PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 4
Strani 198–201

Jože Grasselli:

ŠTEVILO 1 KOT VSOTA IN PRODUKT ULOMKOV

Ključne besede: matematika, teorija števil, sistem nelinearnih enačb.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/29/1482-Grasselli.pdf

ŠTEVILO 1 KOT VSOTA IN PRODUKT ULOMKOV

Število $\frac{a}{b}$, kjer sta a, b celi števili in $b \neq 0$, imenujemo racionalno, tudi ulomek. Ker je b lahko 1 in je $\frac{a}{1} = a$, so med racionalnimi števili vsebovana vsa cela števila. Izberemo dve, tri ali več racionalnih števil. Ali jih lahko izberemo tako, da bosta njihova vsota in produkt enaka 1?

1. Začnimo z dvema številoma, zaznamujmo ju x, y. Ker naj bosta njuna vsota in produkt 1, mora biti

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x \cdot y &= 1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Če bi sistem (1) rešili, bi iz najdenih x, y videli, da le-ta nista racionalna.

Ravnali bomo drugače. Iz druge enačbe v (1) vidimo, da sta x, y oba različna od 0 (saj je njun produkt 1). Če torej obstaja racionalna rešitev, je $x = \frac{a}{b}$, kjer sta a, b od nič različni celi števili; iz druge enačbe (1) sledi potem $y = \frac{b}{a}$. Ko oboje vstavimo v prvo enačbo iz (1), dobimo

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

in po odpravi ulomkov

$$a^2 - ab + b^2 = 0\,.$$

Iz te enačbe po množenju s 4 dobimo

$$(2a - b)^2 + 3b^2 = 0\,.$$

Kvadrat celega števila je nič ali pozitiven; vsota na levi je tako nič le, če sta oba seštevanca nič, torej le za $b = a = 0$. To ne gre, saj mora biti po privzetku $b \neq 0$. Sistem (1) v racionalnih številih ni rešljiv. Drugače povedano:

Ni dveh ulomkov, pri katerih bi vsota in produkt imela vrednost 1.

2. Ali obstajajo tri racionalna števila z vsoto in produktom 1? Da dobimo odgovor, je treba ugotoviti, ali premore sistem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x \cdot y \cdot z &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

racionalne rešitve.

Hitro vidimo, da ni celoštevilnih rešitev. Drugo enačbo v (2) je mogoče v celih številih izpolniti le tako, da so x, y, z vsi 1 ali pa sta od števil x, y, z dve enaki -1, eno 1. Prvič je vsota števil 3, drugič -1 in prva enačba iz (2) ni izpolnjena. Celih števil x, y, z, ki bi ustrezala sistemu (2), ni.

Ali morda za sistem (2) obstajajo racionalne rešitve, ki niso cela števila? Dognali so, da ne (dokaz ni preprost). Povzemimo:

Če tri ulomke seštejemo in zmnožimo, je od dobljenih vrednosti kvečjemu ena enaka 1.

3. Pojdimo sedaj k sistemu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= 1\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Drugo enačbo lahko v celih številih izpolnimo le, če so števila x_1, x_2, x_3, x_4 vsa ali 1 ali -1 ali pa dve 1 in dve -1; njihova vsota je potem 4, -4, 0 in prva enačba (3) ne drži. Sistem (3) torej celoštevilnih rešitev nima. Našli pa so racionalne rešitve, ki niso cela števila. Če je n od 0, 1, -1 različno racionalno število, so

$$x_1 = \frac{n^2}{n^2-1}\,,\; x_2 = \frac{1}{1-n^2}\,,\; x_3 = \frac{n^2-1}{n}\,,\; x_4 = \frac{1-n^2}{n}\,, \quad n \neq 0, 1, -1 \tag{4}$$

racionalna števila; da izponjujejo obe enačbi (3), se prepričamo z vstavitvijo. Racionalnih števil je neskončno; zato je tudi neskončno četveric oblike (4). Povzemimo:

Obstaja neskončno četveric ulomkov, katerih vsota in produkt sta 1.

Ali so v obrazcih (4) zajete že vse racionalne rešitve sistema (3)? Na to vprašanje pisec teh vrstic ne ve odgovora.

