleichen Inhalte. Man findet diese Zahl, wenn man die specifische Schwere der Kugel durch die specifische Schwere der Flüssigkeit dividiret, worin die Bewegung geschieht.
$a = \frac{4}{3}DN$,
c die anfängliche Geschwindigkeit,
x der zurückgelegte Weg,
t die dazu gehörige Zeit,
v die Geschwindigkeit am Ende des Weges x nach Verlauf der Zeit t.

Bey diesen Bezeichnungen ist nun der Zusammenhang zwischen.

(A) Zeit und Geschwindigkeiten.

$$t = 2a \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right). \tag{1.14}$$

$$v = \frac{2ac}{2a + ct}. \tag{1.15}$$

$$c = \frac{2av}{2a - vt}. \tag{1.16}$$

(B) Raum und Geschwindigkeiten.

$$x = 2a \cdot \log \frac{c}{v}. \tag{1.17}$$

$$v = ch^{-\frac{x}{2a}}. \tag{1.18}$$

$$c = vh^{\frac{x}{2a}}. \tag{1.19}$$

(C) Raum, Zeit, und anfängl. Geschwindigkeit.

$$x = 2a \cdot \log\left(1 + \frac{ct}{2a}\right). \tag{1.20}$$

$$t = \frac{2a}{c} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right). \tag{1.21}$$

$$c = \frac{2a}{t} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right). \tag{1.22}$$

(D) Anmerk. Die angeführten Formeln sind auch brauchbar, wenn der bewegte feste Körper keine Kugel wäre, sondern eine andere gegebene Gestalt hätte, z. B. wenn er prismatisch oder cylindrisch wäre. Nur müßte in einem solchen Falle der Werth des Buchstaben a gehörig bestimmet werden. Wenn z. B. ein gerader Cylinder von dem Durchmesser D und von der Länge L, nach der Richtung seiner Achse in einem flüssigen Mittel sich fortbewegete; so wäre bey den (im §. 157.) festgesetzten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} dv &= -\frac{2gP\,dt}{M} = \\ &= -2g\,dt \times \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{4g} : \frac{1}{4}D^2\pi LN = \\ &= -\frac{2v^2\,dt}{4LN}; \end{aligned}$$

und ferner

$$dt = -LN \cdot 2v^{-2}\,dv.$$

Vergleichet man nun diese Formel mit der im §. 157 in 4) befindlichen $dt = -2av^{-2}\, dv$; so sieht man, daß alle dort durch die Integral-Rechnung gefundenen Formeln hier ihre Anwendung haben, wenn man hier $a = LN$ setzet.

Die bisher angeführten Formeln können auf die horizontale Bewegung der abgeschossenen Kanonkugeln angewendet werden, in so weit solche bey dem so genannten Kernschuße von der geradlinigen Bewegung nicht merklich abweichen. Wenn z. B. die Geschwindigkeit einer 12 pfündigen Kanonkugel, womit sie aus der Mündung des Geschützes hervorschießt, von 1200 Wien. Fuß angenommen wird; so kann man finden, wie groß ihre Geschwindigkeit nach der Zurücklegung eines horizontalen Weges von etwa 600 Fuß sey, und wie viel Zeit zur Zurücklegung eines solchen Weges erfordert werde.

Suchet man ferner zu dieser berechneten Zeit, nach der Lehre des freyen Falles schwerer Körper, die zugehörige Höhe; so findet man dadurch, um wie viel beyläufig die abgeschossene Kugel in der Weite von 600 Fuß durch die Schwerkraft von der anfänglichen horizontalen Richtung herabgesunken ist.

§. 159.

Wenn die Geschwindigkeit bey der bisher betrachteten geradlinigen Bewegung einer festen Kugel in einem flüssigen Mittel so groß ist, daß hinter der Kugel ein leerer Raum übrig bleibet; so wird die Bewegung außer dem bisher in Erwägung gezogenen Widerstande auch noch durch den hydrostatischen Druck verzögert, welcher wegen des leeren Raumes gegen die vordere Oberfläche der Kugel entsteht. Diesen hydrostatischen Druck kann man durch das Gewicht einer Säule derjenigen Flüssigkeit ausdrucken, worin die Bewegung geschieht. Setzet man die Grundfläche einer solchen Säule dem größten Durchschnitte der Kugel gleich, und ihre Höhe $= \alpha$; so ist sodann bey den übrigen festgesetzten Bezeichnungen in der angeführten allgemeinen Formeln der Bewegung $P = \frac{1}{4}D^2\pi\cdot\frac{v^2}{8g} + \frac{1}{4}D^2\pi\cdot\alpha$, und $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$. Substituiret man nun diese Werthe für P und M in der Formel $dv = -\frac{2gP\,dt}{M}$; so ist

$$\begin{aligned} dv &= -2g\,dt\cdot\frac{1}{4}D^2\pi\left(\frac{v^2}{8g}+\alpha\right) : \frac{1}{6}D^3\pi N = \\ &= -\frac{3\left(v^2+8\alpha g\right)\,dt}{8DN} \end{aligned}$$

und ferner durch die Absonderung

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{4}{3}DN\left(\frac{2\,dv}{8\alpha g+v^2}\right) = \\ &= -2a\left(\frac{dv}{8\alpha g+v^2}\right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich durch Beyhülfe der Kreisbogen integriren; welches aber zur Uebung und weiterer Ausführung dieser Bewegung dem eigenen Fleiße überlassen wird.

§. 160.

Wenn der Cylinder, dessen Gewicht bey der Bewegung einer Kugel in einem flüssigen Mittel den Widerstand ausdrucket, nicht die halbe Geschwindigkeitshöhe zu seiner Länge hätte, sondern diese Länge $k$mahl größer seyn sollte, als sie bisher festgesetzet worden ist; so werden die angeführten Formeln (§. 158.) auch für einen solchen Fall brauchbar seyn, wenn man darin $a = \frac{\frac{4}{3}DN}{k}$ gelten läßt. Z. B. Für $k = 1$ ist $a = \frac{4}{3}DN$ wie oben (§. 158.); für $k = 2$ ist $a = \frac{2}{3}DN$; und für $k = 1\frac{1}{3}$ ist $a = DN$; u.s.w. Diese Erinnerung über die Festsetzung des Werthes von a erstrecket sich zugleich auf die folgenden Fälle der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel. Daß übrigens in den angeführten Formeln $a = \frac{\frac{4}{3}DN}{k}$ sey, wenn der Widerstand gegen eine Kugel bey der Bewegung in einem flüssigen Mittel durch $P = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{kv^2}{8g}$ ausgedrucket wird, erhellet aus der Vergleichung der Grundformeln der Bewegung für diesen Fall mit dem oben angeführten Grundformeln für $P = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g}$.

2. Lothrechte Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel

§. 161.

Bey der lothrechten Bewegung der schweren Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel sind zwey Fälle zu unterscheiden: nähmlich 1tens das lothrechte Sinken eines frey ausgelassenen, oder auch mit einer anfänglichen Geschwindigkeit lothrecht abwärts geworfenen schweren Körpers; und 2tens das lothrechte Steigen eines mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit lothrecht aufwärts geworfenen oder geschossenen schweren Körpers.

Beym Sinken sowohl, als auch beym Steigen, in einem widerstehenden flüssigen Mittel sind drey Kräfte in Erwägung zu ziehen, welche auf die Bewegung Einfluß haben: nähmlich 1tens die Schwere, welche als eine unveränderliche Kraft senkrecht gegen die Erde herabwirket. 2tens der Auftrieb (§. 22.), welcher beym Sinken die Bewegung verzögert, und beym Aufsteigen beschleuniget. 3tens der eigentliche Widerstand der flüssigen Masse, welcher die Bewegung verzögert.

Wenn beym Sinken eines schweren Körpers in einem flüssigen Mittel die Geschwindigkeit so groß ist, daß der davon abhängende Widerstand der flüssigen Masse gegen die vordere Oberfläche des fallenden Körpers dem durch den Auftrieb verminderten Gewichte eines solchen Körpers gleich wird; so ist es offenbar, daß sodann die Geschwindigkeit nicht mehr vergrößert werden kann, weil die bewegende Kraft nach der Richtung abwärts durch die gerade entgegengesetzte Kraft des Widerstandes gänzlich aufgehoben wird; dergestalt, daß das fernere Sinken des schweren Körpers eine gleichförmige Bewegung ist.

§. 162.

Aufgabe

Das Sinken, oder den Fall einer schweren Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel zu bestimmen.

Auflösung

1) Da eine solche Bewegung von drey verschiedenen Kräften abhänget (§. 161.); so wird man dieselbe mittelst der angeführten Grundformeln der Bewegung (§. 157. N. 3.) bestimmen können, wenn man P und M in $dv = \frac{2gP\,dt}{M}$, oder auch $v\,dv = \frac{2gP\,dx}{M}$ gehörig ausdrucket, und sodann die Gleichung integriret.
2) Es sey nun D der Durchmesser der Kugel welche in einem flüssigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit dem lothrechten Falle überlassen wird. Das Gewicht der Kugel sey N mahl so groß, als das Gewicht der flüssigen Masse unter einem mit der Kugel gleich großen Inhalte. In der Zeit t lege die Kugel einen Weg x zurück, und erlange nach Verlauf dieser Zeit am Endpuncte des Weges x die Geschwindigkeit v.
3) Im darauffolgenden Zeit-Elemente dt bey der Zurücklegung des Weges dx erlange die Geschwindigkeit des sinkenden Körpers den unendlich kleinen Zuwachs dv; so läßt sich dieses dv, und folglich auch v aus der Gleichung $dv = \frac{2gP\,dt}{M}$ bestimmen, wenn man darin $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$, und $P = \frac{1}{6}D^3\pi N - \frac{1}{6}D^3\pi - \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g}$ setzet. Es ist nähmlich $M = \frac{1}{6}D^3\pi N$ die zu bewegende Masse; die bewegende Kraft P aber besteht aus dem absoluten Gewichte der Kugel $\frac{1}{6}D^3\pi N$, und aus dem nach entgegen gesetzter Richtung wirkenden Auftriebe $\frac{1}{6}D^3\pi$, und Widerstande der flüssigen Masse $\frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g}$.

   Es ist daher
$$dv = \frac{2g(N-1)\,dt}{N} - \frac{3v^2\,dt}{8DN}.$$
4) Um diese Differenzial-Gleichung kürzer auszudrucken, setze man
$$\frac{g(N-1)}{N} = \gamma,$$
   und
$$\frac{4}{3}DN = a$$

wie im §. 157 und 158. Dadurch wird γ die durch den Auftrieb verminderte Beschleunigung der Schwere bedeuten. Was die Größe a bey der Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel eigentlich vorstellet, wird weiter unten zu ersehen seyn. Es ist $a = \frac{4}{3}DN$ diejenige Geschwindigkeitshöhe, bey welcher der Widerstand einer flüssigen Masse gegen eine feste Kugel dem Gewichte der letzten gleich ist.

5) Nach dieser Bezeichnung ist

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\left(4\gamma a - v^2\right)\, dt}{2a}, \text{ und} \\ dt &= \frac{2a\, dv}{4\gamma a - v^2} \end{aligned}$$

und ferner, wenn man den Bruch

$$\frac{1}{4\gamma a - v^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{4\gamma a} - v\right)\left(\sqrt{4\gamma a} + v\right)}$$

nach den bekannten Regeln in zwey Brüche

$$= \frac{1}{4\sqrt{\gamma a}\cdot\left(\sqrt{4\gamma a} + v\right)} + \frac{1}{4\sqrt{\gamma a}\cdot\left(\sqrt{4\gamma a} - v\right)} \text{ zerleget}$$

$$dt = \frac{a}{\sqrt{4\gamma a}}\left(\frac{dv}{\sqrt{4\gamma a} + v}\right) + \frac{a}{\sqrt{4\gamma a}}\left(\frac{dv}{\sqrt{4\gamma a} - v}\right).$$

Hier kann man um die Gleichungen noch einfacher auszudrucken,

$$\sqrt{4\gamma a} = b$$

setzen. Was eigentlich $b = \sqrt{4\gamma a} = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ bey dieser Untersuchung bedeute, wird weiter unten zu ersehen seyn. Und nun ist

$$dt = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{dv}{b+v} + \frac{dv}{b-v}\right)$$

daraus folget endlich durch die Integration

$$t = \frac{a}{b}\cdot\log\left(\frac{b+v}{b-v}\right) \tag{2.1}$$

wo Const. $= 0$ ist, weil für $t = 0$ auch $v = 0$ ist, wenn man annimmt, daß die Kugel nicht abwärts geworfen sondern aus einer vollkommenen Ruhe der Wirkung der Schwerkraft überlassen wird. Wenn hingegen die Kugel mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht abwärts geworfen würde; so wäre für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$; daher Const. $= -\frac{a}{b}\cdot\log\left(\frac{b+c}{b-c}\right)$, und $t = \frac{a}{b}\cdot\log\left(\frac{(b+v)(b-c)}{(b-v)(b+c)}\right)$.

6) Die gefundene Gleichung (2.1) in 5) kann man auch auf folgende Art schreiben, worin h die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems bedeutet,

$$\frac{bt}{a} \cdot \log h = \log\left(\frac{b+v}{b-v}\right),$$

und ferner $h^{\frac{bt}{a}} = \frac{b+v}{b-v}$. Hieraus folget nun

$$v = b \cdot \left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}\right). \tag{2.2}$$

Mittelst dieser Formel (2.2) findet man die Geschwindigkeit v, welche eine schwere Kugel bey ihrem lothrechten Sinken in einem flüssigen Mittel nach Verlauf der Zeit t erlanget. Umgekehrt findet man zu einer gegebenen Geschwindigkeit v die dazu gehörige Zeit t mittelst der Formel (2.1).

Die Formel (2.1) zeiget uns an, daß v immer kleiner seyn müsse, als b; weil für $v > b$ nach dieser Formel der Ausdruck für die Zeit durch den Logarithmen einer negativen Zahl angegeben würde, und daher unmöglich wäre.

Daß v immer kleiner seyn müsse als b, zeiget noch deutlicher die Formel (2.2), worin zwar v mit t wächst, aber doch dabey immer kleiner bleibt als b, weil $\frac{h^{\frac{bt}{a}}-1}{h^{\frac{bt}{a}}+1}$ ein echter Bruch ist.

7) Um zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der erlangten Geschwindigkeit v eine Gleichung zu finden, setze man nun in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = v\,dt$ (§. 157. N. 3.) statt dt aus 5) den Werth $\frac{a}{b}\left(\frac{dv}{b+v} + \frac{dv}{b-v}\right) = \frac{2a\,dv}{b^2-v^2}$; so erhält man

$$dx = \frac{2av\,dv}{b^2 - v^2} = -a \cdot \frac{-2v\,dv}{b^2 - v^2}.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - a \cdot \log\left(b^2 - v^2\right).$$

Nun ist für $x = 0$ auch $v = 0$; folglich $\text{Const.} = a \cdot \log b^2$; und

$$x = a \cdot \log\left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right). \tag{2.3}$$

Hieraus folget ferner $h^{\frac{x}{a}} = \frac{b^2}{b^2-v^2}$, und

$$v = b \cdot \sqrt{1 - h^{-\frac{x}{a}}}. \tag{2.4}$$

Diese Formeln (2.3) und (2.4) findet man auch, wenn man in der dritten Grundformel der Bewegung $2v\,dv = \frac{4gP\,dx}{M}$ (§. 157. N. 3.) für P und M die in 3) angegebenen Werthe setzet, darauf die bemerkten Abkürzungen anbringet, und endlich gehörig integriret.

8) Endlich ist es auch noch erforderlich eine Gleichung anzugeben, welche den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der dazu gehörigen Zeit vorstellet. Man findet diese Gleichung auf folgende Art. Man setze in der Formel (2.1) statt v den Werth aus der Formel (2.4) so ist

$$t = \frac{a}{b} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{1-h^{-\frac{x}{a}}}}{1-\sqrt{1-h^{-\frac{x}{a}}}}\right)$$

und ferner, wenn man den Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Zähler multipliciret, und gehörig reduciret,

$$t = \frac{x}{b} + \frac{2a}{b} \cdot \log\left(1+\sqrt{1-h^{-\frac{x}{a}}}\right). \tag{2.5}$$

Aus dieser letzten Gleichung folget ferner,

$$x = bt + 2a \cdot \log\frac{1}{2}\left(1+h^{-\frac{bt}{a}}\right). \tag{2.6}$$

Man findet eben diesen Ausdruck für x, wenn man in der Formel (2.3) statt v den Werth aus (2.2) substituiret, und gehörig reduciret; oder welches einerley ist wenn man aus der vorhergehenden Gleichung

$$t = \frac{a}{b} \cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{1-h^{-\frac{x}{a}}}}{1-\sqrt{1-h^{-\frac{x}{a}}}}\right)$$

den Werth von x entwickelt. Man findet auf diese Art

$$x = a \cdot \log\left[\frac{\left(h^{\frac{bt}{a}}+1\right)^2}{\left(h^{\frac{bt}{a}}+1\right)^2-\left(h^{\frac{bt}{a}}-1\right)^2}\right]$$

und ferner, wenn man im Nenner dieser letzten Gleichung anstatt der Differenz der zwey Quadrate das Product aus der Summe und aus der Differenz ihrer Wurzeln, setzet

$$x = a \cdot \log\left(\frac{h^{\frac{bt}{a}}+1}{2h^{\frac{bt}{2a}}}\right)^2$$

welches nun ferner so, wie in (2.6) geschrieben werden kann.

Die Formel (1.9) und (1.10) findet man auch, wenn man in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = v\,dt$ für v den Werth aus (2.4) setzet, und die dadurch erhaltene Differenzial-Gleichung gehörig integriret.

Mittelst der Formel (2.5) kann man die Zeit t berechnen, binnen welcher eine gegebene Höhe x durch den lothrechten Fall einer Kugel in einem widerstehenden flüssigen Mittel zurückgeleget wird. Umgekehrt findet man die Höhe x, wenn die Zeit t des Falles gegeben ist, mittelst der Formel (2.6).

§. 163.

