IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2021
Letnik 68
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2021, letnik 68, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR. Posamezna številka za člane stane 6,00 EUR, stare številke 3,00 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

POMNOŽITEV HIPERKOCKE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

Antični geometrijski problem podvojitve kocke lahko posplošimo na problem njene poljubne pomnožitve. Še več, problem lahko razširimo na pomnožitev hiperkocke. V ta namen bomo uporabili primerno posplošeno cisoido.

MULTIPLYING THE HYPERCUBE

The ancient geometric problem of doubling the cube can be extended to a problem of an arbitrary multiplying. Moreover, the problem can be extended to multiplying the hypercube. To this purpose we will use a suitable generalized cissoid.

Uvod

Podvojitev kocke je klasični grški geometrijski problem, ki se ga ne da rešiti evklidsko, to je samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, kar so dokazali šele v 19. stoletju. Problem zahteva določiti rob kocke, ki ima prostornino enako dvakratniku prostornine dane kocke. To pomeni, da je treba za dano daljico a konstruirati tako daljico b, za katero je $b = a\sqrt[3]{2}$. Problem podvojitve kocke so Grki znali rešiti na več načinov. Eden od njih je možen s posebno ravninsko krivuljo, z Dioklovo cisoido (več v [1, 4, 6, 8]).

Povsem smiselno se je vprašati, kako bi pomnožili s faktorjem $\lambda > 0$ poljubno r-razsežno hiperkocko z robom a. Njena prostornina je a^r, zato je $b = a\sqrt[r]{\lambda}$ rob hiperkocke, katere prostornina je λ-kratnik prostornine hiperkocke z robom a. Dva primera sta trivialna. Za $r = 1$ imamo daljico, njena »prostornina« je kar njena dolžina a, za $r = 2$ pa kvadrat, čigar »prostornina« je kar njegova ploščina a^2. Za $r = 3$ imamo opraviti z običajno kocko z običajno prostornino a^3. V prvih dveh primerih množenje s faktorjem λ ni problematično, saj ga ob izbiri enote 1 geometrijsko lahko opravimo s podobnimi trikotniki in z višinskim izrekom v pravokotnem trikotniku.

Za $r \geq 4$ si r-razsežno hiperkocko teže predstavljamo, ker je ne moremo realizirati z običajno geometrijo. To pa ni ovira pri pomnožitvi take hiperkocke s številom λ, ker moramo znati geometrijsko pomnožiti samo njen rob

a s številom $\sqrt[r]{\lambda}$, kar pa lahko naredimo v običajni ravnini. V matematični analizi je r-razsežna hiperkocka z robom a na primer kar r-kratni kartezični produkt intervala $[-a/2, a/2]$ s samim seboj, to je množica

$$[-a/2, a/2]^r = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r : |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq a/2, \dots, |x_r| \leq a/2\}.$$

V nadaljevanju se bomo omejili na enotske hiperkocke, ki imajo rob 1 in prostornino 1. Če namreč znamo le-te geometrijsko pomnožiti s faktorjem λ, znamo geometrijsko pomnožiti s tem faktorjem tudi hiperkocke z robom a. Za to je treba uporabiti podobne trikotnike. S tem se ob izbrani enoti 1 in konstruktibilnim številom λ ves problem zreducira na konstrukcijo števila $\sqrt[r]{\lambda}$. To pa ne gre vedno evklidsko, zato privzamemo obstoj posebnih krivulj, ki to omogočajo. Število λ je konstruktibilno, če lahko daljico dolžine λ evklidsko konstruiramo v končno mnogo korakih iz daljice z dolžino 1. Števila $\sqrt[r]{\lambda}$ so konstruktibilna v razširjenem smislu, namreč po potrebi tudi ob pomoči teh posebnih krivulj.

S konstrukcijo tretjega korena so se ukvarjali že v antiki, na primer Nikomedes (3. stol. p. n. št.), Diokles (3.–2. stol. p. n. št.) in Papos (3.–4. stol.) (glej na primer [3, 5, 7]).

Na splošno ne delajo težav razsežnosti $r = 2^p$, kjer je $p \geq 2$ naravno število, ker je tedaj $\sqrt[r]{\lambda}$ rezultat p-kratnega zaporednega kvadratnega korenjenja števila λ, kar lahko geometrijsko realiziramo na primer s p-kratno uporabo višinskega izreka v pravokotnem trikotniku. Če je $r = 2^p q_1 q_2 \cdots q_k$, kjer je p naravno število, $q_1, q_2, \dots, q_k$ pa liha praštevila, ne nujno med seboj različna, lahko uporabimo zvezo

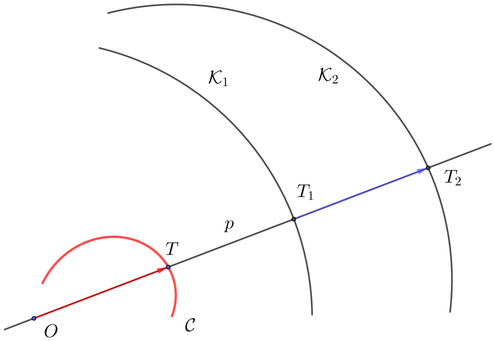
$$\sqrt[r]{\lambda} = \sqrt[q_k]{\sqrt[q_{k-1}]{\dots \sqrt[q_1]{\sqrt[2^p]{\lambda}}}}$$

in postopoma konstruiramo $\delta_0 = \sqrt[2^p]{\lambda}$, $\delta_1 = \sqrt[q_1]{\delta_0}$, $\delta_2 = \sqrt[q_2]{\delta_1}, \dots, \delta_k = \sqrt[q_k]{\delta_{k-1}}$ in nazadnje je $\sqrt[r]{\lambda} = \delta_k$.

Cisoide

Do ravninskih krivulj pridemo na različne načine. Eden od njih je *cisoidni način*. Do nove krivulje pridemo z uporabo znanih krivulj $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ ter točke O, ki ležijo v isti ravnini. Pri tem sta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ taki krivulji, da vsaka premica p skozi O, ki seka $\mathcal{K}_1$ v neki točki T_1, seka tudi $\mathcal{K}_2$, recimo v točki

T_2 (slika 1). Za vsak T_1 označimo na p točko T tako, da velja $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{T_1T_2}$. Ko T_1 potuje po $\mathcal{K}_1$, T opiše krivuljo $\mathcal{C}$, ki jo imenujemo *cisoida krivulj* $\mathcal{K}_1$ *in* $\mathcal{K}_2$ *glede na točko* O. Definicije take cisoide se nekoliko razlikujejo od vira do vira, zgornja je povzeta po [2]. Ime krivulje $\mathcal{C}$ bomo obrazložili v nadaljevanju.



Slika 1. Krivulja $\mathcal{C}$ je cisoida krivulj $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ glede na točko O.

V nadaljevanju je, če ni drugače rečeno, r vedno liho število, večje ali enako 3. Dovolj bi bilo sicer obravnavati le liha praštevila, kot smo videli v uvodu, da bi konstruirali r-ti koren, toda konstrukcija bi lahko zahtevala veliko zaporednih korenjenj. Cisoide, ki jih bomo pri tem potrebovali, bomo obravnavali z metodami analitične geometrije v ravnini. V ta namen postavimo ravninski pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy. Krivuljo, ki ima v tem koordinatnem sistemu enačbo

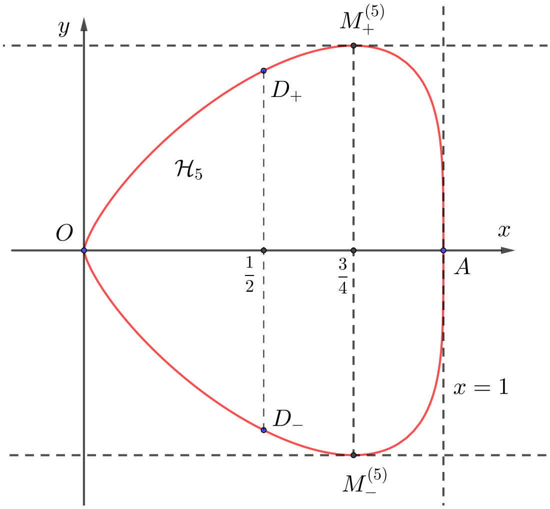
$$x^{r-1} + y^{r-1} = x^{r-2}, \tag{1}$$

označimo s $\mathcal{H}_r$. To je algebrska krivulja stopnje $r-1$. Če vstavimo v (1) $y = tx$, dobimo parametrični enačbi krivulje $\mathcal{H}_r$:

$$x(t) = \frac{1}{1+t^{r-1}}, \quad y(t) = \frac{t}{1+t^{r-1}}. \tag{2}$$

Krivulja $\mathcal{H}_r$ je sklenjena, leži v prvem in četrtem kvadrantu, poteka skozi točke $O(0,0)$, $A(1,0)$ in $D_\pm(1/2, \pm 1/2)$ (slika 2). Točko A doseže za $t = 0$, točki $D_\pm$ za $t = \pm 1$, točko O pa v limiti $|t| \to \infty$. Iz (2) izračunamo

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{(r-2)t - t^{2-r}}{r-1}, \quad \frac{dx}{dy}(t) = \frac{(r-1)t^{r-2}}{(r-2)t^{r-1} - 1}. \tag{3}$$



Slika 2. Krivulja $\mathcal{H}_5$.

Iz prvega izraza v (3) ugotovimo, da ima krivulja vodoravni tangenti za $t = \pm 1/\sqrt[r-1]{r-2}$ v točkah

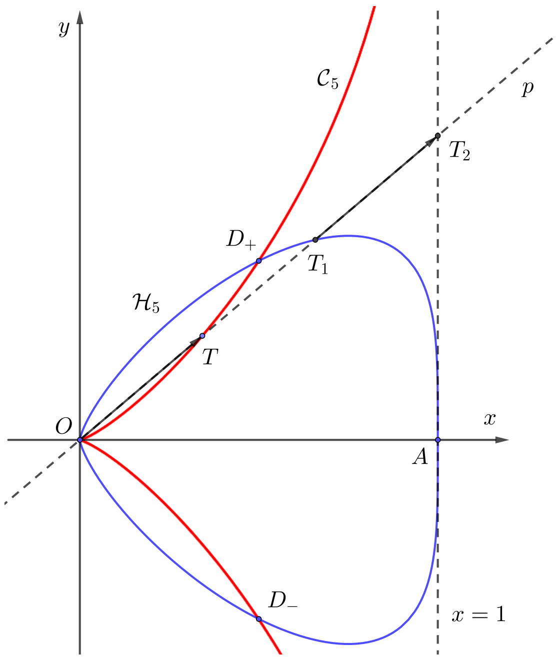
$$M_{\pm}^{(r)}\left(\frac{r-2}{r-1}, \pm\frac{\sqrt[r-1]{(r-2)^{r-2}}}{r-1}\right).$$

Z rastočim r se točki $M_{\pm}^{(r)}$ pomikata proti asimptoti krivulje (slika 5). Račun pokaže, da točke $M_{\pm}^{(r)}$ ležijo na nealgebrskih krivuljah $\mathcal{L}_{\pm}$, ki imata enačbi $y = \pm x^x(1-x)^{1-x}$ in sta simetrični glede na premico $x = 1/2$. Pri tem je $0 < x < 1$. Absolutni vrednosti ordinat točk $M_{\pm}^{(r)}$ sta manjši kot 1 za vsak $r \geq 3$.

Iz drugega izraza v (3) izračunamo $\frac{dx}{dy}(0) = 0$, kar pomeni, da ima $\mathcal{H}_r$ v točki A za tangento premico $x = 1$. Ker pa $\frac{dx}{dy}(t) \to 0$, ko $|t| \to \infty$, ima $\mathcal{H}_r$ za tangento v točki O ordinatno os $x = 0$, kar sicer na sliki 2 ni očitno.

Poiskali bomo cisoido $\mathcal{C}_r$ krivulj $\mathcal{H}_r$ in $x = 1$ glede na točko $O(0,0)$ (slika 3). Premica p skozi O naj ima enačbo $y = tx$. Krivuljo $\mathcal{H}_r$ preseka v točkah O in $T_1(1/(1+t^{r-1}), t/(1+t^{r-1}))$, premico $x = 1$ pa v točki $T_2(1,t)$. Koordinati točke T iskane cisoide $\mathcal{C}_r$ sta potemtakem

$$x_T = 1 - \frac{1}{1+t^{r-1}} = \frac{t^{r-1}}{1+t^{r-1}}, \quad y_T = t - \frac{t}{1+t^{r-1}} = \frac{t^r}{1+t^{r-1}}.$$



Slika 3. Nastanek cisoide stopnje 5.

To pomeni, da smo našli parametrični enačbi cisoide $\mathcal{C}_r$:

$$x(t) = \frac{t^{r-1}}{1+t^{r-1}}, \quad y(t) = \frac{t^r}{1+t^{r-1}}. \tag{4}$$

Če vstavimo v prvo enačbo $t = y/x$, dobimo po poenostavitvi enačbo cisoide $\mathcal{C}_r$ še v implicitni obliki:

$$x(x^{r-1} + y^{r-1}) = y^{r-1}. \tag{5}$$

Krivuljo $\mathcal{C}_r$, ki je algebrska krivulja stopnje r, je smiselno imenovati *cisoida stopnje* r. Ker se krivulja $\mathcal{C}_r$ da parametrizirati s parom racionalnih funkcij, jo uvrščamo med racionalne krivulje. Prav tako je krivulja $\mathcal{H}_r$ racionalna.

Cisoida $\mathcal{C}_3$ je cisoida krivulje $\mathcal{H}_3$, ki ni nič drugega kot krožnica z enačbo $x^2 + y^2 = x$, in premice $x = 1$ glede na točko O. Krožnica ima središče v točki $S(1/2, 0)$ in polmer $\varrho = 1/2$. Cisoida $\mathcal{C}_3$ je znana že iz antičnih časov.

Imenuje se *Dioklova cisoida*. Besedo cisoida so začeli uporabljati tudi za krivulje, ki nastanejo na prej opisani cisoidni način z dvema krivuljama glede na neko točko. Beseda *cisoida* izvira iz grške besede *kissós*, kar pomeni *bršljan*. Del kroga med $\mathcal{H}_3$ in cisoido ima namreč obliko bršljanovega lista. Diokles, po katerem se krivulja imenuje, je bil starogrški matematik, ki je z njo znal podvojiti kocko. Spoznali bomo, da se z njo da kocko ne samo podvojiti, ampak tudi potrojiti, početveriti in celo pomnožiti s poljubnim konstruktibilnim številom λ.

Ideja, zakaj za $\mathcal{H}_r$ vzeti ravno krivuljo z enačbo (1), izvira iz enačbe $x^2 + y^2 = x$, ki pomaga konstruirati Dioklovo cisoido. V izrazu $x^2 + y^2$ je eksponent 2, kar je za 1 manj kot 3, to je od razsežnosti običajne kocke, ki jo znamo podvojiti. Na desni strani enačbe pa je eksponent 1, kar je za 2 manj kot 3. Zato smo za naš namen, kot se bo izkazalo, pravilno predvidevali, da sta za r-razsežno hiperkocko res dobra ravno eksponenta $r-1$ in $r-2$ v enačbi (1).

