Ohranjevalci na Banachovih algebrah

Znanstvene monografije
Fakultete za management Koper

ISSN 1855-0878

Ohranjevalci na Banachovih algebrah

Ajda Fošner

Management

Ohranjevalci na Banachovih algebrah
doc. dr. Ajda Fošner

Strokovna recenzenta · izr. prof. dr. Rok Strašek
in doc. dr. Janez Povh
Izdala in založila · Univerza na Primorskem,
Fakulteta za management Koper,
Cankarjeva 5, 6104 Koper
Zanjo · prof. dr. Boštjan Antončič
Oblikovanje · Alen Ježovnik
Naklada · 100 izvodov
November 2009

Monografija je izšla s finančno podporo
Javne agencije za knjigo Republike Slovenije

CIP – Katiložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.983.23

FOŠNER, Ajda
Ohranjevalci na Banachovih algebrah [Elektronski vir] /
Ajda Fošner. – El. knjiga. - Koper : Fakulteta za management, 2009. –
(Znanstvene monografije Fakultete za management Koper,
ISSN 1855-0878)

Način dostopa (URL): http://www.fm-kp.si/zalozba/
ISBN/978-961-266-039-0.pdf

ISBN 978-961-266-039-0
COBISS.SI-ID 247940608

Kazalo

1 Uvod

Glavni namen monografije je predstaviti nekaj novejših rezultatov s področja linearnih kot tudi nelinearnih ohranjevalcev na algebrah, t.j. linearnih in nelinearnih preslikav, ki ohranjajo določene lastnosti, množice ali relacije med elementi.

Opišimo nekoliko podrobneje ozadje problemov, ki jih bomo obravnavali.

Naj bo $M_n(\mathbb{C})$ algebra $n \times n$ matrik nad poljem kompleksnih števil ter $S, T \in M_n(\mathbb{C})$ taki matriki, da je $\det(ST) = 1$. Definirajmo preslikavo $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ s predpisom

$$\phi(A) = SAT, \quad A \in M_n(\mathbb{C}). \tag{1.1}$$

Preslikava ϕ je linearna in ohranja determinante matrik (t.j. za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$ je $\det(\phi(A)) = \det(A)$). Ker je $\det(A) = \det(A^t)$, kjer A^t označuje transponirano matriko matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, tudi preslikava $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definirana s predpisom

$$\phi(A) = SA^tT, \quad A \in M_n(\mathbb{C}), \tag{1.2}$$

ohranja determinante matrik. Leta 1897 je Frobenius [28] pokazal, da je vsaka linearna preslikava na algebri $M_n(\mathbb{C})$, ki ohranja determinante matrik, oblike (1.1) ali oblike (1.2).

Naj bosta $S, T \in M_n(\mathbb{F})$ taki matriki, da je $\det(ST) \neq 0$. Leta 1949 je Dieudonne [16] pokazal, da so preslikave oblike (1.1) in (1.2) edine bijektivne linearne preslikave na algebri $M_n(\mathbb{C})$, ki vsako singularno matriko preslikajo v singularno matriko. Še več, ta rezultat velja za poljubno polje $\mathbb{F}$.

Za vsako matriko A označimo z $\operatorname{rank}(A)$ rang matrike A. Naj bo $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ taka bijektivna linearna preslikava, da je $\operatorname{rank}(\phi(A)) = 1$ za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$ ranga ena. Potem je ϕ preslikava oblike (1.1) ali oblike (1.2) za neki obrnljivi matriki $S, T \in M_n(\mathbb{C})$, kar je leta 1951 pokazal Hua [33].

Zgornji primeri so zgledi treh standardnih problemov linearnih ohranjevalcev.

Problem A Naj bo F skalarna funkcija na algebri $M_n(\mathbb{F})$ (tukaj $\mathbb{F}$ označuje poljubno polje). Karakterizirati želimo linearne preslikave $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, za katere velja

$$F(\phi(A)) = F(A)$$

za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Opomba. Zgoraj omenjena funkcija F je lahko tudi vektorska funkcija ali funkcija, ki vsaki matriki priredi neko množico.

Problem B Naj bo $\mathcal{S}$ podmnožica algebre $M_n(\mathbb{F})$. Karakterizirati želimo linearne preslikave $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, ki ohranjajo množico $\mathcal{S}$, oziroma preslikave, ki zadoščajo

$$\phi(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}.$$

Včasih (npr. če zgornja predpostavka ne vodi do lepih strukturnih rezultatov) obravnavamo tudi problem karakterizacije linearnih preslikav na $M_n(\mathbb{F})$, za katere velja

$$\phi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}.$$

Problem C Naj bo $\sim$ relacija definirana na množici $M_n(\mathbb{F})$. Karakterizirati želimo linearne preslikave $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, ki ohranjajo relacijo $\sim$, oziroma preslikave, ki zadoščajo

$$A \sim B \implies \phi(A) \sim \phi(B),$$

ali preslikave, ki ohranjajo relacijo $\sim$ v obe smeri, t.j.

$$A \sim B \iff \phi(A) \sim \phi(B).$$

V zadnjih nekaj desetletjih je bilo odkritih veliko rezultatov o linearnih ohranjevalcih na matričnih algebrah kot tudi na bolj splošnih kolobarjih in operatorskih algebrah. Poleg velikega števila zanimivih rezultatov pa je na tem področju še veliko odprtih vprašanj in prav zato je to področje tako atraktivno. Problem je enostavno in naravno formulirati, prav tako je odgovor pogosto zelo eleganten. Poleg tega je na matričnih algebrah postal zanimiv tudi splošnejši problem karakterizacije aditivnih ohranjevalcev in soroden problem karakterizacije multiplikativnih ohranjevalcev. Zanimivo pa je, da lahko v nekaterih primerih dobimo lepe strukturne rezultate za ohranjevalce brez algebraičnih predpostavk kot so linearnost, aditivnost in multiplikativnost.

Problem linearnih in nelinearnih ohranjevalcev se naravno pojavlja pri številnih osnovnih rezultatih na področju matričnih algeber in operatorskih algeber. Na primer, naj bo $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ preslikava definirana s predpisom $\phi(A) = UAU^*$ ali s predpisom $\phi(A) = UA^tU^*$, kjer je U neka unitarna matrika. Potem ϕ ohranja lastne vrednosti matrik, determinante matrik, spektralni radij, hermitske in normalne matrike... Zanimivo vprašanje pa je, ali katera od teh lastnosti zadostuje, da je ϕ oblike $\phi(A) = UAU^*$ ali oblike $\phi(A) = UA^tU^*$, oziroma pod katerimi pogoji je preslikava ϕ oblike $\phi(A) = UAU^*$ ali oblike $\phi(A) = UA^tU^*$.

Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ algebri. Linearno preslikavo $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ imenujemo jordanski homomorfizem, če velja $\phi(ab + ba) = \phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)$ za vsak par $a, b \in \mathcal{A}$. Že leta 1970 si je Kaplansky [37] zastavil vprašanje: pod katerimi pogoji je enotska linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost, jordanski homomorfizem? Veliko dela v zvezi s tem problemom je bilo narejenega na področju funkcionalne analize, kjer so matematiki usmerili pozornost na ohranjevalce obrnljivosti na Banachovih algebrah. Leta 1986 sta Jafarian in Sourour [35] dokazala, da so jordanski izomorfizmi edine bijektivne enotske linearne preslikave med algebrama $\mathcal{B}(X)$ (t.j. algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru X) in $\mathcal{B}(Y)$, ki ohranjajo obrnljivost v obe smeri. Aupetit in Mouton [5] sta leta 1994 razširila ta rezultat na polenostavne Banachove algebre, katerih podstavek je bistven ideal. Dve leti kasneje pa je Sourour [55] pokazal, da velja zgoraj omenjen rezultat Jafariana in Souroura za preslikave, ki ohranjajo obrnljivost samo v eni smeri. Ob tem si lahko zastavimo vprašanje, ali velja podobna trditev, kot sta jo dokazala Aupetit in Mouton, pod milejšo predpostavko, da se obrnljivost ohranja samo v eni smeri. Odgovor na to vprašanje je pritrdilen, kar bomo pokazali v tretjem poglavju.

Ob karakterizaciji linearnih ohranjevalcev pa se lahko vprašamo, ali velja kaj podobnega tudi za aditivne ohranjevalce, t.j. aditivne preslikave, ki ohranjajo določene lastnosti. Omejimo se na algebro matrik $M_n(\mathbb{F})$ nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo f neničelni endomorfizem polja $\mathbb{F}$. Potem aditivna preslikava $[a_{ij}] \mapsto [f(a_{ij})]$, $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, ohranja obrnljivost kot tudi singularnost. Ta preslikava je injektivna in skoraj surjektivna, t.j. linearna lupina slike te preslikave je cela algebra $M_n(\mathbb{F})$. Tako bomo v tretjem poglavju pokazali, da je vsaka aditivna skoraj surjektivna preslikava na $M_n(\mathbb{F})$ (tukaj je $\mathbb{F}$ polje s karakteristiko nič), ki ohranja singularnost, bodisi oblike $[a_{ij}] \mapsto S[f(a_{ij})]T$, $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, bodisi oblike $[a_{ij}] \mapsto S[f(a_{ij})]^tT$, $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, kjer sta $S, T \in M_n(F)$ obrnljivi matriki in je f endomorfizem polja $\mathbb{F}$. Enak rezultat velja tudi za aditivne surjektivne preslikave na $M_n(\mathbb{F})$, ki ohranjajo obrnljivost. Zanimivo pa je, da obstajajo aditivne skoraj surjektivne preslikave na $M_n(\mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ polje realnih ali kompleksnih števil, ki ohranjajo obrnljivost in niso zgoraj opisanih standardnih oblik.

Poleg linearnih in aditivnih ohranjevalcev bomo obravnavali tudi nelinearne ohranjevalce. Pred kratkim je Šemrl [58] karakteriziral bijektivne zvezne preslikave na $M_n(\mathbb{C})$, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri. Naravno vprašanje, ki si ga lahko ob tem zastavimo, je: ali velja enak rezultat za polje realnih števil? V četrtem poglavju bomo pokazali, da je odgovor pritrdilen za $n > 3$. Prav tako bomo opisali vse zvezne injektivne preslikave na algebri realnih matrik, ki ohranjajo komutativnost samo v eni smeri.

Množica vseh $n \times n$ idempotentnih matrik $P_n(\mathbb{F})$ nad poljem $\mathbb{F}$ postane delno urejena množica, če vpeljemo relacijo $\leq$ s predpisom $P \leq Q \Leftrightarrow PQ = QP = P$, kjer sta P in Q idempotenta. Preslikava $\phi : P_n(\mathbb{F}) \to P_n(\mathbb{F})$ ohranja urejenost, če iz $P \leq Q$ sledi $\phi(P) \leq \phi(Q)$ za vsak par $P, Q \in P_n(\mathbb{F})$, in ohranja urejenost v obe smeri, če je $P \leq Q$ natanko tedaj, ko je $\phi(P) \leq \phi(Q)$, $P, Q \in P_n(\mathbb{F})$. Leta 1993 je Ovchinnikov [51] karakteriziral bijektivne preslikave na $P_n(\mathbb{F})$, kjer je $n \geq 3$ in je $\mathbb{F}$ polje realnih ali kompleksnih števil, ki ohranjajo urejenost v obe smeri.

Poleg matrične algebre $M_n(\mathbb{F})$ pa obstajajo tudi druge pomembne podalgebre in z njimi povezane delno urejene množice idempotentov. V zadnjem poglavju bomo posvetili pozornost delno urejeni množici zgoraj trikotnih idempotentnih matrik. Pokazali bomo, da podoben rezultat, kot ga je dokazal Ovchinnikov, velja tudi za bijektivne preslikave na delno urejeni množici zgoraj trikotnih idempotentnih matrik, ki ohranjajo urejenost in ortogonalnost. Če je $\mathbb{F}$ polje z lastnostjo, da je vsak neničelni homomorfizem $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ surjektiven, potem enak rezultat velja brez predpostavke o surjektivnosti.

2 Predstavitev osnovnih pojmov

V tem poglavju bomo predstavili osnovne pojme in primere iz teorije nekomutativnih algeber, Banachovih algeber in jordanskih homomorfizmov ter karakterizirali izomorfizme in antiizomorfizme na standardnih operatorskih algebrah.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da so vsi vektorski prostori nad poljem kompleksnih števil, razen kadar bomo posebej zapisali drugače.

2.1 Nekomutativne algebre

Namen tega poglavja je pregledati nekaj osnovnih pojmov iz teorije nekomutativnih asociativnih algeber. Brez podrobnosti bomo podali osnovne definicije in izreke, ki jih bomo v naslednjih poglavjih potrebovali.

Pod besedo algebra bomo v nadaljevanju razumeli, da gre za asociativno algebro z enoto nad poljem kompleksnih števil, ki ni nujno komutativna. Še več, ukvarjali se bomo s področjem, ki je za komutativne algebre razmeroma nezanimivo, tako bo poudarek zares na nekomutativnih algebrah.

Primitivne algebre

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra in $\mathcal{M}$ levi $\mathcal{A}$-modul. Levi $\mathcal{A}$-modul $\mathcal{M}$ je *enostaven*, če je $\mathcal{A}\mathcal{M} \neq 0$ in sta 0 in $\mathcal{M}$ njegova edina podmodula. Izkaže se, da je neničelni levi $\mathcal{A}$-modul $\mathcal{M}$ enostaven natanko tedaj, ko je $\mathcal{A}x = \mathcal{M}$ za vsak $0 \neq x \in \mathcal{M}$. Pravimo, da je $\mathcal{M}$ veren levi $\mathcal{A}$-modul, če iz $a\mathcal{M} = 0$, kje je $a \in \mathcal{A}$, sledi $a = 0$. Algebra $\mathcal{A}$ je *leva (desna) primitivna algebra*, če ima kak enostaven veren levi (desni) modul. Leva primitivna algebra ni nujno tudi desna primitivna algebra. V nadaljevanju se bomo omejili na leve primitivne algebre in zato bomo pod besedo primitivna algebra imeli v mislih levo primitivno algebro. Primera primitivnih algeber sta $M_n(\mathbb{C})$, algebra $n \times n$ matrik nad poljem kompleksnih števil, in $\mathcal{L}(X)$, algebra vseh linearnih operatorjev na vektorskem prostoru X. V bistvu drugi primer prvega vključuje. Namreč, kadar je X končno dimenzionalen kompleksen vektorski prostor in je $\dim(X) = n$, je $\mathcal{L}(X) \cong M_n(\mathbb{C})$.

Naj bo X vektorski prostor. Pravimo, da je algebra $\mathcal{A}$ *gosta podalgebra* algebre $\mathcal{L}(X)$, če za vsako linearno neodvisno množico $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ in poljubno množico $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq X$ obstaja tak operator $T \in \mathcal{A}$, da je $Tx_i = y_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots, n$. Vsaka gosta algebra je primitivna. Po Jacobsonovem izreku o gostoti pa velja tudi obratno. Namreč, vsaka primitivna algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna neki gosti podalgebri $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{L}(X)$.

Polenostavne algebre

Naj bo $\mathcal{M}$ levi $\mathcal{A}$-modul. S simbolom $ann_l(\mathcal{M}) = \{a \in \mathcal{A} : a\mathcal{M} = 0\}$ označimo njegov levi anhilator, ki je ideal algebre $\mathcal{A}$. Ideal P algebre $\mathcal{A}$ je *primitiven*, če je $\mathcal{A}/P$ primitivna algebra. Izkaže se, da je P primitiven ideal natanko tedaj, ko je $P = ann_l(\mathcal{M})$ za neki enostavni levi $\mathcal{A}$-modul $\mathcal{M}$. S simbolom $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ označimo *Jacobsonov radikal* algebre $\mathcal{A}$. To je ideal algebre $\mathcal{A}$, ki je enak preseku primitivnih idealov algebre $\mathcal{A}$, oziroma je enak preseku levih anhilatorjev vseh enostavnih levih $\mathcal{A}$-modulov. V primeru, ko algebra $\mathcal{A}$ ne vsebuje primitivnih idealov, je $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Na ekvivalenten način lahko definiramo Jacobsonov radikal s pomočjo enostavnih desnih $\mathcal{A}$-modulov oziroma desnih primitivnih idealov algebre $\mathcal{A}$. Prav tako se izkaže, da je $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ enak preseku maksimalnih levih (desnih) idealov algebre $\mathcal{A}$. Element $a \in \mathcal{A}$ pripada Jacobsonovemu radikalu algebre $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $1 + ax$ obrnljiv element za vsak $x \in \mathcal{A}$, oziroma natanko tedaj, ko je $1+xa$ obrnljiv element za vsak $x \in \mathcal{A}$, oziroma natanko tedaj, ko je $1 + xay$ obrnljiv element za vsaka $x, y \in \mathcal{A}$.

Pravimo, da je algebra $\mathcal{A}$ *polenostavna*, če je $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = 0$. Vsaka primitivna algebra je polenostavna, saj je 0 primitiven ideal primitivne algebre. Prav tako je za vsako algebro $\mathcal{A}$ tudi $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ polenostavna algebra.

Ideal I algebre $\mathcal{A}$ je *nilpotenten*, če je $I^n = 0$ za neko naravno število n in je *nil-ideal*, če za vsak $x \in I$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je

$x^n = 0$. Očitno je vsak nilpotenten ideal nil-ideal. Obratno ne velja. Izkaže se, da Jacobsonov radikal algebre $\mathcal{A}$ vsebuje vse nil-ideale in zato tudi vse nilpotentne ideale algebre $\mathcal{A}$.

Praalgebre in polpraalgebre

Pravimo, da je algebra $\mathcal{A}$ *praalgebra*, če je produkt dveh njenih neničelnih idealov vselej različen od nič. Izkaže se, da je algebra $\mathcal{A}$ praalgebra natanko tedaj, ko iz $a\mathcal{A}b = 0$, kjer sta $a, b \in \mathcal{A}$, sledi, da je $a = 0$ ali $b = 0$.

Algebra $\mathcal{A}$ je *polpraalgebra*, če ne vsebuje neničelnih nilpotentnih idealov. Če je $\mathcal{A}$ polpraalgebra, potem $\mathcal{A}$ ne vsebuje niti desnih niti levih neničelnih nilpotentnih idealov. Algebra $\mathcal{A}$ je polpraalgebra natanko tedaj, ko iz $a\mathcal{A}a = 0$, kjer je $a \in \mathcal{A}$, sledi, da je $a = 0$. Vsaka praalgebra je tudi polpraalgebra. Obratno ni res. Namreč, naj bo $0 \neq \mathcal{A}$ praalgebra. Potem je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ polpraalgebra, ki ni praalgebra.