Um die Formeln für das Fallen der schweren Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel zur bequemen Uebersicht kurz beysammen zu haben, will ich dieselben hier in der Ordnung, wie sie erwiesen worden sind, wiederhohlen. Es sey nähmlich

D der Durchmesser einer Kugel,
N die Zahl, welche anzeiget, wie oft die specifische Schwere der Flüssigkeit, worin die Bewegung geschieht, in der specifischen Schwere der Kugel enthalten ist,
$a = \frac{4}{3}DN$ eine Abkürzung,
g die Beschleunigung der Schwerkraft,
$b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ eine Abkürzung
x der durch den Fall zurückgelegte Weg,
t die Zeit, binnen welcher der Weg x zurückgeleget wird,
v die nach Verlauf der Zeit t am Ende des Weges x durch den Fall erlangte Geschwindigkeit,
h die Grundzahl des natürlichen logar. Systems:

so ist der Zusammenhang zwischen

(A) Zeit und Geschwindigkeit.

$$t = \frac{a}{b} \cdot \log\left(\frac{b+v}{b-v}\right). \tag{2.7}$$

$$v = b \cdot \left(\frac{h^{\frac{bt}{a}} - 1}{h^{\frac{bt}{a}} + 1}\right). \tag{2.8}$$

(B) Raum und Geschwindigkeit.

$$x = a \cdot \log\left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right). \tag{2.9}$$

$$v = b \cdot \sqrt{1 - h^{-\frac{x}{a}}}. \tag{2.10}$$

(C) Zeit und Raum.

$$t = \frac{x}{b} + \frac{2a}{b} \cdot \log\left[1 + \sqrt{1 - h^{-\frac{x}{a}}}\right]. \tag{2.11}$$

$$x = bt + 2a \cdot \log\frac{1}{2}\left(1 + h^{-\frac{bt}{a}}\right). \tag{2.12}$$

(D) Anmerk. Wenn die specifische Schwere der Flüssigkeit, worin die Kugel lothrecht herabsinket, in Vergleichung der specifischen Schwere der Kugel sehr klein ist; so kann in dem Ausdrucke $b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ ohne merklichen Fehler $\frac{N-1}{N} = 1$ gesetzet werden. Es ist alsdann $b = \sqrt{4ga}$; und es bedeutet b eine durch den freyen Fall von der Höhe $a = \frac{4}{3}DN$ erlangte Geschwindigkeit bey welcher der Widerstand der Flüssigkeit gegen eine darin bewegte Kugel so groß ist, als das Gewicht der Kugel. Wenn z. B. eine eiserne Kugel in der widerstehenden Luft mit einer anfänglichen Geschwindigkeit, deren Geschwindigkeitshöhe $a = \frac{4}{3}DN$ wäre, in lothrechter Richtung abwärts geworfen würde; so wäre sie gleich anfangs einem Widerstande $= \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{4}{3}DN\frac{1}{2} = \frac{1}{6}D^3\pi N$ ausgesetzet, und das Gewicht der Kugel wäre bey den festgesetzten Bezeichnungen auch $= \frac{1}{6}D^3\pi N$. Es wäre daher in einem solchen Falle der Widerstand der Luft dem Gewichte der Kugel gleich; und weil diese zwey gleichen Kräfte, Gewicht und Widerstand, einander gerade entgegen gesetzet sind: so würde die Kugel in ihrer fernern lothrechten Bewegung weder beschleuniget, noch verzögert werden, sondern müßte mit gleichförmiger Bewegung fortgehen, in so fern die Luft von gleichförmiger Dichtigkeit angesehen werden kann.

Weil nun $a = \frac{4}{3}DN$ diejenige Geschwindigkeitshöhe anzeiget, bey welcher der Widerstand einer flüssigen Masse dem Gewichte der darin bewegten Kugel gleich ist; so hat man zuweilen dem Ausdrucke a ($= \frac{4}{3}DN$ bey einer Kugel, und $= LN$ bey einem Cylinder) den Nahmen, *Maß des Widerstandes*, auch *Exponent des Widerstandes*, beygeleget. Wenn die specifische Schwere des bewegten Körpers in Vergleichung mit der specifischen Schwere der Flüssigkeit, worin die Bewegung vor sich geht, nicht besonders groß ist; so ist nicht $b = \sqrt{4ga}$, sondern es ist $b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ diejenige Geschwindigkeit, bey welcher der Widerstand einer flüssigen Masse gegen einen darin sinkenden festen Körper so groß wird, als das Gewicht des festen Körpers.

Dieser Ausdruck $b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ ist die Gränze, der sich die immer wachsende Geschwindigkeit eines fallenden Körpers in einem widerstehenden flüssigen Mittel immer nähert, und dieselbe doch niemahls erreichet, wie es schon (§. 162. N. 6.) erinnert worden ist.

Man kann nach dieser Formel $b = \sqrt{\frac{4ga(N-1)}{N}}$ die Geschwindigkeit berechnen, welche ein herabfallender Regentropfen eines gegebenen Durchmessers, z. B. von 1 Duodecimal – Linie, niemahls übersteiget, die Erhöhung der Wolke, aus welcher derselbe herabfällt, möge wie immer groß seyn. Daraus wird man ersehen, wie nützlich der Widerstand der Luft in solchen Fällen sey; weil sonst die Geschwindigkeit der Regentropfen bey der großen Höhe, von der sie herabfallen, so beträchtlich anwachsen müßte, daß dieselben für Thiere und Pflanzen eben so tödtlich würden, wie das durch die Kraft des Schießpulvers hinausgeschossene Bleyschrot.

§. 164.

Um die bisher vorgetragene Lehre von der Bewegung der festen Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel mit Erfahrungen zu vergleichen, folgen hier in nachstehenden zwey Tafeln einige Versuche, welche auf Newtons Veranlassung in den Jahren 1710 und 1719 zu London in der Paulus-Kirche angestellet worden sind.

Man ließ aus einer Höhe von 220 Londner-Fuß gläserne Kugeln, deren Gewicht und Durchmesser in den zwey ersten Spalten folgender Tabelle angemerket sind, herabfallen, beobachtete die Zeit ihres Falles, und berechnete endlich aus dieser beobachteten Zeit (nach der Formel (2.10) §. 163.) die dazu gehörige Höhe.

Versuche über das Sinken gläserner Kugeln in der widerstehenden Luft

Gewichte der Kug.	Durchm. der Kug.	Beobachtete Zeit des Sinkens.		Berechnete Höhe.	
Londn G	Londn. Z.	Secund.	Tertien.	Fuß	Zoll
510	5,1	8	12	226	11
642	5,2	7	42	230	9
599	5,1	7	42	227	10
515	5,0	7	57	224	5
483	5,0	8	12	225	5
641	5,2	7	42	230	7

Bey folgenden Versuchen wurden Kugeln aus Schweinsblasen angewendet. Man machte die Schweinsblasen naß, und bließ hierauf, nachdem sie vorher in die innere Höhlung einer hölzernen Kugelform gebracht wurden, Luft hinein. Dadurch wurden sie gezwungen die Kugelgestalt anzunehmen, die sie nach dem Austrocknen beybehielten. Diese Kugeln ließ man sodann aus einer Höhe von 272 Londner-Fuß herabfallen, beobachtete die Zeit des Sinkens, und berechnete endlich zu dieser Zeit die zugehörige Höhe (§. 163. (2.12)). Man bemerkte auf diese Art mit Vergnügen, daß die Lehre der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel mit der Erfahrung hinlänglich übereinstimme, wie es aus beygefügter Tabelle erhellet.

Fernere Versuche über das Sinken schwerer Kugeln in der widerstehenden Luft aus einer Höhe von 272 Londner-Fuß

Gewichte der Kugel.	Durchm. der Kugeln.	Beobachtete Zeit des S.	Hieraus berechnete Höhe	
Gran	Zoll.	Secunden	Fuß	Zoll
128	5,28	19	271	11
156	5,19	17	272	1,05
137,5	5,3	18,5	272	7
97,5	5,26	22	277	4
99,125	5	21,125	282	0

Bey der Berechnung der Zahlen für die letzte Spalte ist das Gewicht eines Londner Cubik-Zolles Wasser in der Luft von $253\frac{1}{2}$ Gran, und die Luft 860mahl leichter oder dünner als Wasser, angenommen worden. Die Beschleunigung der Schwere g kann man beyläufig $= 16$ Londner-Fuß setzen.

§. 165.

Aufgabe

Die Bewegung einer mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel zu bestimmen.

Auflösung

1) Es sey, wie bisher, der Durchmesser der Kugel $= D$, ihr Gewicht Nmahl so groß, als das Gewicht der atmosphärischen Luft unter einem mit der Kugel gleichen Inhalte, und die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, mit welcher die Kugel lothrecht in die Höhe geschossen wird. Nachdem die Kugel den Weg x in einer gewissen Zeit t zurückgeleget hat, sey ihre Geschwindigkeit $= v$, mit welcher sie im folgenden Zeit Elemente dt den Weg dx weiter hinauf zurückleget, und dabey an ihrer Geschwindigkeit dv verlieret.
2) Die am oberen Endpuncte des Weges x nach Verlauf der Zeit t widerstehende Kraft P ist das um den hydrostatischen Auftrieb verminderte Gewicht der Kugel, und der eigentliche Widerstand der Luft; nähmlich

$$P = \frac{1}{6}D^3\pi N - \frac{1}{6}D^3\pi + \frac{D^2\pi v^2}{32g}$$

und die zu bewegende Masse ist

$$M = \frac{1}{6}D^3\pi N.$$

3) Setzet man nun diese Werthe für P und M in der Formel $dv = -\frac{2gP\,dt}{M}$ (§157. N. 3.); so ist

$$dv = -\frac{2g(N-1)\,dt}{N} - \frac{3v^2\,dt}{8DN}$$

und für $\frac{g(N-1)}{N} = \gamma$, $\frac{4}{3}DN = a$, ist

$$dv = -2\gamma\,dt - \frac{v^2\,dt}{2a} = -dt\left(\frac{4a\gamma + v^2}{2a}\right)$$

es ist also auch

$$dt = -\frac{2a\,dv}{4a\gamma + v^2},$$

und ferner für $\sqrt{4a\gamma} = b = \sqrt{\frac{4ag(N-1)}{N}}$

$$dt = -\frac{2a\,dv}{b^2 + v^2}.$$

Daraus folget durch die Integration

$$t = \text{Const.} - \frac{2a}{b} \cdot \arctan\frac{v}{b}$$

nun ist für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$; daher Const. $= \frac{2a}{b} \cdot \arctan\frac{c}{b}$; und

$$t = \frac{2a}{b} \cdot \left(\arctan\frac{c}{b} - \arctan\frac{v}{b}\right). \tag{2.13}$$

4) Diese letzte Gleichung kann man auch so schreiben: $\arctan\frac{v}{b} = \arctan\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}$, und

$$\frac{v}{b} = \tan\left[\arctan\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right].$$

Folglich ist

$$v = b \cdot \tan\left[\arctan\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right]. \tag{2.14}$$

5) Um nun zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der Geschwindigkeit v in einem solchen Falle die Gleichung zu finden, setze man in der allgemeinen Formel (§. 157. N. 3) $v\,dv = -\frac{2gP\,dx}{M}$ für P und M die angeführten Werthe mit den festgesetzten Abkürzungen, und integrire sodann nach den bekannten Regeln. Man gelanget noch geschwinder zu der gesuchten Gleichung, wenn man in der zweyten Grundformel der Bewegung $dx = v\,dt$ für dt den Werth $-\frac{2a\,dv}{b^2+v^2}$ aus 3) setzet. Es ist sodann

$$dx = -\frac{2av\,dv}{b^2 + v^2}$$

daraus folget durch die Integration

$$x = \text{Const.} - a \cdot \log\left(b^2 + v^2\right)$$

nun ist für $x = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$; daher Const. $= a \cdot \log\left(b^2 + c^2\right)$; und

$$x = a \cdot \log\left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 + v^2}\right) \tag{2.15}$$

Daraus findet man ferner

$$v = \sqrt{h^{-\frac{x}{a}}\left(b^2 + c^2\right) - b^2}. \tag{2.16}$$

6) Um endlich auch zwischen x und t eine Gleichung zu finden, setze man hier in (2.13) statt v den Werth aus (2.16); so ist

$$t = \frac{2a}{b} \cdot \left[\arctan\frac{c}{b} - \arctan\sqrt{\frac{h^{-\frac{x}{a}}\left(b^2 + c^2\right) - b^2}{b^2}}\right] \tag{2.17}$$

$$x = a \cdot \log\left[\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) \cdot \cos^2\left(\arctan\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right]. \tag{2.18}$$

(2.19)

§. 166.

Zur Uebersicht der Bewegung einer lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel werden hier die entwickelten Formeln wiederhohlet.

Für die bekannten Werthe, D, N, g, c, $a = \frac{4}{3}DN$, $b = \sqrt{\frac{4ag(N-1)}{N}}$, hat man folgende

(A) Gleichungen zwischen der Zeit t, und zwischen der Geschwindigkeit v.

$$t = \frac{2a}{b} \cdot \left(\arctan\frac{c}{b} - \arctan\frac{v}{b}\right) \tag{2.20}$$

$$v = b \cdot \tan\left[\arctan\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right]. \tag{2.21}$$

(B) Gleichungen zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der Geschwindigkeit v.

$$x = a \cdot \log\left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 + v^2}\right) \tag{2.22}$$

$$v = \sqrt{h^{-\frac{x}{a}}\left(b^2 + c^2\right) - b^2}. \tag{2.23}$$

(C) Gleichungen zwischen dem zurückgelegten Wege x, und zwischen der Zeit t.

$$t = \frac{2a}{b} \cdot \left[\arctan\frac{c}{b} - \arctan\sqrt{\frac{h^{-\frac{x}{a}}\left(b^2+c^2\right)-b^2}{b^2}} \right] \tag{2.24}$$

$$x = a \cdot \log\left[\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right) \cdot \cos^2\left(\arctan\frac{c}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right]. \tag{2.25}$$

§. 167.

Aus den Formeln im §. 166. lassen sich noch verschiedene andere nützliche Gleichungen ableiten, Z. B.

1) Wenn man im §. 166 in der Formel (2.22) bey der aufsteigenden Bewegung die Geschwindigkeit $v = 0$ setzet; so erhält man für die ganze Höhe x, welche die Kugel zu erreichen vermögend ist, folgende Gleichung

$$x = a \cdot \log\left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right). \tag{2.26}$$

Hieraus folget die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit c, womit die Kugel lothrecht in die Höhe geschossen werden müßte, um eine gegebene Höhe x zu erreichen; nähmlich

$$c = b \cdot \sqrt{h^{\frac{x}{a}} - 1}. \tag{2.27}$$

2) Um die Zeit t zu finden, binnen welcher die anfängliche Geschwindigkeit bey der aufsteigenden Bewegung gänzlich getilget wird, setze man im §. 166. in der Formel (2.20) die Geschwindigkeit $v = 0$; so ist

$$t = \frac{2a}{b} \cdot \arctan\frac{c}{b}. \tag{2.28}$$

Hieraus folget ferner die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit c, womit die Kugel lothrecht in die Höhe geschossen werden muß, daß diese Geschwindigkeit gänzlich getilget werde; nähmlich

$$c = b \cdot \tan\frac{bt}{2a}. \tag{2.29}$$

3) Um endlich bey einer solchen aufsteigenden Bewegung zwischen der ganzen lothrechten Höhe $= x$, an deren oberen Endpuncte die anfängliche Geschwindigkeit gänzlich getilget wird, und zwischen der dazu erforderlichen Zeit eine Gleichung zu finden, setze man hier in die Formel (2.26)

den Werth für c aus (2.29); so erhält man

$$\begin{aligned} x &= 2a \cdot \log \sec \frac{bt}{2a} = \qquad (2.30)\\ &= -2a \cdot \log \cos \frac{bt}{2a} \\ t &= \frac{2a}{b} \cdot \arccos h^{-\frac{x}{2a}} \qquad (2.31)\end{aligned}$$

§. 168.

Wird endlich das Steigen und Fallen durch gleichen Weg x mit einander verglichen, so erhält man folgende Formeln:

1) Bey der aufsteigenden Bewegung ist (§. 167. 2.26) die ganze erreichte Höhe

$$x = a \cdot \log \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2}\right).$$

Da auf dieser Höhe die anfängliche Geschwindigkeit gänzlich getilget ist; so fällt die Kugel durch eben dieselbe Höhe x herab; und erlanget dadurch eine gewisse Geschwindigkeit $= v$. Man hat sodann (§. 163. 2.9)

$$x = a \cdot \log \left(\frac{b^2}{b^2 - v^2}\right). \qquad (2.32)$$

Es ist daher $a \cdot \log \left(\frac{b^2}{b^2-v^2}\right) = a \cdot \log \left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right)$; hieraus folget

$$\begin{aligned} v &= \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \qquad (2.33)\\ c &= \frac{bv}{\sqrt{b^2 - v^2}}. \qquad (2.34)\end{aligned}$$

Mittelst der Formel (2.33) findet man die Geschwindigkeit v, mit welcher eine Kugel auf die Erde zurückfällt, wenn dieselbe mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht in die Höhe geschossen wird. Umgekehrt findet man c aus v mittelst der Formel (2.34).

2) Im §. 167. in der Formel (2.27)

$$c = b \cdot \sqrt{h^{\frac{x}{a}} - 1}.$$

setze man statt b den Werth aus (§. 163. 2.10)

$$b = \frac{v}{\sqrt{1 - h^{-\frac{x}{a}}}}$$

so erhält man folgende Gleichungen zwischen beyden Geschwindigkeiten c, v, und zwischen der dazu gehörigen ganzen Höhe x,

$$\frac{c}{v} = h^{\frac{x}{2a}} \tag{2.35}$$

$$x = 2a \cdot \log \frac{c}{v}\,. \tag{2.36}$$

3) Um die Zeit $= t$ des Herabsinkens einer mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel durch c ausgedrucket zu finden, setze man im §. 163. in der Formel (2.7) $\tau = \frac{a}{b} \cdot \log\left(\frac{b+v}{b-v}\right) = \frac{a}{b} \cdot [L(b+v) - L(b-v)]$ anstatt v den hier in (2.33) angeführten Werth $v = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$; so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\tau = \frac{2a}{b} \cdot \log\left(\frac{c + \sqrt{b^2+c^2}}{b}\right). \tag{2.37}$$

4) Wenn man diesen zuletzt gefundenen Ausdruck (2.37) der Zeit des Fallens zu der Zeit des Steigens im §. 167. (2.28) $t = \frac{2a}{b} \cdot \arctan \frac{c}{b}$ hinzu addiret; so erhält man für die ganze Zeit $= T$ des Steigens und Fallens folgende Formel

$$T = \frac{2a}{b} \cdot \left[\arctan \frac{c}{b} + \log\left(\frac{c + \sqrt{b^2+c^2}}{b}\right)\right]. \tag{2.38}$$

Um diese Formel (2.38) einfacher auszudrucken, setze man $\frac{c}{b} = \tan 2\varphi$, so ist $c = b \cdot \tan 2\varphi$, und $\arctan \frac{c}{b} = 2\varphi$. Dadurch erhält man

$$T = \frac{2a}{b} \cdot [2\varphi + \log\tan\,(45^\circ + \varphi)\,]$$

für

$$\frac{c}{b} = \tan 2\varphi\,.$$

Für $c = b \cdot \tan 2\varphi$ ist nähmlich

$$
\begin{aligned}
\frac{c+\sqrt{b^2+c^2}}{b} &= \tan 2\varphi + \sqrt{1+\tan^2 2\varphi} = \\
&= \tan 2\varphi + \sec 2\varphi = \\
&= \tan 2\varphi + \frac{1}{\cos 2\varphi} = \\
&= \frac{\sin 2\varphi + 1}{\cos 2\varphi} = \\
&= \frac{\sin 2\varphi + \sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 2\varphi} = \\
&= \frac{2\sin\,(45^\circ+\varphi)\cdot\cos\,(45^\circ-\varphi)}{2\cos\,(45^\circ+\varphi)\cdot\cos\,(45^\circ-\varphi)} = \\
&= \tan\,(45^\circ+\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

§. 169.