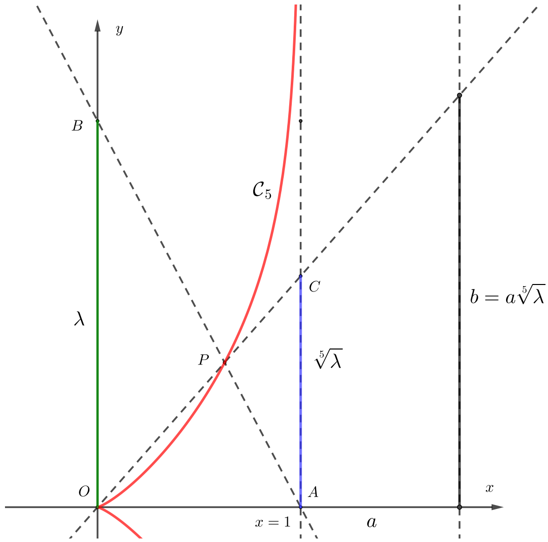
Krivulja $\mathcal{C}_r$ je simetrična glede na os x, definirana je nad intervalom $[0,1)$, poteka tako kot krivulja $\mathcal{H}_r$, skozi točko $O(0,0)$, ki jo doseže pri $t = 0$, in skozi točki $D_\pm(1/2, \pm 1/2)$ pri $t = \pm 1$. Ko $|t|$ narašča proti ∞, se x približuje vrednosti 1, y pa gre v ∞. To pomeni, da je premica $x = 1$ navpična asimptota krivulje $\mathcal{C}_r$. Iz (4) izračunamo še

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{rt + t^r}{r-1},$$

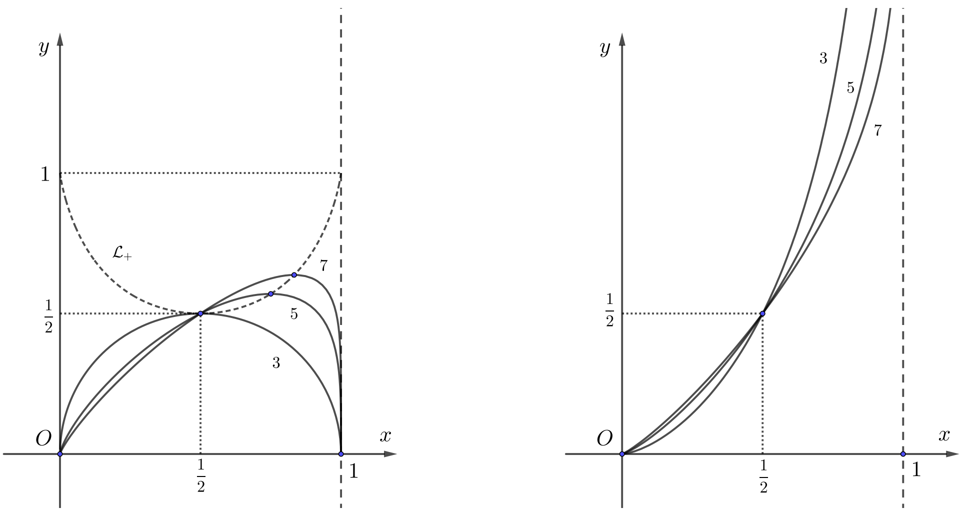
iz česar ugotovimo, da ima cisoida $\mathcal{C}_r$ v točki O, ko je $t = 0$, ost z vodoravno tangento, kar na slikah sicer ni očitno.

Pomnožitev hiperkocke

Poglejmo, kako lahko z uporabo cisoide $\mathcal{C}_r$ konstruiramo $\sqrt[r]{\lambda}$. Izberimo na osi y točko $B(0,\lambda)$ in načrtajmo premico skozi A in B. Tu je potrebna konstruktibilnost števila λ, sicer točke B ne bi znali vedno geometrijsko določiti, na primer za $\lambda = \pi$. Poiščimo presečišče P cisoide $\mathcal{C}_r$ s to premico. Če prepišemo (5) v obliko $(1-x)y^{r-1} = x^r$, premico skozi A in B pa izrazimo v obliki $1 - x = y/\lambda$, takoj dobimo enačbo $x^r = y^r/\lambda$. Ordinata in abscisa presečišča P sta zato v razmerju $\sqrt[r]{\lambda}$. Premica skozi O in P ima enačbo $y = x\sqrt[r]{\lambda}$ in preseka asimptoto cisoide $\mathcal{C}_r$ v točki $C(1, \sqrt[r]{\lambda})$. S tem smo konstruirali število $\sqrt[r]{\lambda}$, kar omogoča konstruirati še rob $b = a\sqrt[r]{\lambda}$ hiperkocke,



Slika 4. Geometrijska konstrukcija petega korena.



Slika 5. Krivulje $\mathcal{H}_r$ (levo) in $\mathcal{C}_r$ (desno) za $r = 3, 5, 7$ v prvem kvadrantu.

katere prostornina je λa^r. Če izberemo $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$, lahko hiperkocko podvojimo, potrojimo, početverimo itd. Na sliki 4 je predstavljen primer za $r = 5$.

Za vsa liha števila $r \geq 3$ lahko torej z uporabo cisoide $\mathcal{C}_r$ konstruiramo $\sqrt[r]{\lambda}$ za vsak pozitiven λ. To omogoča pomnožitev r-razsežne hiperkocke.

Za konec

Lepo se dajo izračunati ploščine likov pod krivuljami $\mathcal{C}_r$ in $\mathcal{H}_r$ nad intervalom $[0,1]$ za $r \geq 3$. Označimo ploščino pod $\mathcal{C}_r$ s P_r, pod $\mathcal{H}_r$ pa s S_r. Izrazimo ju lahko prek Eulerjevih funkcij $\mathbf{\Gamma}$ in $\mathbf{B}$. Za $r \geq 3$ dobimo:

$$P_r = \int_0^1 x^{\frac{r}{r-1}}(1-x)^{\frac{1}{1-r}}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{2r-1}{r-1}\right)\mathbf{\Gamma}\left(\frac{r-2}{r-1}\right) = \frac{\pi r}{2(r-1)^2\sin\frac{\pi}{r-1}},$$

$$S_r = \int_0^1 x^{\frac{r-2}{r-1}}(1-x)^{\frac{1}{r-1}}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{2r-3}{r-1}\right)\mathbf{\Gamma}\left(\frac{r}{r-1}\right) = \frac{\pi(r-2)}{2(r-1)^2\sin\frac{\pi}{r-1}}.$$

Točke, ki ustrezajo posameznim parametrom t racionalnih krivulj $\mathcal{H}_r$ in $\mathcal{C}_r$, se v načelu da konstruirati evklidsko. Točke krivulje $\mathcal{H}_r$ pa lahko enostavneje konstruiramo evklidsko z uporabo višinskega izreka v pravokotnem trikotniku, cisoide $\mathcal{C}_r$ pa še s podobnostjo trikotnikov, če je r za 1 povečana potenca števila 2, to se pravi, če je $r = 2^n + 1$, kjer je n naravno število, na primer $r = 3, 5, 9, 17$.

Oglejmo si primer $r = 5$. Krivulja $\mathcal{H}_5$ ima enačbo $x^4 + y^4 = x^3$. Konstruirajmo jo po točkah v prvem kvadrantu. Enačbo preuredimo v $y^4 = x^3(1-x)$. Za $0 \leq x \leq 1$ vpeljemo geometrijsko sredino $y_1 = \sqrt{x(1-x)}$ in dobimo $y^4 = x^2 y_1^2$, kar še korenimo: $y^2 = xy_1$. Ordinata y, ki ustreza x, je geometrijska sredina za x in y_1. Geometrijske sredine pa evklidsko realiziramo z višinskim izrekom v pravokotnem trikotniku.

Prav tako delamo s krivuljo $\mathcal{C}_5$, ki ima enačbo $x(x^4 + y^4) = y^4$. Konstruirajmo jo po točkah v prvem kvadrantu. Enačbo preuredimo v $x^6 = y^4 x(1-x)$. Za $0 < x < 1$ vpeljemo geometrijsko sredino $y_1 = \sqrt{x(1-x)}$ in dobimo $x^6 = y^4 y_1^2$ in s korenjenjem še $x^3 = y^2 y_1$. Pomnožimo z x, da dobimo: $x^4 = y^2 x y_1$. Nato vpeljemo geometrijsko sredino $y_2 = \sqrt{xy_1}$ in dobimo $x^4 = y^2 y_2^2$. Korenimo in dobimo $x^2 = yy_2$, kar zapišemo v obliki sorazmerja: $y/x = x/y_2$. Očitno do y pri danem x pridemo z dvakratno uporabo višinskega izreka v pravokotnem trikotniku, sorazmerje pa realiziramo s podobnimi trikotniki in dobimo y.

Kako pa je v primerih $r = 1$ in $r = 2$? Za $0 < x < 1$ dobimo iz (1) v prvem primeru $x^0 + y^0 = x^{-1}$, kar je poenostavljeno isto kot $x = 1/2$, iz (5) pa

$x(x^0+y^0)=y^0$ oziroma $x=1/2$. Krivulji $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{C}_1$ imata isto enačbo, $x=1/2$, ki predstavlja premico. Rezultat je v soglasju s konstrukcijo $\sqrt[1]{\lambda}=\lambda$.

Za $r=2$ in $0<x<1$ dobimo za $\mathcal{H}_2$ del premice $x+y=1$, za $\mathcal{C}_2$ pa del hiperbole $x(x+y)=y$, ki ima asimptoti $x=1$ in $x+y=-1$ ter središče v točki $(1,-2)$. Točke krivulje $\mathcal{C}_2$ najlaže konstruiramo, če enačbo $x(x+y)=y$ zapišemo najprej v obliki $x^2=y(1-x)$, nato pa v obliki sorazmerja $y/x=x/(1-x)$. Točke krivulje konstruiramo s podobnimi trikotniki. Seveda pa $\sqrt{\lambda}$ najlaže konstruiramo z višinskim izrekom v pravokotnem trikotniku, ne pa s krivuljo $\mathcal{C}_2$.

Če je r sodo število, sta krivulji (1) in (5) »grši« kot za lihi r, sta brez simetrije in segata v področja zunaj pasu $(0,1)\times\mathbb{R}$. Edino v prvem kvadrantu lepo potekata med ustreznima krivuljama za $r-1$ in $r+1$.

Kot zanimivost poglejmo, kaj se zgodi, če v enačbi (1) za r formalno dopustimo katerokoli celo število in opazujemo ustrezne krivulje $\mathcal{H}_r$ in $\mathcal{C}_r$ nad intervalom $(0,1)$ v prvem kvadrantu. Če nadomestimo r z $2-r$ v (1), dobimo

$$x^{1-r}+y^{1-r}=x^{-r}.$$

Množenje obeh strani te enačbe s faktorjem $x^r y^{r-1}$ nas privede do

$$x(x^{r-1}+y^{r-1})=y^{r-1}.$$

Formalno to pomeni enakost $\mathcal{H}_{2-r}=\mathcal{C}_r$.

LITERATURA

[1] P. Eymard in J.-P. Lafon, *The number* π, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[2] D. Haftendorn, *Kurven erkunden und verstehen*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.

[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. 2, Dover Publications, New York, 1981.

[4] J. D. Lawrence, *A catalog of special plane curves*, Dover Publications, New York, 2014.

[5] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Springer, New York, 1998.

[6] U. C. Merzbach in C. B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2011.

[7] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg, 2012.

[8] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

STEFANOVA NALOGA

STANISLAV JUŽNIČ

Univerza v Oklahomi

Ključne besede: Stefanova naloga (Stefanov problem), Koller, zgodovina matematične fizike

Stefan se je povzpel na Parnas svetovne znanosti s podporo svojega mentorja Bohinjca Mariana Kollerja. Opisan je razvoj raziskovanja Stefanove naloge.

STEFAN PROBLEM

Stefan climbed the Parnassus of World Science with the support of his mentor, the Bohinj native Marian Koller. The development of research on Stefan Problem is described.

Uvod

Pol stoletja po Kollerjevem obisku Pariza je Kollerjev varovanec Jožef Stefan nadgradil raziskavo Charlesa Cagniarda de la Toura o faznih prehodih iz trdnine v tekočino v svojih šestih razpravah med letoma 1889 in 1891; te so se nanašale na širši kontekst njegovega in Boltzmannovega zanimanja za transportne pojave, zlasti spremembe faze iz tekočega v plinasto [14]. V počastitev Stefanovega raziskovanja meje med trdnino in kapljevino, ki se s časom prosto premika na polarnih ledenih kapah, se dandanes v raziskavah večfaznih sistemov pogosto uporabljata koncepta Stefanov problem (naloga) in brezdimenzijsko Stefanovo število [15].

Stefanova naloga ponazarja dinamiko nestalne meje med različnima fazama. Stefanovega raziskovanja toplotne prevodnosti niso več spodbujali Laméjevi problemi hlajenja Zemlje in Sonca, temveč težave s poledenelim oceanom, ki je delal preglavice habsburškemu iskanju severnih prehodov k Ameriki in Kitajski. Z nenadno Stefanovo smrtjo je rojevajoča se panoga raziskovanja zamrla, še preden so njegovi učenci množično začeli raziskovati ta novi Stefanov problem, saj so Stefanovemu poglavitnemu učencu Boltzmannu bolj dišala abstraktnejša znanstvena iskanja v termodinamiki. Kmalu je za nameček sledila usodna bolezen celotne habsburške monarhije. Zato Stefanov problem dolgo ni mogel razviti pomembnega področja raziskav, severovzhodni prehod pa nikoli ni postal zelo uporaben, razen sodobnega transporta ruskega plina in nafte. To je bil razlog za naslednja štiri desetletja zanemarjanja Stefanovega problema, ki je znova postal priljubljen komaj med sodobnimi raziskovalci, zaposlenimi v sovjetski naftni industriji in metalurgiji.

Stefanovi dosežki

Med letoma 1889–1891 je Stefan predstavil svoje ideje, ki jih danes imenujemo Stefanov problem. Sedem zaporednih publikacij mu je natisnila dunajska akademija, nekatere so bile ponatisnjene v *Annalen der Physik*, uvodno raziskavo o izhlapevanju in raztapljanju kot pojavih difuzije pa je urno povzel *Philosophical Magazine* že januarja 1890. V nasprotju s Stefanovim zakonom sta bila vsaj dva zgodnja Stefanova članka o Stefanovem problemu hitro objavljena v *Philosophical Magazine* in v Parizu.

Leta 1831 sta Lamé in Clapeyron objavila prvi evropski poskus splošne rešitve uganke, pozneje imenovane Stefanov problem [8]. Marcel Brillouin je v Parizu leta 1929 ob Clapeyronovih dosežkih razpravljal o Stefanu [1] in skoval naziv Stefanov problem [2]. Akademik s Collège de France Marcel Brillouin je resno obravnaval Stefanov problem kot prvi po Stefanu. Njegov sin je bil vodilni kvantni mehanik Léon Brillouin.

Danes priljubljeni naziv Stefanov problem je Lev Isakovich Rubinstein (1914–2009 Jeruzalem) po prestajanju kazni v gulagu Vorkuta leta 1947 ponovno uveljavil v sovjetski naftni industriji [9, 10, 11].

To je bil drugi znova slovanski domet Stefanovega problema: od zamrzovanja ledu, preko naftne industrije, pa vse do metalurgije. Kot nekakšna dialektika teze-antiteze-sinteze.