Vsaka polenostava algebra $\mathcal{A}$ je polpraalgebra. Namreč, naj bo I tak ideal algebre $\mathcal{A}$, da je $I^2 = 0$. Potem je $I \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$, saj Jacobsonov radikal vsebuje vse nil-ideale algebre $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A}$ polenostavna algebra, je $I = 0$.

Naj bo $\mathcal{A}$ primitivna algebra, $\mathcal{M}$ enostaven veren levi $\mathcal{A}$-modul ter I in $0 \neq J$ taka ideala algebre $\mathcal{A}$, da je $IJ = 0$. Potem je $0 = IJ\mathcal{M} = I\mathcal{M}$. Iz tega sledi, da je $I = 0$. S tem smo pokazali, da je vsaka primitivna algebra praalgebra.

Ideal I algebre $\mathcal{A}$ je *bistven*, če za vsak neničelni ideal J algebre $\mathcal{A}$ velja $I \cap J \neq \{0\}$. Izkaže se, da je v polenostavnih algebrah I bistven ideal natanko tedaj, ko za vsak element $a \in \mathcal{A}$ velja naslednja implikacija

$$aI = 0 \;\Rightarrow\; a = 0.$$

Torej je v primitivnih algebrah vsak neničelni ideal bistven.

2.2 Banachove algebre

Definicija 2.1 *Naj bo $\mathcal{A}$ kompleksna algebra. Če je na vektorskem prostoru $\mathcal{A}$ definirana norma $\|.\|$, za katero velja*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A},$$

potem $\mathcal{A}$ imenujemo ***normirana algebra****. Če je $\mathcal{A}$ normirana algebra, ki je hkrati Banachov prostor, $\mathcal{A}$ imenujemo* ***Banachova algebra****.*

Primer 2.1 Naj bo X Banachov prostor. Označimo z $\mathcal{B}(X)$ algebro vseh omejenih linearnih operatorjev na X. Potem je $\mathcal{B}(X)$ Banachova algebra, saj za vsak $x \in X$ in vsaka $A, B \in \mathcal{B}(X)$ velja neenakost $\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$ in je zato $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Opomba. Algebro vseh omejenih linearnih operatorjev končnega ranga na Banachovem prostoru X bomo v nadaljevanju označevali z $\mathcal{F}(X)$.

Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra. ***Spekter*** elementa $a \in \mathcal{A}$ je množica vseh $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere element $a - \lambda 1$ ni obrnljiv. Označevali ga bomo s $\sigma(a)$. Izkaže se, da je $\sigma(a)$ je kompaktna neprazna podmnožica kompleksnih števil in za vsak $\lambda \in \sigma(a)$ velja $|\lambda| \leq \|a\|$.

Naj bo a element Banachove algebre $\mathcal{A}$. ***Spektralni radij*** elementa a (označevali ga bomo z $r(a)$) definiramo kot

$$r(a) = \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Izkaže se, da je za vsak element a Banachove algebre $\mathcal{A}$

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Izrek 2.1 *Naj bo a tak element Banachove algebre $\mathcal{A}$, da je $r(a) < 1$. Potem je $1 - a$ obrnljiv element in je*

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Dokaz. Izberimo tak $\eta \in \mathbb{R}$, da je $r(a) < \eta < 1$. Ker je $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, je $\|a^n\| < \eta^n$ za vsa dovolj velika naravna števila n. Iz tega sledi, da je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|$ konvergentna. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $s_n = 1 + a + \cdots + a^n$ in $S_n = \|1\| + \|a\| + \cdots + \|a^n\|$. Naj bosta nadalje m in n naravni števili, $m < n$. Potem je

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\| = \|a^{m+1} + a^{m+2} + \cdots + a^n\| &\leq \|a^{m+1}\| \\
&+ \|a^{m+2}\| + \cdots + \|a^n\| \\
&= S_n - S_m.
\end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ konvergentna (zaporedje delnih vsot je Cauchyjevo in prostor $\mathcal{A}$ je Banachov). Označimo $s = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Dokazati moramo, da je $s(1-a) = (1-a)s = 1$. Ker zaporedje $\{\|a^n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0, velja

$$s(1-a) = (\lim_{n\to\infty} s_n)(1-a) = \lim_{n\to\infty} s_n(1-a) = \lim_{n\to\infty}(1-a^{n+1}) = 1.$$

Na enak način bi pokazali, da je $(1-a)s = 1$. □

Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra. Preslikavo $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ imenujemo ***involucija***, če zadošča naslednjim pogojem

(i) $(a^*)^* = a$,
(ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$,
(iii) $(ab)^* = b^* a^*$,
(iv) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

za vse $a, b \in \mathcal{A}$ in $\lambda \in \mathbb{C}$.

Primer 2.2 Naj bo H Hilbertov prostor. Preslikava, ki vsakemu omejenemu linearnemu operatorju A na prostoru H priredi njegov adjungiran operator, je involucija na Banachovi algebri $\mathcal{B}(H)$.

Banachovo algebro $\mathcal{A}$ z involucijo $*$ imenujemo ***C^*-algebra***, če za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Opomba. Če je a poljuben element C^*-algebre $\mathcal{A}$, potem je $\|a\|^2 = \|a^* a\| \le \|a^*\|\|a\|$, iz česar sledi, da je $\|a\| \le \|a^*\|$. Potem pa je $\|a^*\| \le \|(a^*)^*\| = \|a\|$. Torej za vsak element a C^*-algebre $\mathcal{A}$ velja $\|a^*\| = \|a\|$.

Primer 2.3 Naj bo H Hilbertov prostor. Potem je $\mathcal{B}(H)$ C^*-algebra.

Naj bosta a in b elementa algebre $\mathcal{A}$ ter $\mathcal{S}$ poljubna neprazna podmnožica algebre $\mathcal{A}$. Označimo

$$\mathcal{S}' = \{a \in \mathcal{A} \ : \ ab = ba \text{ za vsak } b \in \mathcal{S}\}$$

in

$$\mathcal{S}'' = \{a \in \mathcal{A} \ : \ ab = ba \text{ za vsak } b \in \mathcal{S}'\}.$$

Za vsako neprazno podmnožico $\mathcal{S}$ algebre $\mathcal{A}$ je seveda $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}''$.

Definicija 2.2 *Algebra $\mathcal{A}$ je **von Neumannova algebra**, če jo lahko vložimo v $\mathcal{B}(H)$ za nek Hilbertov prostor H in je $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

Opomba. Vsaka von Neumannova algebra je C^*-algebra.

Če je h tak element C^*-algebre $\mathcal{A}$, da je $h^* = h$, potem h imenujemo ***hermitski*** element. Izkaže se, da je vsak hermitski element h von Neumannove algebre $\mathcal{A}$ limita zaporedja realnih linearnih kombinacij ortogonalnih idempotentov.

Opomba. Element e algebre $\mathcal{A}$ je *idempotent*, če je $e^2 = e$. Idempotenta $e, f \in \mathcal{A}$ sta *ortogonalna*, če je $ef = fe = 0$.

2.3 Izomorfizmi in antiizomorfizmi

V tem poglavju bomo dokazali dva izreka, ki karakterizirata izomorfizme in antiizomorfizme med standardnima operatorskima algebrama.

Opomba. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ algebri. Antiizomorfizem $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je bijektivna linearna preslikava, za katero velja $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$, $a, b \in \mathcal{A}$.

Definicija 2.3 ***Standardna operatorska algebra*** *na Banachovem prostoru X je vsaka podalgebra algebre vseh omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru X, ki vsebuje identični operator I ter vse omejene linearne operatorje na X končnega ranga.*

Z X^* bomo označevali dual Banachovega prostora X ter z A^* adjungiran operator operatorja $A \in \mathcal{B}(X)$.

Naj bo $A \in \mathcal{B}(X)$ operator ranga ena (t.j. omejen linearen operator na Banachovem prostoru X, katerega slika je enodimenzionalen podprostor prostora X). Potem obstaja tak $x_0 \in X$ in tak linearen funkcional $f_0 \in X^*$, da za vsak $x \in X$ velja $Ax = f_0(x)x_0$, oziroma $A = x_0 \otimes f_0$, kjer $x_0 \otimes f_0$ označuje operator na X definiran s predpisom $(x_0 \otimes f_0)x = f_0(x)x_0$, $x \in X$. Če pa je $A \in \mathcal{B}(X)$ operator ranga n, $n \in \mathbb{N}$, potem je A vsota n operatorjev ranga ena in obstajajo taki vektorji $x_1, \ldots, x_n \in X$ ter taki funkcionali $f_1, \ldots, f_n \in X^*$, da je $A = x_1 \otimes f_1 + \cdots + x_n \otimes f_n$.

Naj bo $x \otimes f \in \mathcal{B}(X)$ operator ranga ena. Če je $f(x) = 1$, potem je $x \otimes f$ idempotent (oz. $(x \otimes f)^2 = x \otimes f$). Če pa je $f(x) = 0$, potem je

$(x\otimes f)^2 = 0$. Iz tega sledi, da je vsak operator ranga ena iz prostora $\mathcal{B}(X)$ bodisi oblike λP, kjer je λ neko neničelno kompleksno število in je P idempotent ranga ena (torej je $P = x\otimes f$ in $(x\otimes f)^2 = x\otimes f$), ali pa je operator, katerega kvadrat je enak nič.

Naj bo $x \in X$ in $f \in X^*$. Potem je $\sigma(x \otimes f) = \{0, f(x)\}$. Torej je operator $I - x \otimes f$ obrnljiv natanko tedaj, ko je $f(x) \neq 1$. Naj bo sedaj $A \in \mathcal{B}(X)$ obrnljiv operator. Potem je $A - x \otimes f$ obrnljiv natanko tedaj, ko je $f(A^{-1}x) \neq 1$ ($A - x \otimes f$ je obrnljiv natanko tedaj, ko je tudi operator $I - A^{-1}(x \otimes f)$ obrnljiv).

Izomorfizme in antiizomorfizme med standardnima operatorskima algebrama karakteriziramo na naslednji način:

Izrek 2.2 *Naj bo $\mathcal{A}$ standardna operatorska algebra na Banachovem prostoru X in $\mathcal{B}$ standardna operatorska algebra na Banachovem prostoru Y ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ izomorfizem. Potem je prostor X je izomorfen prostoru Y in za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja $\phi(A) = TAT^{-1}$, kjer je $T : X \to Y$ omejen obrnljiv linearen operator.*

Izrek 2.3 *Naj bo $\mathcal{A}$ standardna operatorska algebra na Banachovem prostoru X in $\mathcal{B}$ standardna operatorska algebra na Banachovem prostoru Y ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ antiizomorfizem. Potem je prostor X^* je izomorfen prostoru Y in za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja $\phi(A) = TA^*T^{-1}$, kjer je $T : X^* \to Y$ omejen obrnljiv linearen operator.*

Opomba. Najprej bomo podali dokaz izreka 2.3, saj je le ta nekoliko bolj zahteven, nato pa bomo podali le skico dokaza izreka 2.2.

Dokaz izreka 2.3. Izberimo tak vektor $x_0 \in X$ in tak linearen funkcional $f_0 \in X^*$, da velja $f_0(x_0) = 1$. Operator $x_0 \otimes f_0$ je idempotent ranga ena. Ker je ϕ antiizomorfizem, je tudi $\phi(x_0 \otimes f_0)$ idempotent. Recimo, da je $\phi(x_0 \otimes f_0)$ operator ranga vsaj dva. Potem lahko najdemo taka neničelna idempotenta Q_1 in Q_2, da je $\phi(x_0 \otimes f_0) = Q_1 + Q_2$, $Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0$ ter je Q_1 operator ranga ena. Ker je $Q_1 \in \mathcal{F}(Y) \subseteq \mathcal{B}$, tudi operator $Q_2 = \phi(x_0\otimes f_0) - Q_1$ pripada algebri $\mathcal{B}$. Naj bo $P_1 = \phi^{-1}(Q_1)$ in $P_2 = \phi^{-1}(Q_2)$. Ker sta Q_1 in Q_2 neničelna idempotenta, ki zadoščata $Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0$, sta tudi P_1 in P_2 neničelna idempotenta z lastnostjo $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ in prav tako velja $x_0 \otimes f_0 = P_1 + P_2$. To pa ni mogoče in zato je $\phi(x_0 \otimes f_0)$ idempotent ranga ena. Torej je $\phi(x_0 \otimes f_0) = y_0 \otimes g_0$

za nek vektor $y_0 \in Y$ ter tak linearen funkcional $g_0 \in Y^*$, da je $g_0(y_0) = 1$.

Definirajmo linearno preslikavo $T : X^* \to Y$ s predpisom

$$Tf = \phi(x_0 \otimes f)y_0.$$

Definirajmo še linearno preslikavo $S : Y \to X^*$ s predpisom

$$Sy = \phi^{-1}(y \otimes g_0)^* f_0.$$

Naj bo A poljuben operator iz algebre $\mathcal{A}$. Potem velja

$$\begin{aligned}(TA^*)f &= T(A^*f) = \phi(x_0 \otimes (A^*f))y_0 \\ &= \phi((x_0 \otimes f)A)y_0 = \phi(A)\phi(x_0 \otimes f)y_0 = \phi(A)Tf,\end{aligned}$$

kjer je $f \in X^*$.

Naj bo y poljuben vektor iz Y. Potem velja (upoštevamo zgornjo enakost)

$$\begin{aligned}(TS)y &= T(\phi^{-1}(y \otimes g_0)^* f_0) \\ &= \phi((\phi^{-1}(y \otimes g_0))Tf_0 \\ &= (y \otimes g_0)\phi(x_0 \otimes f_0)y_0 \\ &= (y \otimes g_0)(y_0 \otimes g_0)y_0 \\ &= y.\end{aligned}$$

Torej je TS identiteta na vektorskem prostoru Y.

Naj bo f poljuben funkcional iz X^*. Potem velja

$$\begin{aligned}(ST)f &= S(\phi(x_0 \otimes f)y_0) \\ &= \phi^{-1}((\phi(x_0 \otimes f)y_0) \otimes g_0)^* f_0 \\ &= \phi^{-1}((\phi(x_0 \otimes f)(y_0 \otimes g_0))^* f_0 \\ &= (\phi^{-1}(y_0 \otimes g_0)(x_0 \otimes f))^* f_0 \\ &= ((x_0 \otimes f_0)(x_0 \otimes f))^* f_0 \\ &= (x_0 \otimes f)^* f_0 \\ &= f.\end{aligned}$$

Torej je ST identiteta na prostoru X^*. Ker je tudi TS identiteta (na prostoru Y), je T obrnljiv operator in je $T^{-1} = S$ ter za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja

$$\phi(A) = TA^*T^{-1}.$$

V nadaljevanju bomo dokazali, da je T omejen operator. Če je

$A \in \mathcal{A}$ operator ranga ena, je TA^* omejen operator. Iz tega sledi, da je $\phi(A)T$ omejen operator za vsak operator $A \in \mathcal{A}$ ranga ena. Dokazali smo že, da ϕ idempotente ranga ena preslika v idempotente ranga ena. Naj bo A poljuben operator iz algebre $\mathcal{A}$ ranga ena. Potem je A bodisi oblike $A = \lambda P$ za neko neničelno kompleksno število λ in nek idempotent $P \in \mathcal{A}$ ranga ena ali pa je A operator, katerega kvadrat je enak nič. Če velja prva možnost, je $\phi(A)$ operator ranga ena. Naj bo $A \in \mathcal{A}$ operator ranga ena, katerega kvadrat je enak nič. Potem lahko A zapišemo kot $A = x \otimes f$ za nek vektor $x \in X$ in tak linearen funkcional $f \in X^*$, da velja $f(x) = 0$. Izberimo tak $h \in X^*$, da je $h(x) = 1$. Naj bo $P = x \otimes h$. Operator P je idempotent ranga ena in velja $A = PA$. Torej je $\phi(A) = \phi(PA) = \phi(A)\phi(P)$ tudi operator ranga ena. S tem smo pokazali, da preslikava ϕ množico omejenih linearnih operatorjev na X ranga ena preslika na množico omejenih linearnih operatorjev na Y ranga ena. Torej je za vsak vektor $y \in Y$ in vsak linearen funkcional $g \in Y^*$ operator $(y \otimes g)T$ omejen. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje linearnih funkcionalov iz X^*, ki konvergira k $f = 0$, in naj zaporedje $\{Tf_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ konvergira k $z \in Y$. Velja

$$g(z)y = (y \otimes g)z = \lim_{n\to\infty} ((y \otimes g)T)f_n = (y \otimes g)Tf = g(Tf)y.$$

Torej je $z = 0$ in je po izreku o zaprtem grafu operator T omejen. $\square$

Dokaz izreka 2.2. Izberimo tak vektor $x_0 \in X$ in tak linearen funkcional $f_0 \in X^*$, da velja $f_0(x_0) = 1$. Operator $x_0 \otimes f_0$ je idempotent ranga ena. Ker je ϕ izomorfizem, je tudi $\phi(x_0 \otimes f_0)$ idempotent in na enak način kot v dokazu izreka 2.3 lahko pokažemo, da je $\phi(x_0 \otimes f_0) = y_0 \otimes g_0$ za nek vektor $y_0 \in Y$ in tak linearen funkcional $g_0 \in Y^*$, da je $g_0(y_0) = 1$.

Definirajmo linearno preslikavo $T : X \to Y$ s predpisom

$$Tx = \phi(x \otimes f_0)y_0.$$

Definirajmo še linearno preslikavo $S : Y \to X$ s predpisom

$$Sy = \phi^{-1}(y \otimes g_0)x_0.$$

Naj bo $A \in \mathcal{A}$ poljuben operator. Potem velja

$$\begin{aligned}(TA)x = T(Ax) &= \phi(Ax \otimes f_0)y_0 = \phi(A(x \otimes f_0))y_0 \\ &= \phi(A)\phi(x \otimes f_0)y_0 = \phi(A)Tx,\end{aligned}$$

kjer je $x \in X$. Naj bo y poljuben vektor iz Y. Potem velja

$$\begin{aligned}(TS)y &= T(\phi^{-1}(y \otimes g_0)x_0) \\ &= \phi((\phi^{-1}(y \otimes g_0)x_0) \otimes f_0)y_0 \\ &= \phi(\phi^{-1}(y \otimes g_0)(x_0 \otimes f_0))y_0 \\ &= (y \otimes g_0)(y_0 \otimes g_0)y_0 \\ &= y.\end{aligned}$$

Torej je TS identiteta na vektorskem prostoru Y. Na enak način lahko preverimo, da je ST identiteta na vektorskem prostoru X. S tem smo dokazali, da je T obrnljiv operator in je $T^{-1} = S$ ter za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja

$$\phi(A) = TAT^{-1}.$$

Na enak način kot v dokazu izreka 2.3 lahko s pomočjo izreka o zaprtem grafu pokažemo, da je T omejen operator. $\square$

2.4 Jordanski homomorfizmi

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra. Element

$$a \circ b = ab + ba$$

imenujemo ***jordanski produkt*** elementov a in b iz algebre $\mathcal{A}$. Jordanski homomorfizem definiramo kot linearno preslikavo, ki ohranja jordanski produkt.