Nach der letzten Formel des vorigen §. 168 läßt sich aus der beobachteten Zeit des Steigens und Fallens die anfängliche Geschwindigkeit c einer lothrecht in die Höhe geschossenen Kugel berechnen, wenn es erlaubet ist die Luft bis zu derjenigen Höhe, welche die Kugel im Steigen erreichet, durchaus für gleichförmig dicht anzusehen. Um nun c zu finden, müßte man in der angeführten letzten Formel für φ durch öfteres Versuchen eine solche Kreisbogenlänge zu setzen trachten, daß der zweyte Theil der Gleichung

$$\frac{bT}{2a} = 2\varphi + \log\tan\,(45^\circ+\varphi)$$

dem ersten Theile gleich würde. Ist nun der Bogen φ von dieser Eigenschaft gefunden; so hat man sodann die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit $c = b\cdot\tan 2\varphi$.

Anmerk. Wenn der hydrostatische Auftrieb einer festen Kugel in einem flüssigen Mittel größer ist, als ihr absolutes Gewicht; so wird dieselbe in einer solchen Flüssigkeit lothrecht in die Höhe steigen. Durch den Auftrieb wird ihre Bewegung beschleuniget, durch das absolute Gewicht aber, und durch den Widerstand der Flüssigkeit hingegen verzögert. Eine solche aufsteigende Bewegung läßt sich eben so bestimmen, wie das lothrechte Sinken schwerer Körper in der widerstehenden Luft (§. 162.). Diese Untersuchung wird zur Uebung dem eigenen Fleiße der Leser überlassen. Sie kann auf das lothrechte Steigen eines Luftballons angewendet werden, bis zu so großen Erhöhungen, daß die Luft noch durchaus von beynahe gleichförmiger Dichtigkeit angesehen werden könne.

3. Krummlinige Bewegung geworfener oder geschossener Körper in der widerstehenden Luft

§. 170.

Aufgabe

Die Gleichung für die Bahn zu finden, welche ein mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit unter einem gegebenen Erhöhungswinkel abgeschossene Kanon-Kugel in der widerstehenden Luft beschreibet.

Auflösung

1) Es sey AMB Fig. 52. die Bahn, welche die Kugel beschreibet, wenn sie unter einem gegebenen Erhöhungwinkel BAT mit einer gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit nach der Richtung AT geschossen oder geworfen wird. Man setze
den Elevationswinkel $BAT = m$,
die Abscisse $AP = x$,
die Ordinate $PM = y$,
die Bogenlänge $AM = z$,
das Differenziale $Pp = MR = dx$,
das Differenziale $Rr = Mm = dy$,
das Differenziale $Mr = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dz$;
D sey der Durchmesser der Kugel; und
N die Zahl welche anzeiget, wie oft das Gewicht der Flüssigkeit, worin die Bewegung geschieht, unter einem mit der Kugel gleich großen Raumsinhalte in dem Gewichte der Kugel erhalten ist; oder, welches einerley ist, wie oft die specifischen Schwere der Flüssigkeit in der specifischen Schwere der Kugel enthalten ist.

Nach diesen Bezeichnungen ist nun, wenn man das eigenthümliche Gewicht der Flüssigkeit für die Einheit annimmt, die Masse der Kugel

$$M = \frac{1}{6}D^3\pi N.$$

2) Die anfängliche Geschwindigkeit, mit welcher die abgeschossene Kugel aus der Mündung des Geschützes nach der Richtung AT hinausfährt, sey c; in dem Puncte M aber sey nach der Richtung der Tangente MS die Geschwindigkeit $= v$; so ist in dieser Richtungslinie von r gegen M der Widerstand der flüssigen Masse (vermöge §. 154.)

$$R = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g}.$$

Hieraus findet man nach der Lehre von der Zerlegung der Kräfte mittelst des Kräften-Parallelograms den Widerstand nach horizontaler Richtung

$$R' = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g} \cdot \frac{dx}{dz};$$

und Widerstand nach lothrechter Richtung

$$R'' = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{8g} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{1}{6}D^3\pi N.$$

Die verzögernde Kraft nach der lothrechten Richtung im Puncte der Bahn M besteht nähmlich aus dem Widerstande der Luft nach dieser Richtung $\frac{D^2\pi v^2}{32g} \cdot \frac{dy}{dz}$, und aus dem Gewichte der Kugel $\frac{1}{6}D^3\pi N$. Die Verminderung dieses Gewichtes durch den hydrostatischen Auftrieb kann hier gänzlich vernachlässiget werden, weil der Gewichtsverlust des Eisens und Bleyes, woraus die geschossenen Kugeln gewöhnlich bestehen, in der Luft unmerklich ist.

3) Aus den angeführten Werthen von R' und R'' in N. 2. und von M in N. 1. folget nun weiters bey der Abkürzung $\frac{4}{3}DN = a$, nach lothrechter Richtung $\frac{R''}{M} = \frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dy}{dz} + 1$, nach wagrechter Richtung $\frac{R'}{M} = \frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dx}{dz}$.

   Diese Werthe von $\frac{R'}{M}$, und von $\frac{R''}{M}$, wird man nun weiter unten in den Grundformeln der Bewegung für $\frac{P}{M}$ substituiren müssen, um zu der gesuchten Gleichung der Bahn zu gelangen.

4) Nun setze man die Zeit $= t$, binnen welcher der Bogen AM beschrieben wird, und die Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung $= u$, nach verticaler aber $= u'$; so hat man vermöge der zweiten Grundformel der Bewegung $dx = u\,dt$, und $dy = u'\,dt$, oder $u = \frac{dx}{dt}$, und $u' = \frac{dy}{dt}$. Hieraus folget durch die Differenzirung, weil man hier dt für unveränderlich ansehen, daß ist, die Zeit in unendlich viele gleiche Theile zertheilet gedenken kann

$$du = \frac{ddx}{dt}, \quad \text{und} \quad du' = \frac{ddy}{dt}.$$

5) Man setze in der ersten Grundformel der Bewegung $dv = -\frac{2gP\,dt}{M}$ anstatt dv die in N. 4 bemerkten Ausdrücke $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$; und anstatt $\frac{P}{M}$ die Werthe $\frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dx}{dz}$, und $\frac{v^2}{4ag} \cdot \frac{dy}{dz} + 1$ nach horizontaler und verticaler Richtung aus N. 3; so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$ddx = -\frac{v^2\,dx\,dt^2}{2a\,dz} \tag{3.1}$$

$$ddy = -\frac{v^2\,dy\,dt^2}{2a\,dz} - 2g\,dt^2. \tag{3.2}$$

6) Man multiplicire die Gleichung (3.1) mit dy, und (3.2) mit dx; und ziehe sodann die erste von der zweyten ab; so ist

$$dx\,ddy - dy\,ddx \quad = \quad -2g\,dx\,dt^2. \tag{3.3}$$

7) Es ist wegen der zweyten Grundformel der Bewegung $v = \frac{dz}{dt}$, und $v^2 = \frac{dz^2}{dt^2}$. Substituiret man nun diesen Werth v^2 in die Gleichung (3.1); so ist

$$ddx \quad = \quad -\frac{dx\,dz}{2a}. \tag{3.4}$$

8) Im rechtwinkeligen Dreyecke MRr ist $Mr^2 = MR^2 + Rr^2$, nähmlich $dz^2 = dx^2 + dy^2$, und $dz = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$. Man setze $\frac{dy}{dx} = p$; so ist $dz = dx\sqrt{1+p^2}$. In eben demselben Dreyecke verhält sich

$$MR(dx) : Rr(dy) = 1 : \tan RMr\,;$$

es ist daher $\tan RMr = \frac{dy}{dx} = p$; das heißt p ist die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Berührungslinie MS der Bahn mit dem Horizonte im Puncte M einschließt.

9) Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$ folget $dy = p\,dx$, und $ddy = dp\,dx + p\,ddx$.
Diese Werthe für dy, und ddy setze man in die Gleichung (3.3). So erhält man

$$dp\,dx \quad = \quad -2g\,dt^2. \tag{3.5}$$

In der Gleichung (3.4) aber substituire man statt dz seinen Werth $dx\sqrt{1+p^2}$ aus N. 8.; so ist

$$ddx \quad = \quad -\frac{dx^2\sqrt{1+p^2}}{2a}. \tag{3.6}$$

10) Aus (3.5) folget $dp = -\frac{2g\,dt^2}{dx}$ und aus (3.6) fließt $\sqrt{1+p^2} = -\frac{2a\,ddx}{dx^2}$.
Man multiplicire diese zwey letzten Gleichungen mit einander; so erhält man endlich

$$dp\sqrt{1+p^2} \quad = \quad \frac{4ag\,dt^2\,ddx}{dx^3} \tag{3.7}$$

Mittelst dieser höheren Differenzial-Gleichung (3.7) ließe sich nun die Gleichung für die Bahn bestimmen, wenn es möglich wäre dieselbe so weit zu integriren, daß man zuletzt einen endlichen Ausdruck zwischen x un y erhielte. Die erste Integration der Gleichung (3.7) kann zwar durch Logarithmen bewerkstelliget werden. Allein um die ferneren Integrationen genau zu finden, sind die bisher bekannten Hülfsmittel der Analysis nicht zureichend. Man muß daher bedacht seyn die gesuchte Gleichung zwischen x und y durch eine Annäherung zu erhalten.

11) Um nun die Gleichung (3.7) durch eine Annäherung zu integriren, erwäge man, daß es bey den Kanonen nicht gebräuchlich ist unter großen Elevationswinkeln zu schiessen. Die größte gebräuchliche Elevation beym Ricoschettiren erstrecket sich nicht über 15 Grade. Für solche Fälle ist p, als die Tangente des Neigungswinkels der Richtungslinie der Kugel gegen den Horizont in verschiedenen Puncten der Bahn immer ein kleiner Bruch; weil selbst am Ende des niedersteigenden Astes der Bahn dieser Winkel nicht viel größer wird, als der Elevationswinkel. Daher kann man in der Gleichung (3.7) den sehr kleinen Bruch p^2 gänzlich weglassen. Man erhält sodann

$$dp \;=\; 4ag\,dt^2 \cdot dx^{-3}\,ddx.$$

Hieraus folget durch die Integration, weil hier dt unveränderlich ist,

$$p \;=\; \text{Const.} - \frac{2ag\,dt^2}{dx^2}.$$

Nun ist für $x = 0$ im Anfange der Bewegung $p = \tan m$, und die Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung $\frac{dx}{dt}$ ist da $= c\cdot \cos m$, nähmlich $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{c^2\cos^2 m}$; es ist daher

$$\begin{aligned}
\tan m &= \text{Const.} - \frac{2ag}{c^2\cos^2 m},\\
\text{Const.} &= \tan m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m}, \text{ und}\\
p &= \tan m + \frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{2ag\,dt^2}{dx^2}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

12) Man setze in (3.8) den Werth für dt^2 aus (3.5); so erhält man

$$\frac{dx}{a} \;=\; \frac{dp}{p - \tan m - \frac{2ag}{c^2\cos^2 m}}.$$

Hieraus folget durch die Integration

$$\frac{x}{a} \;=\; \text{Const.} + \log\left(p - \tan m - \frac{2ag}{c^2\cos^2 m}\right).$$

Es ist aber für $x = 0$, $p = \tan m$; folglich

$$\text{Const.} \;=\; -\log\left(-\frac{2ag}{c^2\cos^2 m}\right) \;; \text{ und}$$

$$\frac{x}{a} \;=\; \log\left(1 + \frac{c^2\sin m\cos m}{2ag} - \frac{pc^2\cos^2 m}{2ag}\right).$$

Und ferner für die Grundzahl $= h$ des natürlichen logarithmischen Systems

$$h^{\frac{x}{a}} \;=\; 1 + \frac{c^2\sin m\cos m}{2ag} - \frac{pc^2\cos^2 m}{2ag}. \qquad (3.9)$$

13) Aus (3.9) folget

$$\frac{c^2\cos^2 m}{2ag}\cdot p \;=\; 1-h^{\frac{x}{a}}+\frac{c^2\sin m\,\cos m}{2ag},$$

und ferner, wenn man anstatt p den Werth $\frac{dy}{dx}$ aus N. 9 substituiret,

$$\frac{c^2\cos^2 m}{2ag}\cdot dy \;=\; dx+\frac{c^2\sin m\,\cos m}{2ag}\cdot dx-dx\,h^{\frac{x}{a}}.$$

Wird diese Gleichung wieder integriret; so ist

$$\frac{c^2\cos^2 m}{2ag}\cdot y \;=\; C+x+\frac{c^2\sin m\,\cos m}{2ag}\cdot x-a\,h^{\frac{x}{a}}.$$

Nun ist für $x=0$, auch $y=0$, folglich $C=a$; und

$$\frac{c^2\cos^2 m}{2ag}\cdot y \;=\; a+x+\frac{c^2\sin m\,\cos m}{2ag}\cdot x-a\,h^{\frac{x}{a}}.$$

Hieraus folget endlich die gesuchte Gleichung für die Bahn einer geschossenen Kugel in der widerstehenden Luft

$$y \;=\; x\left(\tan m+\frac{2ag}{c^2\cos^2 m}\right)-\frac{2a^2g}{c^2\cos^2 m}\left(h^{\frac{x}{a}}-1\right). \qquad (3.10)$$

§. 171.

Mittelst der Formel (3.10) läßt sich nun zu jeder gegebenen Abscisse x die dazugehörige Ordinate y berechnen. Wenn man ferner in der dazugehörigen Differenzialgleichung (§. 170. N. 13.) $dy=0$ setzet, daraus $h^{\frac{x}{a}}$ und x nach der bekannten Lehre vom Größten und Kleinsten suchet, und diese Werthe in der Gleichung (3.10) substituiret; so findet man die größte Ordinate der Bahn, oder die Erhöhung des Scheitels über den Horizont, sammt der dazugehörigen Abscisse, oder Schußweite des Aufsteigenden Astes.

Es ist nähmlich die zur größten Ordinate zugehörige Abscisse, oder die Schußweite des aufsteigenden Astes

$$x \;=\; a\cdot\log\left(1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag}\right)$$

und die größte Ordinate, oder die Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geschützes ist

$$y \;=\; a\cdot\left[-\tan m+\frac{c^2\sin 2m\;+4ag}{2c^2\cos^2 m}\times\log\left(1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag}\right)\right].$$

Diese letzte Formel erhält man, wenn man im (3.10) $a\cdot L\left(1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag}\right)$ für x, und für $h^{\frac{x}{a}}$ den damit zusammen gehörigen Werth $\left(1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag}\right)$ substituiret.

§. 172.

Soll nun zu einer gegebenen Ordinate die dazu gehörige Abscisse x mittelst der Gleichung (3.10) berechnet werden; so kann man dieser Gleichung folgende Gestalt geben,

$$h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}\right) \quad = \quad 1 - \frac{yc^2\,(1 + \cos 2m\,)}{4a^2 g} \tag{3.11}$$

und man muß nun durch öfteres Versuchen für $\frac{x}{a}$ einen solchen Werth n ausfindig zu machen trachten, daß der erste Theil der Gleichung dem zweyten Theile gleich wird. Dadurch findet man die gesuchte Schußweite $x = an$.

Die Tafel der Potenzen von h im 2ten Bande meiner logarithm. trigonometr. Tafeln Leipzig bey Weidmann 1797 kann hierbey mit Nutzen und großen Vortheile gebrauchet werden. Wäre y eine gegebene Vertiefung unter dem Horizonte der Mündung des Geschützes; so müßte y allhier in (3.11) mit entgegen gesetztem Zeichen genommen werden.

Soll man nun mittelst dieser Gleichung (3.11) die ganze horizontale Schußweite berechnen, welche die Kugel bey diesen Umständen erreichet; so setze man $y = 0$; und man erhält sodann nachstehende *Formel zur Berechnung der ganzen horizontalen Schußweite* AB

$$\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) : \frac{x}{a} \quad = \quad 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}. \tag{3.12}$$

Um nun mittelst dieser Gleichung für gegebene Werthe von

$$\begin{aligned}
a &= \frac{4}{3} DN, \\
D &= \text{dem Durchmesser der Kugel oder Grenade,} \\
N &= \text{der Zahl, welche anzeiget, wie oft das Gewicht der Luft} \\
&\quad\ \text{unter einem mit der Kugel oder Grenade gleich großen} \\
&\quad\ \text{Inhalte im Gewichte der letzen enthalten ist,} \\
c &= \text{der anfänglichen Geschwindigkeite,} \\
g &= \text{der Beschleunigung der Schwere} \\
m &= \text{dem Elevationswinkel}
\end{aligned}$$

die ganze horizontale Schußweite x zu finden, trachte man wieder wie ehevor für $\frac{x}{a}$ durch Versuchen einen solchen Werth ausfindig zu machen, daß der erste Theil dieser Gleichung dem zweyten Theile beynahe gleich wird. Wenn z. B. $\frac{x}{a} = n$ von einer solchen Beschaffenheit ist; so erhält man sodann $x = an$.

Weiter unten ist eine *balistische Tafel* beygefüget, welche für verschiedene Werthe von $\frac{x}{a} = n$ die dazugehörigen Werthe von $(h^n - 1) : n$ enthält. Mittelst dieser Tafel ist es nun sehr leicht in jedem vorkommenden Falle aus der Gleichung

(3.12) den Werth für $\frac{x}{a}$ mit 4 bis 5 Ziffern genau zu finden, welches in der Ausübung jederzeit zureichend ist. Nun suche man aus der Gleichung (3.12) den Werth für c so erhält man folgende *Formel zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit aus der bekannten horizontalen Schußweite x, und aus a, g, m,*

$$c = \sqrt{\left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g}{x \sin 2m}}. \tag{3.13}$$

Endlich suche man aus dieser letzten Gleichung den Werth für m; so erhält man folgende *Formel zur Berechnung des Elevationswinkels zu einer gegebener horizontalen Schußweite x, für bekannte a, c, g,*

$$\sin 2m = \left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g}{c^2 x}. \tag{3.14}$$

Aus der Gleichung (3.11) kann man auch nachstehende Formel ableiten, wodurch man die anfängliche Geschwindigkeit c aus gegebenen x, y, a, g, m berechnen kann;

$$c = \sqrt{\left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) \times \frac{4a^2 g}{x \sin 2m - y\,(1 + \cos 2m\,)}}. \tag{3.15}$$

Ist y eine gegebene Vertiefung unter dem Horizonte der Mündung des Geschützes in der bekannten horizontalen Entfernung x, ist nähmlich y eine negative Ordinate; so muß man hier in (3.15) so wie oben in (3.11) bey y das Zeichen $-$ in $+$ verwandeln.

Suchet man endlich aus (3.9) den Werth für p; so erhält man

$$p = \tan m - \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m}\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) \tag{3.16}$$

eine Formel, wodurch man für jede Abscisse x die Tangente des Neigungswinkels der Bahn gegen den Horizont berechnen kann. Man findet dadurch den Neigungswinkel, unter welchem der niedersteigende Ast der Bahn den Horizont der Mündung des Geschützes durchschneidet, wenn man in der letzten Formel für x die ganze nach der Formel (3.12) berechnete Schußweite substituiret.

§. 173.