Stefanov problem zunaj zamrzovanja

Sovjetski uspeh pri reševanju Stefanovih problemov je spodbudil raziskave v sovjetskih satelitskih državah, vključno z Bolgarijo, ki je po srečnih naključjih razvila tesne predvojne znanstvene vezi s Parižani, podobno kot njim sosednji pravoslavni Srbi s Pavlom Savićem. Louis de Broglie je imel na Sorbonni bolgarskega doktorskega študenta Schrödingerjeve enačbe, ki je doktoriral junija 1938. To je bil sloviti Asen Borisov Datsev (1911–1994), ki je pozneje raziskoval klasični problem toplotne prevodnosti. To ga je privedlo do drugega problema v teoriji toplotne prevodnosti, ki se imenuje problem zamrzovanja ali Stefanov problem. V številnih svojih delih je Datsev poleg temeljne kvantne mehanike razvil metodo za reševanje Stefanovega problema v različnih situacijah – pri različnem številu faz, pri različnih robnih pogojih. Proučeval je nastajanje ali izginotje faze. Leta 1963 je z de Brogliejevim predgovorom Datsev v pariških *Mémoires de science physiques* objavil monografijo Linearni Stefanov problem. Datsev je obdelal spreminjanje temperature v prostoru, ki sta ga zasedli dve fazi določene snovi, običajno trdna in tekoča faza, na primer voda in led. Funkcije, ki predstavljajo območja različnih faz, ustrezajo relevantnim enačbam toplote, pri čemer je neznana ločevalna površina faz pri konstantni temperaturi, kar je povezano s kalorimetričnim pogojem. Stefanov problem vodi do reševanja sistemov (paraboličnih) parcialnih diferencialnih enačb z robnimi pogoji, od katerih so nekateri spremenljivi in jih je treba v vsakem posameznem primeru določiti sproti. Stefanov problem ima različna pomembna praktična področja uporabe, na primer hidrodinamiko, letalstvo, raketarstvo, zamrzovanje in odtajanje ledu, notranja gibanja v Zemlji, rast kristalov ali taljenje kovin. Datseva pariška knjiga vsebuje rezultate njegovih raziskav o linearnem Stefanovem problemu, objavljenih v Bolgariji in ZSSR predvsem med letoma 1947–1956, kot jih je izpostavil med več predavanji na Matematičnem inštitutu firenške univerze maja 1967, kjer je Datsev spoznal raziskovalno ekipo Giorgia Sestinija [3].

V prvem delu svoje knjige je Datsev obravnaval različne primere enodimenzionalnega Stefanovega problema, začenši z dvema neomejenima fazama in prehajajoč zaporedoma do primerov omejenih faz, spremenljivih faz in različnih mejnih pogojev. V drugem in tretjem delu knjige je posplošil rezultate za dvodimenzionalne in tridimenzionalne primere, vključno z anizotropnimi telesi. Ključ Datsevega pristopa je bila metoda zlepkov. Datsev je objavljal pri Sovjetski akademiji znanosti v Leningradu ter v Parizu in Firencah na obeh straneh železne zavese, kar pomeni, da se je popolnoma zavedal Rubinsteinovih zaslug, prav tako pa dela de Brogliejevega kolega Louisa Marcela Brillouina [4], čeprav Datsev ni omenil, da je bil Stefan slovanskega izvora kot on sam. Princ de Broglie in Leon Brillouin sta med prvo svetovno vojno sodelovala pri vzpostavljanju brezžičnih komunikacij s podmornicami. Med letoma 1919–1922 se je de Broglie seznanil z deli Louisa Marcela Brillouina o Stefanovem najljubšem hidrodinamičnem modelu atoma, ki ga je de Broglie poskušal povezati z rezultati teorije vodikovega atoma N. Bohra. Leta 1967 je Datsev prevedel delo Alberta Einsteina in Leopolda Infelda Evolucija fizike iz francoščine v bolgarščino. Spodbujal je raziskave in konference o vakuumu, kvantni mehaniki in Einsteinovi relativnosti v Bolgariji.

Datsevov firenški sodelavec pri raziskovanju Stefanovega problema je bil firenški doktorski študent Giovannija Sansoneja (1888–1979), Giorgio Sestini (1908–1991). Sestini je bil profesor racionalne mehanike v Parmi od novembra 1949 do leta 1956, nato pa je poučeval v Firencah. V svojem zadnjem obdobju v Parmi je k študiju Stefanovega problema pristopil z učinkovitim prikazom procesa strjevanja ali utekočinjanja, ki ga je uspešno razvil po svoji vrnitvi v domače Firence. V Parmi je Sestini organiziral matematični inštitut v sodelovanju s prijateljem Antoniom Mambrianijem. Bil je tajnik in skrbnik časopisa Matematika Univerze v Parmi (*Rivista di matematica dell'Università di Parma*) od prve številke, ki je izšla leta 1950, do leta 1956. Tam je objavljal tudi o Stefanovem problemu. Sredi dvajsetega stoletja je začel raziskovati probleme, rešljive s paraboličnimi enačbami. Leta 1957 je objavil svoje prve rešitve problemov faznih sprememb: O izreku o enoličnosti pri enodimenzionalnih problemih, analognih Stefanovim [12]. V decembru 1960 je v svojem prispevku, posvečenem 70. rojstnemu dnevu mentorja Sansoneja, že citiral Laméja, Clapeyrona, Neumanna, Stefana, Brillouina in Datsevo reševanje dvodimenzionalnega in tridimenzionalnega Stefanovega Problema [13].

Sestini je pri svojem pristopu k Stefanovemu problemu reševal parcialne diferencialne enačbe na domenah, katerih meja je delno neznana: na primer med strjevanjem tekočine vmesna plast s strjenim delom spreminja svojo lego, torej ni znana vnaprej. Da bi realno opisali postopek strjevanja, je treba na tej vmesni plasti preveriti nekatere ravnovesne pogoje med nezveznimi notranjimi vplivi snovi na vmesno strjeno plast med faznim prehodom tekočina-trdna snov. Ravno ti pogoji nosijo Stefanovo ime. Pri transportnih problemih, proučevanih med faznimi prehodi, denimo pri zaledenitvi vode, mora biti hitrost naraščanja vmesne plasti odvisna od nezveznega toplotnega toka. Sestini se je prvi v Italiji spopadel s to veliko in plodno skupino Stefanovih problemov. Nanjo je opozoril italijansko in evropsko matematično skupnost. Njegove raziskave Stefanovega problema so odprle novo področje, ki je še danes aktivno, tudi za pomembne industrijske namene. Sestinijeve ideje so bile osnova za nadaljnji razvoj, ki so ga omogočila proučevanja njegovih učencev. V teh smereh se je razvijala njegova firenška šola, ki se je mednarodno uveljavila na področju matematične fizike.

Stefanov problem iz Vorkute v Novi svet: ZDA

Bolgarski in italijanski privrženci Rubinsteinovega dela so kmalu dobili svoje tekmece in posnemovalce v prekomorski tujini. Stefanov problem so začeli raziskovati v Novem svetu takoj po ameriški objavi angleškega prevoda Rubinsteinovega dela. Za zgodnji odmev sta poskrbela George William Evans II (1922–1972) in Eugene Isaacson (1919–2008), ki sta sledila svojemu bolnemu mentorju Jamesu Keeneu Lorneju MacDonaldu (1905–1950) na Univerzi v New Yorku. George W. Evans II se je kasneje pridružil Raziskovalnemu inštitutu Univerze Stanford.

Leta 1928 je MacDonald doktoriral na Univerzi McGill v kanadskem Montrealu, kjer je Ernest Rutherford delal v letih 1898–1907. 14. oktobra

1949 so Evans, Isaacson in MacDonald z Univerze v New Yorku poslali v objavo svojo študijo nalog, podobnih Stefanovemu problemu, ob citiranju Rubinsteina in Datseva [6].

Evansova dela je pohvalil Jim Douglas jr. v svojem izreku o rešitvi Stefanovega problema. Douglas je menil, da sta Datsev in Sestini dokazala obstoj rešitve Stefanovega problema; vendar nista predložila nobenega zadovoljivega dokaza enoličnosti. Le-tega je predlagal Evans, vendar ga je komaj Douglas končno dokazal po predlogu za poenostavitev svojega kolega na Univerzi Duke Thomasa Muira Galliea Jr. (1925–2019). Kasneje se je Gallie izkazal kot profesor matematike in računalništva; ob ustanovitvi oddelka za računalništvo je izprosil nepovratna sredstva za nakup prvega računalnika na Univerzi Duke. Douglas ni omenil Brillouina ali Rubinsteina: morda njunih del ni pobliže poznal. Douglas je izjavil, da je Stefanov problem reševanje parabolične diferencialne enačbe, ki je podrejena robnim pogojem na gibljivi meji, katere lega ni podana vnaprej, temveč je določena kot del problema. Številni problemi v fiziki zahtevajo takšne robne pogoje, vključno s prevodnostjo toplote, ki vključuje fazno spremembo ob taljenju ali zamrzovanju ledu, izhlapevanju ali kondenzaciji, oziroma prekristalizacija kovin kot uporaben postopek čiščenja snovi. Drugi vključujejo različne postopke izpodrivanja v inženirstvu rezervoarjev kot veji naftnega inženirstva, pri katerih ena tekočina delno izpodrine drugo (prvotno rezidenčno) tekočino, ki teče skozi porozno snov, vključno z nafto. To je bilo izjemno pomembno za delodajalca Douglasa v Houstonu, Humble Oil and Refining Co. [5]. Douglas je hkrati delal kot vodja projektov na Inštitutu Rice na Univerzi Duke v uradu za znanstvene raziskave letalskih sil ZDA.

Evans, Isaacson in MacDonald so kmalu dobili svoje naslednike na Univerzi v New Yorku, ki so nadaljevali njihova prizadevanja pri raziskavah Stefanovega problema, začeta leta 1950. Konec petdesetih in šestdesetih let je študent Richarda Couranta (1888–1972), Joseph B. Keller (1923–2016), organiziral raziskavo Stefanovega problema na Courant Institute Univerze v New Yorku. Med njegovimi podoktorskimi študenti je bil Walter Thomas Kyner (1926–1999), ki je doktoriral na Univerzi Berkeleyju v Kaliforniji in preživel dve podoktorski leti na Inštitutu Courant Univerze v New Yorku. Leta 1959, ko je že prebival v Kaliforniji, je objavil svoje podoktorske raziskave o nelinearnem Stefanovem problemu, opravljene na Inštitutu Courant. Hkrati je bil Kellerjev doktorski študent na Inštitutu Courant v New Yorku Willard L. Miranker (1932–2011), ki je tam doktoriral leta 1956. O Stefanovem problemu sta skupaj objavljala leta 1960.

Velik del raziskav Stefanovega problema je pripadal ameriškim podjetjem celo zunaj univerz. William F. Trench (1931–2016) je bil med letoma 1957–1959 višji inženir in inženirski specialist v podjetju Philco Corporation, Philadelphia, PA. Junija 1959 je objavil eksplicitno metodo za reševanje Stefanovega problema kot skrajšano disertacijo iz matematike, opravljeno na Univerzi v Pensilvaniji, ki jo je kot izredni študent ob delu zagovarjal leta 1958 z navedbami Evansa, Isaacsona, MacDonalda, Rubinsteina in Sestinija. Skliceval se je na delo študenta Lawrencea Bragga iz Manchestra, ki je postal strokovnjak za difuzijo na Univerzi Brunel v Actonu. To je bil John Crank (1916–2006). Trench je pohvalil tudi članek Landaua, objavljen leta 1950. Hyman Garshin Landau (1909–1966) se je rodil v Ruskem imperiju, tako kot pet let pozneje njegov judovski kolega raziskovalec Stefanovega problema Lev Rubinstein. Landau je imel smolo med preganjanjem levičarjev v ZDA. Leta 1946 je doktoriral iz statistike v Pittsburghu in se pridružil Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground. Od tam je poslal v objavo svojo raziskavo prevodnosti toplote v taljeni trdni snovi, povezano s Stefanovim problemom [16]. Po letu 1950 se je Landau pridružil oddelku za matematično biologijo Univerze v Chicagu, ki ga je moral zapustiti po mučnih zasliševanjih zaradi obtožb odbora za protiameriške dejavnosti. Leta 1952 je tako Landau postal žrtev obdobja Josepha McCarthyja. Podobno kot so Rubinsteina pestile težave v Sovjetski zvezi, je bil tudi Landau zaslišan zaradi domnevnega subverzivnega vpliva v izobraževalnem procesu. Landau je imel srečo, saj je nato le našel delo na Univerzi Columbia. Vendar zanimanje Landaua za tako imenovane turnirje (teorije grafov) ni izhajalo iz njegovega proučevanja športnih tekmovanj. Kot se to pogosto dogaja v matematiki, je bil Landauov interes nekaj povsem drugega. Zanimalo ga je namreč vedenje živali, še posebej hierarhija v kljuvanju pri piščancih, kot so jo predhodno raziskali nacisti Konrad Lorenz (1903–1989) in Lorenzov prijatelj SS nacistični princ Alfred Auersperg (1899–1968). Landau je bil starejši brat umorjenega televizijskega režiserja Jacka Landaua (1922–1967), kar je prav tako lahko vplivalo na njegove politične težave v ZDA.

Stefanov problem je kmalu postal zanimiv tudi za letalstvo in razvoj raket. Arthur Louis Ruoff (1930–) je doktoriral na Univerzi v Utahu leta 1955. Nato je kot strokovnjak za visoke tlake delal na oddelku za inženirsko mehaniko in snovi Univerze Cornell, leta 1958 tudi v Wright-Pattersonu na Letalski bazi v Ohiu. Leta 1958 je objavil nadomestno rešitev Stefanovega problema.

Stefanov problem v Novem svetu: Kanada

Proučevanju Stefanovega problema so se poleg ZDA pridružili tudi Kanadčani. Julija 1966 je Norvežan James R. Gunderson kot Lockov podiplomski študent na magistrskem študiju v Alberti uporabil izraza Stefanov problem in Neumann-Stefanov problem. Skliceval se je na Evansa, Redozubova in

Leonarda Rose Ingersolla (1880–1958). Ingersoll je zaslovel kot profesor fizike na Univerzi Wisconsin-Madison, kjer je ustanovil Muzej fizike kot prvi muzej v ZDA, ki se osredotoča izključno na fiziko. Gunderson je navedel tudi raziskavo strjevanja jekla, ki jo je leta 1929 in 1930 objavil Nicholas Morpeth Hutchinson Lightfoot (1902–1962) s kolidža Heriot-Watt v Edinburgu [7]. Izraz Stefanovo število je bil torej na drugi strani železne zavese skovan veliko prej, kot so doslej opazili mnogi, ki navajajo Lockove pionirske zasluge. Gundersonov profesor strojništva na Univerzi Alberta v Edmontonu v Kanadi je bil Gerald Seymour Hunter Lock (1935–), ki je leta 1969, dve desetletji po prevajanju Rubinsteinovega dela v ZDA, raziskoval Stefanovo število brez sklicevanja na Brillouinove razprave.

Zaključek

Po doktoratu in habilitaciji v Parizu v letih 1979 in 1991 se je Domingo Alberto Tarzia (1950–) pridružil Universidad Austral v Buenos Airesu v Argentini, hkrati pa je deloval kot direktor raziskav Stefanovih premikajočih se meja faznih prehodov na Univerzi Nevada v mestu Reno. Njegovo delo dopolnjuje Slovenec Šarler, kar daje Stefanovemu problemu dodaten slovenski pridih.

Stefanov problem gibljive meje ostaja živa inovativna veja znanosti tudi pri nas.

LITERATURA

[1] M. Brillouin, *Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique: Propagation de la fusion*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **1** (1930), 285–308; ponatis: Pariz, 1931, str. 287, 280, 294, 296, 301.

[2] M. Brillouin, 1931, str. 300.

[3] A. Datsev, О трехмерной проблеме Стефана (O trirazsežnem Stefanovem problemu), Doklady Akad. Nauk. SSSR, **101** (1955), 629–632; A. Datsev, *Sur le problème linéaire de Stefan*, Mémoires de sciences physiques **69**, Gauthier-Villars, Paris, 1970, str. 3, 4, 5.

[4] A. Datsev 1970, str. 2, 3.

