PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **8** (1980/1981)
Številka 1
Strani 6–12

Tomaž Pisanski:

CELI TRIKOTNIKI

Ključne besede: matematika, teorija števil, rekreacijska matematika, diofantska enačba, Heronovi trikotniki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/8/458-Pisanski.pdf

CELI TRIKOTNIKI

Trikotnike, ki imajo za dolžine stranic cela števila, imenujemo *celi trikotniki*. Trikotnik s stranicami x, y in z označimo s trojico števil (x,y,z) . Ta oznaka trikotnik popolnoma karakterizira, saj je vsak trikotnik določen s svojimi stranicami do skladnosti natančno. Ker se za vrstni red stranic ne menimo, določa vsaka od šestih permutacij (x,y,z), (x,z,y), (y,x,z), (y,z,x), (z,x,y), (z,y,x) isti trikotnik, zato lahko izberemo katerokoli med njimi. Odločili se bomo za tisto trojico, ki ima komponente urejene: (x,y,z); $x \leq y \leq z$.

Naloga 1: Dokaži, da trojica (x,y,z), $0 < x \leq y \leq z$ določa trikotnik, če in samo če je $x + y > z$.

Če imajo cela števila x, y in z skupni delitelj d, lahko zapišemo:

$$x = x_0 d \quad , \quad y = y_0 d \quad , \quad z = z_0 d$$

Trikotnika sta si podobna! Če števila x, y in z nimajo skupnega faktorja, pravimo, da je celi trikotnik (x,y,z) *primitiven.*

V naslednji razpredelnici so zbrani nekateri majhni celi trikotniki. Posebej so označeni enakostranični, enakokraki, pravokotni in neprimitivni. Število v oklepaju označuje največji skupni delitelj števil x, y in z pri neprimitivnih trikotnikih.

Celi trikotniki (x,y,z) , $0 < x \leq y \leq z \leq 5$ (Tabela 1)

n	x	y	z		n	x	y	z	
1.	1	1	1	enakostraničen	12.	3	4	4	enakokrak
2.	1	2	2	enakokrak	13.	4	4	4	enakostraničen (4)
3.	2	2	2	enakostraničen (2)	14.	3	3	5	enakokrak
4.	2	2	3	enakokrak	15.	2	4	5	
5.	1	3	3	enakokrak	16.	3	4	5	pravokoten
6.	2	3	3	enakokrak	17.	4	4	5	enakokrak
7.	3	3	3	enakostraničen (3)	18.	1	5	5	enakokrak
8.	2	3	4		19.	2	5	5	enakokrak
9.	3	3	4	enakokrak	20.	3	5	5	enakokrak
10.	1	4	4	enakokrak	21.	4	5	5	enakokrak
11.	2	4	4	enakokrak (2)	22.	5	5	5	enakostraničen (5)

Vnaprej si izberimo dolžino najdaljše stranice z celega trikotnika (x,y,z) ! Z $n(z)$ označimo število celih trikotnikov, ki imajo najdaljšo stranico z. Iz razpredelnice vidimo: $n(1) = 1$, $n(2) = 2$, $n(3) = 4$, $n(4) = 6$, $n(5) = 9$.

Naloga 2: Dokaži:

a) $n(2k) = n(2(k-1)) + 2k$
b) $n(2k-1) = n(2k) - k$
c) $n(2k) = k(k+1)$
d) $n(2k-1) = k^2$

To pomeni, da ima na primer 981090 celih trikotnikov najdaljšo stranico dolžine 1980. Naj $N(z)$ označuje število celih trikotnikov, pri katerih nobena stranica ne presega z.

Naloga 3: Dokaži:

a) $N(2k) = N(2(k-1)) + 2k^2 + k$
b) $N(2k-1) = N(2k) - k^2 - k$
c) $N(2k) = k(k+1)(4k+5)/6$
d) $N(2k-1) = k(k+1)(4k-1)/6$

Naj $e(z)$ označuje število celih enakokrakih trikotnikov z najdaljšo stranico z in naj $E(z)$ označuje število celih enakokrakih trikotnikov, ki nimajo nobene stranice daljše od z .

Naloga 4: Dokaži:

a) $e(2k) = 3k - 1$
b) $e(2k-1) = 3k - 2$
c) $E(2k) = E(2(k-1)) + 6k - 3$
d) $E(2k-1) = E(2k) - 3k + 1$
e) $E(2k) = 3k^2$
f) $E(2k-1) = 3k^2 - 3k + 1$

Seveda zdaj ni več težavno dobiti ustreznih obrazcev za število raznostraničnih trikotnikov: $n(z) - e(z)$ in $N(z) - E(z)$. Bralec jih zlahka izpelje sam. Mnogo težja je tale naloga:

Naloga 5: Naj bo $m(t)$ število celih trikotnikov z obsegom t in $M(t)$ število celih trikotnikov, katerih obseg ne preseže števila t. Izpelji obrazce za računanje $m(t)$ in $M(t)$!