In der Gleichung (3.7) ist p^2 gänzlich vernachlässiget worden, damit man durch diese Annäherung alle folgende Differenzial-Gleichungen integriren konnte. Will man nun eine etwas genauere Annäherung haben; so setze man in dieser Gleichung p den unveränderlichen Werth $\tan \frac{1}{2}m$. Man kann dieses aus folgendem Grunde thun. Bey dem Anfange der Bewegung ist $p = \tan m$; von da an nimmt p immer ab, je näher die Kugel dem Scheitel der krummen Linie kommt. Da wird $p = 0$. Sodann fängt p wieder zu wachsen an, und wird negativ; welches man aber hier nicht zu erwägen braucht, weil p^2 immer positiv ist. In irgend einem Puncte des niedersteigenden Astes der Bahn wird wieder $p^2 = \tan^2 m$. Man kann daher ohne großen Fehler für p den mittleren Werth zwischen $p = \tan m$, und zwischen $p = 0$ annehmen; und daher $p = \tan \frac{1}{2}m$ setzen.

Bey dieser Annäherung $p = \tan \frac{1}{2}m$ in der Formel (3.7) ist nun

$$dp \left(1 + \tan^2 \frac{1}{2}m\right)^{\frac{1}{2}} = 4ag\, dt^2 \cdot dx^{-3}\, ddx,$$

oder wegen $\left(1 + \tan^2 \frac{1}{2}m\right) = \sec^2 \frac{1}{2}m = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}m}$ ist

$$dp = 4\left(a \cos \frac{1}{2}m\right) g\, dt^2 \cdot dx^{-3}\, ddx.$$

Die fernere Behandlung dieser Differenzial-Gleichung um nach mehreren Integrationen die gesuchte Gleichung für die Bahn der geschossenen Kugel zu finden, ist völlig eben dieselbe, wie im §. 170. von N. II angefangen: mit dem einzigen Unterschiede, daß man überall $a \cos \frac{1}{2}m$ anstatt a setzen muß. Es ist nähmlich bey dieser Annäherung.

(I) Gleichung für die Bahn,

$$y = x\left(\tan m + \frac{2ag \cos \frac{1}{2}m}{c^2 \cos^2 m}\right) - \frac{2a^2 g \cos^2 \frac{1}{2}m}{c^2 \cos^2 m}\left(h^{\frac{x}{a \cos \frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

(II) Formel zur Berechnung der ganzen Schußweite,

$$\left(h^{\frac{x}{a \cos \frac{1}{2}m}} - 1\right) : \frac{x}{a \cos \frac{1}{2}m} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag \cos \frac{1}{2}m}. \tag{3.17}$$

Bey der Berechnung der Schußweite kann auch hier die am Ende beygesägte balistische Tafel mit großem Vortheile gebrauchet werden; denn wenn man durch Beyhülfe dieser Tafel für $\frac{x}{a \cos \frac{1}{2}m}$ einen solchen Werth n gefunden hat, daß er der Gleichung ein Genüge leistet, so ist sodann die gesuchte Schußweite $x = n \times a \cos \frac{1}{2}m$.

(III) Formel zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit aus der Schußweite,

$$c = \sqrt{\left(h^{\frac{x}{a \cos \frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a \cos \frac{1}{2}m} - 1\right) \times \frac{4a^2 g \cos^2 \frac{1}{2}m}{x \sin 2m}}.$$

(IV) Formel zur Berechnung des Elevationswinkels zu einer gegebenen Schußweite,

$$\begin{aligned}
\sin 2\mu &= \left(h^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g}{c^2 x}, \\
\sin 2m &= \left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}\mu}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}\mu} - 1\right) \cdot \frac{4a^2 g \cos^2 \frac{1}{2}\mu}{c^2 x}.
\end{aligned}$$

Man muß nähmlich bey der Berechnung des Elevationswinkels m zu erst den beyläufigen Werth desselben $= \mu$ nach der Formel (3.14) bestimmen, und sodann diesen beyläufigen Werth für μ hier in der letzten Gleichung substituiren. Dadurch wird der gesuchte Winkel m meistens mit zureichender Genauigkeit gefunden; wovon man sich überzeugen kann, wenn man diesen so gefundenen Werth m noch einmahl im zweyten Theile der letzten Gleichung für μ substituirt.

(V) Formel zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit aus der Abscisse und Ordinate,

$$c = \sqrt{\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} - 1\right) \times \frac{4a^2 g \cos^2 \frac{1}{2}m}{x \sin 2m - y\,(1 + \cos 2m)}}.$$

(VI) Formel zur Berechnung der horizontalen Schußweite x, welche mit einer gegebenen Erhöhung $+y$, oder Vertiefung $-y$ zusammen gehöret,

$$h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}\left(1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right) = 1 \mp \frac{yc^2\,(1 + \cos 2m)}{4a^2 g \cos^2 \frac{1}{2}m}.$$

(VII) Formel zur Berechnung des Neigungswinkels φ der Bahn gegen den Horizont aus der Schußweite x.

Wenn man nähmlich $p = \tan\varphi$ setzet, so ist

$$\tan\varphi = \tan m - \frac{2ag\cos\frac{1}{2}m}{c^2\cos^2 m} \cdot \left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

(VIII) Formel zur Berechnung der Schußweite x des aufsteigenden Astes,

$$x = a\cos\frac{1}{2}m \times \log\left(1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right).$$

(IX) Formel zur Berechnung der größten Ordinate, oder der Erhöhung des Scheitels der Bahn über den Horizont der Mündung des Geschützes,

$$\begin{aligned} y &= a\cos\frac{1}{2}m \times \\ &\times \left[-\tan m + \frac{c^2\sin 2m + 4ag\cos\frac{1}{2}m}{2c^2\cos^2 m} \times \log\left(1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}\right)\right]. \end{aligned}$$

§. 174.

Die Länge des Bogens $AM = z$ läßt sich auf folgende Art genau berechnen. Aus der Gleichung (3.7)

$$dp\sqrt{1+p^2} = 4ag\,dt^2\cdot dx^{-3}\,ddx$$

folget durch Integration

$$C+\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = -\frac{2ag\,dt^2}{dx^2}. \qquad (3.18)$$

Nun ist für $x = 0$ im Anfange der Bewegung, $p = \tan m$, und $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{c^2\cos^2 m}$; daher ist

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{1}{2}\tan m\cdot\sqrt{1+\tan^2 m} - \\ &- \frac{1}{2}\log\left(\tan m + \sqrt{1+\tan^2 m}\right) \end{aligned}$$

und ferner Wegen $\sqrt{1+\tan^2 m} = \sec m = \frac{1}{\cos m}$,

$$\begin{aligned} \tan m + \frac{1}{\cos m} &= \frac{\sin m + 1}{\cos m} = \\ &= \frac{\sin 90^\circ + \sin m}{\cos 90^\circ + \cos m} = \\ &= \tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}m\right), \end{aligned}$$

ist

$$C = -\frac{2ag}{c^2\cos^2 m} - \frac{\sin m}{2\cos^2 m} - \log\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}m\right) \tag{3.19}$$

Man substituire hier in der Gleichung (3.18) den Werth für dt^2 aus (3.5); so ist

$$dx = \frac{a\,dp}{C + \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}$$

und wegen (§. 170. N. 8) $dz = dx\sqrt{1+p^2}$ ist

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1+p^2}};$$

folglich ist auch

$$dz = \frac{a\,dp\sqrt{1+p^2}}{C + \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}.$$

Hieraus folget durch die Integration, weil im Nenner dieses Bruches das vollständige Integral des Zählers $dp\sqrt{1+p^2}$ enhalten ist,

$$z = C' + a\log\left[C + \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right].$$

Nun ist für $z = 0$ im Anfange der Bewegung $p = \tan m$; folglich

$$C' = -a\log\left[C + \frac{\sin m}{2\cos^2 m} + \frac{1}{2}\log\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}m\right)\right],$$

und

$$z = a\log\frac{C + \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}{C + \frac{\sin m}{2\cos^2 m} + \frac{1}{2}\log\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}m\right)},$$

ferner, wenn man für C den hier in (3.19) angemerkten Werth setzet, und alles gehörig reduciret

$$\begin{aligned} z &= a\cdot\log\left\{1 + \frac{c^2\cos^2 m}{4ag}\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \log\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}m\right) - \right.\right. \\ &- \left.\left. p\sqrt{1+p^2} - \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Um diese letzte Gleichung noch einfacher auszudrucken, setze man $p = \tan\varphi$, nähmlich man bezeichne den veränderlichen Winkel mit φ, unter welchem die Tangente der Bahn, oder die Richtung der bewegten Kugel in verschiedenen Puncten ihres Weges gegen den Horizont geneigt ist; so erhält man

$$\begin{aligned} z &= a \cdot \log \left\{ 1 + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag} \left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} m \right) - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \right] \right\} . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Setzet man nun in dieser Formel $\varphi = m$, so ist $z = 0$; setzet man aber $\varphi = 0$, so ist

$$z = a \cdot \log \left[1 + \frac{c^2 \sin m}{4ag} + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag} \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} m \right) \right]$$

die Länge des aufsteigenden Astes der Bahn von der Mündung des Geschützes bis zum Scheitel, wo die Richtung der bewegten Kugel horizontal wird.

Für $\varphi = -m$ in der Formel (3.20) ist

$$z = a \cdot \log \left[1 + \frac{c^2 \sin m}{2ag} + \frac{c^2 \cos^2 m}{4ag} \log \frac{\tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} m \right)}{\tan \left(45^\circ - \frac{1}{2} m \right)} \right]$$

die Länge des Bogens der Bahn von der Mündung des Geschützes über den Scheitel hinunter bis zu dem Puncte des niedersteigenden Astes, wo die Neigung der Tangente der Bahn gegen den Horizont eben so groß ist, als die anfängliche Richtung der geschossenen Kugel.

§. 175.

Mittelst der Formel (3.20) kann man für jeden Elevationswinkel m, und für gegebene a und c *die ganze horizontale Schußweite*, und die größte Ordinate, oder *die Erhöhung des Scheitels der Bahn* über den Horizont der Mündung des Geschützes berechnen, und zwar auf folgende Art.

(1) Man zertheile den gegebenen Elevationswinkel m in so viele kleine gleiche Theile, etwan in einzelne Grade, oder auch von 2 zu 2 Grad $= e$, daß die Länge des Bogens der Bahn zwischen jeden zwei Neigungswinkeln der Tangenten bey dem kleinen Unterschiede e ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie angesehen werden könne. Nun setze man in der Formel (3.20) nacheinander $\varphi = m - e$, $\varphi = m - 2e$, $\varphi = m - 3e$, u. s. w. bis $\varphi = 0$; und berechne für jeden solchen Werth φ und für die übrigen gegebenen Größen die dazugehörige Länge z.

(2) Sodann ziehe man in dieser Reihe der Bogenlängen jedes vorhergehende Glied von dem nächst darauf folgenden ab, und bezeichne diese Differenzen mit α, β, γ, δ, ε, u. s. w.; so erhält man dadurch die Längen der Bogen der Bahn zwischen den dazu gehörigen Neigungswinkeln der Tangenten; nähmlich man erhält in Fig. 53. die Bogenlänge α zwischen den Neigungswinkeln m und $m - e$, β zwischen den Neigungswinkeln $m - e$

und $m-2e$, γ zwischen den Neigungswinkeln $m-2e$ und $m-3e$, δ zwischen den Neigungswinkeln $m-3e$ und $m-4e$ u. s. w.

(3) Diese so gefundenen Längen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ kann man für geradlinige Hypothenusen von rechtwinkeligen Dreyecken ansehen, bey denen die Hypothenusen gegen die horizontalen Katheten oder Grundlinien unter den Winkeln $m-e, m-2e, m-3e, m-4e, \ldots$ geneigt sind. Aus diesen Längen der Bogenstücke, und aus den dazu gehörigen Neigungswinkeln lassen sich daher sowohl die horizontalen Grundlinien, als auch die lotrechten Höhen aller solcher rechtwinkeligen Dreyecke berechnen.

(4) Addiret man endlich alle auf diese Art gefundenen lotrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke bis zum Scheitel der Bahn in einen Summe; so erhält man dadurch die Erhöhung des Scheitels über den Horizont, oder *die größte Ordinate der Bahn*. Addiret man ferner auch die gefundenen horizontalen Grundlinien der erwähnten rechtwinkeligen Dreyecke von $\varphi = m-e$ bis $\varphi = 0$ in eine Summe zusammen; so erhält man die *zur größten Ordinate zugehörige Abscisse, oder die Schußweite des aufsteigenden Astes.*

(5) Um nun auch die Schußweite des niedersteigenden Astes zu erhalten, welche zur Schußweite des aufsteigenden Astes addiret die ganze horizontale Schußweite gibt, muß man in der Formel (3.20) noch ferner $\varphi = -e$, $\varphi = -2e$, $\varphi = -3e$, $\varphi = -4e$ u. s. w. setzen, alles hier in N. 2 und 3 angeführte befolgen, und diese Arbeit solange fortsetzen, bis die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke am niedersteigenden Aste der schon gefundenen größten Ordinate gleich wird. Bis zu diesem Puncte des niedersteigenden Astes, wo die Summe der lothrechten Höhen der rechtwinkeligen Dreyecke so groß wird, als die in N. 4 schon gefundene größte Ordinate, addire man auch alle horizontale Grundlinien der rechtwinkeligen Dreyecke am niedersteigenden Aste in eine Summe zusammen, so erhält man dadurch die gesuchte horizontale Schußweite des niedersteigenden Astes, welche zu jener des aufsteigendes Astes addiret die ganze horizontale Schußweite gibt.

(6) Der Winkel $\varphi = -ne$, bey welchem die Summe der lothrechten Höhen der rechtwikeligen Dreyecke am niedersteigenden Aste der größten Ordinate gleich wird, ist der Neigungswinkel der Tangente der Bahn an derjenigen Stelle, wo die Kugel wieder den Horizont der Mündung des Geschützes erreichet, oder wo die Bahn diesen Horizont das zweytemahl durchschneidet. Dieser Winkel ist jederzeit größer als m. Um ihn hinlänglich genau zu erhalten muß man zuletzt durch Einschaltung für φ einen solchen Werth $-ne$ ausfindig zu machen, daß sodann die Summe der lothrechten Höhen am niedersteigenden Aste der nach N. 4. gefundenen größten Ordinate zureichend genau gleich werde.

(7) Wenn man nähmlich in der Formel (3.20) alles zwischen den Klammern befindliche, bis auf den Factor $\frac{c^2}{4ag}$, in Zahlen berechnet, und diese Zahlen nach der Ordnung mit A, B, C, D, E, ... bezeichnet; so erhält man für nachstehende Werthe von φ die dazu gehörigen Bogenlängen z, wie folget:

für $\varphi =$	ist die Bogenlänge $z =$
m	0
$m-e$	$a \cdot \log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A\right)$
$m-2e$	$a \cdot \log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B\right)$
$m-3e$	$a \cdot \log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C\right)$
......	....
0	$a \cdot \log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot N\right)$

Daraus folgen die einzelnen Bogenstücke Δz, oder die Hypothenusen der rechtwinkeligen Dreyecke für die Winkel φ

$\varphi =$	$\Delta z =$
m	0
$m-e$	$a \cdot \log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A\right)$
$m-2e$	$a \cdot \log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A}\right)$
$m-3e$	$a \cdot \log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B}\right)$
$m-4e$	$a \cdot \log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot D}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C}\right)$
u. s. w.	....

Und aus diesen horizontalen Grundlinien Δx eben derselben Dreyecke

$\varphi =$	$\Delta x =$
m	0
$m-e$	$a\cos(m-e)\cdot\log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A\right)$
$m-2e$	$a\cos(m-2e)\cdot\log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A}\right)$
$m-3e$	$a\cos(m-3e)\cdot\log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B}\right)$
$m-4e$	$a\cos(m-4e)\cdot\log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot D}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C}\right)$
u. s. w.	....

Und die lothrechten Höhen Δy eben derselben Dreyecke

$\varphi =$	$\Delta y =$
m	0
$m-e$	$a\sin(m-e)\cdot\log\left(1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A\right)$
$m-2e$	$a\sin(m-2e)\cdot\log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot A}\right)$
$m-3e$	$a\sin(m-3e)\cdot\log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot B}\right)$
$m-4e$	$a\sin(m-4e)\cdot\log\left(\frac{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot D}{1+\frac{c^2}{4ag}\cdot C}\right)$
u. s. w.	....