[5] J. Douglas, *A Uniqueness Theorem for the Solution of a Stefan Problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 402–408; G. Evans, *A Note on the Existence of a Solution to a Problem of Stefan*, Quart. Appl. Math. **9** (1951), 185–193; G. Sestini, *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, Rivista di Matematica della Universita di Parma **3** (1952), 3–23; G. Sestini, *Esistenza ed unicità del problema di Stefan relativo a campi dotati di simmetria*, Rivista di Matematica della Universita di Parma **3** (1952), 103–113; A. Datsev, 1950.

[6] G. Evans, E. Isaacson in J. MacDonald, *Stefan-like problems*, Quart. Appl. Math. **8** (1950), 312–319.

[7] J. R. Gunderson, *A study of heat conduction with phase change*, magistrska naloga, University of Alberta, Edmonton, 1966, str. 1, 3.

[8] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, 1971, 4–5.

[9] L. Rubinstein, *On the Dynamics of Evaporation of Polycomponent Solutions in a Nonvolatile Solvent*, U.S. Atomic Energy Commission, Technical Information Service, Oak Ridge, 1953.

[10] L. Rubinstein, Об определении положения границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана (Stefanov problem). Докл. АН СССР (Doklady Akademii Nauk SSSR) serija A **58** (1947), 217–220; L. Rubinstein, К вопросу о численном решении интегральных уравнений задачи Стефана (K vprašanju numerične rešitve integralske enačbe Stefanovega problema), Изв. вузов. Матем. (Известия высших учебных заведений. Математика, Reports of Higher Schools of Mathematics) **4** (1958), 202–214; L. Rubinstein in I. Rubinstein, *Partial differential equations in classical mathematical physics*, Cambridge University Press, New York, 1995.

[11] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, 1971, str. 4; A. N. Tikhonov, *Functional equations of Volterra type and their applications to certain problems of mathematical physics*, Bulletin of Lomonosov University in Moscow **1** (1938), 1–25; L. S. Leibenzon, Руководство по нефтепромысловой механике, Moskva, 1931; L. S. Leibenzon, К вопросу о затвердевании земного шара из первоначального расплавленного состояния. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geograf. i Geofiz. **6** (1939), 625–660.

[12] G. Sestini, *Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana Serie 3 **12** (1957), 516–519.

[13] G. Sestini, *Sul problema unidimensionale non lineare di Stefan in uno strato piano indefinito*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **51** (1960), 203–204; Datsev 1955.

[14] B. Šarler, *O Stefanovih raziskavah večfaznih sistemov*, Predavanje na Institutu Jožef Stefan, 14. december 2011, neobjavljeno, str. 21, 87.

[15] B. Šarler, *Stefan's work on solid-liquid phase changes*, Engineering analysis with boundary elements **16** (1995), 83–92; J. Stefan, *Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Eismeere*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien **98** II a (1889), str. 965; B. Šarler, *O Stefanovih raziskavah večfaznih sistemov*, Predavanje na Institutu Jožef Stefan, 14. december 2011, neobjavljeno, str. 10.

[16] W. F. Trench, *On an explicit method for the solution of a Stefan problem*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **7** (1959), 184–204. 1959, 7/2, 181–182.

Pred Evropskim kongresom matematike v Sloveniji

Slovenija bo od 19. do 26. junija 2021 v Portorožu v organizaciji Univerze na Primorskem in ob partnerstvu drugih slovenskih ustanov gostila 8. evropski kongres matematike (8ECM). Gre za največje evropsko znanstveno srečanje s področja matematike, ki pod okriljem Evropskega matematičnega združenja (EMS) poteka vsaka štiri leta. Kongres bo zaradi epidemioloških razmer izveden v spletni obliki. Kot je v zadnjem vabilu na kongres povedal **Volker Mehrmann**, predsednik Evropskega matematičnega združenja (EMS), si spletne izvedbe vnaprej sicer niso želeli, a bo na drugi strani morda vseeno omogočila sodelovanje tudi tistim članom mednarodne matematične skupnosti, ki bi se iz finančnih ali drugih razlogov težje odločili za udeležbo v živo.

Organizatorji so doslej zbrali že skoraj 1500 prijav iz 78 držav, od tega več kot 1000 prijav z referati, ki bodo razporejeni v 62 sekcij in minisimpozijev. Organizacijski odbor pod vodstvom **Tomaža Pisanskega** s podporo rektorice UP **Klavdije Kutnar** in predsednika lokalnega odbora **Dragana Marušiča** na projektu ECM dela že okoli sedem let in dobra mednarodna udeležba je v veliki meri plod njihove izjemne prizadevnosti. Med prijavljenimi predavatelji so trije Fieldsovi nagrajenci in skoraj 50 prejemnikov raziskovalnih projektov ERC.

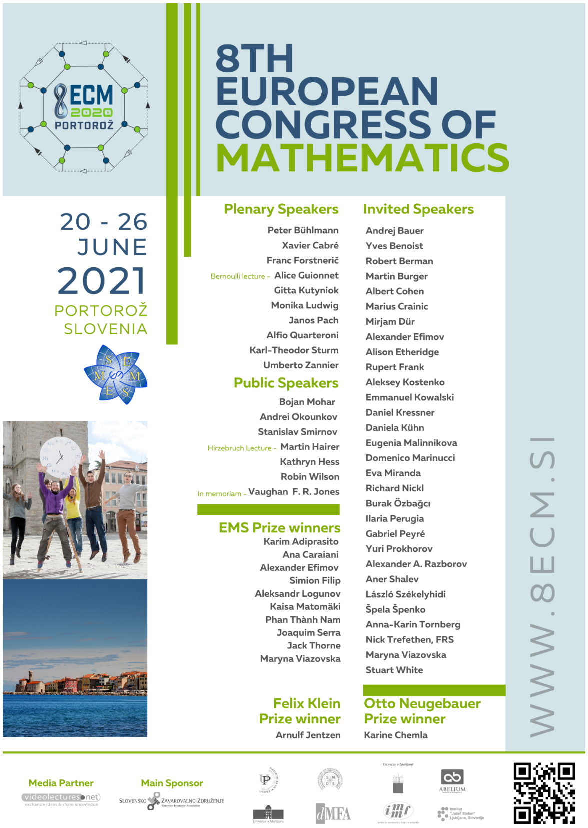
Kongres s svojim znanstvenim programom v veliki meri predstavlja trenutno stanje posameznih vej matematike in določa smernice sodobnih raziskav. Znanstveni program kongresa sicer potrjuje mednarodni programski odbor, ki ga določi Evropsko matematično združenje (EMS), predseduje pa mu **Maria J. Esteban** (CNRS, Francija). Programski odbor je na osnovi predlogov članov združenja tako izbral 10 plenarnih predavateljev, med katerimi je prvič v zgodovini kongresa tudi slovenski matematik, **Franci Forstnerič**. Med še 30 vabljenih predavateljev pa je programski odbor uvrstil tudi **Andreja Bauerja** in **Alekseya Kostenka**, oba profesorja na UL FMF, ter **Špelo Špenko**, slovensko matematičarko mlajše generacije, ki uspešno deluje v Belgiji.

Eden od osrednjih kongresnih dogodkov je tudi podelitev nagrad Evropskega matematičnega združenja. Imena prejemnikov nagrad so bila objavljena že v letu 2020, izbral pa jih je poseben odbor EMS, ki mu je predsedoval **Martin Bridson** (Oxford U., V. Britanija). Gre za 10 nagrad za izjemne raziskovalne dosežke na področju matematike raziskovalkam in raziskovalcem do 35 let, ki delujejo v Evropi, in še posebni nagradi Felixa Kleina za uporabo matematike v industriji ter Otta Neugebauerja za zgodovino matematike.

Med izpostavljenimi posebnimi dogodki poleg predavanj nagrajencev EMS omenimo še predavanje letošnjega prejemnika Abelove nagrade **Lászla**

Lovásza, Hirzebruchovo predavanje **Martina Hairerja**, Bernoullijevo predavanje **Alice Guionnet**, ter šest javnih predavanj znanih matematikov, med katerimi je tudi **Bojan Mohar**. Prav tako bodo v okviru kongresa izvedeni posveti na temo ERC projektov, odprtega dostopa in spolne uravnoteženosti, pa tudi nekaj razstav, manjših srečanj in priložnostnih dogodkov, ki bodo nadomestili prvotno načrtovane umetniške dogodke v živo.

8ECM se bo začel v ponedeljek, 21. junija, z otvoritveno slovesnostjo ob 9. uri in končal z zaključno slovesnostjo v petek, 25. junija, ob 17. uri. Natančnejši urnik in številne druge informacije so na voljo na spletni strani `http://8ecm.si`. DMFA Slovenije kot eden od soorganizatorjev kongresa svojim članom priporoča, da tudi z lastno udeležbo na kongresu in promocijo kongresa med svojimi sodelavci podprejo prizadevanja, da postane slovenska matematika še bolj prepoznavna v mednarodnem merilu.

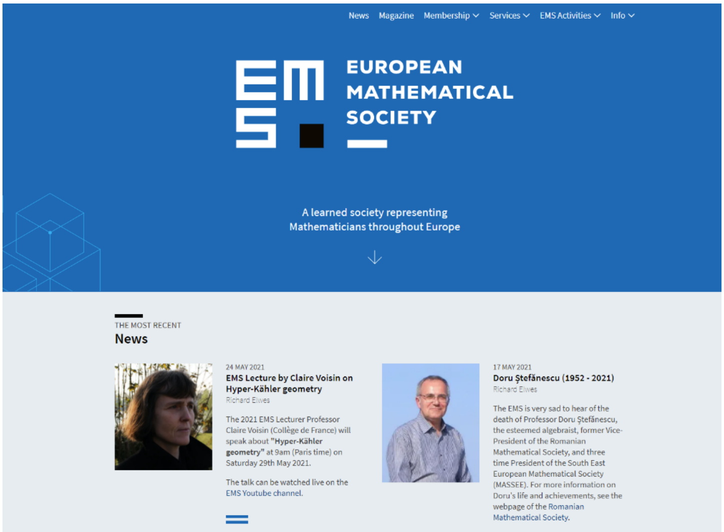


Boštjan Kuzman

Mednarodne matematične novice

Letno srečanje predstavnikov nacionalnih združenj pri EMS je potekalo 28. 5. 2021 preko spletne seje. Predsednik EMS Volker Mehrmann je predstavil različne načrtovane aktivnosti združenja (poleg 8ECM še praznovanje 30-letnice EMS, vzpostavitev Mlade akademije EMS in tematskih aktivnosti skupin TAG pri EMS), podrobnosti o novostih v zvezi s spletnimi stranmi, publikacijami EMS in bazo zbMATH open pa so predstavili novi uredniki J. Buescu, F. Costa, A. Gaul in K. Hulek. Tekoče novice v zvezi z 8ECM sta predstavila T. Pisanski in K. Kutnar, kratke predstavitve svojih društev pa so pripravili I. Agricola (Deutsche Mathematiker-Vereinigung), R. Gologan (Romanian Math Society) in G. Makrides (Cyprus Math Society). Prihajajoči kongres ICM 2022 je predstavil Y. Matiyasevich, aktivnosti angleškega združenja IMA proti diskriminaciji v matematiki pa N. Chamberlain.

Evropsko matematično združenje (EMS) ima nov logotip in elegantno posodobljeno spletno stran na naslovu `euromathsoc.org`. Na spletni naslovnici najdemo aktualne novice, za meniji pa podatke o združenju in članstvu, spletno revijo, informacije o aktivnostih EMS (nagrade, znanstvene aktivnosti, podpora manj razvitim) ter o različnih dogodkih in prostih delovnih mestih za matematike na različnih evropskih ustanovah.



EMS Magazine je nova revija, ki je nadomestila prejšnji EMS Newsletter. Vsi objavljeni članki so po principu *online first* brezplačno dostopni na spletu že pred izidom tiskane izdaje, ki jo bodo lahko člani EMS še naprej prejemali brezplačno, če bodo za to izrazili željo. Prva številka nove revije prinaša pregledne matematične članke treh nedavnih prejemnikov EMS nagrad, prispevek o bazi zbMATH open in različne prispevke v rubrikah Mathematics and arts, Young mathematicians column, ICMI column, ERME column, Book reviews, Solved and unsolved problems. V novi reviji ni več kratkih aktualnih novic, ki ostajajo posamično dostopne na spletnih straneh, v zbirni obliki pa v novičniku **EMS Digest**.

EMS Press je novo podjetje v 100 odstotni lasti EMS, na katerega je bila prenesena dejavnost prej samostojnega društva EMS Publishing House. Pomlajena ekipa sodelavcev je poleg nove spletne strani `ems.press` temeljito prenovila tudi različne tehnične procese, ki zdaj omogočajo učinkovito hkratno urejanje spletnih in tiskanih izdaj.

Naročniški model S2O (Subscribe to Open) v letu 2021 uvaja vseh 10 znanstvenih revij EMS, tudi najprestižnejša *Journal of EMS*. Model S2O nudi odprt dostop za vse bralce brez plačila stroškov s strani avtorja ob predpostavki, da revija v tekočem letu zbere dovolj naročnin s strani ustanov in posameznikov. Zato je pomembno ozavestiti nacionalne konzorcije, univerzitetne knjižnice in sorodne subjekte, da z naročnino na tovrstne revije podpirajo prost dostop do rezultatov aktualnih matematičnih raziskav. Pomenu odprtega dostopa bo posvečena tudi posebna panelna diskusija v okviru kongresa 8ECM.

ICM INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS 2022 JULY 6-14 SAINT PETERSBURG

Štipendije Kovalevskaya za udeležbo mlade generacije na ICM 2022

Julija 2022 bo v Skt. Petersburgu (Rusija) potekal Mednarodni matematični kongres ICM 2022. Gre za največje svetovno matematično srečanje, ki poteka vsaka štiri leta, na njem pa podeljujejo tudi Fieldsove in druge nagrade. Organizatorji si želijo dobre udeležbe s strani mlajše generacije, zato nameravajo v sodelovanju z nacionalnimi matematičnimi društvi po regionalnih kriterijih podeliti do 1000 štipendij Kovalevskaya. Ta štipendija bo prejemnikom pokrila stroške ruske vize, kotizacije za kongres, lokalne namestitve in prehrane v času kongresa, nacionalna društva pa naj bi izbrala najprimernejše kandidate in jim v sodelovanju z domačimi ustanovami pomagala financirati stroške poti na kongres. Skrajni rok za prijavo s strani organizatorja bo predvidoma novembra 2021.

Odbor za matematiko pri DMFA Slovenije vabi zainteresirane ustanove (predvsem matematične oddelke fakultet in inštitutov) in tudi posameznike, da čimprej, najkasneje pa do 10. septembra izrazijo željo za nominacijo kandidatov in sodelovanje pri izbirnem postopku v zvezi s štipendijami Kovalevskaya na naslov `mathematics@dmfa.si`. Zbrane informacije bodo podlaga za pravočasno usklajevanje nadaljnjih korakov.

Boštjan Kuzman, Odbor za matematiko pri DMFA Slovenije

Manipulacije v znanstvenih objavah

Revija *Physics World* je konec marca 2021 v zvočnem prispevku [1] poročala o spornih znanstvenih publikacijah. Svoje izkušnje je predstavila gospa Kim Eggleton, ki se ukvarja s tovrstnimi problemi v ustanovi Institute of Physics (IOP). Ta inštitut izdaja kakih devetdeset revij s področja fizike ali s fiziko povezanih ved.

Nepravilnosti pri objavljanju, kot so plagiati, imajo lahko za povzročitelja hude posledice, a se vseeno dogajajo. Prepisovanje je groba kršitev, a obstajajo tudi drugačne, manj očitne bližnjice do objave v znanstveni reviji.