Definicija 2.4 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ algebri. Preslikavo $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ imenujemo **jordanski homomorfizem**, če je linearna in velja*

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Opomba. Naj bo $\mathcal{B}$ algebra s karakteristiko različno od dva. Z računom lahko preverimo, da je linearna preslikava $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jordanski homomorfizem natanko tedaj, ko za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja $\phi(a^2) = \phi(a)^2$.

Bijektivni jordanski homomorfizem $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ imenujemo ***jordanski izomorfizem***. Izomorfizmi kot tudi antiizomorfizmi so primeri jordanskih izomorfizmov. Obstajajo pa tudi taki jordanski izomorfizmi, ki niso niti izomorfizmi niti antiizomorfizmi (glej primer 2.4).

Primer 2.4 Naj bosta $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$ nekomutativni izomorfni algebri ter $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ nekomutativni antiizomorfni algebri. Definirajmo preslikavo $\phi : \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{B}_1 \to \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{B}_2$ s predpisom

$$\phi(a+b) = \phi_1(a) + \phi_2(b),$$

kjer je $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ izomorfizem in $\phi_2 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ antiizomorfizem. Z računom lahko preverimo, da je ϕ jordanski izomorfizem, ki ni niti izomorfizem niti antiizomorfizem.

Izrek 2.4 (I. N. Herstein) *Surjektivni jordanski homomorfizem, ki slika iz poljubne algebre na praalgebro, je bodisi homomorfizem bodisi antihomomorfizem.*

Naslednji izrek nam med drugim pove, da jordanski homomorfizmi pri zelo milih pogojih enoto algebre $\mathcal{A}$ preslikajo v enoto algebre $\mathcal{B}$ in vsak obrnljiv element algebre $\mathcal{A}$ preslikajo v obrnljiv element algebre $\mathcal{B}$.

Izrek 2.5 *Naj bo $\mathcal{A}$ algebra z enoto 1 in $\mathcal{B}$ algebra z enoto $1'$ ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jordanski homomorfizem, katerega zaloga vrednosti vsebuje $1'$. Potem je $\phi(1) = 1'$ in $\phi(a)$ je obrnljiv za vsak obrnljiv element a iz algebre $\mathcal{A}$. Še več, $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da je $\phi(1) = 1'$. Naj bo $\phi(a_0) = 1'$ za nek $a_0 \in \mathcal{A}$. Tak element a_0 obstaja, saj je $1'$ element zaloge vrednosti preslikave ϕ. Potem je

$$2 \cdot 1' = \phi(a_0 + a_0) = \phi(1 \circ a_0) = \phi(1) \circ \phi(a_0) = \phi(1) \circ 1' = 2\phi(1).$$

Torej je $\phi(1) = 1'$. Prav tako velja

$$4xyx = 2(y \circ x) \circ x - y \circ (x \circ x)$$

in zato je

$$\phi(xyx) = \phi(x)\phi(y)\phi(x)$$

za vse $x, y \in \mathcal{A}$. Naj bo a obrnljiv element iz algebre $\mathcal{A}$. Potem je

$$\phi(a) = \phi(aa^{-1}a) = \phi(a)\phi(a^{-1})\phi(a).$$

Naj bo $p_1 = \phi(a)\phi(a^{-1})$ in $p_2 = \phi(a^{-1})\phi(a)$. Potem je $p_1^2 = p_1$ in $p_2^2 = p_2$. Prav tako je

$$p_1 + p_2 = \phi(a) \circ \phi(a^{-1}) = \phi(a \circ a^{-1}) = 2\phi(1) = 2 \cdot 1'.$$

Zato je $(2\cdot 1'-p_1)^2 = 2\cdot 1'-p_1$, iz česar sledi $2(p_1-1')=0$ in zato je $p_1 = p_2 = 1'$. S tem smo pokazali, da je $\phi(a)$ obrnljiv element algebre $\mathcal{B}$ in je $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$. $\square$

3 Ohranjevalci obrnljivosti in singularnosti

To poglavje je razdeljeno na dve podpoglavji. V prvem se bomo posvetili linearnim ohranjevalcem obrnljivosti na Banachovih algebrah, v drugem pa aditivnim ohranjevalcem obrnljivosti in singularnosti na matričnih algebrah.

3.1 Linearni ohranjevalci obrnljivosti

Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ algebri z enoto in $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linearna preslikava. Pravimo, da je preslikava ϕ ***enotska***, če slika enoto algebre $\mathcal{A}$ v enoto algebre $\mathcal{B}$. Preslikava ϕ ***ohranja obrnljivost***, če je za vsak obrnljiv element a algebre $\mathcal{A}$ tudi njegova slika $\phi(a)$ obrnljiv element algebre $\mathcal{B}$. Preslikava ϕ ***ohranja obrnljivost v obe smeri***, če je $\phi(a)$ obrnljiv element algebre $\mathcal{B}$ natanko tedaj, ko je a obrnljiv element algebre $\mathcal{A}$.

Opomba. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ Banachovi algebri ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska linearna preslikava. Potem preslikava ϕ ohranja obrnljivost natanko tedaj, ko za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja

$$\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a)$$

(če $\phi(a) - \lambda 1 = \phi(a - \lambda 1)$ ni obrnljiv element za neko kompleksno število λ, tudi $a - \lambda 1$ ni obrnljiv element). Podobno enotska linearna preslikava $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ohranja obrnljivost v obe smeri natanko tedaj, ko za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja

$$\sigma(\phi(a)) = \sigma(a).$$

V nadaljevanju bomo brez dokazov podali nekaj osnovnih trditev v zvezi s podstavkom polenostavne Banachove algebre in elementi ranga ena.

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra in L njen minimalni levi ideal (t.j. neničelni levi ideal, ki ne vsebuje nobenega pravega levega ideala). Če je a tak element algebre $\mathcal{A}$, da je $La \neq 0$, potem sta leva ideala L in La izomorfna kot leva $\mathcal{A}$-modula. Torej je tudi La minimalni levi ideal algebre $\mathcal{A}$. Iz tega sledi, da je vsota vseh minimalnih levih idealov algebre $\mathcal{A}$, ki jo imenujemo ***levi podstavek algebre*** $\mathcal{A}$, ideal algebre $\mathcal{A}$. Na podoben način lahko razmislimo, da je vsota vseh minimalnih desnih idealov algebre $\mathcal{A}$ ideal, ki ga imenujemo ***desni podstavek algebre*** $\mathcal{A}$. Levi in desni podstavek algebre $\mathcal{A}$ v splošnem ne sovpadata. Če pa je $\mathcal{A}$ polenostavna Banachova algebra, sta levi in desni podstavek med seboj enaka in ju imenujemo ***podstavek algebre*** $\mathcal{A}$. Označevali ga bomo s $\mathrm{soc}(\mathcal{A})$. Če algebra $\mathcal{A}$ nima enostranskih minimalnih idealov, definiramo $\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = 0$.

Definicija 3.1 *Element $u \in soc(\mathcal{A})$ je ranga ena, če u pripada nekemu minimalnemu levemu (desnemu) idealu algebre $\mathcal{A}$ in je $u \neq 0$.*

Opomba. Levi ideal L je minimalni levi (desni) ideal algebre $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $L = \mathcal{A}e$ ($L = e\mathcal{A}$) za nek ***minimalni idempotent*** $e \in \mathcal{A}$ (t.j. tak neničelni idempotent algebre $\mathcal{A}$, da je $e\mathcal{A}e = \mathbb{C}e$).

Primer 3.1 Naj bo $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na Banachovem prostoru X. Potem je podstavek algebre $\mathcal{A}$ enak idealu operatorjev končnega ranga.

Množico vseh elementov algebre $\mathcal{A}$ ranga ena bomo označevali z $\mathcal{F}_1(\mathcal{A})$. Ni težko preveriti, da je $0 \neq u \in \mathcal{A}$ ranga ena natanko tedaj, ko je $u = ue$ za nek minimalni idempotent e, oziroma natanko tedaj, ko je $u\mathcal{A}u = \mathbb{C}u$. Prav tako se izkaže, da je $u \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A})$ natanko tedaj, ko je $u \neq 0$ in $|\sigma(zu) \setminus \{0\}| \leq 1$ za vsak $z \in \mathcal{A}$ (oziroma natanko tedaj, ko je $u \neq 0$ in $|\sigma(uz) \setminus \{0\}| \leq 1$ za vsak $z \in \mathcal{A}$).

Naj bo $u \in \mathcal{A}$ element ranga ena. Potem je $u^2 = \tau(u)u$ za neko kompleksno število $\tau(u)$, ki je odvisno od elementa u. Če je $\sigma(u) = \{0\}$, potem je $\tau(u) = 0$, v nasprotnem primeru pa je $\tau(u)$ edino neničelno število iz spektra elementa u. Ker je $\tau(u)$ enolično določeno kompleksno število, lahko definiramo preslikavo $\tau : \mathcal{F}_1(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$, ki nam element u ranga ena preslika v $\tau(u)$. To preslikavo še razširimo z definicijo $\tau(0) = 0$.

Opomba. Naj bo $u \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A})$ in x poljuben element algebre $\mathcal{A}$. Ker je $u\mathcal{A}u = \mathbb{C}u$, je $(xu)^2 = \lambda xu$ za neko kompleksno število λ. Prav tako velja (glej zgoraj) $(xu)^2 = \tau(xu)xu$. Torej je $(\lambda - \tau(xu))xu = 0$. Iz tega sledi, da je $\lambda = \tau(xu)$ (če je $xu = 0$, je $\lambda = 0 = \tau(xu)$) in je zato $uxu = \tau(xu)u$. Na enak način bi pokazali, da je $uxu = \tau(ux)u$.

Izrek 3.1 *Naj bo $\mathcal{A}$ polenostavna Banachova algebra in $u \in \mathcal{A}$ element ranga ena. Potem je zožitev preslikave τ na minimalni levi ideal $\mathcal{A}u$ omejen linearen funkcional.*

Dokaz. Naj bosta x_1 in x_2 poljubna elementa algebre $\mathcal{A}$. Velja (glej opombo zgoraj)

$$\begin{aligned}(x_1u + x_2u)^2 &= x_1ux_1u + x_1ux_2u + x_2ux_1u + x_2ux_2u \\ &= \tau(x_1u)x_1u + \tau(x_2u)x_1u + \tau(x_1u)x_2u + \tau(x_2u)x_2u \\ &= (\tau(x_1u) + \tau(x_2u))(x_1u + x_2u).\end{aligned}$$

Prav tako je $(x_1u + x_2u)^2 = \tau(x_1u + x_2u)(x_1u + x_2u)$. Torej je

$$(\tau(x_1u) + \tau(x_2u) - \tau(x_1u + x_2u))(x_1u + x_2u) = 0.$$

Če je $x_1u + x_2u \neq 0$, je $\tau(x_1u) + \tau(x_2u) = \tau(x_1u + x_2u)$. Recimo, da je $x_1u + x_2u = 0$. Potem je $\tau(x_1u + x_2u) = 0$. Velja

$$0 = x_1ux_1u + x_1ux_2u = (\tau(x_1u) + \tau(x_2u))x_1u.$$

Iz tega sledi, da je $0 = \tau(x_1u) + \tau(x_2u) = \tau(x_1u + x_2u)$ (če je $x_1u = 0$, potem je tudi $x_2u = 0$).

Naj bo λ poljubno kompleksno število in $x \in \mathcal{A}$. Potem je $(\lambda xu)^2 = \lambda^2\tau(xu)xu$, po drugi strani pa je $(\lambda xu)^2 = \tau(\lambda xu)\lambda xu$. Iz tega sledi, da je

$$(\lambda\tau(xu) - \tau(\lambda xu))\lambda xu = 0$$

in je torej $\lambda\tau(xu) = \tau(\lambda xu)$.

S tem smo pokazali, da je zožitev preslikave τ na minimalni levi ideal $\mathcal{A}u$ linearen funkcional, ki je omejen, saj je $|\tau(xu)|\|xu\| = \|(xu)^2\| \leq \|xu\|^2$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. □

Opomba. Na enak način bi dokazali, da je zožitev preslikave τ na minimalni desni ideal $u\mathcal{A}$ omejen linearen funkcional.

Prvi rezultat povezan z linearnimi preslikavami, ki ohranjajo obrnljivost, je že iz leta 1897. Frobenius [28] je pokazal, da so edine enotske bijektivne linearne preslikave na algebri $M_n(\mathbb{C})$, ki ***ohranjajo determinante matrik*** (t.j. za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$

je $\det(\phi(A)) = \det(A))$, avtomorfizmi in antiavtomorfizmi, torej oblike $\phi(A) = TAT^{-1}$ ali $\phi(T) = TA^tT^{-1}$, kjer je $T \in M_n(\mathbb{C})$ obrnljiva matrika in A^t označuje transponirano matriko matrike A.

Če je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ enotska bijektivna linearna preslikava, ki ohranja determinante matrik, potem seveda ohranja obrnljivost v obe smeri. Dieudonne [16] je več kot petdeset let kasneje dokazal, da je vsaka enotska bijektivna linearna preslikava na algebri $M_n(\mathbb{C})$, ki ohranja obrnljivost, avtomorfizem ali antiavtomorfizem.

V letih 1967 in 1968 so Gleason, Kahane in Żelazko ([30], [36], [63]) pokazali naslednjo trditev: če je $\mathcal{A}$ Banachova algebra in $\mathcal{B}$ komutativna polenostavna Banachova algebra ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost, potem je preslikava ϕ homomorfizem. Pravzaprav je to razširitev njihovega klasičnega izreka, v katerem je $\mathcal{B}$ algebra kompleksnih števil. Ob teh rezultatih se lahko vprašamo, pod katerimi pogoji je enotska linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost, jordanski homomorfizem. To vprašanje si je zastavil že Kaplansky [37]. Veliko dela v zvezi s problemom je bilo narejenega na področju funkcionalne analize, kjer so matematiki usmerili pozornost na enotske linearne preslikave $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, kjer sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ Banachovi algebri nad poljem kompleksnih števil, ki ohranjajo obrnljivost.

Naslednji primer bo pokazal, da obstajajo enotske linearne preslikave med Banachovima algebrama, ki ohranjajo obrnljivost in niso jordanski homomorfizmi.

Primer 3.2 Naj bo $\mathcal{A}$ algebra vseh zgoraj trikotnih $n \times n$ matrik ($n \geq 3$). Definirajmo preslikavo $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ s predpisom $\phi([a_{ij}]) = [b_{ij}]$, kjer je $b_{12} = a_{13}, b_{13} = a_{12}$, za vse ostale koeficiente matrike $[b_{ij}]$ pa velja $b_{ij} = a_{ij}$. Zlahka preverimo, da je ϕ enotska linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}.$$

Potem je $\phi(A^2) = 0$ in $\phi(A)^2 \neq 0$. Torej ϕ ni jordanski homomorfizem.

Izoblikovala se je naslednja domneva: vsaka enotska bijektivna linearna preslikava med polenostavnima Banachovima algebrama, ki ohranja obrnljivost, je jordanski izomorfizem. V nadaljevanju bomo predstavili nekaj pozitivnih rezultatov, ki so povezani s to domnevo.

Leta 1986 sta Jafarian in Sourour [35] dokazala, da so jordanski homomorfizmi edine enotske bijektivne linearne preslikave med algebrama $\mathcal{B}(X)$ in $\mathcal{B}(Y)$, kjer sta X in Y Banachova prostora, ki ohranjajo obrnljivost v obe smeri. Leta 1994 sta Aupetit in Mouton [5] razširila ta rezultat na polenostavne Banachove algebre, katerih podstavek je bistven ideal. Dve leti kasneje pa je Sourour [55] razširil rezultat Jafariana in Souroura [35] na preslikave, ki ohranjajo obrnljivost (samo v eni smeri).

Aupetit in Mouton [5] sta pokazala, da je vsaka enotska bijektivna linearna preslikava med polenostavnima Banachovima algebrama, katerih podstavek je bistven ideal, ki ohranja obrnljivost v obe smeri, jordanski izomorfizem. Predpostavko o ohranjanju obrnljivosti v obe smeri lahko zamenjamo z milejšo predpostavko, da se obrnljivost ohranja samo v eno smer (glej posledico 3.1).

Izrek 3.2 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ polenostavni Banachovi algebri in $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska bijektivna linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost. Potem za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja*

$$\phi^{-1}(\phi(a^2) - \phi(a)^2) \cdot \operatorname{soc}(\mathcal{A}) = 0.$$

Če je $\operatorname{soc}(\mathcal{A})$ bistven ideal algebre $\mathcal{A}$, potem je preslikava ϕ jordanski izomorfizem.

Ker je v primitivnih algebrah vsak neničelni ideal bistven in ker je po Hersteinovem izreku vsak jordanski izomorfizem ϕ, ki slika iz primitivne algebre na poljubno algebro, izomorfizem ali antiizomorfizem (glej inverzno preslikavo ϕ^{-1}), velja naslednja posledica.

Posledica 3.1 *Naj bo $\mathcal{A}$ primitivna Banachova algebra z neničelnim podstavkom in $\mathcal{B}$ polenostavna Banachova algebra. Če je $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska bijektivna linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost, potem je ϕ izomorfizem ali antiizomorfizem.*

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednji Aupetitov izrek [3], ki nam zagotavlja zveznost enotskih bijektivnih linearnih preslikav med polenostavnima Banachovima algebrama, ki ohranjajo obrnljivost. Podali ga bomo brez dokaza.

Izrek 3.3 *Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra, $\mathcal{B}$ polenostavna Banachova algebra in $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ taka surjektivna linearna preslikava, da za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja $r(\phi(a)) \leq r(a)$. Potem je preslikava ϕ zvezna.*

Opomba. Če sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ polenostavni Banachovi algebri ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska bijektivna linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost, potem za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja $r(\phi(a)) \leq r(a)$, saj je $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a)$. Torej je po izreku 3.3 preslikava ϕ zvezna.

Izrek 3.2 bomo dokazali s pomočjo dveh lem. Pri dokazu leme 3.1 bomo uporabili naslednji izrek, ki ga bomo podali brez dokaza.