Wenn man z. B. $a = 1$, $\frac{c^2}{4ag} = 5$, und $m = 15°$ setzet; so findet man für den aufsteigenden Ast

φ	$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$	l.t. $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$	hieraus	Δy	Δx
14	0,2569609	0,2468145	A = 0,0358918	0,0413261	0,1597960
13	0,2369408	0,2288650	B = 0,0713175	0,0326634	0,1360529
12	0,2173052	0,2109877	C = 0,1063175	0,0262611	0,1134564
11	0,1980184	0,1931766	D = 0,1409304	0,0213436	0,1051488
10	0,1790471	0,1754258	E = 0,1751926	0,0174511	0,0941577
9	0,1603587	0,1577296	F = 0,2091399	0,0142959	0,0854294
8	0,1419220	0,1400822	G = 0,2428068	0,0116883	0,0782082
7	0,1237066	0,1224781	H = 0,2762361	0,0094997	0,0721577
6	0,1056968	0,1049117	I = 0,3094200	0,0076252	0,0669258
5	0,0878228	0,0873774	K = 0,3424562	0,0060224	0,0625453
4	0,0700975	0,0698700	L = 0,3753288	0,0046161	0,0586529
3	0,0524797	0,0523838	M = 0,4080713	0,0033790	0,0552472
2	0,0349420	0,0349137	N = 0,4407441	0,0022829	0,0522882
1	0,0174577	0,0174542	O = 0,4733471	0,0011549	0,0496176
0	0	0	P = 0,5059206	0,0004123	0,0472399
			Summa =	0,2000220	1,2419240

Und für den niedersteigenden Ast

φ	$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$	l.t. $(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$	hieraus ist	Δy	Δx
1	0,0174577	0,0174542	A = 0,5384936	0,0003936	0,0451071
2	0,0349420	0,0349137	B = 0,5710965	0,0011309	0,0431872
3	0,0524797	0,0523838	C = 0,6037593	0,0018096	0,0414469
4	0,0700975	0,0698700	D = 0,6365117	0,0024383	0,0398659
5	0,0878228	0,0873774	E = 0,6693843	0,0030241	0,0384244
6	0,1056968	0,1049117	F = 0,7024206	0,0035746	0,0371239
7	0,1237066	0,1224781	G = 0,7356137	0,0040891	0,0358898
8	0,1419220	0,1400822	H = 0,7690340	0,0045811	0,0347966
9	0,1603587	0,1577296	I = 0,8027007	0,0050481	0,0337775
10	0,1790471	0,1754258	K = 0,8366480	0,0054954	0,0328389
11	0,1980184	0,1931766	L = 0,8709102	0,0059256	0,0319719
12	0,2173052	0,2109877	M = 0,9055232	0,0063418	0,0311709
13	0,2369408	0,2288650	N = 0,9405662	0,0067592	0,0304890
14	0,2569609	0,2468145	O = 0,9759610	0,0071343	0,0297166
15	0,2774014	0,2648423	P = 1,0118410	0,0075251	0,0290976
16	0,2988010	0,2829544	Q = 1,0482440	0,0079095	0,0285208
17	0,3197001	0,3011577	R = 1,0851884	0,0082971	0,0280105
18	0,3416408	0,3194583	S = 1,1227227	0,0086565	0,0274548
19	0,3641680	0,3378629	T = 1,1609240	0,0090342	0,0270003
20	0,3873291	0,3563785	U = 1,1998088	0,0094039	0,0265538
21	0,4111741	0,3750121	W = 1,2394420	0,0097778	0,0261519
22	0,4357563	0,3937709	X = 1,2798800	0,0101540	0,0257776
23	0,4611325	0,4126626	Y = 1,3211820	0,0105340	0,0254314
24	0,4873633	0,4316947	Z = 1,3634226	0,0109216	0,0251180
25	0,5145135	0,4508754	a = 1,4066402	0,0113077	0,0248125
26	0,5426522	0,4702127	b = 1,4509360	0,0117728	0,0246822
27	0,5718538	0,4897154	c = 1,4963780	0,0121146	0,0242999
28	0,6021983	0,5093923	d = 1,5430450	0,0125340	0,0240777
$28\frac{1}{4}$	0,6099730	0,5143398	e = 1,5519278	0,0023456	0,0044004
			Summa =	0,2000234	0,8771980

Die Summe in der Spalte Δy des niedersteigenden Astes ist für $\varphi = -28^\circ$ noch um etwas weniges kleiner als die größte Ordinate, oder die Summe aller Δy bey dem aufsteigenden Aste; für $\varphi = 29^\circ$ aber wird die Summe aller Δy des niedersteigenden Astes schon zu groß; und man findet durch eine leichte Beurtheilung, daß man bey $\varphi = -28\frac{1}{4}$ die Rechnung enden könne. Dadurch erhält man

die Schußweite des aufsteigenden Astes	1,24192
und des niedersteigenden	0,87720
folglich die ganze Schußweite	2,11912
und die Erhöhung des Scheitels	0,20002

Wenn man es recht genau nehmen will, so kann man bey der Berechnung der horizontalen Grundlinien Δx, und der lothrechten Höhen Δy der rechtwinkeligen Dreyecke für $\varphi = m-e, m-2e, m-3e$, u. s. w. die dazugehörigen mittleren Neigungswinkel der Hypothenusen in obigen für Δx und Δy angegebenen Formeln setzen $m-\frac{1}{2}e$, $m-\frac{3}{2}e$, $m-\frac{5}{2}e$, u. s. w. anstatt $m-e$, $m-2e$, $m-3e$, u. s. w. weil am ersten Dreyecke zwischen m und $m-e$ die mittlere Neigung $= m-\frac{1}{2}$ ist; und so auch $m-\frac{3}{2}e$ die mittlere Neigung zwischen $m-e$ und $m-2e$; u. s. w.

Die mühevolle, und langweilige Berechnung der Schußweite für gegebene a, c, und m mittelst der Formel (3.20) auf die angeführte Weise kann in solchen Fällen vorgenommen werden, wenn man untersuchen will, in wie weit andere durch verschiedene Annäherungen bestimmten Formeln für die Schußweite und Erhöhung des Scheitels zutreffen.

§. 176.

Auch für die Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente läßt sich eine Gleichung angeben.

Denn es ist $dt^2 = -\frac{dp\,dx}{2g}$ (3.5) und $dz^2 = dx^2\left(1+p^2\right)$ folglich auch $\frac{dz^2}{dt^2} = -\frac{2gdx\left(1+p^2\right)}{dp}$ und wegen $\frac{dz}{dt} = v$, ist ferner auch $v^2 = -\frac{2gdx\left(1+p^2\right)}{dp}$.

Nun setze man hier statt dx den Werth aus (§. 174.)

$$dx = \frac{a\,dp}{C+\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}$$

so erhält man

$$v^2 = \frac{2ag\left(1+p^2\right)}{C+\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}$$

Setzet man endlich in dieser Gleichung den im (3.19) für C bestimmten Werth, und $\tan\varphi$ anstatt p; so erhält man nach vorgenommener Reduction

$$v^2 = \frac{4agc^2\cos^2 m}{\cos^2\varphi} : \left\{4ag + c^2\cos^2 m\cdot\left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \log\tan\left(45^\circ+\frac{1}{2}m\right) - \log\tan\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)\right]\right\} \qquad (3.21)$$

die gesuchte Formel für die Tangentialgeschwindigkeit in jedem beliebigen Puncte der Bahn.

Hieraus folget für $\varphi = 0$ die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit am Scheitel der Bahn nach horizontaler Richtung

$$v^2 \quad = \quad \frac{4agc^2 \cos^2 m}{4ag + c^2 \cos^2 m \cdot \left[\frac{\sin m}{\cos^2 m} + \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}m\right)\right]}. \qquad (3.22)$$

Anmerk. Man kann für die Tangentialgeschwindigkeit vermöge der (im §. 170.) gebrauchten Annäherungen einen einfacher Ausdruck finden, wenn man in der Gleichung

$$v^2 = -\frac{2g\,dx\left(1+p^2\right)}{dp}$$

für dx den Werth

$$dx = -\frac{a\,dp}{\tan m + \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m} - p}$$

(aus §. 170. N. 12.) substituiret.

§. 177.

Um endlich auch die Zeit t zu finden, welche zur Beschreibung eines beliebigen Bogens z der Bahn verwendet wird, ist $dt = \sqrt{-\frac{dp\,dx}{2g}}$ aus (3.5).

Setzet man nun statt dx den Werth (aus §. 174.)

$$dx \quad = \quad \frac{a\,dp}{C + \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}$$

so erhält man folgende Differenzialgleichung

$$dt \quad = \quad \frac{dp\sqrt{a}}{\sqrt{2g\left[-C - \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{2}L\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right]}}$$

die sich aber nicht integriren läßt.

Um nun durch Annäherung eine Differenzialgleichung für dt zu erhalten, die sich integriren läßt, setze man in der Gleichung (aus (3.7))

$$dt \quad = \quad \frac{dx}{\sqrt{2ag}}\sqrt{\tan m + \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m} - p}$$

den Werth für p (aus (3.9))

$$p \quad = \quad \tan m + \frac{2ag}{c^2 \cos^2 m} - \frac{2agh^{\frac{x}{a}}}{c^2 \cos^2 m}$$

dadurch erhält man

$$dt \quad = \quad \frac{dx\,h^{\frac{x}{2a}}}{c\cos m}.$$

Und hieraus folget die gesuchte Annäherungs Formel zur Berechnung der Zeit, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ seyn muß,

$$t = \frac{2a}{c\cos m} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right).$$

Nach der zweyten Annäherung (§. 173.) ist also

$$t = \frac{2a\cos\frac{1}{2}m}{c\cos m} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a\cos\frac{1}{2}m}} - 1\right).$$

§. 178.

Hiermit ist nun das Wesentliche eingezeiget, worauf man bey diesem balistischen Probleme zu sehen habe. Bey der ausübenden Artillerie ist davon kein besonderer Gebrauch zu machen. Nur die Formeln (3.12) und (3.13) oder auch II. §. 173. und III. §. 173. können in dem Falle mit Nutzen gebrauchet werden, wenn zu einer neuen Beschützgattung eine Tabelle der Tragweiten für verschiedene Elevationswinkel zu entwerfen ist. Wenn z. B. zu einer 8pfündigen Kanone bey einer bestimmten Ladung die Tragweiten für alle einzelne Elevationswinkel von 1 bis 15 Grad anzugeben wären; so müßte man die zu zwey oder drey verschiedenen Elevationen, etwan zu 1°, 8°, 15° zugehörigen Schußweiten durch einige genau ausgeführte Probeschüsse bestimmen. Sodann könnte man mittelst der Formel III. §. 173. aus der mittleren Schußweite bey jeder der drey gebrauchten Elevationen die anfängliche Geschwindigkeit berechnen. Aus den so berechneten anfänglichen Geschwindigkeiten lassen sich sodann die Schußweiten für die übrigen zwischenliegenden Elevationen mit zureichender Genauigkeit mittelst der Formel II. §. 173. einschalten.

§. 179.

Wenn man hier die Formel der geradlinigen Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel bey Vernachlässigung der Schwerkraft (aus §. 158.) mit den Formeln des lothrechten Steigens (aus §. 166.) gehörig verbindet; so erhält man auch eine Gleichung für die Bahn einer geschossenen Kugel in einem Widerstehenden flüssigen Mittel. Allein eine solche Gleichung ist nicht ganz richtig, weil sie sich nicht zugleich aus den Differenzial-Gleichungen (§. 170.) ableiten läßt. Man kann sie nur als eine Annäherung zur gesuchten wahren Gleichung ansehen. Sie wird auf folgende Art gefunden.

Es sey $AMCB$ Fig. 54 die Bahn einer unter dem Elevationswinkel $BAT = m$ geschossenen oder geworfenen Kugel; $AP = NM = x$; $PM = AN = y$; die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ nach der richtung AT; und von A bis M die Dauerzeit der Bewegung $= t$.

Die Geschwindigkeit c kann man nach den Richtungen AN und AP in die zwey Geschwindigkeiten $c\sin m$ und $c\cos m$ zerlegen.

Daraus erhält man (vermöge (1.20) und (1.21))

$$AP = x = 2a \cdot \log\left(1 + \frac{tc\cos m}{2a}\right) ;$$

und hieraus

$$t = \frac{2a}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right) .$$

Ferner ist (vermöge (2.25)) AN oder

$$y \;=\; a \cdot \log\left[\left(1 + \frac{c^2\sin^2 m}{b^2}\right) \cdot \cos^2\left(\arctan\frac{c\sin m}{b} - \frac{bt}{2a}\right)\right] .$$

Substituiret man nun in dieser letzten Gleichung statt t den eben angeführten Werth $\frac{2a}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)$; so erhält man dadurch eine Gleichung für y, welche bloß durch x, und durch andere gegebene Größen ausgedrucket ist; nähmlich

$$y = \log\left[\left(1 + \frac{c^2\sin^2 m}{b^2}\right)\cos^2\left(\arctan\frac{c\sin m}{b} - \frac{b}{c\cos m}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)\right)\right] .$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man sodann die größte Ordinate DC, und dazu gehörige Abscisse AD, oder die Schußweite des aufsteigenden Astes nach der Lehre vom Größten und Kleinsten bestimmen.

Darauf suchet man die Geschwindigkeit $= V$ für den Scheitel der Bahn nach der horizontalen Richtung CQ mittelst der Formel $v = ch^{-\frac{x}{2a}}$ im (1.18) da man in dieser Formel $c\cos m$ statt c, und den Werth AD statt x setzet.

Aus der nun bekannt gewordenen Geschwindigkeit $= V$ im Scheitel der Bahn läßt sich ferner auch eine Gleichung für den niedersteigenden Ast angeben. Wenn man nähmlich $CQ = x$, $QR = y$ setzet, und die Zeit der Bewegung von C bis R mit t bezeichnet; so ist (vermöge (1.20))

$$CQ = x = 2a \cdot \log\left(1 + \frac{Vt}{2a}\right) ;$$

hieraus

$$t = \frac{2a}{V}\left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right) ;$$

und (vermöge (2.12)) ist QR, oder

$$y = bt + 2a \cdot \log\frac{1}{2}\left(1 + h^{-\frac{bt}{a}}\right) .$$

Substituiret man nun in dieser Gleichung statt t den angeführten Werth $\frac{2a}{V} \cdot \left(h^{\frac{x}{2a}} - 1\right)$, so erhält man die gesuchte Gleichung für den niedersteigenden Ast. Daraus kann man nun aus dem schon bekannten Werthe von $FB = CD$ die dazugehörige Abscisse $CF = DB$ berechnen. Dadurch erhält man die Schußweite des niedersteigenden Astes. Addiret man endlich diese Schußweite des niedersteigenden Astes zu jener des aufsteigenden; so erhält man die ganze horizontale Schußweite AB.

Durch folgende Erwägung kann man auch die Gleichung für die Bahn der geschossenen Kugeln in der widerstehenden Luft erhalten; eben so wie im 3ten Th. §. 76. die Gleichung für die Parabel bei freyen Bewegung geworfener Körper gefunden worden ist.

Die Kugel werde nach der Richtung AT Fig. 55. unter dem Elevations-Winkel $BAT = m$ mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ geschossen. Nach Verlauf der Zeit $= t$ gelange sie nach M. Es sey $AP = x$, $PM = y$; so ist $AN = \frac{x}{\cos m}$, $PN = x \cdot \tan m$, und

$$y = x \cdot \tan m - NM.$$

Ohne Schwere würde die Kugel in der Zeit t in der widerstehenden Luft (vermöge (1.20)) den Weg

$$AN = \frac{x}{\cos m} = 2a \cdot \log\left(1 + \frac{ct}{2a}\right)$$

zurücklegen; und es wäre

$$t = \frac{2a}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right).$$

Weil aber die Schwerkraft auf die Kugel wirket; so wird diese dadurch in derselben Zeit t nach lothrechter Richtung um NM gegen den Horizont herabgetrieben; und es ist (wegen (2.12))

$$MN = bt + 2a \cdot \log\frac{1}{2}\left(1 + h^{\frac{-bt}{a}}\right)$$

oder wenn man statt t den angeführten Werth setzet,

$$MN = \frac{2ab}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right) + 2a \cdot \log\frac{1}{2}\left[1 + h^{-\frac{2b}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)}\right]$$

und endlich ist, wenn man diesen Werth anstatt NM in obiger Gleichung substituiret,

$$y = x \cdot \tan m - \frac{2ab}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right) - 2a \cdot \log\frac{1}{2}\left[1 + h^{-\frac{2b}{c}\left(h^{\frac{x}{2a\cos m}} - 1\right)}\right]$$

die gesuchte Gleichung für die Bahn.

Da man aber von dieser Gleichung bey der Ausübung keinen Gebrauch machen kann; und auch von ihrer Richtigkeit keine Ueberzeugung hat; so ist es nicht nöthig sich länger dabey aufzuhalten.

§. 180.

Zum Beschluße dieses Wertes will ich nur noch eine kurze Erwähnung machen, wie man die anfängliche Geschwindigkeit der Kanonenkugeln aus der Pulverladung und aus der Länge des Geschützrohres bestimmen könne. Man kann zwar bey einer solchen Untersuchung den vorgesetzten Zweck niemahls mit befriedigender Genauigkeit erreichen, weil bey der Hervorbringung der Geschwindigkeit durch die Entzündung des Schießpulvers in einem Geschütze so vielerley verschiedene, nicht hinlänglich bekannte, Umstände zusammentreffen, daß man sie nicht alle in Rechnung bringen kann. Indessen wird es doch nicht überflüssig seyn, allhier den Weg zu zeigen, wie man vorzugehen habe, um sich dem aussteckten Ziele zu nähern; und zwar durch folgende

Aufgabe

Aus der gegebenen Länge des Geschützrohres, aus der Länge der Pulverladung, und aus dem Durchmesser der Kugel die anfängliche Geschwindigkeit der geschossenen Kugel zu finden, mit welcher sie aus der Mündung des Geschützes hinausfährt.

Auflösung

1) Es sey

$a = AD$ Fig. 56. die Länge der cylindrischen Aushöblung des Geschützes; der Seele Kanone.

$b = AB$ die Länge des mit Schießpulver angefüllten cylindrischen Raumes. Hätte dieser Raum eine andere Gestalt, so müßte er in einer Zylinder von der Weite der Kugel verwandelt werden um die Länge $= b$ zu erhalten.

c der Durchmesser der Kugel, welcher hier dem Durchmesser der Bohrung, oder der Seele gleich gesetzet wird.

n die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl die specifische Schwere der Kugel größer ist, als die specifische Schwere des Wassers. Bey den vollen eisernen Kugeln ist sehr nahe $n = 7{,}1$. Bey den hohlen Kugeln (Bomben und Grenaden) müßte man das Gewicht einer solchen hohlen Kugel durch das Gewicht einer eben so größen vollen Wasserkugel dividiren, um n zu erhalten.

f sey die Höhe der Wassersäule deren Gewicht den Elasticitätsbruch der atmosphärischen Luft in ihrem mittleren Zustande an der Erdfläche vorstellet. Es ist beynähe $f = 32$ Fuß.

m sey die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl die aus der Verbrennung des Schießpulvers erzeugte, und durch die Hitze vermehrte Elasticität der in dem Raume der Pulverladung noch eingeschlossenen Luft größer ist, als die Elasticität der gewöhnlichen atmosphärischen

Luft. Aus mehreren Versuchen hat man gefunden, daß man beyläufig $m = 1000$ setzen könne.

q sey das eigenthümliche Gewicht des Wassers. Im Wiener-Maße und Gewichte ist $q = 56\frac{3}{8}$ Pfund.

2) Nach diesen Benennungen ist nun die Pressung gegen die Kugel bey B (wenn die Pulverladung durch die Verbrennung in elastischen Dampf sich aufgelöset hat, ehe die Kugel von ihrer Stelle merklich gewichen ist) im Anfange der Bewegung $= \frac{1}{4}c^2\pi \cdot mfq =$ dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche, und die $m$fache Elasticitäts-Höhe der gewöhnlichen atmosphärischen Luft zu ihrer Höhe hat.
3) In einer gewissen Zeit $= t$ wird durch diese anfängliche Pressung die Kugel bis P fortgetrieben; und sie erlanget dadurch in P eine gewisse Geschwindigkeit $= v$ nach zurückgelegtem Wege $BP = x$.
4) Die Pressung des elastischen Pulverdampfes gegen die Kugel in P ist nun hier im Verhältniße des Raumes AP zu AB vermindert; weil die Elasticitäten einer und derselben Luftmasse in verschiedenen Raumsinhalten AB und AP sich verhalten umgekehrt wie diese Raumsinhalte (§. 67.), oder hier umgekehrt wie die Längen AP $(b + x)$ zu AB (b). Nähmlich aus der Pressung in B, $= \frac{1}{4}c^2\pi mfq$ folget die Pressung in P gegen die Kugel nach dem bekannten Mariottischen Gesetze $= \frac{1}{4}c^2\pi mfq \times \frac{b}{b+x}$. Dieser Ausdruck stellet uns die bewegende Kraft in dem Puncte P vor. Die bewegte Masse aber ist das Gewicht der Kugel $= \frac{1}{6}c^3\pi nq$.
5) Substituiret man nun in der allgemeiner Formel der Bewegung $v\,dv = \frac{2gP\,dx}{M}$ (3. Th. §56. III.) anstatt P und M die Werthe $P = \frac{1}{4}c^2\pi mfq\frac{b}{b+x}$, und $M = \frac{1}{6}c^3\pi nq$; so ist

$$v\,dv = \frac{3mbfg}{cn} \cdot \frac{dx}{b+x}.$$

Daraus folget durch die Integration

$$v^2 = \text{Const.} + \frac{6mbfg}{cn} \cdot \log(b+x)$$

es ist aber $v^2 = 0$ für $x = 0$; folglich Const. $= -\frac{6mbfg}{cn} \cdot \log b$; und

$$v^2 = \frac{6mbfg}{cn} \log\left(1 + \frac{x}{b}\right).$$

6) Für $x = BD = a - b$ erhält man aus der letzten Formel die Geschwindigkeit der Kugel an der Mündung des Geschützes, welche man die anfängliche Geschwindigkeit zu nennen pflegt. Wird nun diese gesuchte anfängliche Geschwindigkeit mit V bezeichet; so ist, wenn man in der ausgeführten Formel $a - b$ statt x und V statt v schreibt,

$$V \quad = \quad \sqrt{\frac{6mbfg}{cn} \cdot \log \frac{a}{b}}$$

oder wenn man für m, f, g, ihre Werthe $m = 1000$, $f = 32$, $g = 15\frac{1}{2}$ setzet, und a, b, c im Wien. Fußmaße ausdrucket,

$$V = \sqrt{\frac{2976000b}{nc} \cdot \log \frac{a}{b}} \quad \text{Wien. Fuß.}$$

Nach dieser Formel wird sowohl für $b = 0$, als auch für $b = a$ die Geschwindigkeit $V = 0$. Deßwegen gibt es einen Werth für b, bey welchem V ein Größtes wird; und es ist leicht diesen Werth zu bestimmen.