Včasih avtor članka sam predlaga recenzenta in da zanj lažen elektronski naslov (po možnosti zelo podoben pravemu). Ta prošnjo urednika za recenzijo preusmeri k avtorju.

Do nedavnega so revije bile zelo zadržane pri umikanju in preklicevanju slabih objavljenih člankov. Bale so se, da bi to negativno vplivalo na njihov ugled. Poleg tega se lahko znanstvenik enostavno zmoti in včasih recenzent to spregleda. Ampak prav je, da se napake, tudi če niso bile narejene namenoma, obelodanijo in popravijo, če je to mogoče. Umik članka pa mora biti utemeljen in razložen.

Oglejmo si še en iznajdljiv trik. Javili so se »organizatorji konference«, ki so reviji predlagali tematsko številko o rezultatih srečanja, na katerem naj bi sodelovali slavni znanstveniki, ki naj bi tudi recenzirali prispevke. Več revij je tako moralo preklicati že objavljene celotne tovrstne izdaje.

V nekaterih ustanovah so vodilni avtomatično soavtorji članka, čeprav znanstveno k objavi niso prispevali. To je težko rešljiv problem, če morajo mladi raziskovalci podpisati pogodbe, v katerih pristajajo na tako politiko. Pomaga, če pri člankih z več avtorji uredništvo zahteva, da je navedeno, kaj so posamezni avtorji prispevali.

Mogoče je postati soavtor članka, če plačaš ustrezno vsoto. Ko je članek že odobren, včasih originalni avtorji na določenih mestih v družbenih omrežjih objavijo ponudbo za soavtorstvo in zahtevani znesek. Interesenti, ki jim manjka kaka točka pri reelekciji ali napredovanju in jim je vsebina blizu, nakažejo denar. Originalni avtorji nato pišejo uredniku, da so pozabili navesti tega in tega ...

Zgodi se, da avtorji zahtevajo umik predloženega članka, verjetno zato, ker so članek poslali več revijam in je bil sprejet v kako drugo, ki se jim zdi bolj prestižna. Vendar večkrat ugotovijo, da to ne gre ...

Pogosto taka dejanja opravičujejo s pritiskom po objavljanju (»objavljaj ali propadi«). A brali smo o primerih, ko so uveljavljeni znanstveniki, ki se jim ni bilo treba bati za službo, kot po tekočem traku objavljali lažne študije.

Nizozemska mikrobiologinja Elisabeth Bik pravi, da so za nepravilnosti odgovorni predvsem: permisivna akademska kultura, pomanjkljiva kontrola drugih raziskovalcev, velike denarne stimulacije za objave in spravljiva nacionalna politika do takih prekrškov.

Na Kitajskem je Univerza v Nandžingu pred desetletji začela z majhnimi denarnimi nagradami za objave v fizikalnih revijah z visokim faktorjem vpliva. Prišla je na prvo mesto po obsegu objav v več zaporednih letih. Zato so jo začele posnemati druge ustanove. Nagrade so bile vedno večje in so hitro znesle eno ali več mesečnih plač mladega profesorja, odvisno od faktorja vpliva (Impact Factor). Objava v revijah *Nature* in *Science* je kitajskim znanstvenikom prinesla največ – leta 2016 v povprečju okrog 44 tisoč dolarjev za članek. Najvišja nagrada je bila takrat celo 165 tisoč dolarjev [2], kar je bilo za kitajske razmere ogromno. Lansko leto je kitajska vlada tovrstne denarne nagrade prepovedala in zahtevala, naj število člankov ne bo edino merilo za napredovanje. Več pozornosti naj bi posvetili originalnosti in kakovosti objavljenega. Številni kitajski znanstveniki se s tem ne strinjajo. Ekscesov bo morda manj, a verjetno bo tudi manj navdušenja za raziskave in objave.

Prej omenjena doktorica Elisabeth Bik je znana predvsem po razkrinkanju kopiranja slik v člankih. Včasih gre za večkratno prodajanje iste slike v različnih kontekstih, včasih za »izposojo«. Gospa Bik ima popularen Twitter račun in si je, kot sama navaja v predstavitvi, prislužila oznake: »propadla znanstvenica, premaknjena, lovka na čarovnice«. Dejansko je za eno leto prekinila znanstveno kariero, da bi se posvetila raziskovanju zlorab. Tudi zgoraj omenjena Kim Eggleton pravi, da razčiščevanje tovrstnih primerov ni prav nič prijetno.

Institute of Physics (IOP) ponuja certifikat *IOP Trusted reviewer* za področje fizike. Pogoj je izdelava odlične recenzije in tečaj, v katerem se slušatelji seznanijo tudi s triki, s katerimi se skušajo nekateri dokopati do objav. To ni edini tovrstni certifikat.

Ustanova IOP uvaja tudi **dvojno slepo recenzijo**, kar pomeni, da urednik recenzentu ne posreduje imena avtorja. Ta novost je bila v glavnem lepo sprejeta. Avtorji imajo večinoma občutek, da je recenzijski postopek bolj objektiven. Vsekakor je to boljše za mlade raziskovalce in tiste z obrobja znanstvenega sveta.

LITERATURA

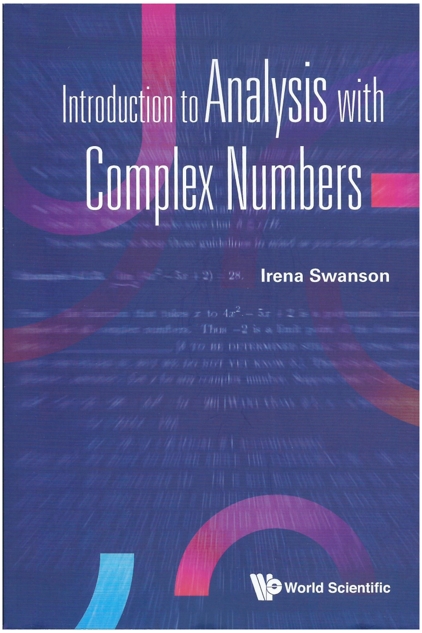
[1] H. Johnston, *Finding silicon's Holy Grail at long last, how to recognize and prevent »publication misconduct«*, Physics World Podcast, dostopno na `physicsworld.com/a/finding-silicons-holy-grail-at-long-last-how-to-recognize-and-prevent-publication-misconduct/`, ogled 25. marca 2021.

[2] *Paid to Publish – the Chinese Cash Cow*, Enago Academy, 21. maj 2018, dostopno na `www.enago.com/academy/paid-to-publish-the-chinese-cash-cow/`, ogled 25. marca 2021.

Peter Legiša

NOVE KNJIGE

I. Swanson, Introduction to Analysis with Complex Numbers, World Scientific, New Jersey in drugje, 2021, 456 strani.



Knjiga je vsebinsko zaokrožena, samostojna celota, ki obsega standardne vsebine začetne matematične analize, kot so funkcije, zaporedja in vrste, vključene pa so tudi konstrukcije naravnih, celih, racionalnih, realnih in kompleksnih števil ter ne nazadnje tudi matematična logika, ki jo uspešno uporablja pri strogem dokazovanju. Nekaj dokazov je v posebnem tisku razširjenih s podrobnejšimi pojasnili, ki se običajno avtorjem ne zdijo potrebna, bralcu pa pomagajo, da se laže prebije do končnega sklepa.

Knjiga, napisana za študente na Reed Collegeu v Portlandu v državi Oregon, kjer je avtorica predavala v letih 2005–2020, je prežeta s številnimi vzorno izdelanimi primeri in skrbno izbranimi nalogami za boljše razumevanje snovi. Prav zaradi nekoliko drugačne obravnave, kot smo je navajeni iz naših in tujih standardnih učbenikov analize, bo morda delo zanimivo tudi za naše profesorje in študente. Dobesedno nas namreč uči, kar včasih v standardnih učbenikih pogrešamo, kako na podlagi logike iz aksiomov in že dokazanih trditev natančno poteka dokaz, predvsem pa, kako le-tega čim bolj razumljivo zapisati. V ta namen je v knjigi prisotnih tudi veliko nalog, ki zahtevajo dokaz neke trditve.

Knjiga je smiselno razdeljena na deset poglavij in dva dodatka. Prvi dve poglavji obravnavata osnove matematike. Velik poudarek je na logiki, oznakah v matematiki, teoriji množic, pojmih relacije in funkcije ter metodah dokazovanja.

Tretje poglavje se začne s konstrukcijo množice naravnih števil $\mathbb{N}_0$ na podlagi teorije množic. S principom indukcije je nato zgrajena aritmetika v $\mathbb{N}_0$. Urejen kolobar celih števil $\mathbb{Z}$ vpelje z urejenimi pari celih števil, to se pravi s kartezičnim produktom $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, v katerem definira ekvivalenčno relacijo, katere razredi so cela števila. Nato razvije vso aritmetiko celih števil. Prav tako vpelje urejeno polje racionalnih števil $\mathbb{Q}$ z urejenimi pari v kartezičnem produktu $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, v katerem definira ekvivalenčno relacijo, katere ekvivalenčni razredi so racionalna števila. Urejeno polje realnih števil $\mathbb{R}$ vpelje z Dedekindovimi rezi. Dedekindov in Arhimedov aksiom postaneta s tem izreka. Dokazan je izrek o obstoju korenov pozitivnih števil. Polje kompleksnih števil $\mathbb{C}$ seveda uvede korektno s kartezičnim produktom $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. V $\mathbb{C}$ definira osnovne aritmetične operacije, konjugiranje in absolutno vrednost. Uvede kompleksno ravnino in njeno topologijo ter polarni zapis. Poglavje se konča s Heine–Borelovim izrekom.

Četrto poglavje je posvečeno limiti funkcije kot enemu od osrednjih pojmov v matematični analizi. Že na začetku definira limito kompleksne funkcije kompleksne spremenljivke. Za realne funkcije realne spremenljivke definira levo in desno limito. Obravnava tudi primer, ko število ni limita neke funkcije. Pri tem opozarja na natančnost definicij, ker vsaka pomanjkljivost v izražanju lahko spremeni pomen. Sledijo običajni limitni izreki. Poglavje se konča z neskončno limito realne funkcije realne spremenljivke in limito v neskončnosti kompleksne funkcije kompleksne spremenljivke.

Peto poglavje obravnava zveznost funkcije. Po definiciji zveznosti in izreku, ki se naslanja na pojem limite funkcije, sledijo običajni izreki za zvezne funkcije, izrek o ekstremni vrednosti, izrek o povprečni vrednosti, definicija in zveznost korenskih funkcij in na koncu še enakomerna zveznost.

Šesto poglavje se ukvarja z odvajanjem funkcij. Odvod definira kar za kompleksno funkcijo kompleksne spremenljivke. Izpeljana so običajna pravila za odvajanje, pravilo za odvajanje sestavljene funkcije in pravilo za odvod inverzne funkcije. Dokazani so izrek o povprečni vrednosti (nam bolj znan kot Lagrangeev izrek), Darbouxov izrek, Rollov izrek, dve varianti Cauchyjevega izreka in l'Hôpitalovi pravili. Na koncu poglavja so na vrsti odvodi višjega reda in Taylorjevi polinomi.

V sedmem poglavju je najprej na vrsti določeni integral za realne funkcije realne spremenljivke, in sicer s spodnjimi in zgornjimi integralskimi vsotami glede na dano delitev integracijskega intervala. Dokazana so osnovna pravila integriranja in osnovna izreka integralskega računa. Definirani so tudi posplošeni (izlimitirani) integrali in integral kompleksne funkcije realne spremenljivke. V tem poglavju so z integralom definirani naravni logaritem, eksponentna funkcija kot njegov obrat in splošna potenčna funkcija. Poglavje zaključuje uporaba integrala za računanje dolžine krivulje in prostornine ter površine rotacijskih teles.

Osmo poglavje obravnava zaporedja. Kompleksno zaporedje uvede kot kompleksno funkcijo, definirano na množici $\mathbb{N}_0$. Pojasni, da se da pozitivna racionalna števila obravnavati kot zaporedje. Definira konvergentno zaporedje in njegovo limito. Prav tako divergentno zaporedje in neskončno limito. Izpelje pravila za računanje z limitami. Dokazani so izreki za monotona, omejena in Cauchyjeva zaporedja. Na koncu poglavja so vpeljana še podzaporedja ter spodnje in zgornje stekališče realnega zaporedja.

Predzadnje, deveto poglavje se ukvarja s številskimi in potenčnimi vrstami. Vpelje pojma konvergentne vrste in njene vsote ter pojem divergentne vrste. Dokaže pravila za računanje z vrstami in nekaj konvergenčnih testov. Definira pojem absolutne konvergence in dokaže izrek o ohranitvi vsote take vrste pri poljubni permutaciji njenih členov. V nadaljevanju sledijo kompleksne potenčne vrste, konvergenčni polmeri, odvajanje potenčnih vrst, množenje potenčnih vrst, Taylorjeve vrste, uporaba potenčnih vrst.

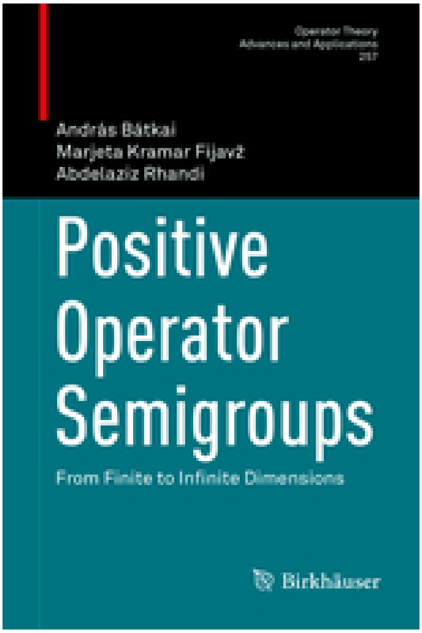
V zadnjem, desetem poglavju spoznamo, kako s teorijo potenčnih vrst vpeljemo eksponentno in trigonometrične funkcije. Vpeljano je število π kot dvakratnik najmanjše pozitivne ničle funkcije kosinus, ki je definirana s potenčno vrsto. Pokazano je, kako lahko razvijemo vso trigonometrijo, če izhajamo iz eksponentne vrste. Definirane so tudi ciklometrične funkcije in izračunani so njihovi odvodi.

Prvi dodatek vsebuje kratka navodila, kako pravilno pišemo matematična besedila, kako pravilno uporabljamo simbole, kako matematiko študiramo, kaj smemo početi in česa ne, kako pravilno dokazovati in podobno. Drugi dodatek je zbirka osnovnih pravil matematične logike in najpomembnejših formul infinitezimalnega računa. Na koncu knjige najdemo seznam uporabljenih oznak in stvarno kazalo. Knjiga je dosegljiva v nekoliko krajši obliki na svetovnem spletu na naslovu: `www.math.purdue.edu/~gcavigli/Swanson.pdf`.

Avtorica knjige je naše gore list, Irena Šifrar Swanson, doma v Čreti v občini Hoče–Slivnica, nekdanja dijakinja II. gimnazije Maribor. Leta 1982 je odpotovala na izmenjavo v ZDA, kjer je študirala matematiko in leta 1992 doktorirala. Tam je postala uspešna profesorica matematike. Podrobnosti lahko najdemo na svetovnem spletu. Njeno glavno področje matematičnih raziskav so komutativne algebre. Imeli smo jo priložnost spoznati leta 2009 na Bledu, kjer je potekalo strokovno srečanje ob 60-letnici ustanovitve DMFA Slovenije, pa tudi kot gostujočo profesorico v Ljubljani istega leta. Na Bledu je predstavila temo z naslovom *Celostno zaprtje kolobarjev*.