Izrek 3.4 *Naj bo D območje v kompleksni ravnini, $\mathcal{A}$ Banachova algebra in $f : D \to \mathcal{A}$ analitična funkcija. Potem je množica $\{\lambda \in D : |\sigma(f(\lambda))| < \infty\}$ Borelova množica s kapaciteto 0 ali pa obstaja tako naravno število n in taka diskretna zaprta množica $E \subset D$, da je $|\sigma(f(\lambda))| = n$ za vsak $\lambda \in D \setminus E$ in $|\sigma(f(\lambda))| < n$ za vsak $\lambda \in E$.*

Opomba. Za definicijo kapacitete glej [19].

Lema 3.1 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ polenostavni Banachovi algebri ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska bijektivna linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost. Potem preslikava ϕ vsak element ranga ena algebre $\mathcal{A}$ preslika v element ranga ena algebre $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Naj bo $u \in \mathcal{A}$ element ranga ena. Dokazati želimo, da je tudi element $v = \phi(u) \in \mathcal{B}$ ranga ena. Vemo že, da je preslikava ϕ zvezna (glej opombo zgoraj). Označimo $L = \|\phi^{-1}\|$ (po izreku o odprti preslikavi je tudi ϕ^{-1} zvezna preslikava). Naj bo $M = (2L+1)^{-1}$. Najprej bomo dokazali, da za vsak $b \in \mathcal{B}$ z lastnostjo $\|b\| \leq M$ velja $|\sigma((1+b)v) \setminus \{0\}| \leq 1$.

Naj bo $b \in \mathcal{B}$ tak element, da je $\|b\| \leq M$. Ker je $L \geq 1$, je $M < 1$. Iz tega sledi, da je $\|b\| < 1$. Torej je $1 + b$ obrnljiv element. Naj bo

$$y = (1+b)^{-1} - 1 = -b + b^2 - b^3 + b^4 - \cdots = -b(1+b)^{-1}.$$

Označimo $x = \phi^{-1}(y)$. Potem je

$$\|x\| \leq L\|y\| = L\| - b(1+b)^{-1}\| \leq L\frac{\|b\|}{1-\|b\|} \leq L\frac{1}{2L} = \frac{1}{2}.$$

Torej je $1 + x$ obrnljiv element. Iz tega sledi, da je $1 + x - \lambda u = (1+x)(1-\lambda(1+x)^{-1}u)$ obrnljiv element za vsa kompleksna števila λ s kvečjemu eno izjemo, saj je u element ranga ena in je $|\sigma((1+x)^{-1}u) \setminus \{0\}| \leq 1$. Ker pa preslikava ϕ ohranja obrnljivost, je tudi $\phi(1+x-\lambda u) = 1+y-\lambda v = (1+y)(1-\lambda(1+b)v)$ obrnljiv element za vsa kompleksna števila λ s kvečjemu eno izjemo. S tem smo pokazali, da je v spektru elementa $(1+b)v$ kvečjemu eno neničelno kompleksno število. Na enak način bi pokazali, da je $|\sigma(v(1+b)) \setminus \{0\}| \leq 1$.

Naj bo b poljuben element algebre $\mathcal{B}$. Definirajmo preslikavo $f : \mathbb{C} \to \mathcal{B}$ s predpisom $f(\lambda) = (\lambda 1 + b)v$. Po zgornjem razmisleku za vsako kompleksno število λ, $|\lambda| > \frac{\|b\|}{M}$, velja $|\sigma(f(\lambda)) \setminus \{0\}| \leq 1$.

Predpostavimo, da v nima levega inverza. Ker za vsako kompleksno število λ z lastnostjo $|\lambda| > \frac{\|b\|}{M}$ velja $|\sigma(f(\lambda))| \leq 2$, je po izreku 3.4 $|\sigma(f(\lambda))| \leq 2$ za vsako kompleksno število λ. Torej je tudi $|\sigma(bv)| \leq 2$ $(\lambda = 0)$. Ker v nima levega inverza, tudi element bv nima levega inverza, iz česar sledi, da je $0 \in \sigma(bv)$ in zato je $|\sigma(bv) \setminus \{0\}| \leq 1$. S tem smo pokazali, da je v element ranga ena. Dokaz poteka podobno, če v nima desnega inverza (preslikavo f definiramo s predpisom $f(\lambda) = v(\lambda 1 + b)$).

Predpostavimo, da je v obrnljiv element. V tem primeru za vsako kompleksno število λ, $|\lambda| > \frac{\|b\|}{M}$, velja $|\sigma(f(\lambda))| = 1$. Torej je po izreku 3.4 $|\sigma(f(\lambda))| = 1$ za vsako kompleksno število λ in zato je $|\sigma(bv)| = 1$. Iz tega pa seveda sledi, da je $|\sigma(bv) \setminus \{0\}| \leq 1$. S tem je dokaz končan. □

Opomba. Če je v obrnljiv element, sta algebri $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ izomorfni algebri kompleksnih števil.

Lema 3.2 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ polenostavni Banachovi algebri ter $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enotska bijektivna linearna preslikava, ki ohranja obrnljivost. Potem za vsak $x \in \mathcal{A}$ in vsak $u \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A})$ veljata naslednji enakosti*

$$\tau(xu) = \tau(\phi(x)\phi(u)) \quad \text{in}$$
$$\tau(x^2u) = \tau(\phi(x)^2\phi(u)).$$

Dokaz. Naj bo $u \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A})$ in x poljuben element algebre $\mathcal{A}$. Označimo $D_x = \{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; |\lambda| < (\|\phi\|\|x\|)^{-1}\}$. Za vsak $\lambda \in D_x$ sta elementa $1 - \lambda x$ in $1 - \lambda\phi(x)$ obrnljiva (pri tem upoštevamo, da je $\|\phi\| \geq 1$). Definirajmo funkciji $F_x, G_x : D_x \to \mathbb{C}$ s predpisoma

$$F_x(\lambda) = \tau((1 - \lambda x)^{-1}u),$$
$$G_x(\lambda) = \tau((1 - \lambda\phi(x))^{-1}\phi(u)).$$

Ker je funkcija τ omejen linearen funkcional na minimalnih levih idealih (izrek 3.1), je

$$F_x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau(x^k u)\lambda^k,$$
$$G_x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau(\phi(x)^k\phi(u))\lambda^k.$$

Ker preslikava ϕ ohranja obrnljivost, velja

$$\begin{aligned} G_x(\lambda) = \omega \neq 0 &\Rightarrow (1 - \lambda\phi(x))^{-1}\phi(u) - \omega 1 \;\; \text{ni obrnljiv} \\ &\Rightarrow \phi(u) - \omega(1 - \lambda\phi(x)) \;\; \text{ni obrnljiv} \\ &\Rightarrow u - \omega(1 - \lambda x) \;\; \text{ni obrnljiv} \\ &\Rightarrow (1 - \lambda x)^{-1}u - \omega 1 \;\; \text{ni obrnljiv} \\ &\Rightarrow F_x(\lambda) = \omega. \end{aligned}$$

Če je torej $G_x(\lambda) \neq 0$, je $G_x(\lambda) = F_x(\lambda)$. Ker sta funkciji F_x in G_x analitični na območju D_x, iz zgornjega razmisleka sledi, da je bodisi $F_x \equiv G_x$ na D_x bodisi je $G_x \equiv 0$ na D_x.

Če primerjamo koeficiente pri razvoju funkcij F_x in G_x v vrsto, vidimo, da za vsak $0 \neq x \in \mathcal{A}$ velja $\tau(xu) = \tau(\phi(x)\phi(u))$ in $\tau(x^2u) = \tau(\phi(x)^2\phi(u))$ ali $\tau(\phi(x)\phi(u)) = 0$. Vse tri enakosti so avtomatično izpolnjene za $x = 0$.

Recimo, da za vsak $x \in \mathcal{A}$ velja $\tau(\phi(x)\phi(u)) = 0$. Iz tega sledi, da za vsak $x \in \mathcal{A}$ velja $\phi(u)\phi(x)\phi(u) = 0$. Ker je preslikava ϕ surjektivna in je $\mathcal{B}$ polpraalgebra, zgornja enakost implicira, da je $\phi(u) = 0$, kar pa ni mogoče, saj je $\phi(u)$ tudi element ranga ena. Torej obstaja tak $x_1 \in \mathcal{A}$, da je $\tau(\phi(x_1)\phi(u)) \neq 0$. Potem je $\tau(x_1 u) = \tau(\phi(x_1)\phi(u))$ in $\tau(x_1^2 u) = \tau(\phi(x_1)^2\phi(u))$. Recimo, da obstaja tak $x_2 \in \mathcal{A}$, da je $\tau(x_2^2 u) \neq \tau(\phi(x_2)^2\phi(u))$. Potem je $\tau(\phi(x_2)\phi(u)) = 0$ in zato za vsak $\mu \in \mathbb{C}$ velja $\tau(\phi(x_1 + \mu x_2)\phi(u)) \neq 0$. Iz tega sledi, da je $\tau((x_1 + \mu x_2)^2 u) = \tau(\phi(x_1 + \mu x_2)^2\phi(u))$. Torej za vsak $\mu \in \mathbb{C}$ velja

$$\mu\Big(\tau(x_1 x_2 u + x_2 x_1 u) - \tau(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(u) + \phi(x_2)\phi(x_1)\phi(u))\Big) \\ +\mu^2\Big(\tau(x_2^2 u) - \tau(\phi(x_2)^2\phi(u))\Big) = 0,$$

kar nasprotuje naši predpostavki, da je $\tau(x_2^2 u) \neq \tau(\phi(x_2)^2\phi(u))$. Torej je $\tau(x^2 u) = \tau(\phi(x)^2\phi(u))$ za vsak $x \in \mathcal{A}$. Na enak način pokažemo, da za vsak $x \in \mathcal{A}$ velja $\tau(xu) = \tau(\phi(x)\phi(u))$. □

Dokaz izreka 3.2. Naj bo $x \in \mathcal{A}$ in u poljuben element ranga ena algebre $\mathcal{A}$. Po prvi identiteti iz leme 3.2 je $\tau(x^2 u) = \tau(\phi(x^2)\phi(u))$. Če upoštevamo še, da je $\tau(x^2 u) = \tau(\phi(x)^2\phi(u))$ (druga identiteta v lemi 3.2), je

$$\tau((\phi(x^2) - \phi(x)^2)\phi(u)) = 0.$$

Naj bo $x_0 = \phi^{-1}(\phi(x^2) - \phi(x)^2)$. Potem je $\tau(x_0 u) = \tau(\phi(x_0)\phi(u)) = 0$ za vsak $u \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A})$. Recimo, da obstaja tak $u_0 \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A})$, da je $x_0 u_0 \neq 0$. Potem zaradi polenostavnosti algebre $\mathcal{A}$ obstaja tak $x_1 \in \mathcal{A}$, da je $\sigma(x_0 u_0 x_1) \neq \{0\}$, kar je v protislovju s $\tau(x_0 u_0 x_1) = 0$. Torej je $x_0 u = 0$ za vsak element $u \in \mathcal{A}$ ranga ena, iz česar sledi, da je $x_0 \cdot \operatorname{soc}(\mathcal{A}) = 0$. S tem je dokaz izreka 3.2 končan. □

3.2 Aditivni ohranjevalci obrnljivosti in singularnosti

Naj bo $M_n(\mathbb{F})$ algebra $n \times n$ matrik nad poljem $\mathbb{F}$. Matrika $A \in M_n(\mathbb{F})$ je *singularna*, če je $\det(A) = 0$. Preslikava $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ ***ohranja singularnost***, če je $\phi(A)$ singularna matrika za vsako singularno matriko $A \in M_n(\mathbb{F})$. Naj bosta $S, T \in M_n(\mathbb{F})$ obrnljivi matriki. Potem je preslikava $A \mapsto SAT$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, bijektivna linearna preslikava na $M_n(\mathbb{F})$, ki ohranja obrnljivost in singularnost. Prav tako je preslikava, ki vsaki matriki $A \in M_n(\mathbb{F})$ priredi njeno transponirano matriko A^t, bijektivna linearna preslikava na $M_n(\mathbb{F})$, ki ohranja obrnljivost in singularnost.

Naj bo $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ neničelni endomorfizem polja $\mathbb{F}$. Definirajmo preslikavo $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ s predpisom

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \stackrel{\phi}{\mapsto}$$

$$[f(a_{ij})] = \begin{bmatrix} f(a_{11}) & f(a_{12}) & \dots & f(a_{1n}) \\ f(a_{21}) & f(a_{22}) & \dots & f(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a_{n1}) & f(a_{n2}) & \dots & f(a_{nn}) \end{bmatrix},$$

$[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Preslikava ϕ je injektivna aditivna preslikava, ki ohranja obrnljivost in singularnost, vendar v splošnem ni surjektivna. Je pa ***skoraj surjektivna***, kar pomeni, da je linearna lupina slike preslikave ϕ cela algebra $M_n(\mathbb{F})$.

Izkaže se, da je vsaka aditivna skoraj surjektivna preslikava na $M_n(\mathbb{F})$, ki ohranja singularnost, kompozitum zgoraj opisanih preslikav. To pa ne velja za aditivne skoraj surjektivne preslikave na $M_n(\mathbb{F})$, ki ohranjajo obrnljivost (glej primer 3.3).

Izrek 3.5 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje s karakteristiko nič in $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ aditivna skoraj surjektivna preslikava, ki ohranja singularnost. Potem obstajata taki obrnljivi matriki $S, T \in M_n(\mathbb{F})$ in tak endomorfizem f polja $\mathbb{F}$, da je*

$$\phi([a_{ij}]) = S[f(a_{ij})]T, \quad [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}), \tag{3.1}$$

ali

$$\phi([a_{ij}]) = S[f(a_{ij})]^t T, \quad [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}). \tag{3.2}$$

Opomba. Obstaja aditivna injektivna preslikava $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, ki vsako matriko preslika v strogo zgoraj trikotno matriko. Taka preslikava seveda ohranja singularnost, vendar ni niti oblike (3.1) niti oblike (3.2).

Posledica 3.2 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje s karakteristiko nič in $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ aditivna surjektivna preslikava, ki ohranja obrnljivost. Potem obstajata taki obrnljivi matriki $S, T \in M_n(\mathbb{F})$ in tak avtomorfizem f polja $\mathbb{F}$, da je ϕ oblike (3.1) ali (3.2).*

Naslednji primer bo pokazal, da obstajajo aditivne skoraj surjektivne preslikave na $M_n(\mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ polje realnih ali kompleksnih števil, ki ohranjajo obrnljivost in niso niti oblike (3.1) niti oblike (3.2).

Primer 3.3 Naj bo $\mathbb{F}$ polje realnih ali kompleksnih števil. V obeh primerih lahko najdemo tako podpolje $K \subset \mathbb{F}$ z enako kardinalnostjo kot polje $\mathbb{F}$, da obstaja element $t \in \mathbb{F}$, ki je transcedenten nad K. Polji $\mathbb{F}$ in K bomo obravnavali kot vektorska prostora nad poljem racionalnih števil $\mathbb{Q}$. Polje $\mathbb{F}$ lahko zapišemo kot direktno vsoto

$$\mathbb{F} = K \oplus tK \oplus t^2K \oplus t^3K \oplus t^4K \oplus V,$$

kjer je V komplement podprostora $K \oplus tK \oplus t^2K \oplus t^3K \oplus t^4K$ v $\mathbb{F}$. Če sta U in W vektorska prostora na poljem racionalnih števil, ki imata enako kardinalnost kot $\mathbb{F}$, potem obstaja injektivna aditivna preslikava iz prostora U v prostor W (glej [1]). Obstaja torej injektivna aditivna preslikava $f : M_2(\mathbb{F}) \to K$. Naj bo $A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{F})$. Potem je $a_{11} = k_0 + tk_1 + t^2k_2 + t^3k_3 + t^4k_4 + v$ za neke skalarje $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 \in K$ in nek $v \in V$. Definirajmo preslikavo $\phi : M_2(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$ s predpisom

$$\phi(A) = f(A)I + \begin{bmatrix} tk_1 & t^2k_2 \\ t^3k_3 & t^4k_4 \end{bmatrix}.$$

Najprej bomo pokazali, da preslikava ϕ ohranja obrnljivost. Pravzaprav preslikava ϕ preslika vsako neničelno matriko v obrnljivo matriko. Determinanta slike matrike A je enaka

$$\det(\phi(A)) = f(A)^2 + t(f(A)k_1) + t^4(f(A)k_4) + t^5(k_1k_4 - k_2k_3).$$

Če je $\phi(A)$ singularna matrika, potem mora biti ta determinanta enaka nič. Predpostavimo torej, da je $\det(\phi(A)) = 0$. Ker je število t transcedentno nad K, mora biti $f(A) = 0$. Ker pa je preslikava f injektivna, je to mogoče le v primeru, ko je $A = 0$.

Pokazati še moramo, da je preslikava ϕ skoraj surjektivna. Naj bo $0 \neq \lambda \in t^2K$ in naj bosta $A = [a_{ij}]$ ter $B = [b_{ij}]$ dve taki različni matriki, da je $\lambda = a_{11} = b_{11}$. Potem je $\phi(A) = f(A)I + \lambda E_{12}$ in $\phi(B) = f(B)I + \lambda E_{12}$. Ker je $f(A) \neq f(B)$, matrična enota E_{12} pripada linearni lupini slike preslikave ϕ. Tukaj smo izbrali matriko E_{12} zaradi enostavnosti. Seveda pa enako velja tudi za vse ostale matrične enote E_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$, iz česar sledi, da je preslikava ϕ skoraj surjektivna.

Pri dokazu izreka 3.5 in posledice 3.2 bomo uporabili naslednje tri leme.

Lema 3.3 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje ter m in n naravni števili, $m > n$. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{F})$ take matrike, da za vsako pravo podmnožico $J \subset \{1, \ldots, m\}$ velja*

$$\det\left(\sum_{j \in J} A_j\right) = 0.$$

Potem je

$$\det(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) = 0.$$

Dokaz. Definirajmo polinom p s predpisom

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \det(x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m).$$

Polinom p je ničelni polinom ali homogen polinom stopnje n. Vemo, da je

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = 0, \tag{3.3}$$

če so vsi skalarji $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ enaki 0 ali 1 in je vsaj en skalar enak nič. Pokazati želimo, da je

$$p(1, 1, \ldots, 1) = 0.$$

Pravzaprav želimo pokazati, da je vsota vseh koeficientov polinoma p enaka nič. Naj bo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ (glej 3.3). Potem mora biti koeficient pred x_1^n nič. Na enak način pokažemo, da mora biti koeficient pred x_j^n, $j = 2, \ldots, m$, enak nič. Naj bosta sedaj $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ in $\lambda_j = 0$ za $j > 2$. Če upoštevamo, da sta koeficienta pred x_1^n in x_2^n enaka nič, potem mora biti vsota koeficientov pred $x_1^{n-1}x_2, x_1^{n-2}x_2^2, \ldots, x_1x_2^{n-1}$ tudi enaka nič. Če namesto λ_1 in λ_2 vzamemo λ_i in λ_j, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$, pridemo do enakega zaključka. Na naslednjem koraku obravnavamo enakost (3.3) s tremi neničelnimi koeficienti ($\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k = 1$). Z nadaljevanjem tega postopka pridemo do želenega zaključka. □

Lema 3.4 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje s karakteristiko nič, n naravno število in $\mathcal{V}$ aditivna podgrupa prostora $M_n(\mathbb{F})$, ki vsebuje same singularne matrike. Potem je linearna lupina množice $\mathcal{V}$ pravi podprostor prostora $M_n(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Naj bo A matrika iz množice $\mathcal{V}$ z največjim rangom, recimo $\mathrm{rank}(A) = k$. Seveda je $k < n$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $0 < k$. Če množico $\mathcal{V}$ nadomestimo z množico $S\mathcal{V}T$, kjer sta S in T obrnljivi matriki (to seveda ne vpliva niti na predpostavke niti na zaključek leme 3.4), lahko predpostavimo, da je matrika A oblike

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer I označuje $k \times k$ identično matriko.