7) Wenn der Raum hinter der Kugel $AB = b$ nicht ganz, sondern nur ein Theil desselben, dessen Länge $= e$ sey, mit Pulver angefüllet wäre; so müßte in der vorigen Formel $V = \sqrt{\frac{2976000b}{nc} \cdot \log \frac{a}{b}}$ anstatt $m = 1000$ nun gesetzet werden $m = \frac{1000e}{b}$; und die anfängliche Geschwindigkeit, im Wien. Fußmasse ausgedrucket, wäre sodann

$$V = \sqrt{\frac{2976000e}{nc} \cdot \log \frac{a}{b}}\,.$$

§. 181.

Nach den zuletzt angeführten Formel kann man nun zu den gebräuchlichen Feld- und Belagerungs-Kanonen, wie auch zu den Mörsern und Haubizen aus den bekannten Abmessungen derselben, und aus den dazugehörigen Pulverladungen die anfängliche Geschwindigkeit für jedes Geschütz berechnen. Wenn man diese so berechnete anfängliche Geschwindigkeit mit jener vergleichet, die man durch die oben (§. 173. III) angegebene Formel aus der bekannten Schußweite und aus dem Elevationswinkel in einem widerstehenden flüssigen Mittel erhält; so wird man daraus ersehen, wie groß man nach Verschiedenheit des Schießpulvers den Werth von m in der letzten Formel allhier annehmen könne, daß die zwey aus verschiedenen Gründen abgeleiteten anfänglichen Geschwindigkeiten mit einander übereinstimmen.

§. 182.

Die nach der gegebenen Formel (§. 180.) berechnete anfängliche Geschwindigkeit kann übrigens nur beynahe richtig seyn, weil verschiedene Hindernisse der Bewegung hier vernachlässiget sind, welche alle insgesammt die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit vermindern.

Diese Hindernisse sind.

1) Der Druck der Atmosphäre gegen die Kugel $= \frac{1}{4}c^2\pi fq$ von der Seite der Mündung. Wenn man nun diesen auch in Erwägung ziehen will, so muß man bey der Auslösung der angeführten Aufgabe in N. 5. für P den Werth $= \frac{1}{4}c^2\pi mfq \cdot \frac{b}{b+x} - \frac{1}{4}c^2\pi fq$ setzen; dadurch erhält man die gesuchte anfängliche Geschwindigkeit in N. 6.

$$V = \sqrt{\frac{6fg}{nc}\left[mb \cdot \log\frac{a}{b} - (a-b)\right]}.$$

2) Der Luftwiderstand.
3) Der Verlust des elastischen Pulverdampfes durch das Zündloch und durch den Spielraum.
4) Die Reibung, welche die Kugel bey ihrer Bewegung im Rohre zu überwinden hat.
5) Die allmählige Entzündung des Pulvers. Es ist nähmlich bey der Auflösung dieser Aufgabe vorausgesetzet worden, daß die ganze Pulverladung durch eine gleichsam plötzliche Verbrennung in elastischen Dampf ausgelöset sey, ehe die Kugel von ihrer anfänglichen Stelle merklich wegrücket. Dieses ist nun nicht so beschaffen. Das Pulver brauchet immer eine gewisse, obschon sehr kleine Zeit zu seiner gänzlichen Verbrennung. Sobald ein Theil der Pulverladung entzunden ist, wird durch diesen elastischen Dampf die Kugel, und die mit ihr das noch nicht enzündete Pulver in Bewegung gesetzet, so daß man in obiger Formel bey der Bestimmung der bewegten Masse M zu der Masse der Kugel auch noch einen gewissen Theil der Pulverladung hinzusetzen sollte. Wie nun diese und noch einige andere Hindernisse im gegenwärtigen Falle in Erwägung zu ziehen, und in Rechnung zu bringen sind, lehret umständlich L. Euler in der Anmerkungen zu Robins neuen Grundsätzen der Artillerie Berlin 1745. Wer sich die bisher vorgetragenen Gründe der höheren Analysis, Dynamik- und Hydro-dynamik eigen gemacht hat, wird das genannte Werth des L. Euler, wie auch andere ähnliche Schriften über theoretische Gegenstände der Artillerie lesen, und gründlich beurtheilen können, was für ein Nutzen für die praktische Artillerie daraus zu schöpfen sey.

§. 183.

Die im §. 182. angegebene Formel

$$V = \sqrt{\frac{6fg}{nc}\left[mb \cdot \log\frac{a}{b} - (a-b)\right]}$$

zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit V aus der gegebenen Länge des Geschützrohres, aus der Pulverladung, und aus der Durchmesser der Kugel, dienet auch zur Berechnung der anfänglichen Geschwindigkeit einer mittelst der Windbüchse abgeschossenen Kugel wenn m die Zahl bedeutet, wie vielmahl die Raume AB zusammengepreßte Luft dichter ist, als die gewöhnliche atmosphärische. Diese Formeln gibt zu erkennen, daß V immer größer werden kann, je größer m wird. Und so zeiget auch die Formel im §. 180. N. 6. an daß bey einer bestimten Pulverladung V mit a ohne Ende wachsen müßte. Das letzte kann zwar nur in solange geschehen, bis die Elasticität des anfangs in AB zusammengepreßten, und nun durch AD verbreiteten Pulverdampfes nur noch so groß ist, als die Elasticität und der Widerstand der atmosfärischen Luft; worauf sodann die fernere Vermehrung der Geschwindigkeit der Kugel aufhöret.

Wenn man übrigens den Werth des Buchstaben m in den angegebenen Formeln vermehren, das ist durch irgend ein Hülfsmittel die Kraft des Pulvers vergrößern könnte, dessen Möglichkeit man doch nicht läugnen kann; so müßte die anfängliche Geschwindigkeit dadurch auch vergrößert werden; nähmlich je größer m würde, desto größer müßte in einem gewissen Verhältnisse auch V werden. Die Geschwindigkeit also, die man Kugeln, Grenaden, und Bomben durch die elastische Kraft des Pulverdampfes beybringen kann, hat kein Grenze, die sie nicht erreichen, nicht übersteigen könnte.

§. 184.

Und doch behauptet Herr John Muller in seinem Werke Treatise of Artillery, the third Edition, London 1780, daß man einer abgeschossenen Kugel nur einen gewissen Grad von Geschwindigkeit in der widerstehenden Luft beybringen kann, die bewegende Kraft möge wie immer vermehret werden: so wie es bey dem lothrechten Sinken eines festen Körpers in der widerstehenden Luft eine Grenze gibt, welche die wachsende Geschwindigkeit nicht übersteigen kann. Ueber diesen neu aufgestellten Gaß des H. Muller von der Bestimmung der möglich größten Geschwindigkeit der Kanonenkugeln ist eine aus dem englischen übersetzte Abhandlung in Böhms Magazine für Ingenieurs und Artilleristen V. Bd. Giessen 1779 Seite 259 befindlich.

Diese möglich größte Geschwindigkeit $= c$ hängt nach der Meinung des H. Muller bloß allein vom Durchmesser der Kugel $= D$, und von der Verhältnißzahl $= N$ der specifischen Schwere der Kugel zur specifischen Schwere der Luft ab; er setzet $c = \sqrt{24gDN}$ bey der Beschleunigung der Schwere $= g$. Nach seiner Berechnung ist die möglich größte Geschwindigkeit einer 3lb gen englischen eisernen Kugel nicht größer als 615,7 Londner Fuß, und bey der 6lb gen Kanone nicht größer als 619,3 Fuß. Wenn ein Geschütz, z. B. eine 6lb ge Kanone, und eine dazugehörige Pulverladung hergestalt eingerichtet sind, daß die 6lb ge Kugel gerade die angegebene Geschwindigkeit von 619,3 Fuß erhält; so ist nach der Meinung des H. Muller jede fernere Bemühung, etwan durch Verlängerung des Rohres, Verminderung des Spielraums, Verstärtung der Ladung, Verbesserung des Pulvers, u. s. w. die anfängliche Geschwindigkeit der abzuschiessenden Kugel zu vergrößern, gänzlich fruchtlos. Die Erfahrung stimmet mit dieser Bahauptung nicht überein; sie ist auch sonst den Gründen der Mechanik nicht gemäß. Im erwähnten Magazine für Ing. und Artill. wird zwar die Richtigkeit dieser neuen Lehre des H. Muller bezweifelt. Allein der eigentliche Irrtum ist nicht aufgedecket. Ich war daher bemühet diesen Irrtum, der in mehreren Auflage des genanten Werkes vom H. Muller aufrecht erhalten wird, bis zu seinem Ursprunge zu verfolgen; und entdeckte denselben im Folgenden.

H. John Muller hat in seinem Werke, Appendix or Supplement to the Treatise of Artillery, London 1768, Seite 117 im Absatze 168, durch unrichtige Schlüsse nachstehende Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}r \cdot \log\frac{r-c^2}{r-v^2} \tag{3.23}$$

$$t = \frac{1}{2}a \cdot \log\frac{(a-c)(a+v)}{(a+c)(a-v)} \tag{3.24}$$

herausgebracht, welche bey einer geradlinigen Bewegung im widerstehenden flüssigen Mittel auf einer horizontalen Ebene mit Beseitigung der Reibung und aller sonstiger Hindernisse außer dem Widerstande des Flüssigen, den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege y, zwischen der Dauerzeit t, zwischen der anfänglichen Geschwindigkeit c, zwischen der noch vorhandenen Geschwindigkeit v nach der Zeit t, und zwischen dem unveränderlichen Werthe $r = a^2$ vorstellen sollen. Und es bedeutet bey ihm $r = 6DN$ diejenige Höhe, vom welcher eine Kugel des Durchmessers D im luftleeren Raume frey herabfallen müßte, um eine Geschwindigkeit $= \sqrt{4gr}$ zu erhalten, daß sodann bey dieser Geschwindigkeit der Widerstand einer flüssigen Masse gegen die Kugel eben so groß wäre, als das Gewicht der Kugel; N zeiget übrigens an, wie vielmahl die specifische Schwere der Kugel größer ist, als die specifische Schwere der flüssigen Masse. Der Widerstand der flüssigen Masse gegen eine darin bewegte Kugel ist nach der Meinung des H. Muller dem Gewichte einer Säule dieser Flüssigkeit gleich, welche die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche, und $\frac{1}{9}$ der Geschwindigkeithöhe zu ihrer Länge hat. Bey allen bisher angestellten Versuchen hat man den Widerstand weit größer gefunden. Herr Muller mußte ihn so klein annehmen, damit er die aus ebenfalls viel zu klein angenommenen anfänglichen Geschwindigkeiten berechneten Schußweiten der Kanonkugeln mit der Erfahrung übereinstimmend machte. Er hat auf diese Art der zweyte Fehler den ersten beinahe getilget.

Nachdem H. Muller die angeführten unrichtigen Gleichungen (3.23) und (3.24) angestellet hatte, sagte er nun weiters im 169ten Absatze Seite 119.[2]

[2]Hence, it is manifest, that the given velocity, with which the body begins to move, must always be less than the greatest velocity that the body can acquire in the medium. For when $r = c^2$, or $a = c$ then both the space moved over and the time elapsed vanish. Although this is very remarkable, yet no author has taken notice of it; on the contrary, they often suppose this velocity much greater. — It must be observed that the same thing is true, wether the body moves in an horizontal line or in

Hieraus (aus der angeführten Formeln (3.23) und (3.24)) erhellet ganz deutlich, daß die gegebene Geschwindigkeit, mit der ein Körper sich zu bewegen anfängt, jederzeit kleiner seyn müsse, als die möglich größte, die dieser Körper im demselben widerstehenden flüssigen Mittel (durch den Fall) erlangen kann. Denn wenn $r = c^2$, oder $a = c$ gesetzet wird; so verschwindet sowohl der zurückgelegte Weg, als auch die verflossene Zeit (eigentlich wird y und t unmöglich). Obwohl dieses eine sehr merkwürdige Wahrheit ist; so hat doch bisher kein Schriftsteller hierauf Bedacht genommen; im gegentheile nehmen einige die Geschwindigkeit viel größer an. — Man muß hierbey ferner bemerken, daß dieser Satz immer Wahr bleibe; es möge sich der Körper entweder wagrecht, oder aber längst einer schifen Ebene bewegen, weil dadurch an den obigen Ausdrucken nichts geändert wird. Wir halten für nöthig diesen Umstand hier bey zusetzen, damit nicht vielleicht ein etwas unachtsamer Reder das bisher gesagte nur allein auf horizontale Bewegungen anwendbar glaube.

Daß die zwey angeführten Gleichungen (3.23) und (3.24) auch bey dem vom H. Muller angenommenen Widerstande unrichtig sind, erhellet sogleich, wenn man dieselben mit dem oben im §. 158 für eben diesen Fall aus richtigen Gründen abgeleiteten Formeln vergleichet.

Wenn man nähmlich bey der Aufgabe im §. 158. auch den Widerstand gegen die Kugel nach der Meinung des H. Muller $P = \frac{1}{4}D^2\pi \cdot \frac{v^2}{4g} \cdot \frac{1}{9}$ setzet, und sodann in der Grundformel

$$v\,dv = -\frac{2gP\,dy}{M}$$

für P diesen Werth, und $\frac{1}{6}D^3\pi N$ für M substituiret; so ist

$$dy = -12DN \cdot \frac{dv}{v}$$

und für $6DN = r$,

$$dy = -2r \cdot \frac{dv}{v};$$

hieraus folget

$$y = 2r \cdot \log\frac{c}{v}, \tag{3.25}$$

weil für $y = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ ist.

---

one which makes a given angle with it, since every thing will be the same as above. This we thought necessary to take notice of, to prevent an uncautious reader from taking what has been here said as only to horizontal ranges.

Setzet man ferner in der zweyten Grundformel der Bewegung $dy = v\,dt$ statt dy den eben eingeführten Werth $-2r \cdot \frac{dv}{v}$; so ist

$$\begin{aligned} -\frac{2r\,dv}{v} &= v\,dt; \quad \text{und} \\ dt &= -2rv^{-2}\,dv; \end{aligned}$$

Hieraus folget nun

$$t = 2r\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right),$$

weil für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ ist; und endlich ist für $r = a^2$

$$t = 2a^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right). \tag{3.26}$$

Es ist daher bey der geradlinigen Bewegung auf einen horizontalen Ebene in einem widerstehenden flüssigen Mittel der Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Wege, zwischen den Geschwindigkeiten und zwischen der Zeit, wenn man den Widerstand so klein annimmt, als H. Muller denselben voraussetzet, durch folgende zwey Gleichungen richtig vorgestellet,

$$y = 2r \cdot \log\frac{c}{v},$$

und für $a^2 = r$,

$$t = 2a^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right),$$

keineswegs aber durch die vom H. Muller durch unrichtige Schlüsse herausgebrachten, oben bemerkten Formeln

$$y = \frac{1}{2}r \cdot \log\frac{r - c^2}{r - v^2},$$

und für $a^2 = r$

$$t = \frac{1}{2}a \cdot \log\frac{(a-c)(a+v)}{(a+c)(a-v)}.$$

Da nun die angeführten zwey Gleichungen des Herrn Muller gänzlich unrichtig sind; so ist auch alles übrige, was er daraus in den zwey genannten Werken von der Bestimmung der möglich größten Geschwindigkeit der geschossenen Kugeln nach Verschiedenheit des Calibers, von der vortheilhaftesten Länge der Geschützröhre, von der vortheilhaftesten Pulverladung zu einer gegebenen Länge des Geschützrohres, u. s. w. gefolgert hat, unrichtig und ganz verwerflich. Es wäre zu weitläufig alle diese Unrichtigkeiten hier auszuhegen, und zu berichtigen. Dieses könnte nur bey einer vollständigen Uebersetzung des gennanten Werkes des H. Muller Appendix or Supplement to the Treatise of Artillery geschehen.

§. 185.

Hier folget noch die oben erwähnte balistische Tafel, welche bey der Berechnung der Schußweiten in der widerstehenden Luft mit Vortheile gebrauchet werden kann, wie es aus folgendem Beyspiele zu ersehen ist.

Es werde eine 4pfündige eiserne Kugel, deren Durchmesser = 3 Zoll = $\frac{1}{4}$ Fuß ist, unter einem Erhöhungswinkel von 15 Grad $= m$ mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $c = 1200$ Fuß aus einem dazu angemessenen Geschütze hinausgeschossen; der Kubikfuß des gegossenen Eisens, woraus die Kugel besteht, wiege 400 Pfunde, und der Kubikfuß der atmosphärischen, hier von gleichförmiger Dichtigkeit angenommenen Luft, worin die Bewegung der geschossenen Kugel vor sich geht, wiege 2 Loth $= \frac{1}{16}$ Pfund Wien. Hand. Gew. Man soll die Schußweite im Horizonte der Mündung des Geschützes berechnen.

Diese findet man nun durch Beyhülfe der balistischen Tafel auf folgende Art. Vermöge (3.17) ist

$$\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}}-1\right) : \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} \quad = \quad 1+\frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m}.$$

die Formel, in welcher x die gesuchte Schußweite bedeutet. Weil nun hier $D = \frac{1}{4}$, und $N = 400 : \frac{1}{16} = 6400$ ist; so ist $DN = 1600$;

$$\begin{array}{rcl}
\text{und } a = \frac{4}{3}DN = \frac{6400}{3}, \quad \log a & = & 3{,}3290587 \\
\log\cos\frac{1}{2}m \ = \ \log\cos 7°30' & = & \underline{0{,}9962686-1} \\
\log\left(a\cdot\cos\frac{1}{2}m\right) & = & 3{,}3253273 \\
g = 15\frac{1}{4}, \quad 4g = 62, \quad \log 4g & = & \underline{1{,}7923917} \\
\log\left(4ag\cdot\cos\frac{1}{2}m\right) & = & 5{,}1177190 \\
c^2 = 1440000,\ \sin 2m \ = \ \sin 30° \ = \frac{1}{2} & & \\
c^2\cdot\sin 2m \ = \ 720000;\ \log c^2\cdot\sin 2m & = & \underline{5{,}8573325} \\
 & & 0{,}7396135
\end{array}$$

hierzu gehöret die Zahl $\frac{c^2\sin 2m}{4ag\cos\frac{1}{2}m} = 5{,}4905$.