Marko Razpet

A. Bátkai, M. Kramar Fijavž, A. Rhandi, Positive operator semigroups: from finite to infinite dimensions, Operator Theory: Advances and Applications 257, Birkhäuser, Basel, 2017, 364 strani.



Monografija, v kateri avtorji proučujejo pozitivne operatorske polgrupe, je razdeljena na tri glavne dele in dodatek, v katerem so zbrana znana osnovna dejstva.

V prvem delu, ki je osredotočen na obravnavo operatorskih polgrup na končnorazsežnih prostorih, avtorji najprej ponovijo dobro znane osnovne pojme, kot so konvergenca in topologija v končnorazsežnih vektorskih prostorih, matrična oziroma operatorska norma, matrične funkcije in spektralna teorija. V nadaljevanju prvega dela je predstavljen Perron-Frobeniusov izrek in njegova posplošitev na imprimitivne matrike, izpeljana teorija pa je podprta z uporabo na primeru Googlove matrike in pozitivnih kontrolnih sistemov. Prvi del zaključijo z obravnavo pozitivnih matričnih polgrup in pozitivnih linearnih sistemov.

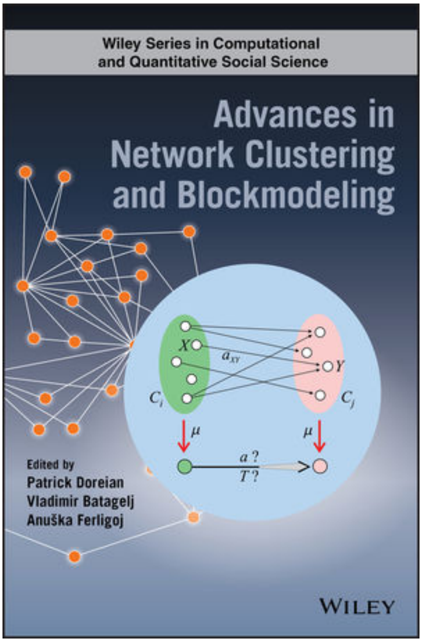
V drugem delu avtorji najprej naredijo hiter pregled primerov, lastnosti in konstrukcij krepko zveznih operatorskih polgrup na Banachovih prostorih, temu pa sledi strnjen povzetek Banachovih mrež in operatorjev na njih. V nadaljevanju dokažejo znameniti generacijski izrek Hille-Yosida, nekatere perturbacijske izreke in Phillipsov izrek o karakterizaciji generatorjev pozitivnih kontrakcijskih krepko zveznih polgrup. Drugi del zaključijo s spektralno teorijo pozitivnih polgrup in teorijo neomejenih perturbacij. Tretji del monografije je namenjen naprednejšim vsebinam in njihovim uporabam.

Kljub zahtevnejši vsebini je monografija napisana na moderen in bralcu prijazen način. Razvita teorija je odlično podprta z ogromnim številom primerov in nalog, namenjenih za utrjevanje in dodatno poglabljanje v snov. Njihov pristop, s katerim najprej zelo natančno obdelajo končnorazsežni primer, preden naredijo prehod na neskončnorazsežnega, omogoča dosegljivost vsebine tudi dodiplomskim študentom z boljšim predznanjem. Glede na velik razpon uporabe teorije na konkretnih problemih je knjiga brez dvoma izvrstna referenca za teorijo pozitivnih operatorskih polgrup.

Marjeta Kramar Fijavž je doktorirala leta 2004 na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Večkrat je gostovala na univerzah v Tübingenu in Ulmu v Nemčiji, kjer se je začela raziskovalno ukvarjati s krepko zveznimi operatorskimi polgrupami. Je mentorica enemu in somentorica trem doktorskim študentom. Je aktualna podpredsednica DMFA Slovenije in vodja mednarodnega COST projekta Mathematical models for interacting dynamics on networks.

Marko Kandić

P. Doreian (ur.), V. Batagelj (ur.), A. Ferligoj (ur.), Advances in Network Clustering and Blockmodeling, John Wiley & Sons 2020, 432 strani



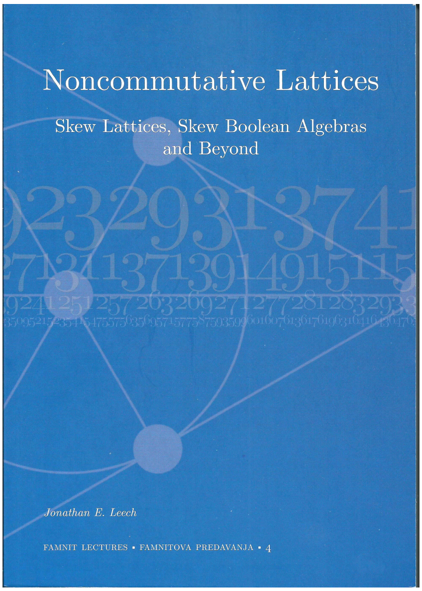
Mladi pri besedi omrežje najbrž najprej pomislijo na spletna socialna oz. družbena omrežja, ki krojijo njihovo komuniciranje, druženje in izražanje. Vendar pa so omrežja veliko bolj prisotna. Vsi smo del več omrežij, ki krojijo, usmerjajo in oblikujejo naša življenja. Socialno omrežje je definirano kot graf, ki mu dodamo dodatne podatke o vozliščih in/ali povezavah. Vozlišča tako lahko predstavljajo npr. posameznike (ali podjetja, države . . .), s povezavami pa predstavimo prijateljstvo ali sodelovanje med dvema posameznikoma (oz. poslovanje med podjetjema, trgovanje med državama . . .). S pomočjo analize omrežij lahko iščemo najpomembnejša vozlišča v omrežju, skupine enot s podobnim vzorcem medsebojne povezanosti ipd.

Znanstvena monografija z naslovom *Advances in Network Clustering and Blockmodeling* je izšla v začetku 2020 pri založbi Wiley. Knjigo so uredili Patrick Doreian (Univerza v Pittsburghu, FDV UL), Vladimir Batagelj (IMFM, IAMUP, NRU HSE International Laboratory for Applied Network Research, Moskva) in Anuška Ferligoj (FDV UL, NRU HSE International Laboratory for Applied Network Research, Moskva). Poleg priznanih tujih raziskovalcev so več poglavij prispevali tudi slovenski avtorji: Marjan Cugmas, Luka Kronegger, Andrej Mrvar in Aleš Žiberna (FDV UL), Lovro Šubelj (FRI UL) ter Anja Žnidaršič (FOV UM).

Knjiga ponuja pregled razvoja na področju analize omrežij, natančneje na področju razvrščanja in bločnega modeliranja omrežij. Na enem mestu so združena dognanja, torej metode, pristopi in algoritmi, ki so se več desetletij razvijala tako na področju matematike, fizike, računalništva in sociologije ter omogočajo vpogled v strukturo omrežij in razumevanje procesov, ki omrežja oblikujejo in spreminjajo. Pregled obstoječega znanja in najodmevnejših dosežkov je prikazan s pomočjo bibliometrične analize znanstvenih del s področja razvrščanja v omrežjih. Na enostaven način, podkrepljeni s primeri in slikami, so prikazani različni pristopi in algoritmi pri razvrščanju v omrežjih (npr. hierarhično razvrščanje, metoda voditeljev, bločno modeliranje . . .) ter nova dognanja v odkrivanju skupnosti, bločnem modeliranju omrežij z vrednostmi na povezavah, bločnem modeliranju predznačenih omrežij, tretmajih za manjkajoče podatke v omrežjih ter stohastičnem bločnem modeliranju.

Anja Žnidaršič

J. E. Leech, Noncommutative Lattices, Skew Lattices, Skew Boolean Algebras and Beyond, Slovensko društvo za diskretno in uporabno matematiko in Založba Univerze na Primorskem, 2021, 284 strani.



Predstavljamo četrto knjigo zbirke *Famnitova predavanja*. Naslov v slovenščini bi se glasil: *Nekomutativne mreže: poševne mreže, poševne Boolove algebre in onkraj*. Knjiga je prosto dostopna na povezavi `www.hippocampus.si/-ISBN/978-961-293-028-8/mobile/-index.html`.

Mreže kot urejenostne oziroma algebrske strukture srečamo v učnih načrtih univerzitetnih študijskih programov prve stopnje. V slovenščini najdemo mreže na primer v učbenikih I. Vidava (Algebra, 1972) in N. Prijatelja (Matematične strukture I (1964) in II (1967)).

Ponovimo najnujnejše o mrežah, kar najdemo v omenjenih knjigah, pa tudi v prvem poglavju knjige, ki jo predstavljamo. Mreža je definirana kot neprazna množica L, ki je opremljena z internima binarnima operacijama, označenima z znakoma $\vee$ in $\wedge$, za kateri veljajo določeni zakoni. Če sta a in b poljubna elementa v L, imenujemo $a \vee b$ unija (angl. join), $a \wedge b$ pa presek (angl. meet) elementov a in b. Potenčna množica dane množice S je eden od osnovnih primerov mreže, če vzamemo za operaciji unijo in presek podmnožic množice S. Iz tega izvirajo tudi ustrezni izrazi in oznake. Namesto uveljavljenih znakov $\vee$ in $\wedge$ najdemo v knjigah I. Vidava in N. Prijatelja znaka $\cup$ in $\cap$.

Za operaciji $\vee$ in $\wedge$ veljajo zakoni idempotentnosti ($a \vee a = a$, $a \wedge a = a$), komutativnosti ($a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$), asociativnosti ($(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$) in absorpcije ($a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$). Zakona idempotentnosti sta sicer logični posledici zakonov absorpcije, vendar ju vedno navajamo na prvem mestu, ker ju ohranimo pri nekomutativnih mrežah. Zakoni so dualni, kar pomeni, da se kot celota nič ne spremenijo, če v njih med seboj zamenjamo znaka $\vee$ in $\wedge$. Posledično to velja v teoriji mrež za vsako trditev, ki je izpeljana iz navedenih zakonov.

Neprazna množica L, ki jo delno ureja relacija $\leq$ in v kateri ima vsak par elementov a, b za to relacijo natančno zgornjo mejo $\sup\{a, b\}$ in natančno spodnjo mejo $\inf\{a, b\}$, je mreža. Obe definiciji sta logično ekvivalentni. Množica L, ki jo delno ureja relacija $\leq$ in v kateri ima vsaka podmnožica za to relacijo natančno zgornjo in spodnjo mejo, je polna mreža. Mreže, ki imajo še kakšno dodatno lastnost, imajo posebna imena. Poznamo na primer modularne, distributivne in Boolove mreže. Vsaka distributivna mreža je modularna.

Knjiga obravnava nekomutativne mreže. Omenjene zakone komutativnosti in absorpcije nadomesti s kakšnimi drugimi zakoni. Preprost primer nekomutativne mreže je množica L idempotentnih elementov nekomutativnega kolobarja, kadar je L zaprta za operaciji $\vee$ in $\wedge$, ki sta definirani s predpisoma $a \vee b = a + b - a \cdot b$ in $a \wedge b = a \cdot b$. Pri tem je $\cdot$ znak za množenje v kolobarju. Element a kolobarja je idempotenten, če velja $a^2 = a \cdot a = a$. Za operaciji $\vee$ in $\wedge$ lahko hitro ugotovimo, da zanju veljajo zakoni idempotentnosti, asociativnosti in absorpcije, zakona komutativnosti pa ne. Pač pa v L veljata zakona $(b \vee a) \wedge a = a$ in $(b \wedge a) \vee a = a$. To pa je dovolj dobra motivacija, zakaj študirati nekomutativne mreže. Opisana množica L je poseben primer tako imenovane poševne mreže. Velik del knjige obravnava ravno poševne mreže.

Glede na to, s kakšnimi zakoni nadomestimo komutativnostna in absorpcijska zakona običajne komutativne mreže, dobimo različne vrste nekomutativnih mrež. Vselej so zakoni v dualnih parih. Tako na primer z zakonoma $a \wedge (b \vee a \vee b) \wedge a = a$ in $a \vee (b \wedge a \wedge b) \vee a = a$ dobimo kvazimreže, z zakoni $a \wedge (a \vee b \vee a) = a$, $a \vee (a \wedge b \wedge a) = a$, $(a \vee b \vee a) \wedge a = a$ in $(a \wedge b \wedge a) \vee a = a$ pa paramreže.

Pričujoča knjiga ima sedem poglavij, ki pretežno pokrivajo poševne mreže, kvazimreže in paramreže, poševne mreže idempotentnih elementov v kolobarjih in poševne Boolove algebre. Prva štiri poglavja so srčika knjige, zadnja tri pa obravnavajo bolj specializirane teme o poševnih mrežah, poševnih mrežah v kolobarjih in poševnih Boolovih algebrah.

Vsebina je lepo strukturirana. Izreki, leme, trditve, posledice, težji dokazi in komentarji, vključno z zgodovinskimi, si sledijo v logičnem zaporedju. Knjiga je opremljena, kjer je potrebno, s pripadajočimi diagrami in razpredelnicami. Na koncu vsakega poglavja so navedeni ustrezni pomembni viri, na koncu knjige pa še seznam objav po abecednem vrstnem redu avtorjev, ki so največ pripomogli k razvoju teorije nekomutativnih mrež.

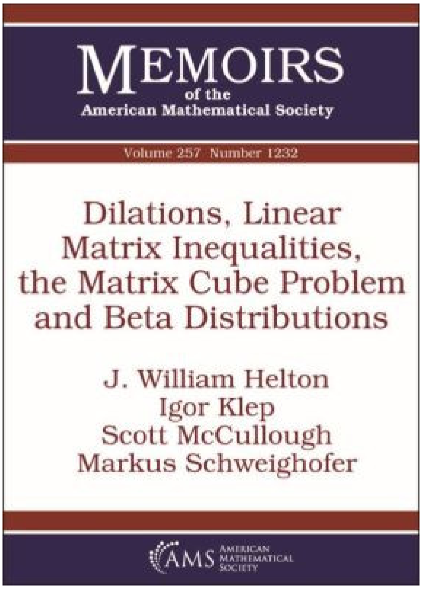
Z velikim zadovoljstvom je treba pripomniti, da v knjigi pogosto srečujemo iz slovenske matematične šole več imen oseb, ki so znatno prispevale k razvoju teorije nekomutativnih mrež.

Knjiga je prva znanstvena monografija, ki vsebuje glavne rezultate študija poševnih mrež. Namenjena je predvsem podiplomskim študentom kot osnovni učbenik, po njej pa bodo posegali tudi raziskovalci, specialisti, ki se zanimajo za nekomutativne algebre.

Avtor knjige je matematik Jonathan E. Leech. Diplomiral je na havajski univerzi, doktorat pa je dosegel na kalifornijski univerzi v Los Angelesu. Matematiko je predaval na več ameriških univerzah, bil pa je tudi gostujoči profesor na univerzah v Španiji, Braziliji in Avstraliji. V svoji akademski karieri je profesor Leech proučeval algebrske strukture, ki so povezane s polgrupami. Veliko svojega truda je namenil nekomutativnim mrežam, še posebej pa poševnim mrežam. Sam ali s soavtorji je objavil več člankov, ki so postali temelj sodobne teorije nekomutativnih mrež. S svojimi objavami in predavanji je vzpodbudil mnoge matematike, da so začeli raziskovati na tem področju.

Marko Razpet

J. W. Helton, I. Klep, S. McCullough, M. Schweighofer, Dilations, linear matrix inequalities, the matrix cube problem and beta distributions, Memoirs of the American Mathematical Society 1232, American Mathematical Society, Providence, 2019, 106 strani.