V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko glede na zgornjo dekompozicijo matrike A vsako matriko $B \in \mathcal{V}$ zapišemo kot

$$B = \begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix},$$

kjer $*$ označuje neko matriko ustrezne velikosti. Predpostavimo nasprotno, da obstaja matrika $C = [c_{ij}] \in \mathcal{V}$ z neničelnim koeficientom v spodnjem desnem kotu, recimo $c_{pq} \neq 0$. Naj bo D $(k+1) \times (k+1)$ podmatrika matrike $mA + C$, $m \in \mathbb{N}$, z vrsticami $1, \ldots, k, p$ in stolpci $1, \ldots, k, q$. Njena determinanta je polinom, odvisen od naravnega števila m, stopnje k in z vodilnim koeficientom c_{pq}. To je seveda neničelni polinom. Ker je karakteristika polja $\mathbb{F}$ nič, lahko izberemo tako naravno število m, da bo vrednost tega polinoma v m različna od nič. Iz tega sledi, da je matrika $mA + C$ ranga vsaj $k+1$, kar pa je protislovje. S tem je dokaz leme končan. □

Dokaz naslednje leme je enak zadnjemu delu dokaza leme 3.4.

Lema 3.5 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje s karakteristiko nič, n in k naravni števili, $k < n$, in $A \in M_n(\mathbb{F})$ taka matrika, da je $mP + A$ singularna matrika za vsako naravno število m, kjer je P matrika oblike*

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in I označuje $k \times k$ identično matriko. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

pripadajoča bločna oblika matrike A. Potem je $\det(A_4) = 0$.

Pri dokazu izreka 3.5 bomo uporabili še naslednji izrek, ki je poseben primer trditve, ki jo je leta 2002 dokazal Kuzma [38].

Izrek 3.6 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje s karakteristiko nič in $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ aditivna skoraj surjektivna preslikava, ki vsako matriko ranga ena preslika v nič ali v matriko ranga ena. Potem obstajata taki obrnljivi matriki $S, T \in M_n(\mathbb{F})$ in tak endomorfizem f polja $\mathbb{F}$, da je*

$$\phi([a_{ij}]) = S[f(a_{ij})]T$$

za vsako matriko $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ranga ena, ali

$$\phi([a_{ij}]) = S[f(a_{ij})]^t T$$

za vsako matriko $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ranga ena.

Dokaz izreka 3.5. Najprej bomo pokazali, da preslikava ϕ vsako matriko ranga ena preslika v nič ali v matriko ranga ena. Če je $n = 2$, to seveda velja. Naj bo torej $n \geq 3$ in predpostavimo, da obstaja matrika ranga ena, ki se preslika v matriko ranga k, $k > 1$. Če preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno preslikavo oblike $A \mapsto SAT$, kjer sta S in T obrnljivi matriki, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je

$$\phi(E_{11}) = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{kk}.$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $(n-k) \times (n-k)$ spodnji desni kot vsake matrike $\phi(A)$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, singularen, kar skupaj z lemo 3.4 nasprotuje skoraj surjektivnosti preslikave ϕ.

Predpostavimo najprej, da je rank $(A) < n-1$. Potem je $mE_{11}+A$ singularna matrika za vsako naravno število m. Ker pa preslikava ϕ ohranja singularnost, je tudi $m(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{kk}) + \phi(A)$ singularna matrika za vsak $m \in \mathbb{N}$. Če uporabimo še lemo 3.5, smo prišli do želenega zaključka.

Naj bo sedaj A matrika ranga $n-1$. Potem je $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$, kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ matrike ranga ena. Slika vsote matrik poljubne prave podmnožice množice $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ ima singularen $(n-k) \times (n-k)$ spodnji desni kot. Torej ima po lemi 3.3 tudi matrika $\phi(A)$ singularen $(n-k) \times (n-k)$ spodnji desni kot. Enako pokažemo, da to velja tudi za vsako matriko A ranga n. S tem smo torej dokazali, da ϕ vsako matriko ranga ena preslika v nič ali v matriko ranga ena. Po izreku 3.6 obstajata taki obrnljivi matriki $S, T \in M_n(\mathbb{F})$ in tak endomorfizem $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, da je

$$\phi([a_{ij}]) = S[f(a_{ij})]T$$

za vsako matriko $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ranga ena, ali

$$\phi([a_{ij}]) = S[f(a_{ij})]^t T$$

za vsako matriko $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ranga ena. Ker je preslikava ϕ aditivna, velja ena od zgornjih dveh možnosti za vsako matriko $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. S tem je dokaz izreka 3.5 končan. $\square$

Dokaz posledice 3.2. Če je preslikava ϕ bijektivna, potem lahko uporabimo izrek 3.5 za inverzno preslikavo preslikave ϕ in posledica je dokazana. Torej zadošča pokazati, da je ϕ injektivna preslikava.

Naj bo $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ aditivna surjektivna preslikava, ki ohranja obrnljivost, in predpostavimo, da obstaja taka neničelna matrika $C \in M_n(\mathbb{F})$, da je $\phi(C) = 0$. Naj bo $k = \text{rank}\,(C)$. Če preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno preslikavo oblike $A \mapsto SAT$, kjer sta S in T obrnljivi matriki, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $C = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{kk}$ in $\phi(I) = I$. Ker je preslikava ϕ surjektivna, lahko izberemo take matrike $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, da je $\phi(A_j) = E_{jj}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Naj bo

$$A_n = E_{k+1,k+1} + E_{k+2,k+2} + \cdots + E_{nn} - A_1 - A_2 - \cdots - A_{n-1}. \quad (3.4)$$

Seveda je $\phi(A_n) = E_{nn}$. Naj bo J prava podmnožica množice $\{1, \ldots, n\}$ ter $A_J = \sum_{j \in J} A_j$. Za vsako množico J z B_J označimo

$(n-k)\times(n-k)$ spodnji desni kot matrike A_J. Matrika $mC+A_J$, $m\in\mathbb{N}$, se preslika v singularno matriko in mora biti zato tudi sama singularna. Iz tega sledi po lemi 3.5, da je $\det(B_J)=0$ za vsako množico J. Potem pa je po lemi 3.3 tudi $\det(B_{\{1,\ldots,n\}})=0$. Po drugi strani pa je spodnji desni kot matrike $A_{\{1,\ldots,n\}}$ enak $(n-k)\times(n-k)$ identični matriki (glej (3.4)). S tem smo prišli do protislovja in dokaz posledice 3.2 je končan. $\square$

4 Ohranjevalci komutativnosti

V zadnjih nekaj desetletjih je bilo odkritih veliko rezultatov o linearnih ohranjevalcih na matričnih algebrah kot tudi na bolj splošnih kolobarjih in operatorskih algebrah (glej [41], [48] in [53]). Poleg tega je na matričnih algebrah postal zanimiv tudi splošnejši problem karakterizacije aditivnih ohranjevalcev in soroden problem karakterizacije multiplikativnih ohranjevalcev. Zanimivo pa je, da lahko v nekaterih primerih dobimo lepe strukturne rezultate za ohranjevalce brez algebraičnih predpostavk kot so linearnost, aditivnost in multiplikativnost. Baribeau in Ransford [6] sta bila ena izmed prvih matematikov, ki sta se ukvarjala z nelinearnimi ohranjevalci. Proučevala sta ohranjevalce spektra na matričnih algebrah.

Problem karakterizacije linearnih ohranjevalcev komutativnosti na matričnih algebrah kot tudi na splošnejših operatorskih algebrah je zagotovo eden izmed najbolj raziskanih problemov na področju linearnih ohranjevalcev (glej [8], [10], [15], [50] in [61]). Problem pa postane veliko bolj zapleten in zato tudi bolj zanimiv, če odstranimo predpostavko o linearnosti. V tem poglavju bomo obravnavali nelinearne ohranjevalce komutativnosti na algebri $M_n(\mathbb{R})$. Najprej bomo posvetili pozornost preslikavam, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri, nato pa preslikavam, ki ohranjajo komutativnost samo v eni smeri.

4.1 Ohranjanje komutativnosti v obe smeri

Preslikava $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ ***ohranja komutativnost***, če za poljubni matriki $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, ki komutirata, velja, da tudi njuni sliki $\phi(A)$ in $\phi(B)$ komutirata. Če je preslikava ϕ bijektivna ter ϕ in ϕ^{-1} ohranjata komutativnost, potem pravimo, da preslikava ϕ ***ohranja komutativnost v obe smeri***. Šemrl je v članku [58] karakteriziral zvezne bijektivne nelinearne preslikave na $M_n(\mathbb{C})$,

$n \geq 3$, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri. Naravno vprašanje, ki si ga lahko ob tem rezultatu zastavimo, pa je, ali lahko karakteriziramo tudi zvezne bijektivne preslikave na $M_n(\mathbb{R})$, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri. Na to vprašanje odgovarja izrek 4.1 pritrdilno za $n > 3$.

Opomba. Šemrl je pokazal, da brez predpostavke o zveznosti izrek [58, Theorem 2.2] ne velja. Podal je primer bijektivnih preslikav na kompleksnih matrikah, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri in niso standardne oblike. Še več, pokazal je, da je vsaka bijektivna preslikava na $M_n(\mathbb{C})$, ki ohranja komutativnost v obe smeri, lepe oblike na množici vseh matrik, ki imajo v jordanski kanonični formi bloke velikosti 1×1 ali 2×2, izven te množice pa je lahko preslikava zelo grde oblike.

Naj bo $T \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika. Podobnostna preslikava $A \mapsto TAT^{-1}$ je primer linearne bijektivne preslikave na $M_n(\mathbb{R})$, ki ohranja komutativnost v obe smeri. Tak primer je tudi preslikava $A \mapsto A^t$, ki vsaki matriki priredi njeno transponirano matriko. Poleg teh dveh pa obstaja še veliko neaditivnih preslikav $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, ki ohranjajo komutativnost. Če sta A in B poljubni realni matriki, ki komutirata, ter p in q poljubna realna polinoma, potem tudi matriki $p(A)$ in $q(B)$ komutirata. Če torej vsaki matriki $A \in M_n(\mathbb{R})$ priredimo polinom p_A z realnimi koeficienti, potem preslikava $A \mapsto p_A(A)$ ohranja komutativnost. Taki preslikavi bomo rekli ***lokalno polinomska preslikava***. V splošnem take preslikave niso niti bijektivne niti ne ohranjajo komutativnost v obe smeri. Če pa je preslikava ϕ bijektivna in če so polinomi p_A, $A \in M_n(\mathbb{R})$, taki, da za vsak $A \in M_n(\mathbb{R})$ obstaja tak polinom q_A z realnimi koeficienti, da je $q_A(p_A(A)) = A$ (oz. preslikava ϕ je bijektivna in njen inverz je prav tako lokalno polinomska preslikava), potem ϕ ohranja komutativnost v obe smeri. Taki preslikavi bomo rekli ***regularna lokalno polinomska preslikava***.

Naslednji izrek nam pove, da je vsaka zvezna bijektivna preslikava na $M_n(\mathbb{R})$, $n > 3$, ki ohranja komutativnost v obe smeri, kompozitum zgoraj opisanih preslikav.

Izrek 4.1 *Naj bo $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $n > 3$, zvezna bijektivna preslikava, ki ohranja komutativnost v obe smeri. Potem obstaja* *taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{R})$ in taka regularna lokalno polinomska preslikava $A \mapsto p_A(A)$, da je*

$$\phi(A) = Tp_A(A)T^{-1}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}),$$

ali

$$\phi(A) = Tp_A(A^t)T^{-1}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Na koncu tega razdelka bomo tudi pokazali, da za $n = 3$ izrek 4.1 ne velja. Še več, opisali bomo vse bijektivne preslikave na $M_3(\mathbb{R})$, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri.

V nadaljevanju bomo predstavili *realno jordansko kanonično formo*, ki jo bomo potrebovali pri dokazu zgornjega izreka.

Realna jordanska kanonična forma

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Potem se vse nerealne lastne vrednosti matrike A pojavljajo v konjugiranih parih. Še več, če je A realna matrika, potem je $\operatorname{rank}(A - \lambda I)^k = \operatorname{rank}(\overline{A - \lambda I})^k = \operatorname{rank}(A - \overline{\lambda} I)^k$ za vse $\lambda \in \mathbb{C}$ in vsak $k = 1, 2, \ldots$ Torej je struktura jordanskih blokov glede na lastno vrednost λ enaka strukturi jordanskih blokov glede na konjugirano lastno vrednost $\overline{\lambda}$. Iz tega sledi, da se vsi jordanski bloki vseh velikosti (ne samo 1×1 bloki), ki pripadajo nerealnim lastnim vrednostim, pojavljajo v konjugiranih parih. Na primer, če je λ nerealna lastna vrednost realne matrike A in če se blok $J_2(\lambda)$ pojavi m-krat v jordanski kanonični formi matrike A (tukaj $J_2(\lambda)$ označuje 2×2 jordanski blok glede na lastno vrednost λ), potem se v tej formi tudi blok $J_2(\overline{\lambda})$ pojavi m-krat. Matrika

$$\begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\overline{\lambda}) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

je podobna matriki

$$\begin{bmatrix} D(\lambda) & I \\ 0 & D(\lambda) \end{bmatrix},$$

kjer je

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

in I označuje 2×2 identično matriko. V splošnem je vsaka matrika oblike

$$\begin{bmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & J_k(\overline{\lambda}) \end{bmatrix} \in M_{2k}(\mathbb{C}) \tag{4.2}$$

podobna matriki

$$\begin{bmatrix} D(\lambda) & I & \dots & 0 \\ 0 & D(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ 0 & 0 & \dots & D(\lambda)) \end{bmatrix} \in M_{2k}(\mathbb{C}).$$

Vsak 2×2 diagonalen blok $D(\lambda)$ pa je podoben 2×2 realni matriki

$$SD(\lambda)S^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = C(a,b),$$

kjer je $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ in $S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Torej je vsaka matrika oblike (4.1) z nerealno lastno vrednostjo λ podobna 4×4 realni matriki

$$C_2(a,b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I \\ 0 & C(a,b) \end{bmatrix}.$$

V splošnem je vsaka matrika oblike (4.2) z nerealno lastno vrednostjo λ podobna $2k \times 2k$ realni matriki

$$C_k(a,b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I & \dots & 0 \\ 0 & C(a,b) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ 0 & 0 & \dots & C(a,b) \end{bmatrix}.$$

To nas pripelje do ***realne jordanske kanonične forme***.

Izrek 4.2 *Vsaka realna matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je podobna bločno diagonalni matriki oblike*

$$\begin{bmatrix} C_{n_1}(a_1,b_1) & & & & & & \\ & C_{n_2}(a_2,b_2) & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & C_{n_k}(a_k,b_k) & & & \\ & & & & J_{m_1}(c_1) & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{m_h}(c_h) \end{bmatrix},$$

kjer so a_j in b_j realna števila, $\lambda_j = a_j + ib_j$ nerealne lastne vrednosti matrike A za $j = 1, 2, \ldots, k$, $c_1, \ldots, c_h$ so realne lastne vrednosti matrike A in $J_{m_1}(c_1), \ldots, J_{m_h}(c_h)$ jordanski bloki. Vsaka matrika $C_{n_j}(a_j, b_j) \in M_{2n_j}(\mathbb{R})$ je oblike

$$C_{n_j}(a_j,b_j) = \begin{bmatrix} C(a_j,b_j) & I & \ldots & 0 \\ 0 & C(a_j,b_j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ 0 & 0 & \ldots & C(a_j,b_j) \end{bmatrix}$$

in pripada paru jordanskih blokov $J_{n_j}(\lambda_j), J_{n_j}(\overline{\lambda_j}) \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ v jordanski kanonični formi matrike A. Še več, vedno obstaja taka obrnljiva realna matrika S, da je matrika SAS^{-1} enaka zgoraj opisani realni jordanski kanonični formi.

Realna matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je ***diagonalizabilna***, če ima vsaka lastna vrednost matrike A algebraično stopnjo ena. Torej je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizabilna natanko tedaj, ko je $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = m_1 = m_2 = \cdots = m_h = 1$, kjer so $n_1, n_2, \ldots, n_k, m_1, m_2, \ldots, m_h$ naravna števila iz zgornjega izreka.

Naj bo $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{R})$. ***Komutant*** $\mathcal{S}'$ je prostor vseh matrik iz $M_n(\mathbb{R})$, ki komutirajo z vsemi matrikami iz množice $\mathcal{S}$. Če je $\mathcal{S} = \{A\}$, bomo pisali krajše $A' = \{A\}'$.

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Potem je $A' = M_n(\mathbb{R})$ natanko tedaj, ko je A skalarna matrika. Torej je $B' \subseteq (aI)'$ za vsako matriko $B \in M_n(\mathbb{R})$

in vsako realno število a. Neskalarna matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je ***maksimalna***, če so skalarne matrike iz $M_n(\mathbb{R})$ edine matrike, ki imajo strogo večji komutant od komutanta matrike A. Množico vseh neskalarnih maksimalnih matrik bomo označevali z $\mathcal{M}$. Matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je ***minimalna***, če ne obstaja taka matrika $B \in M_n(\mathbb{R})$, da je $B' \subseteq A'$ in $B' \neq A'$.

Opomba. Naj bo $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ bijektivna preslikava, ki ohranja komutativnost v obe smeri. Potem je neskalarna matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ maksimalna natanko tedaj, ko je tudi matrika $\phi(A)$ maksimalna. In podobno, matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ je minimalna natanko tedaj, ko je matrika $\phi(A)$ minimalna.