Nekateri celi trikotniki so še posebej zanimivi. Imajo še kakšno dodatno lastnost. Gotovo so najbolj znani med njimi Pitagorovi trikotniki; to so *pravokotni celi trikotniki* . Običajno pravimo trojicam (x,y,z) Pitagorovih trikotnikov *Pitagorejske trojice*. Zanje je značilna enačba:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

Pitagorejske trojice so ravno vse pozitivne celoštevilske rešitve enačbe (1). Če iščemo rešitve kake enačbe v celih številih, rečemo, da je taka enačba *diofantska* . Znano je, da pri poljubnih celih m in n števila

$$x = 2mn \quad , \quad y = m^2 - n^2 \; , \quad z = m^2 + n^2 \quad (2)$$

rešijo diofantsko enačbo (1). Ker nas zanimajo le pozitivne rešitve, zahtevamo še: $m > n > 0$. S tem dobimo vse primitivne Pitagorove trikotnike in še nekatere neprimitivne.

Naloga 6: (a) Dokaži, da vsak m in n, $m > n > 0$, tako da je en sod, drugi pa lih in nimata skupnega faktorja, določa z obrazci (2) primitivni Pitagorov trikotnik.

(b) Poišči med vsemi Pitagorovimi trikotniki, ki se jih ne da izraziti z obrazci (2), tistega z najmanjšo hipotenuzo.

(c) Dokaži, da ima vsak Pitagorov trikotnik celoštevilsko ploščino.

Naslednja razpredelnica prikazuje nekaj najmanjših pitagorejskih primitivnih trojic.

Primitivni Pitagorovi trikotniki (x,y,z), $0 \leq x \leq y \leq z \leq 100$

	m	n	x	y	z		m	n	x	y	z
1.	2	1	3	4	5	9.	6	5	11	60	61
2.	3	2	5	12	13	10.	7	4	33	56	65
3.	4	1	8	15	17	11.	8	1	16	63	65
4.	4	3	7	24	25	12.	8	3	48	55	73
5.	5	2	20	21	29	13.	7	6	13	84	85
6.	6	1	12	35	37	14.	9	2	36	77	85
7.	5	4	9	40	41	15.	8	5	39	80	89
8.	7	2	28	45	53	16.	9	4	65	72	97

Tabela 2.

V tej razpredelnici opazimo precej zanimivih stvari. Strnimo jih v nalogo.

Naloga 7: (a) Dokaži, da je hipotenuza primitivnega Pitagorovega trikotnika liho število.

(b) Dokaži, da je v primitivnem Pitagorovem trikotniku ena kateta soda, druga pa liha.

(c) Dokaži, da je v vsakem Pitagorovem trikotniku vsaj ena kateta deljiva s 3.

(d) Dokaži, da dobimo pitagorejske trojice (x,y,z), pri katerih je hipotenuza z za 1 večja od katete y: $z = y + 1$, z obrazci: $x = 2n + 1$, $y = 2n(n+1)$, $z = 2n(n+1) + 1$.

Seveda pa lahko vprašamo še marsikaj! Vse kaže, da število 6 ne more biti stranica kakega primitivnega Pitagorovega trikotnika. Katera števila ne morejo biti stranice (ali katete) nobenega Pitagorovega trikotnika? Vidimo, da sta 65 in 85 dolžini hipotenuz dveh primitivnih Pitagorovih trikotnikov. Ali je lahko kako število kateta dveh različnih primitivnih Pitagorovih trikotnikov?

Kot smo že rekli, je diofantska enačba (1) karakteristična za cele trikotnike z enim kotom 90°. Edvard Kramar je v Preseku obravnaval cele trikotnike z notranjim kotom 60° (120°).

Naloga 8: (a) Dokaži, da je diofantska enačba

$$x^2 + y^2 - xy = z^2 \qquad (3)$$

karakteristična za cele trikotnike, ki imajo kot nasproti stranici z enak 60^0.

(b) Dokaži, da je diofantska enačba

$$x^2 + y^2 + xy = z^2 \qquad (4)$$

karakteristična za cele trikotnike, ki imajo kot nasproti stranici z enak 120^0.

Obstajajo pa še drugačni celi trikotniki. Za konec omenimo še *Heronove trikotnike*. Celi trikotnik (x,y,z) je Heronov, če ima celoštevilsko ploščino. Če označimo s P ploščino trikotnika (x,y,z), dobimo iz Heronovega obrazca diofantsko enačbo:

$$16P^2 = (x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \qquad (5)$$

To je karakteristična enačba za Heronove trikotnike.

Naloga 9: Dokaži, da je obseg vsakega Heronovega trikotnika sodo število.