Osrednja tematika knjige je študij vsebovanosti množice rešitev ene linearne matrične neenakosti (LMN) v množici rešitev druge. Bolj natančno, LMN je vsaka neenakost oblike

$$I_d \otimes 1 + A_1 \otimes x_1 + \cdots + A_g \otimes x_g \succeq 0, \quad (1)$$

kjer so $d \in \mathbb{N}$ naravno število, I_d identična $d \times d$ matrika, $A := (A_1, \ldots, A_g)$ g-terica realnih simetričnih $d \times d$ matrik, $x_1, \ldots, x_g$ spremenljivke, simbol $\otimes$ predstavlja običajno množenje matrike z realnim številom, simbol $\succeq 0$ pa pomeni, da je leva stran pozitivno semidefinitna matrika. Množica rešitev $D_A(1)$ neenakosti (1) se imenuje *spektraeder.*

Avtorji študirajo, kako za dani g-terki $A^{(i)} = (A_1^{(i)}, \ldots, A_g^{(i)})$, $i = 1, 2$, realnih simetričnih $d_i \times d_i$ matrik, učinkovito preveriti vsebovanost pripadajočih spektraedrov

$$D_{A^{(1)}}(1) \subseteq D_{A^{(2)}}(1). \quad (2)$$

Osrednja lastnost spektraedrov je konveksnost, zato je njihov študij v zadnjih nekaj desetletjih izredno pomembna in razvijajoča veja konveksne optimizacije. Predstavljajo pomemben vir rezultatov zlasti za področje semidefinitnega programiranja. Izkaže pa se, da posplošitev spektraedrov do prostih spektraedrov pogosto vodi do natančnejših rezultatov o algebraični povezavi med tericama matrik $A^{(1)}$ in $A^{(2)}$. Če v (1) vstavljamo za spremenljivke simetrične matrike iste velikosti (namesto 1 pa identično matriko te velikosti), simbol $\otimes$ pa označuje Kroneckerjev tenzorski produkt matrik, potem pripadajočo množico rešitev D_A imenujemo *prost spektraeder.* Ker pa je vsaka *prosta* konveksna množica prost spektraeder [3], LMN-ji predstavljajo tudi osnovni predmet raziskovanja proste analize, ki svojo uporabo najde predvsem na področjih proste verjetnosti, teorije sistemov, optimizacije in operatorskih algeber.

Preverjanje vsebovanosti (2) je na splošno zelo zahteven problem in spada v razred NP-težkih problemov. Avtorji v knjigi problem poenostavijo do preverjanja vsebovanosti prostih spektraedrov

$$D_{A^{(1)}} \subseteq D_{A^{(2)}}, \tag{3}$$

kar je problem z znano algebraično karakterizacijo [2, posledica 3.7], ki se jo da učinkovito preverjati z numeričnim algoritmom [2, razdelek 4]. Za smiselnost te poenostavitve natančneje študirajo povezavo z osnovnim problemom (2). Glavni pristop [2] dosedanjega študija LMN-jev je bil uvedba unitalne linearne preslikave $\tau : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ med linearnima ogrinjačama

$$\mathcal{S}_i := \Big\{ c_0 I_{d_i} + \sum_{j=1}^{g} c_j A_j^{(i)} : c_0, \ldots, c_g \in \mathbb{R} \Big\}, \quad i = 1, 2,$$

koeficientov *linearnih matričnih šopov*, kot imenujemo vsako levo stran (1), s predpisom $\tau(I_{d_1}) = I_{d_2}$, $\tau(A_j^{(1)}) = A_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, g$, in opažanje, da sta v primeru omejenosti spektraedra $D_{A^{(1)}}(1)$ vsebovanosti (2) oz. (3) ekvivalentni pozitivnosti oz. popolni pozitivnosti τ. Uporaba netrivialnih rezultatov teorije operatorskih algeber nato v primeru popolne pozitivnosti natančno algebraično opiše τ. V knjigi je uveden povsem nov pristop k reševanju problema (2), pri čemer je ključen vidik teorije dilatacij. (Lep pregledni članek o teoriji dilatacij je [5].) Glavni rezultat knjige je naslednji dilatacijski izrek (izrek 1.1 v knjigi).

Izrek 1. *Naj bo $d \in \mathbb{N}$ naravno število. Obstaja hilbertov prostor $\mathcal{H}$, družina $\mathscr{C}_d$ komutirajočih sebiadjungiranih skrčitev na $\mathcal{H}$, izometrija $V : \mathbb{R}^d \to \mathcal{H}$ in realno število $\vartheta(d)$, večje ali enako 1, tako da za vsako simetrično $d \times d$ skčitev X obstaja operator $T \in \mathscr{C}_d$, ki zadošča enakosti*

$$\frac{1}{\vartheta(d)} X = V^* T V. \tag{4}$$

Z uporabo tega izreka avtorji pokažejo, da je preverjanje vsebovanosti skrčitve $kD_{A^{(1)}}(1)$, kjer je $0 < k \leq 1$, v $D_{A^{(2)}}(1)$, ekvivalentno preverjanju vsebovanosti $kD_{A^{(1)}} \subseteq D_{A^{(2)}}$ na nivoju prostih spektraedrov. Kot je zapisano zgoraj, pa se da to vsebovanost učinkovito preveriti s pomočjo numeričnega postopka. S tem je do konstante skrčitve natančno rešen osnovni problem (2) knjige.

Primer, ko je $D_{A^{(1)}}$ enak množici

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(X_1, \ldots, X_g) \colon X_1, \ldots, X_g \text{ so simetrične } n \times n \text{ skrčitve}\},$$

imenovani *prosta kocka*, sta prva študirala Ben-Tal in Nemirovski [1]. V tem primeru je skrčitvena konstanta k kar enaka številu $\frac{1}{\vartheta(d_1)}$, kjer je $\vartheta(d_1)$ dilatacijska konstanta iz izreka 1. Pri tem je število $\vartheta(d_1)$ v knjigi natančno določeno s formulo, dokazana pa je tudi njegova optimalnost, tj. gre za najmanjše tako število, za katerega zaključek izreka 1 še velja. S tem je v celoti rešen problem vsebovanosti proste kocke v danem prostem spektraedru $D_{A^{(2)}}$ iz [1].

Na koncu omenimo še en pomemben vidik knjige. Poleg rešitve osnovnega problema so izpeljani rezultati zanimivi tudi za področja, iz katerih izhajajo. Izrek 1 je presenetljiva novost za teorijo dilatacij, saj v primerjavi z doslej znanimi dilatacijskimi rezultati nastopajoča dilatacijska konstanta $\vartheta(d)$ ni odvisna od števila matrik, pač pa le od njihove velikosti. Prav tako so rezultati pri izpeljavi formule za konstanto $\vartheta(d)$ zanimivi za teorijo verjetnosti, saj podajajo nova dejstva o nekaterih standardnih verjetnostnih porazdelitvah, kot sta binomska in beta porazdelitev.

Igor Klep je doktoriral leta 2006 na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, kjer je od leta 2018 zaposlen kot redni profesor za področje matematike. V vmesnem času je raziskovalno in pedagoško deloval na mnogih tujih institucijah (najdlje na Univerzi v Konstanzu v Nemčiji, Univerzi v San Diegu v ZDA in Univerzi v Aucklandu na Novi Zelandiji). Od leta 2018 je tudi podpredsednik mednarodnega združenja IWOTA, ustanovljenega leta 1981, ki letno organizira konferenco iz teorije operatorjev in njihove uporabe.

LITERATURA

[1] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *On tractable approximations of uncertain linear matrix inequalities affected by interval uncertainty*, SIAM J. Optim. **12** (2002), 811–833.

[2] J. W. Helton, I. Klep, S. McCullough, *The matricial relaxation of a linear matrix inequality*, Math. Program. **138** (2013), 401–445.

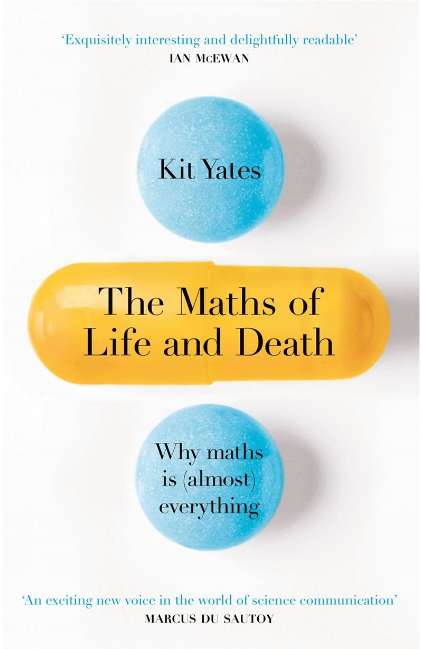
[3] J. W. Helton, S. McCullough, *Every free basic convex semi-algebraic set has an LMI representation*, Ann. Math. **176** (2012), 979–1013.

[4] I. Klep, *Matrično konveksne množice*, Obzornik mat. fiz. **63** (2016), 81–99.

[5] O. M. Shalit, *Dilation theory: a guided tour*, v: Operator Theory, Functional Analysis and Applications (ur. M. A. Bastos, L. Castro, A. Y. Karlovich), Operator Theory: Advances and Applications **282**, 2021, Birkhäuser, Cham; dostopno tudi na `doi.org/10.1007/978-3-030-51945-2_28`.

Aljaž Zalar

K. Yates, The Maths of Life and Death, Why Maths Is (Almost) Everything, Quercus Editions, London 2019, 332 str.



Kit Yates je profesor in eden od direktorjev *Centra za matematično biologijo* na Univerzi v angleškem mestu Bath. V času svojega študija je nadvse rad vpisoval predavanja iz uporabne matematike. Na podiplomskem študiju pa je dobil tudi dobro izobrazbo v biologiji. V knjigi je želel na enostaven način prikazati moč matematike pri razumevanju in reševanju številnih problemov našega življenja. Kot je duhovito zapisal eden od ocenjevalcev: »V knjigi ni bilo grdega ravnanja z enačbami« – ker enačb v njej enostavno ni.

Avtor verjame v moč zgodb in analogij. V dveh letih pisanja je intervjuval mnogo ljudi in tako so celo nekatere zgodbe, ki smo jih morda že slišali, predstavljene drugače. Pisec ima velik dar za pripovedovanje in za preprosto, dostopno razlago. Zgodbe so resnično velika odlika te knjige.

Že v uvodu imamo utrinek o avtorjevem štiriletnem sinu, ki ga je zanimalo, koliko polžev s hišico imajo v vrtu. Vzela sta si deset minut in nalovila na raznih krajih 23 polžev. Oče je vse označil s flomastrom in nato sta jih izpustila. Čez en teden sta znova šla na lov na polže. Ujela sta jih 18, med njimi 3 označene. Od tod lahko sklepamo, da je v vrtu kakih 140 polžev. Gre za dobro lekcijo iz statistike, seveda bolj primerno za nekoliko starejše otroke. To metodo uporabljajo celo pri določevanju števila narkomanov.

Prvo poglavje se ukvarja z **eksponentno rastjo** in z eksponentnim razpadom. Grafa obeh pojavov sta žal narisana tako, da je vodoravna asimptota visoko nad abscisno osjo.

Predstavljena je zgodba inštruktorja v avtošoli, ki je vložil 3000 funtov v piramidno shemo – in izgubil vse. Avtorici sheme imenovane *Give and Take* sta bili dve upokojenki. Ena od njiju je bila podpredsednica rotarijskega kluba, druga prav tako ugledna oseba, »steber družbe«. Shema je bila »letalska«. »Pilot« je dobil dva »kopilota«. Vsak od kopilotov je rekrutiral dva »spremljevalca«. Vsak spremljevalec je našel dva »potnika«.

Osem potnikov je vplačalo po 3000 funtov. Od tega je 23000 funtov dobil pilot, preostanek sta v glavnem pokasirali začetnici sheme. V naslednji fazi sta kopilota postala nova pilota, štirje spremljevalci novi kopiloti, osem potnikov pa je napredovalo v spremljevalce. Prvi pilotki sta bili začetnici sheme. Sistem je bil psihološko dobro premišljen. V posameznem koraku so ljudje pogosto rekrutirali prijatelje in znance, vendar niso dobili denarja od njih. Ko je nekdo vplačal, bi se moralo v povprečju število ljudi v shemi povečati za faktor 8, da bi prišel do nagrade. Vpletenih je bilo vsaj deset tisoč ljudi. Devet desetin jih je izgubilo vse, skupaj 21 milijonov funtov. Organizatorki sta nekaj časa uživali v razkošju, delili zaradi lepega videza in popularizacije denar tudi v dobrodelne namene, na koncu pa pristali v zaporu. (Spomnimo se, kako so pri podobni zgodbi odvetniki napadali našega kolega, ki je javnosti pojasnjeval, za kaj gre.)

Genetski **testi** so postali dostopni in podjetja, ki jih ponujajo, strankam interpretirajo rezultate, tako o poreklu kot o nagnjenosti k določenim boleznim. Zdravstveni regulatorji v ZDA so na srečo nekoliko omejili tovrstno aktivnost. Knjiga navaja primer, ko sta dve podjetji dali nasprotujoče si rezultate o prisotnosti nezaželene mutacije. Napake so sicer v kakem promilu primerov, a pri testiranju milijona genetskih variant dobimo tako lahko okrog tisoč napak. Statistike, na katerih slonijo verjetnosti bolezni pri določeni mutaciji, pogosto niso preveč zanesljive. Tudi statistični izračuni niso trivialni in ni rečeno, da so jih te zasebne družbe dobro izvedle. Enako velja za določevanje porekla, kjer se je že zgodilo, da je isto podjetje dalo po nekaj letih precej drugačne izvide. Zdravnice in zdravniki večinoma najbolje vedo, kakšni genski testi so za določenega pacienta smiselni.

Tudi ta knjiga daje pod vprašaj *indeks telesne mase*, to je maso telesa v kilogramih, deljeno z višino (v metrih) na kvadrat. Avtorju se zdi bolj smiselna določitev deleža maščevja v telesu. Z Arhimedovo metodo lahko določimo prostornino telesa, tako da osebo stehtamo potopljeno v vodi. Ker ima maščoba manjšo gostoto, lahko od tod ocenimo njen delež.

Lepo je obdelan problem lažno pozitivnih in lažno negativnih testov v zdravstvu. Temu se sicer ni mogoče povsem izogniti, a posledice so lahko hude. Veliko je strahu in skrbi in tudi nepotrebnih posegov zaradi lažno pozitivnih rezultatov, ki so zlasti pri presejalnih testih na celotni populaciji včasih zelo številni. Po drugi strani je opisan primer, ko so zaradi številnih lažnih alarmov izključili monitorje pacientke – s tragičnim rezultatom.

Zdravniki se včasih ne zavedajo dovolj teh pomanjkljivosti. Dva testa sta neprimerno boljša kot eden, zato avtor pravi, naj se ne bojimo poiskati ne samo drugo mnenje, ampak ponoviti teste ali zahtevati dodatne preiskave, če niso preveč tvegane.

Matematika igra vlogo tudi na **sodiščih**. V znani in dolgoletni Dreyfusovi aferi je slavni francoski matematik Henri Poincaré pokazal zlorabo matematike, ki jo je v izvedenskem mnenju zagrešil glavni policijski inšpektor. Knjiga navede še več takih primerov, ko so z napačnimi računi zmedli poroto in sodnike in spravili za zapahe nedolžne ljudi (ali oprostili morebitne krivce). V številnih primerih je bila zraven tudi pristranska izbira dokazov in veliko drugega nestrokovnega dela.