Lema 4.1 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ neskalarna matrika. Potem je A maksimalna matrika natanko tedaj, ko je A bodisi diagonalizabilna z natanko dvema lastnima vrednostma bodisi je $A = aI + N$ za neko realno število a in neko matriko $N \neq 0$, katere kvadrat je enak nič.*

Dokaz. Naj bo A diagonalizabilna matrika z natanko dvema realnima lastnima vrednostma in $B \in M_n(\mathbb{R})$ matrika z lastnostjo $A' \subseteq B'$ in $A' \neq B'$. Potem lahko predpostavimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} aI & 0 \\ 0 & bI \end{bmatrix},$$

kjer je $a \neq b$ (če je potrebno, matriko A nadomestimo s podobno matriko). Komutant matrike A je množica vseh matrik oblike

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix},$$

kjer sta X in Y poljubni kvadratni matriki ustreznih velikosti. Ker je $A' \subseteq B'$, vsaka taka matrika komutira tudi z B, iz česar sledi, da je

$$B = \begin{bmatrix} cI & 0 \\ 0 & dI \end{bmatrix}$$

za neki realni števili c in d. Ker je $A' \neq B'$, je $c = d$ in je B skalarna matrika.

Naj bo sedaj A diagonalizabilna matrika z natanko dvema nerealnima lastnima vrednostma (to seveda ni mogoče, če je n liho število). Potem lahko predpostavimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} C(a,b) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C(a,b) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C(a,b) \end{bmatrix}$$

za neki realni števili a in $b \neq 0$. Komutant matrike A je množica matrik oblike

$$\begin{bmatrix} C(a_{11},b_{11}) & C(a_{12},b_{12}) & \dots & C(a_{1k},b_{1k}) \\ C(a_{21},b_{21}) & C(a_{22},b_{22}) & \dots & C(a_{2k},b_{2k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(a_{k1},b_{k1}) & C(a_{k2},b_{k2}) & \dots & C(a_{kk},b_{kk}) \end{bmatrix},$$

kjer je $k = \frac{n}{2}$ in so $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kk}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{kk}$ realna števila. Naj bo $B \in M_n(\mathbb{R})$ taka matrika, da je $A' \subseteq B'$ in $A' \neq B'$. Potem je

$$B = \begin{bmatrix} C(c,d) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C(c,d) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C(c,d) \end{bmatrix}$$

za neki realni števili c in d. Če je $d \neq 0$, je $A' = B'$. Torej je B skalarna matrika.

Naj bo A matrika oblike $A = aI + N$, kjer je a neko realno število in $N \neq 0$ matrika z lastnostjo $N^2 = 0$. Naj bo nadalje $B \in M_n(\mathbb{R})$ taka matrika, da je $A' \subseteq B'$ in $A' \neq B'$. Potem lahko predpostavimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} aI & I & 0 \\ 0 & aI & 0 \\ 0 & 0 & aI \end{bmatrix}$$

za neko realno število a (zadnja vrstica in zadnji stolpec v matriki lahko manjkata). Komutant matrike A je enak množici vseh matrik oblike

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & X & 0 \\ 0 & U & V \end{bmatrix},$$

kjer so X, Y, Z, U, V poljubne matrike ustreznih velikosti. Ker vsaka taka matrika komutira tudi z B, je

$$B = \begin{bmatrix} bI & cI & 0 \\ 0 & bI & 0 \\ 0 & 0 & bI \end{bmatrix}$$

za neka skalarja b in $c \neq 0$ ali pa je $B = bI$. Ker pa je $A' \neq B'$, velja druga možnost in je B skalarna matrika.

V nadaljevanju moramo pokazati še nasprotno implikacijo: če je A maksimalna matrika, potem je A bodisi diagonalizabilna z natanko dvema lastnima vrednostma bodisi je $A = aI + N$ za neko realno število a in neko matriko $N \neq 0$, katere kvadrat je enak nič.

Predpostavimo, da matrika A ni diagonalizabilna z natanko dvema lastnima vrednostma in ni oblike $A = aI + N$ za neko realno število a in neko matriko $N \neq 0$, $N^2 = 0$. Začnimo z možnostjo, da ima A dve nerealni in eno realno lastno vrednost. Potem je podobna matriki

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

kjer imata matriki A_1 in A_2 paroma različna spektra. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je A enaka tej bločno diagonalni matriki. Potem pa je

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

neskalarna matrika, katere komutant je večji od komutanta matrike A. Na enak način pokažemo, da A ni maksimalna matrika, če ima A štiri različne nerealne lastne vrednosti.

Recimo, da ima matrika A tri realne lastne vrednosti ali štiri lastne vrednosti z vsaj dvema realnima ali več kot štiri lastne vrednosti. Potem je podobna matriki

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

kjer imajo matrike A_1, A_2 in A_3 paroma različne spektre. Ponovno lahko predpostavimo, da je že matrika A enaka tej bločno diagonalni matriki. Potem pa je

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

neskalarna matrika, katere komutant je večji od komutanta matrike A.

Če ima matrika A dve realni lastni vrednosti in ni diagonalizabilna, potem lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} aI + M & 0 \\ 0 & bI + N \end{bmatrix},$$

kjer je $a \neq b$ in sta M in N nilpotentni matriki (vsaj ena od njiju je neničelna). Neskalarna matrika

$$B = \begin{bmatrix} aI & 0 \\ 0 & bI \end{bmatrix}$$

ima večji komutant kot matrika A. Iz tega sledi, da A ni maksimalna matrika.

Recimo, da ima A dve nerealni lastni vrednosti in ni diagonalizabilna. Potem lahko predpostavimo, da je oblike

$$A = \begin{bmatrix} C_{n_1}(a,b) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{n_2}(a,b) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n_k}(a,b) \end{bmatrix},$$

kjer so $n_1, n_2, \ldots, n_k$ naravna števila, ki niso vsa enaka ena, $2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = n$ ter sta a in $b \neq 0$ realni števili. Neskalarna matrika

$$B = \begin{bmatrix} C(a,b) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C(a,b) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C(a,b) \end{bmatrix}$$

ima večji komutant od komutanta matrike A. Torej A ni maksimalna matrika.

Nazadnje naj bo A oblike $A = aI + N$ za neko realno število a in neko nilpotentno matriko N, $N^2 \neq 0$. S pomočjo jordanske kanonične forme ni težko preveriti, da je komutant matrike A prava podmnožica komutanta neskalarne matrike $aI + N^2$. S tem je dokaz leme končan. $\square$

Lema 4.2 *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Potem je A minimalna matrika natanko tedaj, ko so $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, iz izreka 4.2 različne nerealne lastne vrednosti matrike A in $c_1, \ldots, c_h$ iz izreka 4.2 različne realne lastne vrednosti matrike A.*

Opomba. Realna matrika A je torej minimalna natanko tedaj, ko imajo vse lastne vrednosti matrike A geometrijsko stopnjo ena.

Dokaz. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, ki je podobna bločno diagonalni matriki oblike

$$\begin{aligned} D = \operatorname{diag}\,(&C_{n_1}(a_1, b_1), C_{n_2}(a_2, b_2), \ldots, C_{n_k}(a_k, b_k), \\ &J_{m_1}(c_1), \ldots, J_{m_h}(c_h)), \end{aligned}$$

kjer so $a_j + ib_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, različne nerealne lastne vrednosti matrike A in $c_1, \ldots, c_h$ različne realne lastne vrednosti matrike A. Naj bo $B \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, ki komutira z D. Če zapišemo matriko B bločno kot $B = [B_{ij}]$ (glede na dekompozicijo matrike D), potem ni težko videti, da morajo biti vsi bloki, ki ležijo izven diagonale, enaki nič, saj so vse realne in nerealne lastne vrednosti matrike D med seboj različne. Torej je B bločno diagonalna matrika oblike

$$B = \operatorname{diag}\,(B_1, B_2, \ldots, B_k, \overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_h), \tag{4.3}$$

kjer so $B_i \in M_{2n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1,2,\ldots,k$, in $\overline{B}_j \in M_{m_j}(\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,h$. Iz komutativnosti sledi, da je $B_i C_{n_i}(a_i,b_i) = C_{n_i}(a_i,b_i)B_i$ za vse $i = 1,2,\ldots,k$. Z računom lahko pokažemo, da mora biti potem vsak blok B_i oblike

$$B_i = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} & C_2^{(i)} & \ldots & C_{n_i}^{(i)} \\ 0 & C_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_2^{(i)} \\ 0 & 0 & \ldots & C_1^{(i)} \end{bmatrix},$$

kjer so $C_j^{(i)} = C(\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)})$, $j = 1,2,\ldots,n_i$. Ker B komutira z D, velja tudi $\overline{B}_i J_{m_i}(c_i) = J_{m_i}(c_i)\overline{B}_i$ za vse $i = 1,\ldots,h$. Iz tega sledi, da so bloki $\overline{B}_i$ zgoraj trikotne matrike oblike

$$\overline{B}_i = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(i)} & \gamma_2^{(i)} & \ldots & \gamma_{m_i}^{(i)} \\ 0 & \gamma_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \gamma_2^{(i)} \\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_1^{(i)} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

kjer so $\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \ldots, \gamma_{m_i}^{(i)}$ realna števila.

Naj bo sedaj $B \in M_n(\mathbb{R})$ taka matrika, da je $B' \subseteq A'$. Pokazati moramo, da je $B' = A'$. Ker je $B \in B'$, matriki A in B komutirata. Potem pa je $B = S\overline{B}S^{-1}$, kjer je $\overline{B}$ matrika oblike (4.3) in S taka obrnljiva realna matrika, da je $A = SDS^{-1}$. Naj bo $C \in A'$. Potem je $C = S\overline{C}S^{-1}$, kjer je $\overline{C}$ matrika oblike (4.3). Iz tega sledi, da C komutira tudi z matriko B. Torej je $A' \subseteq B'$.

V nadaljevanju bomo pokazali še nasprotno implikacijo. Predpostavimo torej, da je matrika A enaka svoji realni jordanski kanonični formi in da ima več kot dva jordanska bloka, ki pripadata isti realni lastni vrednosti a. Označimo te jordanske bloke z $J_1, J_2, \ldots, J_k$. Naj bo B matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da diagonalne elemente v J_1 nadomestimo z realno vrednostjo b_1, diagonalne elemente v J_2 z realno vrednostjo b_2, ... in diagonalne elemente v J_k z realno vrednostjo b_k, kjer je $b_i \neq b_j$, če je $i \neq j$. Potem je $B' \subseteq A'$ in $B' \neq A'$. Do istega zaključka pridemo, če ima matrika A več kot dva diagonalna bloka, ki pripadata istemu paru konjugiranih nerealnih lastnih vrednosti. □

Naš naslednji cilj je karakterizirati realne matrike z n različnimi realnimi lastnimi vrednostmi.

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ minimalna matrika. Označimo z $\#A$ moč množice komutantov vseh matrik, ki komutirajo z matriko A, $\#A = |\{B' \,:\, B \in A'\}|$. Vrednost $\#A$ se seveda ne spremeni, če matriko A nadomestimo s podobno matriko. Predpostavimo torej, da je matrika A enaka njeni realni jordanski kanonični formi

$$\begin{aligned} A = \operatorname{diag}\,(&C_{n_1}(a_1, b_1), C_{n_2}(a_2, b_2), \ldots, C_{n_k}(a_k, b_k), \\ &J_{m_1}(c_1), \ldots, J_{m_h}(c_h)), \end{aligned}$$

kjer so $a_j + ib_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, različne nerealne lastne vrednosti matrike A in $c_1, \ldots, c_h$ različne realne lastne vrednosti matrike A ter $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ in $m_1 \geq \ldots \geq m_h$.

Recimo, da je $n_1 \geq 4$, in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem matrika $B_\alpha = \alpha(E_{1,2n_1-3} + E_{2,2n_1-2} + E_{3,2n_1-1} + E_{4,2n_1}) + E_{1,2n_1-1} + E_{2,2n_1}$ komutira z matriko A. Če je $\alpha \neq \beta$, je $B'_\alpha \neq B'_\beta$. Iz tega sledi, da je $\#A = \infty$. Naj bo sedaj $m_1 \geq 4$ in $C_\alpha = \alpha(E_{r+1,r+m_1-1} + E_{r+2,r+m_1}) + E_{r+1,r+m_1}$, kjer je $r = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem matrika C_α komutira z matriko A in je $C'_\alpha \neq C'_\beta$, če sta α in β različni realni števili. Torej je tudi v tem primeru $\#A = \infty$.

Predpostavimo, da je $n_2 \geq 2$. Potem matrika $B_\alpha = \alpha(E_{1,2n_1-1} + E_{2,2n_1}) + E_{2n_1+1,2n_1+2n_2-1} + E_{2n_1+2,2n_1+2n_2}$ komutira z matriko A za vsako realno število α. Če je $\alpha \neq \beta$, potem je $B'_\alpha \neq B'_\beta$. Iz tega sledi, da je $\#A = \infty$. Naj bo sedaj $m_2 \geq 2$ in α realno število. Potem matrika $C_\alpha = \alpha E_{r+1,r+m_1} + E_{r+m_1+1,r+m_1+m_2}$ komutira z A, kjer je $r = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$, in je $C'_\alpha \neq C'_\beta$, če sta α in β različni realni števili. Torej je tudi v tem primeru $\#A = \infty$.

Označimo z $\#mA$ moč množice komutantov vseh maksimalnih matrik, ki komutirajo z matriko A, $\#mA = |\{B' \,:\, B \in A' \cap \mathcal{M}\}|$. Predpostavimo najprej, da je A diagonalna matrika z n različnimi realnimi lastnimi vrednostmi. Potem je vsaka matrika $B \in A' \cap \mathcal{M}$ oblike $B = aP + b(I - P)$, kjer je P diagonalna idempotentna matrika, $P \neq 0, I$, ter sta a in b različni realni števili. Seveda je $B' = P'$. Ker imata dve diagonalni idempotentni matriki P in Q

enaka komutanta natanko tedaj, ko je $P = Q$ ali $P = I - Q$, je

$$\#mA = \frac{1}{2}\left(\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right) = 2^{n-1} - 1.$$

Naj bo sedaj A minimalna matrika z $n-1$ različnimi realnimi lastnimi vrednostmi. Torej ima njena jordanska kanonična forma en jordanski blok velikosti 2×2 (recimo prvega), vsi ostali pa so trivialni 1×1 jordanski bloki. Iz tega sledi, da je $B \in A' \cap \mathcal{M}$ natanko tedaj, ko je $B = aI + bE_{12}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, ali pa je B diagonalna matrika z natanko dvema realnima lastnima vrednostma, ki ima prva dva koeficienta na diagonali enaka. Torej je

$$\#mA = 1 + \frac{1}{2}\left(\binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-2}\right) = 2^{n-2}.$$

Podobno, če ima matrika A natanko $n-2$ različnih realnih lastnih vrednosti, od katerih ima ena algebraično stopnjo tri, je $\#mA = 2^{n-3}$.

Naj bo sedaj n sodo število in $r = \frac{n}{2}$. Recimo, da je A minimalna matrika z n različnimi nerealnimi lastnimi vrednostmi. Ponovno lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je matrika A kar enaka svoji realni jordanski kanonični formi. Potem je $B \in A' \cap \mathcal{M}$ natanko tedaj, ko je B bločno diagonalna matrika z natanko dvema nerealnima lastnima vrednostma ali pa je B diagonalna matrika z dvema realnima lastnima vrednostma, ki ima prva dva koeficienta po diagonali enaka, prav tako druga dva... Iz tega sledi, da je $\#mA = 2^{r-1}$. Pa naj bo sedaj A minimalna matrika z natanko $n-2$ različnimi nerealnimi lastnimi vrednostmi, od katerih imata dve algebraično stopnjo dva. Predpostavimo ponovno, da je A kar enaka svoji realni kanonični formi s prvim diagonalnim blokom velikosti 4×4. Potem je $B \in A' \cap \mathcal{M}$ natanko tedaj, ko je B bodisi bločno diagonalna matrika z natanko dvema nerealnima lastnima vrednostma bodisi je $B = aI + b(E_{13} + E_{24})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, ali pa je B diagonalna matrika z dvema realnima lastnima vrednostma, ki ima prve štiri koeficiente po diagonali enake, prav tako petega in šestega, sedmega in osmega... Iz tega sledi, da je $\#mA = 2^{r-2} + 1$. Podobno, če je A minimalna matrika z natanko $n-4$ različnimi nerealnimi lastnimi vrednostmi, od katerih imata dve algebraično stopnjo tri, potem je $\#mA = 2^{r-3} + 1$.

Naj bo nazadnje A minimalna matrika z vsaj eno realno in eno nerealno lastno vrednostjo ter predpostavimo, da je $\#A < \infty$. Potem lahko podobno kot zgoraj preverimo, da je $\#mA < 2^{n-1} - 1$. Torej smo pokazali naslednjo lemo.

Lema 4.3 *Naj bo A minimalna matrika in $\#A < \infty$. Potem ima A n različnih realnih lastnih vrednosti natanko tedaj, ko je $\#mA = 2^{n-1} - 1$.*

Opomba. Če je $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ bijektivna preslikava, ki ohranja komutativnost v obe smeri, potem je

$$\#A = \#\phi(A) \quad \text{in} \quad \#mA = \#m\phi(A)$$

za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Eno od glavnih orodij v dokazu izreka 4.1 je naslednja lema, ki opisuje injektivne preslikave na idempotentih ranga ena, ki ohranjajo ortogonalnost. Še preden jo zapišemo, potrebujemo nekaj oznak. Z $I_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ bomo označevali množico vseh idempotentnih matrik ranga ena. Idempotentni matriki $P, Q \in I_n(\mathbb{R})$ sta *ortogonalni*, če je $PQ = QP = 0$. Preslikava $\xi : I_n(\mathbb{R}) \to I_n(\mathbb{R})$ ***ohranja ortogonalnost***, če je $\xi(P)\xi(Q) = \xi(Q)\xi(P) = 0$ za vsak par ortogonalnih idempotentov $P, Q \in I_n(\mathbb{R})$. Če je ξ bijektivna preslikava in sta P in Q ortogonalna idempotenta natanko tedaj, ko sta ortogonalni tudi idempotentni matriki $\xi(P)$ in $\xi(Q)$, potem pravimo, da preslikava ξ ***ohranja ortogonalnost v obe smeri***.

Naslednjo lemo bomo podali brez dokaza. Omenimo naj le, da dokaz temelji na nesurjektivni verziji osnovnega izreka projektivne geometrije, ki jo je leta 2002 dokazal Faure [18].

Lema 4.4 *Naj bo $n \geq 3$ in naj bo $\xi : I_n(\mathbb{R}) \to I_n(\mathbb{R})$ injektivna preslikava, ki ohranja ortogonalnost. Potem obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{R})$, da je*

$$\xi(P) = TPT^{-1}, \quad P \in I_n(\mathbb{R}),$$

ali

$$\xi(P) = TP^tT^{-1}, \quad P \in I_n(\mathbb{R}).$$

V dokazu izreka 4.1 bomo uporabili tudi naslednjo lemo.