Und nun hat man die Gleichung

$$\left(h^{\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}}-1\right) : \frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} \quad = \quad 6{,}4905$$

woraus sich mittelst der balistischen Tafel der Werth $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = n$ bestimmen läßt.

Denn wenn man in dieser Tafel in der Spalte $\left(\frac{h^n-1}{n}\right)$ die Zahl 6,4905 aufsuchet; so findet man, daß $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m}$ größer als 3,02 und kleiner ans 3,303 sey; worous sodann durch die Einschaltung mittelst der Differenzen $\frac{x}{a\cos\frac{1}{2}m} = 3{,}0278$ folget;

nähmlich gegebene Zahl	=	6,4905		
nächst kleinere i. d. Tas.	=	6,4541	bey	3,02
Differenz	=	364		
Differenz der Tafel	=	466		
		und nun $\frac{364}{466} \times \frac{1}{100}$	=	0,0078
		$\frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m}$	=	3,0278

Hiervon $\log \frac{x}{a \cos \frac{1}{2} m}$	=	0,4811272
$\log a \cdot \cos \frac{1}{2} m$	=	3,3253273
gibt $\log x$	=	3,8064545

folglich ist die gesuchte Schußweite $x = 6404$ Fuß $= 1067$ Klafter 2 Fuß.

Wenn man in diesem Beyspiele die Schußweite nach der Formel (3.12)

$$\left(h^{\frac{x}{a}} - 1\right) : \frac{x}{a} = 1 + \frac{c^2 \sin 2m}{4ag}.$$

berechnet; so findet man $x = 6437$ Fuß.

Wenn hingegen die Luft keinen Widerstand leistete; so wäre in dem angeführten Falle nach der parabolischen Lehre vermöge (Z. Th. §. 77.) die Schußweite $\frac{c^2 \sin 2m}{2g} = 23226$ Fuß. Es ist hieraus ersichtlich, wie sehr die Schuß- und Wurfweiten durch den Widerstand der Luft verkurzet werden.

Aus den angeführten verschiedenen Formeln zur Berechnung der Schußweite bey der Bewegung in einem widerstehenden flüssigen Mittel ist es ersichtlich, daß bey einerley anfänglichen Geschwindigkeit, und bey sonst gleichen Umständen die Kugeln von größeren Durchmessern auch größere Tragweiten haben müssen, als die von kleineren Durchmessern, obschon der Widerstand des flüssigen gegen eine größere Kugel größer ist, als gegen eine kleinere. Z. B. Der Widerstand der Luft gegen eine darin bewegte 24 lb ge Kugel ist viermahl so groß, als gegen eine 3 lb ge, die sich mit eben derselben Geschwindigkeit in eben derselben Luft beweget; und doch erreichet bey einerley anfänglichen Geschwindigkeit unter einerley Elevation die 24 lb ge Kugel eine viel größere Weite, als die 3 lb ge, dieses wird ganz deutlich eingesehen, wenn man nur erwäget, daß die Verminderung der anfänglichen Geschwindigkeit eigentlich von dem Werthe des Bruches $\frac{gP}{M}$ in den Grundformeln der Bewegung abhänget. Diesen Werth kann man hier die Verzögerung der Bewegung wegen des Widerstandes nennen. Diese Verzögerung ist nun, da P dem Quadrate des Durchmessers der bewegten Kugel, und M dem Würfel desselben bey sonst gleichen Umständen proportional ist, bey einer 24 lb gen eisernen Kugel nur halb so groß, als bey einer 3 lb gen; und deßwegen muß die erste bey einerley Geschwindigkeit und Richtung eine größere Weite erreichen, als die zweyte; welches auch mit Erfahrungen und Versuchen übereinstimmet.

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
0.01	1.0050	0.0051	0.34	1.1910	0.0063	0.67	1.4242	0.0079
0.02	1.0101	0.0051	0.35	1.1973	0.0064	0.68	1.4322	0.0080
0.03	1.0152	0.0051	0.36	1.2037	0.0064	0.69	1.4402	0.0081
0.04	1.0203	0.0052	0.37	1.2101	0.0064	0.70	1.4482	0.0081
0.05	1.0254	0.0052	0.38	1.2165	0.0065	0.71	1.4563	0.0082
0.06	1.0306	0.0052	0.39	1.2230	0.0065	0.72	1.4645	0.0082
0.07	1.0358	0.0053	0.40	1.2296	0.0066	0.73	1.4727	0.0083
0.08	1.0411	0.0053	0.41	1.2361	0.0066	0.74	1.4810	0.0083
0.09	1.0464	0.0053	0.42	1.2428	0.0067	0.75	1.4893	0.0084
0.10	1.0517	0.0054	0.43	1.2494	0.0067	0.76	1.4977	0.0085
0.11	1.0571	0.0054	0.44	1.2562	0.0068	0.77	1.5062	0.0085
0.12	1.0625	0.0054	0.45	1.2629	0.0068	0.78	1.5147	0.0086
0.13	1.0679	0.0055	0.46	1.2697	0.0069	0.79	1.5233	0.0086
0.14	1.0734	0.0055	0.47	1.2766	0.0069	0.80	1.5319	0.0087
0.15	1.0789	0.0055	0.48	1.2835	0.0070	0.81	1.5406	0.0088
0.16	1.0844	0.0056	0.49	1.2904	0.0070	0.82	1.5494	0.0088
0.17	1.0900	0.0056	0.50	1.2974	0.0070	0.83	1.5582	0.0089
0.18	1.0957	0.0057	0.51	1.3045	0.0071	0.84	1.5671	0.0090
0.19	1.1013	0.0057	0.52	1.3116	0.0071	0.85	1.5761	0.0090
0.20	1.1070	0.0057	0.53	1.3187	0.0072	0.86	1.5851	0.0091
0.21	1.1128	0.0058	0.54	1.3259	0.0072	0.87	1.5942	0.0091
0.22	1.1185	0.0058	0.55	1.3332	0.0073	0.88	1.6033	0.0092
0.23	1.1243	0.0059	0.56	1.3405	0.0074	0.89	1.6125	0.0093
0.24	1.1302	0.0059	0.57	1.3478	0.0074	0.90	1.6218	0.0093
0.25	1.1361	0.0059	0.58	1.3552	0.0075	0.91	1.6311	0.0094
0.26	1.1420	0.0060	0.59	1.3627	0.0075	0.92	1.6405	0.0095
0.27	1.1480	0.0060	0.60	1.3702	0.0076	0.93	1.6500	0.0095
0.28	1.1540	0.0061	0.61	1.3778	0.0076	0.94	1.6596	0.0096
0.29	1.1601	0.0061	0.62	1.3854	0.0077	0.95	1.6692	0.0097
0.30	1.1662	0.0061	0.63	1.3930	0.0077	0.96	1.6789	0.0098
0.31	1.1723	0.0062	0.64	1.4008	0.0078	0.97	1.6886	0.0098
0.32	1.1785	0.0062	0.65	1.4085	0.0078	0.98	1.6984	0.0099
0.33	1.1848	0.0063	0.66	1.4164	0.0079	0.99	1.7083	0.0100
0.34	1.1910	0.0063	0.67	1.4242	0.0079	1.00	1.7183	0.0100

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
1.01	1.7283	0.0101	1.34	2.1038	0.0128	1.67	2.5821	0.0164
1.02	1.7384	0.0102	1.35	2.1166	0.0129	1.68	2.5985	0.0165
1.03	1.7486	0.0103	1.36	2.1296	0.0130	1.69	2.6151	0.0167
1.04	1.7589	0.0103	1.37	2.1426	0.0131	1.70	2.6317	0.0168
1.05	1.7692	0.0104	1.38	2.1557	0.0132	1.71	2.6485	0.0169
1.06	1.7796	0.0105	1.39	2.1690	0.0133	1.72	2.6654	0.0170
1.07	1.7901	0.0106	1.40	2.1823	0.0134	1.73	2.6825	0.0172
1.08	1.8006	0.0106	1.41	2.1957	0.0135	1.74	2.6996	0.0173
1.09	1.8113	0.0107	1.42	2.2092	0.0136	1.75	2.7169	0.0174
1.10	1.8220	0.0108	1.43	2.2229	0.0137	1.76	2.7343	0.0176
1.11	1.8328	0.0109	1.44	2.2366	0.0138	1.77	2.7519	0.0177
1.12	1.8436	0.0109	1.45	2.2504	0.0139	1.78	2.7696	0.0178
1.13	1.8546	0.0110	1.46	2.2644	0.0140	1.79	2.7874	0.0180
1.14	1.8656	0.0111	1.47	2.2784	0.0141	1.80	2.8054	0.0181
1.15	1.8767	0.0112	1.48	2.2925	0.0142	1.81	2.8235	0.0182
1.16	1.8879	0.0113	1.49	2.3068	0.0144	1.82	2.8417	0.0184
1.17	1.8991	0.0113	1.50	2.3211	0.0145	1.83	2.8600	0.0185
1.18	1.9105	0.0114	1.51	2.3356	0.0146	1.84	2.8786	0.0186
1.19	1.9219	0.0115	1.52	2.3501	0.0147	1.85	2.8972	0.0188
1.20	1.9334	0.0116	1.53	2.3648	0.0148	1.86	2.9160	0.0189
1.21	1.9450	0.0117	1.54	2.3796	0.0149	1.87	2.9349	0.0191
1.22	1.9567	0.0118	1.55	2.3945	0.0150	1.88	2.9540	0.0192
1.23	1.9685	0.0119	1.56	2.4095	0.0151	1.89	2.9732	0.0194
1.24	1.9803	0.0119	1.57	2.4246	0.0152	1.90	2.9926	0.0195
1.25	1.9923	0.0120	1.58	2.4398	0.0153	1.91	3.0121	0.0197
1.26	2.0043	0.0121	1.59	2.4552	0.0155	1.92	3.0317	0.0198
1.27	2.0164	0.0122	1.60	2.4706	0.0156	1.93	3.0516	0.0200
1.28	2.0286	0.0123	1.61	2.4862	0.0157	1.94	3.0715	0.0201
1.29	2.0409	0.0124	1.62	2.5019	0.0158	1.95	3.0916	0.0203
1.30	2.0533	0.0125	1.63	2.5177	0.0159	1.96	3.1119	0.0204
1.31	2.0658	0.0126	1.64	2.5336	0.0160	1.97	3.1323	0.0206
1.32	2.0783	0.0127	1.65	2.5497	0.0162	1.98	3.1529	0.0207
1.33	2.0910	0.0128	1.66	2.5658	0.0163	1.99	3.1736	0.0209
1.34	2.1038	0.0128	1.67	2.5821	0.0164	2.00	3.1945	0.0211

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
2.01	3.2156	0.0212	2.34	4.0091	0.0273	2.67	5.0337	0.0354
2.02	3.2368	0.0214	2.35	4.0364	0.0275	2.68	5.0691	0.0356
2.03	3.2582	0.0215	2.36	4.0640	0.0278	2.69	5.1047	0.0359
2.04	3.2797	0.0217	2.37	4.0917	0.0280	2.70	5.1406	0.0362
2.05	3.3014	0.0219	2.38	4.1197	0.0282	2.71	5.1769	0.0365
2.06	3.3233	0.0220	2.39	4.1479	0.0284	2.72	5.2134	0.0368
2.07	3.3453	0.0222	2.40	4.1763	0.0286	2.73	5.2501	0.0371
2.08	3.3675	0.0224	2.41	4.2050	0.0289	2.74	5.2872	0.0374
2.09	3.3899	0.0226	2.42	4.2338	0.0291	2.75	5.3246	0.0377
2.10	3.4125	0.0227	2.43	4.2629	0.0293	2.76	5.3623	0.0380
2.11	3.4352	0.0229	2.44	4.2922	0.0295	2.77	5.4002	0.0383
2.12	3.4581	0.0231	2.45	4.3218	0.0298	2.78	5.4385	0.0386
2.13	3.4812	0.0233	2.46	4.3515	0.0300	2.79	5.4771	0.0389
2.14	3.5044	0.0234	2.47	4.3816	0.0302	2.80	5.5159	0.0392
2.15	3.5278	0.0236	2.48	4.4118	0.0305	2.81	5.5551	0.0395
2.16	3.5515	0.0238	2.49	4.4423	0.0307	2.82	5.5946	0.0398
2.17	3.5752	0.0240	2.50	4.4730	0.0310	2.83	5.6344	0.0401
2.18	3.5992	0.0242	2.51	4.5040	0.0312	2.84	5.6746	0.0404
2.19	3.6234	0.0243	2.52	4.5352	0.0314	2.85	5.7150	0.0408
2.20	3.6477	0.0245	2.53	4.5666	0.0317	2.86	5.7558	0.0411
2.21	3.6723	0.0247	2.54	4.5983	0.0319	2.87	5.7969	0.0414
2.22	3.6970	0.0249	2.55	4.6302	0.0322	2.88	5.8383	0.0417
2.23	3.7219	0.0251	2.56	4.6624	0.0324	2.89	5.8800	0.0421
2.24	3.7470	0.0253	2.57	4.6949	0.0327	2.90	5.9221	0.0424
2.25	3.7723	0.0255	2.58	4.7276	0.0330	2.91	5.9645	0.0428
2.26	3.7978	0.0257	2.59	4.7605	0.0332	2.92	6.0073	0.0431
2.27	3.8235	0.0259	2.60	4.7937	0.0335	2.93	6.0504	0.0434
2.28	3.8494	0.0261	2.61	4.8272	0.0337	2.94	6.0938	0.0438
2.29	3.8755	0.0263	2.62	4.8610	0.0340	2.95	6.1376	0.0441
2.30	3.9018	0.0265	2.63	4.8950	0.0343	2.96	6.1817	0.0445
2.31	3.9283	0.0267	2.64	4.9292	0.0345	2.97	6.2262	0.0448
2.32	3.9550	0.0269	2.65	4.9638	0.0348	2.98	6.2711	0.0452
2.33	3.9819	0.0271	2.66	4.9986	0.0351	2.99	6.3163	0.0456
2.34	4.0091	0.0273	2.67	5.0337	0.0354	3.00	6.3618	0.0459

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
3.01	6.4078	0.0463	3.34	8.1494	0.0603	3.67	10.423	0.079
3.02	6.4541	0.0467	3.35	8.2098	0.0608	3.68	10.502	0.080
3.03	6.5007	0.0470	3.36	8.2706	0.0613	3.69	10.581	0.080
3.04	6.5478	0.0474	3.37	8.3319	0.0618	3.70	10.661	0.081
3.05	6.5952	0.0478	3.38	8.3937	0.0623	3.71	10.742	0.081
3.06	6.6430	0.0482	3.39	8.4560	0.0628	3.72	10.824	0.082
3.07	6.6912	0.0486	3.40	8.5189	0.0633	3.73	10.906	0.083
3.08	6.7397	0.0490	3.41	8.5822	0.0638	3.74	10.989	0.084
3.09	6.7887	0.0494	3.42	8.6460	0.0644	3.75	11.072	0.084
3.10	6.8380	0.0497	3.43	8.7104	0.0649	3.76	11.156	0.085
3.11	6.8878	0.0501	3.44	8.7753	0.0654	3.77	11.241	0.086
3.12	6.9379	0.0505	3.45	8.8407	0.0659	3.78	11.327	0.086
3.13	6.9885	0.0510	3.46	8.9066	0.0665	3.79	11.413	0.087
3.14	7.0394	0.0514	3.47	8.9731	0.0670	3.80	11.500	0.088
3.15	7.0908	0.0518	3.48	9.0402	0.0676	3.81	11.588	0.088
3.16	7.1426	0.0522	3.49	9.1077	0.0681	3.82	11.676	0.089
3.17	7.1948	0.0526	3.50	9.1758	0.0687	3.83	11.766	0.090
3.18	7.2474	0.0530	3.51	9.2445	0.0692	3.84	11.856	0.091
3.19	7.3004	0.0535	3.52	9.3138	0.0698	3.85	11.946	0.091
3.20	7.3539	0.0539	3.53	9.3836	0.0704	3.86	12.038	0.092
3.21	7.4078	0.0543	3.54	9.4539	0.0709	3.87	12.130	0.093
3.22	7.4621	0.0548	3.55	9.5249	0.0715	3.88	12.223	0.094
3.23	7.5169	0.0552	3.56	9.5964	0.0721	3.89	12.316	0.094
3.24	7.5721	0.0557	3.57	9.6685	0.0727	3.90	12.411	0.095
3.25	7.6278	0.0561	3.58	9.7412	0.0733	3.91	12.506	0.096
3.26	7.6839	0.0566	3.59	9.8145	0.0739	3.92	12.602	0.097
3.27	7.7405	0.0570	3.60	9.8884	0.0745	3.93	12.699	0.098
3.28	7.7975	0.0575	3.61	9.9629	0.0751	3.94	12.797	0.098
3.29	7.8550	0.0579	3.62	10.038	0.076	3.95	12.895	0.099
3.30	7.9129	0.0584	3.63	10.114	0.076	3.96	12.994	0.100
3.31	7.9713	0.0589	3.64	10.190	0.077	3.97	13.094	0.101
3.32	8.0302	0.0594	3.65	10.267	0.078	3.98	13.195	0.102
3.33	8.0896	0.0598	3.66	10.345	0.078	3.99	13.297	0.103
3.34	8.1494	0.0603	3.67	10.423	0.079	4.00	13.400	0.103

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
4.01	13.503	0.104	4.34	17.444	0.137	4.67	22.633	0.181
4.02	13.607	0.105	4.35	17.581	0.138	4.68	22.814	0.182
4.03	13.712	0.106	4.36	17.720	0.139	4.69	22.996	0.184
4.04	13.818	0.107	4.37	17.859	0.141	4.70	23.180	0.185
4.05	13.925	0.108	4.38	18.000	0.142	4.71	23.366	0.187
4.06	14.033	0.109	4.39	18.141	0.143	4.72	23.553	0.189
4.07	14.142	0.110	4.40	18.284	0.144	4.73	23.741	0.190
4.08	14.251	0.110	4.41	18.428	0.145	4.74	23.931	0.192
4.09	14.362	0.111	4.42	18.574	0.147	4.75	24.123	0.193
4.10	14.473	0.112	4.43	18.720	0.148	4.76	24.316	0.195
4.11	14.586	0.113	4.44	18.868	0.149	4.77	24.511	0.197
4.12	14.699	0.114	4.45	19.017	0.150	4.78	24.708	0.198
4.13	14.813	0.115	4.46	19.168	0.152	4.79	24.906	0.200
4.14	14.928	0.116	4.47	19.319	0.153	4.80	25.106	0.202
4.15	15.044	0.117	4.48	19.472	0.154	4.81	25.308	0.203
4.16	15.161	0.118	4.49	19.626	0.155	4.82	25.511	0.205
4.17	15.279	0.119	4.50	19.782	0.157	4.83	25.717	0.207
4.18	15.399	0.120	4.51	19.938	0.158	4.84	25.923	0.209
4.19	15.519	0.121	4.52	20.096	0.159	4.85	26.132	0.210
4.20	15.640	0.122	4.53	20.256	0.161	4.86	26.342	0.212
4.21	15.762	0.123	4.54	20.416	0.162	4.87	26.555	0.214
4.22	15.885	0.124	4.55	20.579	0.163	4.88	26.769	0.216
4.23	16.009	0.125	4.56	20.742	0.165	4.89	26.984	0.218
4.24	16.134	0.126	4.57	20.907	0.166	4.90	27.202	0.219
4.25	16.260	0.127	4.58	21.073	0.168	4.91	27.421	0.221
4.26	16.387	0.128	4.59	21.241	0.169	4.92	27.643	0.223
4.27	16.516	0.129	4.60	21.410	0.170	4.93	27.866	0.225
4.28	16.645	0.130	4.61	21.580	0.172	4.94	28.091	0.227
4.29	16.775	0.132	4.62	21.752	0.173	4.95	28.318	0.229
4.30	16.907	0.133	4.63	21.925	0.175	4.96	28.547	0.231
4.31	17.040	0.134	4.64	22.100	0.176	4.97	28.778	0.233
4.32	17.173	0.135	4.65	22.276	0.178	4.98	29.011	0.235
4.33	17.308	0.136	4.66	22.454	0.179	4.99	29.246	0.237
4.34	17.444	0.137	4.67	22.633	0.181	5.00	29.483	0.239