Knjiga trdi, da na Japonskem sodišča obsodijo kar 99,9 % obdolžencev. Referenca, na katero se sklicuje, pa pravi, da sodišča obsodijo več kot 99 odstotkov obtožencev. Pred nedavnim so tam aretirali štiri ljudi zaradi groženj po spletu [2]. Preden so dobili pravega krivca, sta dva druga obdolžena že priznala. (V resnici je zločinec samo prevzel kontrolo nad računalniki omenjenih štirih ljudi in z njih pošiljal grožnje in obvestila o nastavljeni bombi na letalu.) To bi lahko označili kot dva lažno pozitivna rezultata policijske preiskave. Razlog je deloma trdovratnost zasliševalcev. Japonski zakoni omogočajo dolgotrajno pridržanje in zasliševanje brez prisotnosti odvetnika. Izpust proti kavciji je mogoč le pri priznanju. Deloma pa ljudje ne želijo z dolgotrajnim procesom in posledično publiciteto omadeževati družinskega ugleda.

V Združenem kraljestvu bo pri enem od petnajstih moških in eni od osemnajst žensk v toku celega življenja odkrit tumor na debelem črevesju. Svetovna zdravstvena organizacija (WHO) pravi, da so mesni izdelki (salame, klobase, hrenovke, paštete, slanina ...) karcinogeni. Po obsežni raziskavi skupine z Univerze Oxford, ki je zajela pol miljona ljudi, naj bi 25 gramov mesnih izdelkov na dan povečalo verjetnost diagnoze kolorektalnega raka za 20 %. (WHO navaja na podlagi starejših študij, da poraba 50 g takih izdelkov poveča verjetnost za 18 %). Britanski tabloid *Sun* [3] je to aprila 2019 naslovil takole:

»UBIJALSKA REZINA. Zavitek slanine na teden poveča verjetnost za raka debelega črevesja za petino, kaže študija.«

To je razjarilo ljubitelje suhomesnatih izdelkov, ki so napisali cel kup duhovitosti, kot npr.:

»Univerza v Oxfordu. Če bi se nagnila še malo bolj na levo, bi padla. Pokažite mi izvid, ki pravi: Umrl zaradi slanine.«

Za bombastični naslov »Ubijalska rezina« je bil sicer odgovoren novinar. Seveda bi po Yatesu lahko rekli tudi, da poraba 25 g (50 g?) dnevno poveča verjetnost za tako neprijetno diagnozo s 5 (ali 6) odstotkov za eno odstotno točko, a to ne bi bilo tako zanimivo.

Tudi znanstveniki in znanstvene institucije večkrat statistike predstavijo tako, da odmevajo rezultati njihovega dela. Včasih pa zgrešijo, ne da bi se tega zavedali. Tako imenovani »placebo efekt« opisuje dejstvo, da se nekaterim bolnikom stanje izboljša, ko dobijo neškodljive pilule z denimo mlečnim sladkorjem. Efekt je deloma psihološki: pacient se bolje počuti in posledično njegov organizem deluje bolje, ker ima občutek, da mu pomembna oseba – zdravnik – želi pomagati. Drugi razlog pa je *povratek k povprečju.* Številne bolezni se izboljšajo same po sebi. Ljudje poskušamo najti vzrok in ga vidimo v pilulah. *Povratek k povprečju* s pridom izkoriščajo »(alternativni) zdravilci«.

Posebno poglavje je namenjeno **številom, številskim sistemom in napakam** zaradi premaknjene decimalne vejice ipd. Leta 1983 je kanadski pilot Boeinga 767 moral dotočiti gorivo. Za dolg polet so potrebovali približno 22 ton. Malo pred tem je bil narejen prehod na metrični sistem. Ker je bil kazalnik goriva pokvarjen, je merilna palica pokazala, da je v letalu približno 7,7 tisoč litrov goriva. Letališko osebje je to pomnožilo z 1,77 in dobilo (vse vrednosti so zaokrožene) 13,6 tone. Po njihovem je bilo treba dotočiti 8,4 tone goriva. To so delili z 1,77 in dodali približno 4,8 kubika goriva. Seveda je 1,77 gostota goriva v funtih na liter. Kerozin je lažji od vode in ima gostoto okrog 0,8 tone na kubik. Pilot je potrdil račun. Precej pred koncem poleta so odpovedali motorji. Pilot se zaradi prej omenjene okvare niti ni zavedal, da je zmanjkalo goriva. Sreča v nesreči je bila, da je pilot imel izkušnje na jadralnih letalih. Zanimivo je, da je letalo na 12 metrov vodoravnega leta izgubilo le 1 m višine, kar je bolje od jadralnih padal in nekoliko slabše od jadralnih zmajev (razmerje 1: 15) in Airbusa 320, ki je v podobni zgodbi pri izgubi metra višine prejadral 17 metrov. (Stara jadralna letala imajo to razmerje 1: 20 do 1: 30, nova 1: 40 do 1: 50, ogromna tekmovalna celo nad 1: 70.) Pilotu Boeinga se je brez motorjev in z zelo omejenimi možnostmi upravljanja posrečilo pristati na nekdanji vojaški pisti, spremenjeni v dirkališče, in to med tekmo. Na dirkališču in v letalu ni bilo resno poškodovanih in po dveh dneh popravil je lahko letalo samo odletelo na servis.

Zelo dobro je opisan neuspeh protiraketnega sistema Patriot v zalivski vojni. Sistem je uporabljal dva radarja. V interni uri prvega so se kopičile zaokrožitvene napake. Izraelci so kmalu ugotovili, da morajo sistem večkrat resetirati. Američani pa so pred koncem zalivske vojne sistem imeli vključen 4 dni in interna ura prvega radarja je kazala za tretjino sekunde napačen čas. Prvi radar je zaznal iraško raketo in sporočil več podatkov o njeni legi, žal z napačnimi časi. Drugi, bolj selektiven radar se je usmeril tja, kjer naj bi bila raketa, a je bila ta že pol kilometra stran od tega mesta in je radar ni zaznal. Ubitih je bilo 28 ameriških vojakov in vojakinj, ranjenih pa okrog sto.

V poglavju o **optimizaciji** imamo »kratko razlago« Dijkstrovega algoritma, ki pa se avtorju ni posrečila.

Avtor navaja vrsto problemov s tako imenovanimi algoritmi. Če jih uporabljamo zunaj znanosti, lahko hitro pride do krivic in zlorab. Večkrat gre za zavestne manipulacije, ki se skrijejo za navidezno objektivnostjo zveneče besede *algoritem*. Navedimo najnovejšo zgodbo. Ob začetku cepljenja proti COVID-19 je v ugledni bolnišnici v New Yorku »algoritem« določil, da je najprej na vrsti uprava (ki je večinoma delala od doma), šele nato pa tisti, ki delajo na COVID oddelkih. Pri nas je pri deljenju denarja in še marsičem namesto algoritmov bolj priljubljeno preprostejše »točkovanje«. Metoda je nekoliko drugačna, namen žal večkrat podoben prej omenjenemu primeru: rezultati, ki jih želijo vodstvene strukture, dobijo videz objektivnosti. Vodilni kadri so razrešeni odgovornosti, čeprav navadno odločilno vplivajo na merila za točkovanje.

V ZDA algoritem številnih zavarovalnic ceno zavarovanja avtomobilske odgovornosti izračuna na podlagi izobrazbe, sposobnosti odplačevanja kreditov in poklica zavarovanca. To ni ravno v skladu s trditvami, da ameriška kultura spodbuja osebno odgovornost. Ampak laže je skubiti neizobražene in revne ljudi (tudi če so dobri vozniki in ne povzročajo nesreč) kot razgledane in premožne osebe.

Zanimivo je tudi poglavje o **epidemijah**. Med prvimi sta modela širjenja nalezljivih bolezni postavila Daniel Bernoulli in Jean le Rond d'Alembert okrog leta 1760/61. Bernoulli je prišel do sklepa, da *variolacija*, to je namerna okužba otrok z blažjo varianto črnih koz, zmanjša smrtnost in podaljša povprečno življenjsko dobo populacije. (Zaradi variolacije je umrlo 2 odstotka otrok, številni pa so dobili brazgotine in druge hude posledice. Črne koze so imele smrtnost 20–30 %, pri otrocih še veliko višjo. Variolacija, uvožena iz Azije, se v Evropi ni uveljavila.) Leta 1796 je angleški zdravnik Edward Jenner odkril in populariziral neprimerno varnejšo *vakcinacijo*, to je okužbo z nenevarnimi govejimi kozami (*vacca* = krava v latinščini).

Leta 1803 je španski kralj financiral odpravo za masovno cepljenje proti črnim kozam v španskih kolonijah [1]. Vkrcali so dvaindvajset sirot starih 8–10 let, skupaj z ravnateljico sirotišnice in njenim sinom. Med dolgo plovbo čez Atlantik so izcedek govejih koz postopoma prenašali z enega otroka na drugega. Kmalu po pristanku se je odprava razdelila na več delov. Kampanja v Južni, Srednji in Severni Ameriki je trajala vse do leta 1810 in je bila izredno naporna. (Eden od zdravnikov odprave je umrl.) Vključevala je izobraževanje prebivalstva in vzpostavitev lokalnih središč za cepljenje. Kot rezervoar cepilnega materiala so zdaj uporabili govedo. Za sezname cepljenih je bila zadolžena Katoliška cerkev. Španske sirote so posvojile mehiške družine. Domačini so cepilce večinoma sprejeli z navdušenjem. V Limi je kampanja naletela na odpor lokalnih zdravnikov, ki so iz cepljenja naredili posel. Vseeno so v Peruju s podporo krajevnih oblasti cepili skoraj dvesto tisoč ljudi.

Leta 1805 je glavni zdravnik odprave prejel kraljevi ukaz, da nadaljuje kampanjo na Filipinih. Na pacifiški obali so vkrcali 25 mehiških sirot in skupaj s prej omenjeno ravnateljico odpluli na Filipine, kjer so nadaljevali s cepljenjem in ga zaključili v Macau in Kantonu.

Že v letih 1800–1801 so s cepljenjem proti črnim kozam začeli nekateri slovenski zdravniki. Vendar je bil še leta 1826 odpor proti cepljenju tak, da je moral na Bizeljskem kaplan Anton Martin Slomšek s prižnice vernike prepričevati o koristih cepljenja. Njegov župnik si naloge, ki mu jo je dodelila država, ni upal izvršiti. Slomšek je cepljenje propagiral tudi kasneje.

Škotski zdravnik Anderson McKendrick in biokemik William Kermack sta leta 1927 objavila *SIR model*. Tu S (*susceptible*) pomeni za okužbo dovzetne posameznike, I kužne (inficirane), R (*removed*) pa je tretja skupina: večinoma ozdraveli, ki se ne morejo več okužiti. Odnose med tremi skupinami sta podala s sistemom diferencialnih enačb. Ta model je z izpopolnitvami uporaben še danes.

Knjiga pojasnjuje, kako je razširitev prekarnega dela prispevala k temu, da se je povečal delež ljudi, ki bolni in kužni prihajajo na delo. Grobi poskusi zmanjšanja odsotnosti delavcev so se pokazali kot kontraproduktivni. Odmeven je primer verige restavracij Chipotle. Z norovirusom okuženi delavec je leta 2017 kljub slabemu počutju prišel delat. Čeprav Chipotle – za razliko od številnih ameriških podjetij – zaposlenim plačuje bolniško odsotnost, naj se poslovodja v omenjeni enoti ne bi držal uradne politike podjetja in bolnemu delavcu rekel, da mora ostati, če sam ne najde nekoga, ki ga bo nadomeščal. Okužilo se je 135 drugih sodelavcev in strank, med katerimi je vsaj en obiskovalec moral na urgenco. Vrednost podjetja na borzi naj bi v naslednjih petih dneh padla za milijardo dolarjev in delničarji so celo tožili upravo. Kasneje je zaradi več takih dogodkov podjetje plačalo 25 milijonov dolarjev kazni.

Nemški virolog Harald zur Hausen je leta 2008 dobil Nobelovo nagrado za medicino. Utemeljitev ga hvali za odkritje, da so nekateri humani papiloma virusi (HPV) odgovorni za skoraj vse primere raka materničnega vratu. Ti virusi se večinoma prenašajo s spolnimi stiki. Obenem so takrat začeli prodajati tudi cepivo proti HPV. Študije, ki so jih naročile britanske in druge zdravstvene oblasti, so ugotovile, da je najbolje cepiti deklice v starosti 11–13 let. Tako so ti programi tudi tekli.

Po Yatesu pa nove raziskave ugotavljajo, da je HPV odgovoren tudi za (vsaj) polovico rakov penisa, 80 % rakov zadnjika, 20 % rakov v ustih, (več kot) 30 % rakov grla in 90 % genitalnih bradavic. Tako v ZDA kot v Združenem kraljestvu naj večina rakov, ki jih povzroča HPV, ne bi bila na maternici. Cepljenje deklic nima dosti vpliva na moško homoseksualno populacijo, ki po knjigi nesorazmerno močno trpi zaradi rakov, povezanih s HPV. Vsa ženska populacija še zdaleč ni in tudi nekaj časa ne bo precepljena. V ZDA so že leta 2011 začeli priporočati cepljenje tudi za dečke. V Britaniji so spremenili smernice šele pred nekaj leti. Yatesova mati je pri 45 letih umrla zaradi pet let prej odkritega raka materničnega vratu, tako da ima pisec oseben odnos do te teme.

Čeprav so virusi HPV zelo razširjeni, le pri 10 % žensk povzročijo trajno okužbo. (Pri preostalih bolezen izzveni v letu ali dveh.) V Sloveniji je bilo po [4] leta 2016 na novo odkritih 123 primerov raka materničnega vratu. Letno za tem rakom umre 40 do 50 žensk, kakim tri tisoč pacientkam pa operativno odstranijo predrakave spremembe, povzročene s trajno okužbo s HPV. V Sloveniji rutinsko cepijo deklice v 6. razredu osnovne šole. Zdaj bodo začeli cepiti tudi dečke v 6. razredu.

Predstavili smo le nekaj zgodb iz te res zanimive knjige. Na koncu imamo obsežno bibliografijo.

LITERATURA

[1] C. Franco-Paredes, L. Lammoglia in J. I. Santos-Preciado, *The Spanish Royal Philanthropic Expedition to Bring Smallpox Vaccination to the New World and Asia in the 19th Century*, Clinical Infectious Diseases, **41(9)** (2005), 1285–1289, dostopno na `doi.org/10.1086/496930` in `academic.oup.com/cid/article/41/9/1285/278013`, ogled 28. 1. 2021.

[2] T. Osaki, *Hacker who framed computer users with cyberthreats jailed for eight years*, The Japan Times, 2015, dostopno na `www.japantimes.co.jp/news/2015/02/04/national/crime-legal/hacker-framed-computer-users-cyberthreats-jailed-8-years/`, ogled 28. 1. 2021.

[3] S. Wooller, *KILLER RASHER, Pack of bacon a week increases risk of bowel cancer by a fifth, study suggests*, The Sun, 2019, dostopno na `www.thesun.co.uk/news/8877964/bacon-red-meat-bowel-cancer-risk/`, ogled 28. 1. 2021.

[4] *NIJZ, Najpogostejša vprašanja in odgovori o okužbi s HPV, raku materničnega vratu in cepljenju proti HPV*, 2019, dostopno na `www.nijz.si/sl/najpogostejsa-vprasanja-in-odgovori-o-okuzbi-s-hpv-raku-maternicnega-vratu-in-cepljenju-proti-hpv-1`, ogled 28. 1. 2021.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2021
Letnik 68, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Ovitek prvega dne z znamko in žigom, ki jih je Pošta Slovenije izdala ob 8. Evropskem kongresu matematike.