Lema 4.5 *Naj bo $A = C_n(a,b)$ za neki realni števili a in $b \neq 0$ in neko naravno število n. Matrika $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ komutira z A natanko tedaj, ko obstaja tak polinom p z realnimi koeficienti, da je $B = p(A)$.*

Dokaz. Če je $B = p(A)$ za nek polinom p z realnimi koeficienti, potem B seveda komutira z matriko A. Predpostavimo torej, da je $B \in A'$. Pokazali bomo, da je B realna linearna kombinacija matrik $I, A, A^2, \ldots, A^{2n-1} \in A'$. Vemo že, da je dimenzija komutanta A' enaka $2n$ (glej (4.3)). Torej moramo pokazati le, da so matrike $I, A, A^2, \ldots, A^{2n-1}$ linearno neodvisne. Recimo, da je $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{2n-1}A^{2n-1} = 0$ za neka realna števila $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$. Naj bo q polinom definiran s predpisom $q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2n-1}x^{2n-1}$. Potem ni težko videti, da je $q(a+ib) = 0$, $q'(a+ib) = 0, \ldots,$ $q^{(n-1)}(a+ib) = 0$. Pri tem upoštevamo, da lahko $2n \times 2n$ realno matriko A identificiramo z $n \times n$ kompleksno matriko

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix},$$

kjer je $\lambda = a + ib$. Potem pa je

$$q(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+ \alpha_{2n-1} \begin{bmatrix} \lambda^{2n-1} & (2n-1)\lambda^{2n-2} & \ldots & \binom{2n-1}{n-1}\lambda^n \\ 0 & \lambda^{2n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & (2n-1)\lambda^{2n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda^{2n-1} \end{bmatrix} = 0.$$

Ker so vsi členi v prvi vrstici leve strani enakosti enaki nič, je $q(a+ib) = 0$, $q'(a+ib) = 0, \ldots,$ $q^{(n-1)}(a+ib) = 0$. Iz tega sledi, da je $a+ib$ ničla polinoma q, katere kratnost je vsaj n. Torej je tudi $a-ib$ ničla polinoma q s kratnostjo vsaj n. Potem pa ima polinom q vsaj $2n$ ničel štetih s kratnostjo. Iz tega sledi, da je $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{2n-1} = 0$. □

Posledica 4.1 *Realna matrika B komutira z minimalno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ natanko tedaj, ko je $B = p(A)$ za nek polinom p z realnimi koeficienti.*

Dokaz. Če je $B = p(A)$ za nek polinom p z realnimi koeficienti, potem seveda B komutira z A. Predpostavimo sedaj, da je A minimalna realna matrika. Potem obstaja taka obrnljiva matrika $S \in M_n(\mathbb{R})$, da je

$$\begin{aligned} A = S \operatorname{diag}(&C_{n_1}(a_1,b_1),\ldots,C_{n_k}(a_k,b_k),\\ &J_{m_1}(c_1),\ldots,J_{m_h}(c_h))\; S^{-1}, \end{aligned}$$

kjer so $a_j + ib_j$, $j = 1,\ldots,k$, različne nerealne lastne vrednosti matrike A in $c_1,\ldots,c_h$ različne realne lastne vrednosti matrike A. Naj bo $B \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, ki komutira z A. Če napišemo matriko $S^{-1}BS$ v bločni obliki $S^{-1}BS = [B_{ij}]$, ki ustreza zgornji dekompoziciji matrike $S^{-1}AS$, potem že vemo (glej dokaz leme 4.2), da je $S^{-1}BS$ oblike

$$S^{-1}BS = \operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_k,\overline{B}_1,\ldots,\overline{B}_h)$$

kjer so $B_i \in M_{2n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1,\ldots,k$, in $\overline{B}_j \in M_{m_j}(\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,h$, ter je

$$B_i = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} & C_2^{(i)} & \ldots & C_{n_i}^{(i)} \\ 0 & C_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_2^{(i)} \\ 0 & 0 & \ldots & C_1^{(i)} \end{bmatrix},$$

kjer so $C_j^{(i)} = C(\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)})$, $j = 1,\ldots,n_i$, in

$$\overline{B}_i = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(i)} & \gamma_2^{(i)} & \ldots & \gamma_{m_i}^{(i)} \\ 0 & \gamma_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \gamma_2^{(i)} \\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_1^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Iz tega sledi, da je $S^{-1}BS$ matrika oblike

$$\operatorname{diag}(p_1(C_{n_1}(a_1,b_1)),\ldots,p_k(C_{n_k}(a_k,b_k)),\\ q_1(J_{m_1}(c_1)),\ldots,q_h(J_{m_h}(c_h))),$$

kjer so $p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_h$ polinomi z realnimi koeficienti. Torej obstaja tak realni polinom p, da je $B = p(A)$ (glej tudi [32, Theorem 3.2.4.2.]). □

Dokaz izreka 4.1. Naj bo $n > 3$ in naj bo $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ zvezna bijektivna preslikava, ki ohranja komutativnost v obe smeri. Potem seveda za vsako podmnožico $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{R})$ velja $\phi(\mathcal{S}') = \phi(\mathcal{S})'$. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrika z n različnimi realnimi lastnimi vrednostmi. Potem je A diagonalizabilna minimalna matrika. Recimo, da je A kar diagonalna matrika in naj bo $B \in A'$. Potem mora biti tudi matrika B diagonalna in njen komutant B' je natančno določen, če vemo, kateri diagonalni elementi matrike B so enaki. Torej je $\#A < \infty$ in $\#mA = 2^{n-1} - 1$. Iz tega sledi, da je tudi matrika $\phi(A)$ minimalna in $\#\phi(A) < \infty$ ter $\#m\phi(A) = 2^{n-1} - 1$. Če upoštevamo še lemo 4.3, smo s tem pokazali, da preslikava ϕ množico diagonalizabilnih matrik z n različnimi realnimi lastnimi vrednostmi preslika samo nase. Nadalje, matrika A je diagonalizabilna s samimi realnimi lastnimi vrednostmi natanko tedaj, ko komutira z neko matriko z n različnimi realnimi lastnimi vrednostmi. Iz tega sledi, da se množica vseh diagonalizabilnih matrik s samimi realnimi lastnimi vrednostmi, ki jo bomo označevali z $\mathcal{D}$, preslika s ϕ sama nase. Označimo z $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, množico vseh diagonalizabilnih matrik z natanko k različnimi realnimi lastnimi vrednostmi. Potem je $A \in \mathcal{D}_1$ natanko tedaj, ko je $A = aI$ za neko realno število a, oziroma natanko tedaj, ko je $A' = M_n(\mathbb{R})$. Torej se množica $\mathcal{D}_1$ preslika sama nase. Enako velja za množico $\mathcal{D}_2 = \mathcal{M} \cap \mathcal{D}$. Prav tako ni težko videti, da sta za matriko $A \in \mathcal{D}$ naslednji trditvi ekvivalentni:

(i) $A \in \mathcal{D}_3$,

(ii) $A \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ in vsaka taka matrika $B \in \mathcal{D}$, za katero velja $B \in A'$, $A' \subseteq B'$ in $A' \neq B'$, pripada $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Iz tega sledi, da je $\phi(\mathcal{D}_3) = \mathcal{D}_3$. Če ponovimo ta postopek, dobimo $\phi(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Označimo s $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_2$ množico vseh matrik oblike $aP+b(I-P)$, kjer sta a in b različni realni števili ter P idempotent ranga ena. Množica $\mathcal{P}$ je torej množica vseh diagonalizabilnih matrik z natanko dvema različnima realnima lastnima vrednostma, od katerih ima ena lastni podprostor dimenzije ena. V nadaljevanju bomo pokazali, da ϕ preslika množico $\mathcal{P}$ samo nase. Dokazali bomo, da sta za vsako matriko $A \in \mathcal{D}_2$ naslednji trditvi ekvivalentni:

(i) $A \in \mathcal{P}$,

(ii) za vsako matriko $B \in A' \cap \mathcal{D}_2$ velja $\{A, B\}'' \subseteq \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$.

Recimo, da smo že pokazali zgornjo ekvivalenco. Ker preslikava ϕ ohranja prve komutante, ohranja tudi druge komutante, in ker ohranja množice $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, 3$, je $\phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, kar smo želeli pokazati. Predpostavimo torej, da je $A = aP + b(I - P) \in \mathcal{P}$ in $B \in A' \cap \mathcal{D}_2$. Matrika C komutira z A natanko tedaj, ko komutira z matriko P. Zato lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je kar matrika A idempotent ranga ena. Še več, predpostavimo lahko, da je $A = E_{11}$ (če je potrebno, preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno podobnostno preslikavo). Ker matriki A in B komutirata, lahko prav tako predpostavimo, da je $B = c(E_{11} + \cdots + E_{kk}) + d(E_{k+1,k+1} + \cdots + E_{nn})$, kjer je $1 \leq k \leq n-1$, $c, d \in \mathbb{R}$ in $c \neq d$. Če je $k = 1$, potem je $\{A, B\}'' = \operatorname{span}\{E_{11}, I - E_{11}\} \subseteq \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ (tukaj $\operatorname{span}\{E_{11}, I - E_{11}\}$ označuje linearno lupino matrik E_{11} in $I - E_{11}$). Če pa je $2 \leq k \leq n-1$, potem je $\{A, B\}'' = \operatorname{span}\{E_{11}, E_{22} + \cdots + E_{kk}, I - (E_{11} + \cdots + E_{kk})\} \subseteq \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$. Pokazati moramo še nasprotno implikacijo. Recimo, da je $A \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{P}$. Kot zgoraj lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $A = E_{11} + \cdots + E_{kk}$ za nek k, $2 \leq k \leq n-2$. Naj bo $B = E_{11} + E_{k+1,k+1}$. Potem množica $\{A, B\}'' = \operatorname{span}\{E_{11}, E_{22} + \cdots + E_{kk}, E_{k+1,k+1}, I - (E_{11} + \cdots + E_{k+1,k+1})\}$ vsebuje matrike s štirimi različnimi realnimi lastnimi vrednostmi. S tem smo pokazali ekvivalenco zgornjih dveh trditev.

Vsaki matriki $A \in \mathcal{P}$ pripada tak enolično določen idempotent P ranga ena, da je $A = aP + b(I-P)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Če sta $A, B \in \mathcal{P}$ ter P in Q pripadajoča idempotenta ranga ena, potem je $P = Q$ natanko tedaj, ko je $A' = B'$. Torej preslikava ϕ inducira bijektivno preslikavo $\xi : I_n(\mathbb{R}) \to I_n(\mathbb{R})$. Še več, P in Q sta ortogonalna idempotenta natanko tedaj, ko matriki A in B komutirata in velja $A' \neq B'$.

Iz tega sledi, da preslikava ξ ohranja ortogonalnost v obe smeri. Po lemi 4.4 obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{R})$, da je bodisi $\xi(P) = TPT^{-1}$, $P \in I_n(\mathbb{R})$, bodisi $\xi(P) = TP^tT^{-1}$, $P \in I_n(\mathbb{R})$. Če našo preslikavo ϕ nadomestimo s preslikavo $A \mapsto T^{-1}\phi(A)T$ in jo komponiramo še s preslikavo $A \mapsto A^t$, če je potrebno, potem lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da se za vsak idempotent P ranga ena množica vseh matrik oblike $aP + b(I - P)$, kjer sta a in b različni realni števili, preslika bijektivno sama nase. Torej za vsako matriko $A \in \mathcal{P} \cup \mathbb{R}I$ obstajata taka polinoma p_A in q_A z realnimi koeficienti, da je $\phi(A) = p_A(A)$ in $A = q_A(p_A(A))$. Če torej preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno regularno lokalno polinomsko preslikavo (ta preslikava deluje kot identiteta izven množice $\mathcal{P} \cup \mathbb{R}I$), potem lahko predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ za vsako matriko $A \in \mathcal{P} \cup \mathbb{R}I$.

V naslednjem koraku bomo pokazali, da lahko po komponiranju preslikave ϕ s še eno regularno lokalno polinomsko preslikavo predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ za vsako diagonalizabilno matriko A s samimi realnimi lastnimi vrednostmi. Kot zgoraj moramo torej pokazati, da za vsako matriko $A \in \mathcal{D}$ obstajata taka polinoma p_A in q_A z realnimi koeficienti, da je $\phi(A) = p_A(A)$ in $A = q_A(p_A(A))$. Naj bo D realna diagonalna matrika. Potem ni težko videti, da je $D' = \operatorname{span}(I_n(\mathbb{R}) \cap D')$. Ker preslikava ϕ deluje kot identiteta na $I_n(\mathbb{R})$, je $\phi(D)' = D'$, iz česar sledi, da res obstajata taka polinoma p_D in q_D z realnimi koeficienti, da je $\phi(D) = p_D(D)$ in $D = q_D(p_D(D))$. Naj bo sedaj $A \in \mathcal{D}$ poljubna diagonalizabilna matrika. Potem obstaja taka obrnljiva matrika $S \in M_n(\mathbb{R})$, da je $SAS^{-1} = D$ diagonalna matrika. Preslikava $\psi(X) = S\phi(S^{-1}XS)S^{-1}$ je bijektivna, zvezna in ohranja komutativnost v obe smeri ter $\psi(A) = A$ za vse matrike $A \in \mathcal{P} \cup \mathbb{R}I$. Vemo že, da imata matriki $\psi(D)$ in D enaka komutanta, oziroma matriki $\phi(A)$ in A imata enaka komutanta. Iz tega sledi, da tudi za matriko A obstajata taka polinoma p_A in q_A z realnimi koeficienti, da je $\phi(A) = p_A(A)$ in $A = q_A(p_A(A))$. Od sedaj naprej bomo torej predpostavili, da je $\phi(A) = A$ za vsako diagonalizabilno matriko $A \in \mathcal{D}$.

S $\mathcal{Q}$ označimo unijo množice vseh diagonalizabilnih matrik s samimi realnimi lastnimi vrednostmi in množice matrik oblike $aI + N$, kjer je a poljubno realno število in N nilpotentna matrika ranga ena.

V tem odstavku bomo pokazali, da lahko po komponiranju preslikave ϕ z ustrezno regularno lokalno polinomsko preslikavo predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ za vsako matriko $A \in \mathcal{Q}$. Kot zgoraj zadostuje, da pokažemo, da je $\phi(N)' = N'$ za vsako nilpotentno matriko N ranga ena. Pravzaprav zadostuje to pokazati le za matriko $N = E_{12}$. Vemo že, da se diagonalizabilne matrike s samimi realnimi lastnimi vrednostmi preslikajo same vase. Matrika $\phi(E_{12})$ komutira z matrikami $E_{11} + E_{22}$, $E_{33}, \cdots, E_{nn}$. Iz tega in leme 4.1 sledi, da je $\phi(E_{12})$ vsota skalarne matrike in matrike $M \neq 0$, ki ima neničelne koeficiente le v zgornjem levem 2×2 kotu in je $M^2 = 0$. Ker matrika E_{12} komutira z idempotentom $E_{11} + E_{22} + E_{13}$, mora imeti matrika M vse koeficiente v prvem stolpcu enake nič. Ker pa je M nilpotentna matrika, je $M = aE_{12}$ za neko realno število a. S tem smo pokazali želeno.

Označimo s $\mathcal{C} \subset M_n(\mathbb{R})$ množico vseh matrik $A \in M_n(\mathbb{R})$ s samimi realnimi lastnimi vrednostmi, ki imajo v jordanski kanonični formi vse jordanske bloke velikosti 1×1 ali 2×2. Pokazali bomo, da za vsako matriko $A \in \mathcal{C}$ obstajata taka polinoma p_A in q_A z realnimi koeficienti, da je $\phi(A) = p_A(A)$ in $A = q_A(p_A(A))$.

Naj bosta a in α poljubni realni števili. Z $J(a, \alpha)$ bomo označili 2×2 matriko

$$J(a, \alpha) = \begin{bmatrix} a & \alpha \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Naj bo S poljubna $n \times n$ obrnljiva matrika, k in h nenegativni celi števili, za kateri velja $2k + h = n$, ter $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_h$ realna števila. Pokazati želimo, da se matrika

$$A = S\mathrm{diag}\,(J(a_1, 1), J(a_2, 1), \ldots, J(a_k, 1), b_1, b_2, \ldots, b_h)S^{-1}$$

preslika v matriko

$$\begin{aligned}\phi(A) = S\mathrm{diag}\,(&J(c_1, \alpha_1), J(c_2, \alpha_2), \ldots, J(c_k, \alpha_k), \\ &d_1, d_2, \ldots, d_h)S^{-1},\end{aligned}$$

kjer je $a_i = a_j$ natanko tedaj, ko je $c_i = c_j$, $b_i = b_j$ natanko tedaj, ko je $d_i = d_j$, $a_i = b_j$ natanko tedaj, ko je $c_i = d_j$, in $\alpha_i = \alpha_j$, če je $a_i = a_j$, ter $\alpha_i \neq 0$ za vse $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ker matrika A komutira z idempotenti

$$S\text{diag}\,(I,\ldots,0,0,\ldots,0)S^{-1},$$
$$\vdots$$
$$S\text{diag}\,(0,\ldots,I,0,\ldots,0)S^{-1},$$
$$S\text{diag}\,(0,\ldots,0,1,\ldots,0)S^{-1},$$
$$\vdots$$
$$S\text{diag}\,(0,\ldots,0,0,\ldots,1)S^{-1},$$

tudi matrika $\phi(A)$ komutira s temi idempotenti in zato je

$$\phi(A) = S\text{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k, d_1, d_2, \ldots, d_h)S^{-1},$$

kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 2×2 matrike in $d_1, d_2, \ldots, d_h \in \mathbb{R}$. Matrika A komutira z matriko $SE_{12}S^{-1} \in \mathcal{Q}$ in enako velja tudi za matriko $\phi(A)$. Torej je $A_1 = J(c_1, \alpha_1)$ za neki realni števili c_1 in α_1. Če je $\alpha_1 = 0$, potem $\phi(A)$ komutira z vsako matriko oblike

$$S\text{diag}\,(P,\ldots,0,0,\ldots,0)S^{-1},$$

kjer je P poljubna 2×2 idempotentna matrika. Enako mora seveda veljati tudi za matriko A, kar pa je protislovje. Iz tega sledi, da je $\alpha_1 \neq 0$. Podobno vidimo, da imajo vse matrike A_i, $i = 2, 3, \ldots k$, enako obliko. Torej smo pokazali, da je

$$\begin{aligned}\phi(A) = S\text{diag}\,(&J(c_1,\alpha_1), J(c_2,\alpha_2), \ldots, J(c_k,\alpha_k),\\ &d_1, d_2, \ldots, d_h)S^{-1},\end{aligned}$$

za neka realna števila $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $d_1, d_2, \ldots, d_h$ in neka neničelna realna števila $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Recimo, da je $a_1 = a_2$. Potem matrika A komutira z matriko $SE_{14}S^{-1} \in \mathcal{Q}$. Iz tega sledi, da tudi $\phi(A)$ komutira z matriko $SE_{14}S^{-1}$, kar implicira $c_1 = c_2$. Enak argument pokaže, da iz $c_1 = c_2$ sledi $a_1 = a_2$. Podobno je $a_i = a_j$ za neka indeksa i in j natanko tedaj, ko je $c_i = c_j$, in $b_i = b_j$ za neka indeksa i in j natanko tedaj, ko je $d_i = d_j$. Če je $a_1 = b_1$, potem A komutira z matriko $SE_{1,2k+1}S^{-1} \in \mathcal{Q}$, iz česar sledi, da je $c_1 = d_1$. Podobno, če je $a_i = b_j$ za neka indeksa i in j, potem je $c_i = d_j$. Enako pokažemo tudi nasprotno implikacijo.