4. Zadnjo ugotovitev lahko razširimo na pet in več racionalnih števil. Poglejmo sistem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k &= 1 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k &= 1\,. \end{aligned} \tag{5}$$

kjer je $k \geq 4$. Pri $k = 4$ dajejo obrazci (4) neskončno racionalnih rešitev sistema (5).

Za $k = 5$ so našli rešitve

$$x_1 = n\,,\ x_2 = \frac{1}{n}\,,\ x_3 = -n\,,\ x_4 = -\frac{1}{n}\,,\ x_5 = 1\,, \quad n \neq 0\,, \tag{6}$$

za $k = 6$ rešitve

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{1}{n^2(n+1)}\,,\ x_2 = \frac{-1}{n^2(n+1)}\,,\ x_3 = (n+1)^2\,, \\ x_4 = -n^2\,,\ x_5 = -\,n\,,\ x_6 = -n\,, \quad n \neq 0, -1 \end{gathered} \tag{7}$$

in za $k = 7$ rešitve

$$\begin{gathered} x_1 = (n-1)^2\,,\ x_2 = n - \frac{1}{2}\,,\ x_3 = n - \frac{1}{2}\,,\ x_4 = 1\,,\ x_5 = -n^2\,, \\ x_6 = \frac{1}{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}\,,\ x_7 = \frac{-1}{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}\,, \qquad n \neq 0, 1, \frac{1}{2}\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Da gre za rešitve sistema (5), lahko neposredno preverimo. Števila (6), (7), (8) so pri racionalnem n, ki pride v poštev, racionalna; ker je vsakič za n neskončno možnosti, ima sistem (5) tudi pri $k = 5, 6, 7$ neskončno racionalnih rešitev. (Ne vemo pa, ali smo s tem dobili že vse racionalne rešitve.)

Kako pa je pri $k > 7$? Števila 4, 5, 6, 7 puščajo pri delitvi s 4 po vrsti ostanke 0, 1, 2, 3. Zato je mogoče naravno število k, ki je večje od 7, z naravnim številom t zapisati v obliki

$$\begin{aligned} k &= 4 + 4t\,, && \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 0,} \\ k &= 5 + 4t\,, && \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 1,} \\ k &= 6 + 4t\,, && \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 2,} \\ k &= 7 + 4t\,, && \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 3.} \end{aligned}$$

Obrazci (4), (6), (7), (8) povedo, kako se dobi 1 kot vsota in produkt štirih, petih, šestih in sedmih racionalnih števil; tem številom dodamo $2t$-krat število 1 in $2t$-krat število -1 in že je tu k racionalnih števil, ki sešteta in zmnožena dajejo 1. Zato velja:

Če je $k \geq 4$, lahko na neskončno načinov izberemo k ulomkov, katerih vsota in produkt sta enaka 1.

Zgled.

Ker je $17 = 5 + 3 \cdot 4$, dajejo po (6) pri racionalnem $n \neq 0$

$$x_1 = n\,,\ x_2 = -\frac{1}{n}\,,\ x_3 = -n\,,\ x_4 = \frac{1}{n}\,,\ x_5 = 1\,,$$
$$x_6 = \ldots = x_{11} = 1\,,\ x_{12} = \ldots = x_{17} = -1$$

neskončno racionalnih rešitev sistema (5) za $k = 17$.

Naloge.

1. Pri naravnem številu a je sistem

$$x + y = a$$
$$x \cdot y = a$$

v naravnih številih x, y rešljiv le, ko je $a = 4$. Dokaži.

2. Naj bo racionalno število c različno od 1 in -1. Sistem

$$x + y + z = \frac{16}{(1 - c^2)(3 + c^2)}$$
$$x \cdot y \cdot z = \frac{16}{(1 - c^2)(3 + c^2)}$$

ima racionalno rešitev

$$x = \frac{2}{1 - c}\,,\ y = \frac{2}{1 + c}\,,\ z = \frac{4}{3 + c^2}\,.$$

Preveri.

3. Za racionalno število c, različno od 0 in 1, ima sistem

$$x + y + z = \frac{1}{c(1 - c)(1 - c + c^2)}$$
$$x \cdot y \cdot z = \frac{1}{c(1 - c)(1 - c + c^2)}$$

racionalno rešitev. Poišči jo.

Jože Grasselli