Na osnovi te naloge lahko obseg Heronovega trikotnika označimo z $2s$, kjer je s naravno število. V enačbo (5) lahko vpeljemo nove spremenljivke:

$$X = s - x \;,\quad Y = s - y \;,\quad Z = s - z \qquad (6)$$

in enačba (5) se precej poenostavi:

$$P^2 = XYZ(X + Y + Z) \qquad (7)$$

Vsaka celoštevilska rešitev enačbe (7) določa enolično celoštevilsko rešitev enačbe (5), saj je nasprotna transformacija k (6) preprosta:

$$x = Y + Z \;,\quad y = Z + X \;,\quad z = X + Y \qquad (8)$$

Naloga 10: Če med števili x, y, z, X, Y in Z velja zveza (8), tedaj je skupni delitelj števil x, y, z skupni delitelj števil X, Y, Z in obratno.

Ta naloga zagotavlja, da vsaka rešitev enačbe (7), pri kateri X, Y in Z nimajo delitelja d, $d > 1$ določa primitiven Heronov trikotnik in da na ta način dobimo vse primitivne Heronove trikotnike.

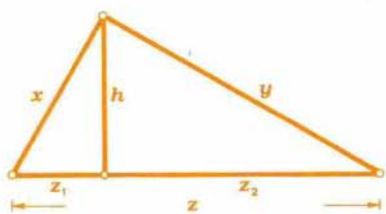
Enačbe (7) na tem mestu ne bomo reševali. Ogledali si bomo raje nekaj lastnosti Heronovih trikotnikov.

Naloga 11: Dolžine višin Heronovega trikotnika so racionalna števila.

Naloga 12: Naj bodo a, b in c racionalna števila in naj velja: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Dokaži, da sta tedaj tudi $\sqrt{a}$ in $\sqrt{b}$ racionalni števili.

Naloga 13: Dokaži, da v vsakem trikotniku leži nožišče višine na najdaljšo stranico z v notranjosti stranice z.

Naloga 14: Naj bo h višina na z v Heronovem trikotniku (x,y,z); $x \leqq y \leqq z$. Naj bosta z_1 in z_2 odseka, na katera razdeli nožišče višine h stranico z: $z = z_1 + z_2$. Uporabi trditve nalog 11, 12 in 13 in dokaži, da sta z_1 in z_2 racionalni števili.



Očitna posledica naloge 14 pa je, da sta pravokotna trikotnika (z_1,h,x) in (z_2,h,y), iz katerih je sestavljen Heronov trikotnik (x,y,z), racionalna - števila z_1, z_2, h, x in y so racionalna. To pa pomeni, da sta podobna dvema Pitagorovima trikotnikoma. Obstaja torej tako naravno število C, da sta trikotnika (z_1C, hC, xC) in (z_2C, hC, yC) Pitagorova. Če zlepimo ta dva trikotnika vzdolž skupne katete hC, dobimo Heronov trikotnik (xC, yC, zC), ki je podoben prvotnemu trikotniku (x,y,z).

Zdaj pa imamo metodo, s katero lahko dobimo vse Heronove trikotnike. Recept je takle:

Izberi poljuben par Pitagorovih trikotnikov (x_1, y_1, z_1) in (x_2, y_2, z_2) in na vsakem od njiju po eno kateto (npr. x_1 in x_2). Vsakega posebej povečaj tako, da se ujemata v kateti. Prvega povečamo x_2-krat, drugega pa x_1-krat. Dobimo trikotnika (x_1x_2, y_1x_2, z_1x_2) in (x_1x_2, x_1y_2, x_1z_2), ki ju staknemo vzdolž skupne katete x_1x_2. Dobimo Heronov trikotnik $(z_1x_2, x_1z_2, y_1x_2 + x_1y_2)$, ki ga lahko morebiti še okrajšamo. Na ta način dobimo *vse* Heronove trikotnike.

Tomaž Pisanski

LITERATURA:

[1] Edvard Kramar, *Število celoštevilskih trikotnikov z danim obsegom* (bo izšlo v Preseku).
[2] Edvard Kramar, *Kako dobimo nekatere celoštevilske trikotnike*, Presek III/2, str. 82-85.
[3] Edvard Kramar, *Odlikovani trikotniki*, Presek IV/2, str. 113-115.
[4] Edvard Kramar, *Odlikovani trikotniki - 2.del*, Presek IV/4, str. 204-205.
[5] France Križanič, *Diofantske enačbe*, Presek V/3, str. 134-141.
[6] Janez Stare, *Nekaj o teoriji števil*, Presek V/2, str. 81-86.
[7] Danijel Bezek, *Heronovi trikotniki*, Presek VI/3, str. 132-133, 186.
[8] Tomaž Pisanski, *Presekov škrat*, Presek VII/2, str. 120.
[9] Ivan Pucelj, *Pravokotni trikotnik*, Presek V/4, str. 195-197.