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
5.01	29.722	0.241	5.34	38.860	0.319	5.67	50.976	0.423
5.02	29.962	0.243	5.35	39.179	0.322	5.68	51.400	0.427
5.03	30.205	0.245	5.36	39.501	0.325	5.69	51.827	0.431
5.04	30.450	0.247	5.37	39.825	0.327	5.70	52.257	0.435
5.05	30.698	0.249	5.38	40.153	0.330	5.71	52.692	0.438
5.06	30.947	0.251	5.39	40.483	0.333	5.72	53.130	0.442
5.07	31.198	0.253	5.40	40.816	0.336	5.73	53.572	0.446
5.08	31.452	0.256	5.41	41.152	0.339	5.74	54.018	0.450
5.09	31.707	0.258	5.42	41.491	0.342	5.75	54.468	0.454
5.10	31.965	0.260	5.43	41.832	0.345	5.76	54.922	0.458
5.11	32.225	0.262	5.44	42.177	0.348	5.77	55.379	0.462
5.12	32.487	0.264	5.45	42.524	0.351	5.78	55.841	0.466
5.13	32.752	0.267	5.46	42.875	0.354	5.79	56.306	0.470
5.14	33.019	0.269	5.47	43.229	0.357	5.80	56.776	0.474
5.15	33.288	0.271	5.48	43.585	0.360	5.81	57.249	0.478
5.16	33.559	0.274	5.49	43.945	0.363	5.82	57.727	0.482
5.17	33.833	0.276	5.50	44.308	0.366	5.83	58.209	0.486
5.18	34.109	0.278	5.51	44.674	0.369	5.84	58.695	0.490
5.19	34.387	0.281	5.52	45.043	0.372	5.85	59.185	0.495
5.20	34.668	0.283	5.53	45.415	0.375	5.86	59.680	0.499
5.21	34.951	0.286	5.54	45.790	0.379	5.87	60.179	0.503
5.22	35.236	0.288	5.55	46.169	0.382	5.88	60.682	0.508
5.23	35.524	0.290	5.56	46.551	0.385	5.89	61.189	0.512
5.24	35.815	0.293	5.57	46.936	0.389	5.90	61.701	0.516
5.25	36.108	0.295	5.58	47.325	0.392	5.91	62.218	0.521
5.26	36.403	0.298	5.59	47.717	0.395	5.92	62.738	0.525
5.27	36.701	0.301	5.60	48.112	0.399	5.93	63.264	0.530
5.28	37.002	0.303	5.61	48.511	0.402	5.94	63.794	0.535
5.29	37.305	0.306	5.62	48.913	0.406	5.95	64.328	0.539
5.30	37.611	0.308	5.63	49.318	0.409	5.96	64.867	0.544
5.31	37.919	0.311	5.64	49.727	0.413	5.97	65.411	0.549
5.32	38.230	0.314	5.65	50.140	0.416	5.98	65.960	0.553
5.33	38.544	0.316	5.66	50.556	0.420	5.99	66.513	0.558
5.34	38.860	0.319	5.67	50.976	0.423	6.00	67.071	0.563

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
6.01	67.634	0.568	6.34	89.242	0.757	6.67	118.05	1.01
6.02	68.202	0.573	6.35	89.999	0.763	6.68	119.06	1.02
6.03	68.775	0.578	6.36	90.762	0.770	6.69	120.08	1.03
6.04	69.353	0.583	6.37	91.532	0.777	6.70	121.11	1.04
6.05	69.936	0.588	6.38	92.308	0.783	6.71	122.14	1.05
6.06	70.524	0.593	6.39	93.092	0.790	6.72	123.19	1.05
6.07	71.117	0.598	6.40	93.882	0.797	6.73	124.24	1.06
6.08	71.715	0.603	6.41	94.679	0.804	6.74	125.31	1.07
6.09	72.319	0.609	6.42	95.483	0.811	6.75	126.38	1.08
6.10	72.928	0.614	6.43	96.295	0.818	6.76	127.46	1.09
6.11	73.542	0.619	6.44	97.113	0.825	6.77	128.55	1.10
6.12	74.161	0.625	6.45	97.938	0.833	6.78	129.66	1.11
6.13	74.786	0.630	6.46	98.771	0.840	6.79	130.77	1.12
6.14	75.416	0.636	6.47	99.611	0.847	6.80	131.89	1.13
6.15	76.052	0.641	6.48	100.46	0.85	6.81	133.02	1.14
6.16	76.693	0.647	6.49	101.31	0.86	6.82	134.16	1.15
6.17	77.340	0.653	6.50	102.18	0.87	6.83	135.31	1.16
6.18	77.992	0.658	6.51	103.05	0.88	6.84	136.48	1.17
6.19	78.650	0.664	6.52	103.92	0.89	6.85	137.65	1.18
6.20	79.314	0.670	6.53	104.81	0.89	6.86	138.83	1.19
6.21	79.984	0.676	6.54	105.70	0.90	6.87	140.02	1.20
6.22	80.660	0.681	6.55	106.60	0.91	6.88	141.22	1.21
6.23	81.341	0.687	6.56	107.51	0.92	6.89	142.44	1.22
6.24	82.029	0.693	6.57	108.43	0.92	6.90	143.66	1.24
6.25	82.722	0.700	6.58	109.35	0.93	6.91	144.90	1.25
6.26	83.422	0.706	6.59	110.29	0.94	6.92	146.14	1.26
6.27	84.127	0.712	6.60	111.23	0.95	6.93	147.40	1.27
6.28	84.839	0.718	6.61	112.18	0.96	6.94	148.67	1.28
6.29	85.557	0.724	6.62	113.13	0.97	6.95	149.95	1.29
6.30	86.281	0.731	6.63	114.10	0.97	6.96	151.24	1.30
6.31	87.012	0.737	6.64	115.07	0.98	6.97	152.54	1.31
6.32	87.749	0.743	6.65	116.06	0.99	6.98	153.86	1.33
6.33	88.492	0.750	6.66	117.05	1.00	6.99	155.18	1.34
6.34	89.242	0.757	6.67	118.05	1.01	7.00	156.52	1.35

Balistische Tafel

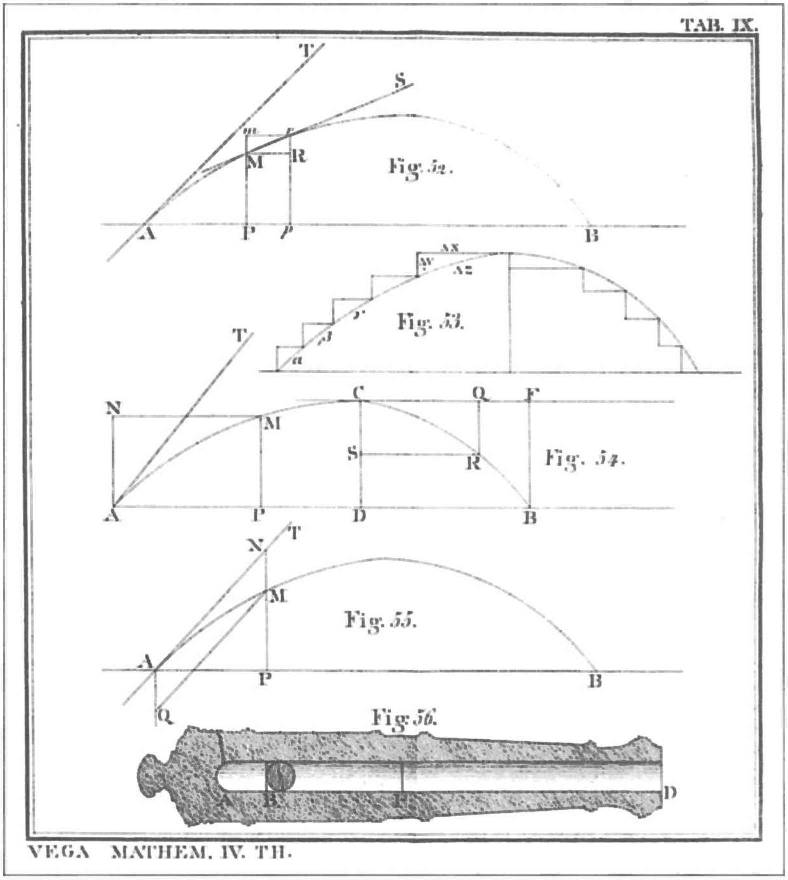
n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
7.01	157.87	1.36	7.34	209.77	1.82	7.67	279.28	2.44
7.02	159.23	1.37	7.35	211.59	1.84	7.68	281.72	2.46
7.03	160.60	1.39	7.36	213.43	1.85	7.69	284.18	2.48
7.04	161.99	1.40	7.37	215.28	1.87	7.70	286.67	2.51
7.05	163.38	1.41	7.38	217.15	1.89	7.71	289.18	2.53
7.06	164.79	1.42	7.39	219.04	1.90	7.72	291.70	2.55
7.07	166.22	1.43	7.40	220.94	1.92	7.73	294.26	2.57
7.08	167.65	1.45	7.41	222.86	1.94	7.74	296.83	2.60
7.09	169.10	1.46	7.42	224.80	1.96	7.75	299.43	2.62
7.10	170.56	1.47	7.43	226.76	1.97	7.76	302.05	2.64
7.11	172.03	1.49	7.44	228.73	1.99	7.77	304.69	2.67
7.12	173.52	1.50	7.45	230.72	2.01	7.78	307.36	2.69
7.13	175.02	1.51	7.46	232.73	2.03	7.79	310.05	2.72
7.14	176.53	1.53	7.47	234.75	2.04	7.80	312.77	2.74
7.15	178.06	1.54	7.48	236.80	2.06	7.81	315.51	2.76
7.16	179.60	1.55	7.49	238.86	2.08	7.82	318.27	2.79
7.17	181.15	1.57	7.50	240.94	2.10	7.83	321.06	2.81
7.18	182.72	1.58	7.51	243.04	2.12	7.84	323.88	2.84
7.19	184.30	1.60	7.52	245.16	2.14	7.85	326.72	2.86
7.20	185.89	1.61	7.53	247.29	2.16	7.86	329.58	2.89
7.21	187.50	1.62	7.54	249.45	2.17	7.87	332.47	2.92
7.22	189.13	1.64	7.55	251.62	2.19	7.88	335.39	2.94
7.23	190.76	1.65	7.56	253.82	2.21	7.89	338.33	2.97
7.24	192.42	1.67	7.57	256.03	2.23	7.90	341.30	3.00
7.25	194.08	1.68	7.58	258.26	2.25	7.91	344.30	3.02
7.26	195.77	1.70	7.59	260.52	2.27	7.92	347.32	3.05
7.27	197.46	1.71	7.60	262.79	2.29	7.93	350.37	3.08
7.28	199.17	1.73	7.61	265.08	2.31	7.94	353.45	3.10
7.29	200.90	1.74	7.62	267.40	2.33	7.95	356.55	3.13
7.30	202.64	1.76	7.63	269.73	2.36	7.96	359.68	3.16
7.31	204.40	1.77	7.64	272.09	2.38	7.97	362.84	3.19
7.32	206.18	1.79	7.65	274.46	2.40	7.98	366.03	3.22
7.33	207.96	1.81	7.66	276.86	2.42	7.99	369.25	3.25
7.34	209.77	1.82	7.67	279.28	2.44	8.00	372.49	3.28

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
8.01	375.77	3.30	8.34	502.05	4.44	8.67	671.80	5.97
8.02	379.07	3.33	8.35	506.49	4.48	8.68	677.77	6.03
8.03	382.41	3.36	8.36	510.97	4.52	8.69	683.80	6.08
8.04	385.77	3.39	8.37	515.49	4.56	8.70	689.87	6.13
8.05	389.17	3.42	8.38	520.05	4.60	8.71	696.01	6.19
8.06	392.59	3.46	8.39	524.65	4.64	8.72	702.20	6.25
8.07	396.05	3.49	8.40	529.29	4.68	8.73	708.45	6.30
8.08	399.53	3.52	8.41	533.98	4.73	8.74	714.75	6.36
8.09	403.05	3.55	8.42	538.71	4.77	8.75	721.11	6.42
8.10	406.60	3.58	8.43	543.48	4.81	8.76	727.52	6.47
8.11	410.18	3.61	8.44	548.29	4.86	8.77	734.00	6.53
8.12	413.80	3.65	8.45	553.14	4.90	8.78	740.53	6.59
8.13	417.44	3.68	8.46	558.04	4.94	8.79	747.13	6.65
8.14	421.12	3.71	8.47	562.99	4.99	8.80	753.78	6.71
8.15	424.83	3.75	8.48	567.98	5.03	8.81	760.49	6.77
8.16	428.58	3.78	8.49	573.01	5.08	8.82	767.26	6.83
8.17	432.36	3.81	8.50	578.09	5.12	8.83	774.10	6.90
8.18	436.17	3.85	8.51	583.22	5.17	8.84	780.99	6.96
8.19	440.01	3.88	8.52	588.39	5.22	8.85	787.95	7.02
8.20	443.90	3.92	8.53	593.60	5.26	8.86	794.98	7.09
8.21	447.81	3.95	8.54	598.87	5.31	8.87	802.06	7.15
8.22	451.76	3.99	8.55	604.18	5.36	8.88	809.21	7.21
8.23	455.75	4.02	8.56	609.54	5.41	8.89	816.43	7.28
8.24	459.77	4.06	8.57	614.95	5.46	8.90	823.70	7.35
8.25	463.83	4.10	8.58	620.41	5.51	8.91	831.05	7.41
8.26	467.93	4.13	8.59	625.92	5.56	8.92	838.46	7.48
8.27	472.06	4.17	8.60	631.47	5.61	8.93	845.94	7.55
8.28	476.23	4.21	8.61	637.08	5.66	8.94	853.49	7.62
8.29	480.44	4.25	8.62	642.74	5.71	8.95	861.11	7.68
8.30	484.68	4.28	8.63	648.44	5.76	8.96	868.79	7.75
8.31	488.97	4.32	8.64	654.20	5.81	8.97	876.54	7.82
8.32	493.29	4.36	8.65	660.02	5.86	8.98	884.37	7.90
8.33	497.65	4.40	8.66	665.88	5.92	8.99	892.26	7.97
8.34	502.05	4.44	8.67	671.80	5.97	9.00	900.23	8.04

Balistische Tafel

n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.	n	$\frac{h^n-1}{n}$	Differ.
9.01	908.27	8.11	9.34	1218.8	10.9	9.67	1637.5	14.7
9.02	916.38	8.19	9.35	1229.7	11.0	9.68	1652.2	14.9
9.03	924.57	8.26	9.36	1240.7	11.1	9.69	1667.1	15.0
9.04	932.83	8.34	9.37	1251.9	11.2	9.70	1682.1	15.2
9.05	941.16	8.41	9.38	1263.1	11.3	9.71	1697.3	15.3
9.06	949.58	8.49	9.39	1274.5	11.4	9.72	1712.6	15.4
9.07	958.06	8.56	9.40	1285.9	11.5	9.73	1728.0	15.6
9.08	966.63	8.64	9.41	1297.4	11.6	9.74	1743.6	15.7
9.09	975.27	8.72	9.42	1309.1	11.8	9.75	1759.3	15.9
9.10	983.99	8.80	9.43	1320.8	11.9	9.76	1775.2	16.0
9.11	992.79	8.88	9.44	1332.7	12.0	9.77	1791.2	16.2
9.12	1001.7	9.0	9.45	1344.7	12.1	9.78	1807.3	16.3
9.13	1010.6	9.0	9.46	1356.8	12.2	9.79	1823.6	16.4
9.14	1019.7	9.1	9.47	1368.9	12.3	9.80	1840.1	16.6
9.15	1028.8	9.2	9.48	1381.2	12.4	9.81	1856.7	16.8
9.16	1038.0	9.3	9.49	1393.7	12.5	9.82	1873.4	16.9
9.17	1047.3	9.4	9.50	1406.2	12.6	9.83	1890.3	17.1
9.18	1056.7	9.5	9.51	1418.8	12.8	9.84	1907.4	17.2
9.19	1066.1	9.5	9.52	1431.6	12.9	9.85	1924.6	17.4
9.20	1075.7	9.6	9.53	1444.4	13.0	9.86	1942.0	17.5
9.21	1085.3	9.7	9.54	1457.4	13.1	9.87	1959.5	17.7
9.22	1095.0	9.8	9.55	1470.5	13.2	9.88	1977.2	17.9
9.23	1104.8	9.9	9.56	1483.8	13.3	9.89	1995.1	18.0
9.24	1114.7	10.0	9.57	1497.1	13.5	9.90	2013.1	18.2
9.25	1124.7	10.1	9.58	1510.6	13.6	9.91	2031.2	18.3
9.26	1134.8	10.2	9.59	1524.2	13.7	9.92	2049.6	18.5
9.27	1145.0	10.3	9.60	1537.9	13.8	9.93	2068.1	18.7
9.28	1155.2	10.4	9.61	1551.7	14.0	9.94	2086.8	18.9
9.29	1165.6	10.4	9.62	1565.7	14.1	9.95	2105.7	19.0
9.30	1176.0	10.5	9.63	1579.8	14.2	9.96	2124.7	19.2
9.31	1186.6	10.6	9.64	1594.0	14.4	9.97	2143.9	19.4
9.32	1197.2	10.7	9.65	1608.4	14.5	9.98	2163.3	19.6
9.33	1207.9	10.8	9.66	1622.9	14.6	9.99	2182.8	19.7
9.34	1218.8	10.9	9.67	1637.5	14.7	10.00	2202.5	19.9



SLIKA / FIGURE 1. Tabla IX / TAB. IX

Literaturverzeichnis

[1] S. J. Schmidt, E-mail, Apr. 2000, Entysoft.com.
[2] G. Vega, *Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln*, Johann Thomas Edlen von Trattnern, 1783.