Dokazati še moramo, da iz $a_i = a_j$ sledi $\alpha_i = \alpha_j$. Podobno kot zgoraj lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $a_1 = a_2$. Potem matrika A komutira z diagonalizabilno matriko

$$D = S(\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \oplus 0)S^{-1} \in \mathcal{D}.$$

Tukaj I označuje 2×2 identično matriko in zadnja ničla označuje $(n-4) \times (n-4)$ ničelno matriko. Matrika D mora prav tako komutirati z matriko $\phi(A)$. Iz tega sledi, da je $\alpha_1 = \alpha_2$. Če torej komponiramo preslikavo ϕ s še eno regularno lokalno polinomsko preslikavo, potem lahko predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ za vse matrike $A \in \mathcal{C}$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da tudi za vsako diagonalizabilno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ z vsaj enim parom konjugiranih kompleksnih (nerealnih) lastnih vrednosti obstajata taka polinoma p_A in q_A z realnimi koeficienti, da je $\phi(A) = p_A(A)$ in $A = q_A(p_A(A))$. Naj bo torej S poljubna obrnljiva $n \times n$ matrika, $k \neq 0$ in h nenegativni celi števili, za kateri velja $2k + h = n$, ter $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$, $c_1, c_2, \ldots, c_h$ realna števila, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots k$. Pokazati želimo, da se matrika

$$A = S\text{diag}\,(C(a_1, b_1), C(a_2, b_2), \ldots, C(a_k, b_k), c_1, c_2, \ldots, c_h)S^{-1}$$

preslika v matriko

$$\begin{aligned}\phi(A) = S\text{diag}\,(C(\alpha_1, \beta_1), C(\alpha_2, \beta_2), \ldots,\\ C(\alpha_k, \beta_k), \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h)S^{-1},\end{aligned}$$

kjer je $a_r + ib_r = a_s + ib_s$ natanko tedaj, ko je $\alpha_r + i\beta_r = \alpha_s + i\beta_s$, $c_i = c_j$ natanko tedaj, ko je $\gamma_i = \gamma_j$, in $\beta_i \neq 0$ za vse $i = 1, 2, \ldots, k$. Kot zgoraj lahko pokažemo, da je

$$\phi(A) = S\text{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h)S^{-1},$$

kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrike velikosti 2×2, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h \in \mathbb{R}$ in je $\gamma_i = \gamma_j$ natanko tedaj, ko je $c_i = c_j$. Ker se vsaka matrika iz množice $\mathcal{C}$ preslika sama vase s preslikavo ϕ, imajo matrike

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ nerealne lastne vrednosti. Predpostavimo nadalje, da je $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$. Potem matrika A komutira z matriko

$$B = S(\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus 0)S^{-1} \in \mathcal{C}.$$

Tukaj I označuje 2×2 identično matriko in zadnja ničla označuje $(n-4) \times (n-4)$ ničelno matriko. Vemo že, da je $\phi(B) = B$, iz česar sledi, da tudi $\phi(A)$ komutira z matriko B. Torej je $A_1 = A_2$. Enak argument pokaže, da iz $A_1 = A_2$ sledi $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$. Podobno je $a_r + ib_r = a_s + ib_s$ za neka indeksa r in s natanko tedaj, ko je $A_r = A_s$.

Recimo, da je $k > 1$. Naj bodo a, b in c realna števila, $b \neq 0$, in naj bo C matrika oblike

$$C = S\mathrm{diag}\,(\underbrace{C(a,b), C(a,b), \ldots, C(a,b)}_{k-\text{krat}}, \underbrace{c, c, \ldots, c}_{h-\text{krat}})S^{-1}.$$

Vemo že, da je

$$\phi(C) = S\mathrm{diag}\,(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{k-\text{krat}}, \underbrace{\gamma, \gamma, \ldots, \gamma}_{h-\text{krat}})S^{-1},$$

za neko 2×2 matriko A z nerealnima lastnima vrednostma in neko realno število γ. Definirajmo

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker C komutira z diagonalizabilno matriko $\overline{D} = S(D \oplus 0)S^{-1} \in \mathcal{D}$, kjer 0 označuje $(n-4) \times (n-4)$ ničelno matriko, prav tako matrika $\phi(C)$ komutira s to matriko. Iz tega sledi, da je $A = C(\alpha, \beta)$ za neki realni števili α in $\beta \neq 0$. Ker komutirata matriki A in C, komutirata tudi matriki $\phi(A)$ in $\phi(C)$. Torej je $A_i = C(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, kjer so α_i in $\beta_i \neq 0$ realna števila.

Predpostavimo sedaj, da je $k = 1$. Naj bodo a, b in c realna števila, $b \neq 0$, in naj bo C matrika oblike

$$C = S\mathrm{diag}\,(C(a,b), C(a,b), c, c, \ldots, c)S^{-1}.$$

Vemo že, da je

$$\phi(C) = S\mathrm{diag}\,(C(\alpha,\beta), C(\alpha,\beta), \gamma, \gamma, \ldots, \gamma)S^{-1},$$

za neka realna števila α, $\beta \neq 0$ in γ. Naj bo sedaj D matrika oblike

$$D = S\mathrm{diag}\,(C(a,b), c, c, \ldots, c)S^{-1}.$$

Ker D komutira z matriko C, je

$$\phi(D) = S\mathrm{diag}\,(C(\alpha',\beta'), \gamma', \gamma', \ldots, \gamma')S^{-1}$$

za neka realna števila α', $\beta' \neq 0$ in γ'. Ker pa tudi matriki A in D komutirata, je $A_1 = C(\alpha_1, \beta_1)$, kjer sta α_1 in $\beta_1 \neq 0$ neki realni števili. Torej lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ tudi za vsako diagonalizabilno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Velja

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \lim_{\alpha \to 0} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je α realno število. Označimo $N_\alpha = N + \alpha E_{n1}$. Za vsako realno število $\alpha \neq 0$ je matrika N_α diagonalizabilna in je zato $\phi(N_\alpha) = N_\alpha$. Ker je preslikava ϕ zvezna, je

$$\phi(N) = \lim_{\alpha \to 0} \phi(N_\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} N_\alpha = N.$$

Podobno lahko pokažemo, da se matrika $S\mathrm{diag}\,(0, M_m, 0)S^{-1}$, kjer je S neka obrnljiva realna matrika, 0 označuje ničelni matriki ustreznih velikosti in je M_m nilpotentna matrika v jordanski kanonični formi velikosti $m \times m$ z maksimalnim nilindeksom (koeficienti na prvi diagonali nad glavno diagonalo so enaki ena, vsi ostali pa so enaki nič), preslika s preslikavo ϕ sama vase.

Enako kot zgoraj lahko pokažemo, da se vsaka matrika oblike

$$A = S\mathrm{diag}\,(J_{m_1}(c_1), J_{m_2}(c_2), \ldots, J_{m_h}(c_h))S^{-1}$$

(tukaj S označuje obrnljivo matriko, $c_1, c_2, \ldots, c_h \in \mathbb{R}$ in $J_{m_1}(c_1)$, $J_{m_2}(c_2), \ldots, J_{m_h}(c_h)$ so jordanski bloki) preslika v matriko oblike $S\mathrm{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_h)S^{-1}$, kjer so A_i matrike ustreznih velikosti. Ker A komutira z matrikami

$$\begin{gathered} S\mathrm{diag}\,(M_{m_1}, 0, \ldots, 0)S^{-1}, \\ S\mathrm{diag}\,(0, M_{m_2}, \ldots, 0)S^{-1}, \\ \vdots \\ S\mathrm{diag}\,(0, 0, \ldots, M_{m_h})S^{-1}, \end{gathered}$$

kjer so M_{m_i} nilpotentne matrike z maksimalnim nilindeksom v jordanski kanonični formi, tudi $\phi(A)$ komutira s temi matrikami, iz česar sledi, da so A_i matrike oblike (4.4). Še več, diagonalni koeficient matrike A_i je enak diagonalnemu koeficientu matrike A_j natanko tedaj, ko imata jordanski celici $J_{m_i}(c_i)$ in $J_{m_j}(c_j)$ enako lastno vrednost. Torej je

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \phi(S\mathrm{diag}\,(J_{m_1}(c_1), J_{m_2}(c_2), \ldots, J_{m_h}(c_h))S^{-1}) \\ &= S\mathrm{diag}\,(p_1(J_{m_1}(c_1)), p_2(J_{m_2}(c_2)), \ldots, p_h(J_{m_h}(c_h)))S^{-1} \end{aligned}$$

za neke polinome $p_1, p_2, \ldots, p_h$ z realnimi koeficienti. Poleg tega je $p_i(c_i) = p_j(c_j)$ natanko tedaj, ko je $c_i = c_j$. Prav tako je prva diagonala nad glavno diagonalo v matrikah $p_i(J_{m_i}(c_i))$ neničelna. Če namreč to ne bi bilo res za nek indeks i, recimo $i = 1$, potem bi $\phi(A)$ komutirala z matriko $S\mathrm{diag}\,(P, 0, \ldots, 0)S^{-1}$ za neko netrivialno $m_1 \times m_1$ idempotentno matriko P. Potem pa bi tudi matrika A komutirala s to matriko, kar pa je protislovje.

Pokazati še moramo, da je $p_i = p_j$, če je $c_i = c_j$. Ker enak dokaz deluje tudi v splošnem, bomo obravnavali le primer, ko ima matrika A v jordanski kanonični formi dve jordanski celici z enako lastno vrednostjo. Recimo torej, da je $A = S\mathrm{diag}\,(J_{m_1}(c_1), J_{m_2}(c_2))S^{-1}$

in je $c_1 = c_2$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $m_1 \geq m_2$. Vemo že, da je

$$\phi(A) = S \begin{bmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m_1} \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} a_1 & b_2 & \dots & b_{m_2} \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{matrix} \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je $a_2 \neq 0$ in $b_2 \neq 0$. Pokazati želimo, da je $a_2 = b_2, \dots, a_{m_2} = b_{m_2}$. Če je $m_2 = 1$, potem je dokaz že končan. Predpostavimo torej, da je $m_2 > 1$. Matrika A komutira z matriko

$$Z = S \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je $V = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Tukaj I označuje $m_2 \times m_2$ identično matriko. Vemo že, da je $\phi(Z) = Z$. Torej tudi matrika $\phi(A)$ komutira z Z, iz česar sledijo enakosti $a_2 = b_2, \dots, a_{m_2} = b_{m_2}$. Kot zgoraj lahko torej predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ s samimi realnimi lastnimi vrednostmi.

Pokazati še moramo, da za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ z vsaj enim parom konjugiranih kompleksnih (nerealnih) lastnih vrednosti obstajata taka polinoma p_A in q_A z realnimi koeficienti, da je $\phi(A) = p_A(A)$ in $A = q_A(p_A(A))$. Naj bo torej S poljubna obrnljiva $n \times n$ matrika, $k \neq 0$ in h nenegativni celi števili, $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$, $c_1, \dots, c_h$ realna števila, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots k$, ter

$$A = S\text{diag}\,(C_{n_1}(a_1, b_1), \dots, C_{n_k}(a_k, b_k), J_{m_1}(c_1), \dots, J_{m_h}(c_h))S^{-1}.$$

Kot zgoraj lahko pokažemo, da je

$$\phi(A) = S\text{diag}\,(A_1, A_2, \dots, A_k, p_1(J_{m_1}(c_1)), \dots, p_h(J_{m_h}(c_h)))S^{-1},$$

kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrike ustreznih velikosti z nerealnimi lastnimi vrednostmi ter $p_1, \ldots, p_h$ polinomi z realnimi koeficienti. Poleg tega je $p_i = p_j$, če je $c_i = c_j$, in prva diagonala nad glavno diagonalo v matrikah $p_i(J_{m_i}(c_i))$ je neničelna.

Z M_{n_i} označimo $2n_i \times 2n_i$ matriko oblike

$$M_{n_i} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je I identična matrika velikosti 2×2. Ker A komutira z matrikami

$$\begin{aligned} &S\mathrm{diag}\,(M_{n_1}, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)S^{-1}, \\ &S\mathrm{diag}\,(0, M_{n_2}, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)S^{-1}, \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &S\mathrm{diag}\,(0, 0, \ldots, M_{n_k}, 0, \ldots, 0)S^{-1}, \end{aligned}$$

$\phi(A)$ prav tako komutira s temi matrikami, iz česar sledi, da so A_i matrike oblike

$$A_i = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} & C_2^{(i)} & \ldots & C_{n_i}^{(i)} \\ 0 & C_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_2^{(i)} \\ 0 & 0 & \ldots & C_1^{(i)} \end{bmatrix},$$

kjer so $C_j^{(i)}$ matrike velikosti 2×2, $j = 1, 2, \ldots, n_i$. Matrika $\phi(A)$ komutira tudi z matriko

$$S\mathrm{diag}\,(\underbrace{C(0,1), C(0,1), \ldots, C(0,1)}_{n_1+n_2+\cdots+n_k-\text{krat}}, 0, \ldots, 0)S^{-1}.$$

Torej je $C_j^{(i)} = C(\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)})$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, za neki realni števili $\alpha_j^{(i)}$ in $\beta_j^{(i)}$. Po lemi 4.5 za vsak indeks $i = 1, 2, \ldots, k$ obstaja tak polinom q_i z realnimi koeficienti, da je $A_i = q_i(C_{n_i}(a_i, b_i))$. Podobno kot zgoraj lahko pokažemo, da je $C_2^{(i)} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ter da je $a_r + ib_r = a_s + ib_s$ natanko tedaj, ko je $\alpha_1^{(r)} + i\beta_1^{(r)} = \alpha_1^{(s)} + i\beta_1^{(s)}$.

Pokazati še moramo, da je $q_r = q_s$, če je $a_r + ib_r = a_s + ib_s$. Ker enak dokaz deluje tudi v splošnem, bomo obravnavali le primer, ko ima matrika A v realni jordanski kanonični formi dva bloka z istim parom konjugiranih kompleksnih (nerealnih) lastnih vrednosti. Recimo torej, da je $A = S\mathrm{diag}\,(C_{n_1}(a,b), C_{n_2}(a,b))S^{-1}$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $n_1 \geq n_2$. Vemo že, da je

$$\phi(A) = S \left[\begin{array}{cccc|cccc} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & \ldots & C_{n_1}^{(1)} & & & & \\ 0 & C_1^{(1)} & \ddots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_2^{(1)} & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ldots & C_1^{(1)} & & & & \\ & & & & C_1^{(1)} & C_2^{(2)} & \ldots & C_{n_2}^{(2)} \\ & & & & 0 & C_1^{(1)} & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & C_2^{(2)} \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & C_1^{(1)} \end{array}\right] S^{-1},$$

kjer je $C_2^{(1)} \neq 0$ in $C_2^{(2)} \neq 0$. Pokazati želimo, da je $C_i^{(1)} = C_i^{(2)}$, $i = 2, \ldots, n_2$. Če je $n_2 = 1$, je dokaz končan. Predpostavimo torej, da je $n_2 > 1$. Matrika A komutira z matriko

$$Z = S \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je $V = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Tukaj I označuje $2n_2 \times 2n_2$ identično matriko. Vemo že, da je $\phi(Z) = Z$. Torej $\phi(A)$ komutira z matriko Z, iz česar sledijo enakosti $C_i^{(1)} = C_i^{(2)}$, $i = 2, \ldots, n_2$. S tem je dokaz izreka 4.1 končan. $\square$

Opomba. Iz zgornjega dokaza sledi, da je vsaka bijektivna preslikava na realnih matrikah, ki ohranja komutativnost v obe smeri, standardne oblike na množici $\mathcal{C}$ in množici vseh diagonalizabilnih matrik (tukaj ne predpostavljamo zveznosti preslikave).

V nadaljevanju bomo opisali vse bijektivne preslikave na $M_3(\mathbb{R})$, ki ohranjajo komutativnost v obe smeri. Naj bo torej $\phi : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ bijektivna preslikava, ki ohranja komutativnost v obe smeri. Z $\mathcal{A}_1 \subseteq M_3(\mathbb{R})$ označimo množico vseh matrik $A \in M_3(\mathbb{R})$ s samimi realnimi lastnimi vrednostmi, ki imajo v jordanski kanonični formi vse jordanske bloke velikosti 1×1 ali 2×2. Nadalje z $\mathcal{A}_2 \subseteq M_3(\mathbb{R})$ označimo množico vseh matrik $A \in M_3(\mathbb{R})$ z eno realno lastno vrednostjo, ki ima geometrijsko stopnjo ena, in z $\mathcal{A}_3 \subseteq M_3(\mathbb{R})$ množico vseh matrik $A \in M_3(\mathbb{R})$ z enim parom konjugiranih nerealnih lastnih vrednosti. Seveda je $M_3(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

Kot v dokazu izreka 4.1 lahko pokažemo, da obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_3(\mathbb{R})$ in taka regularna lokalno polinomska preslikava $A \mapsto p_A(A)$, da je $\phi(A) = Tp_A(A)T^{-1}$ za vse $A \in \mathcal{A}_1$ ali $\phi(A) = Tp_A(A^t)T^{-1}$ za vse $A \in \mathcal{A}_1$. Če torej komponiramo preslikavo ϕ najprej s preslikavo $A \mapsto T^{-1}AT$, potem s primerno regularno lokalno polinomsko preslikavo (ta preslikava deluje kot identiteta izven množice $\mathcal{A}_1$) in nato še s preslikavo $A \mapsto A^t$ (če je seveda potrebno), potem lahko predpostavimo, da je $\phi(A) = A$ za vse $A \in \mathcal{A}_1$.

Naj bo $A \in \mathcal{A}_2$. Potem je

$$A = S \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} S^{-1}$$

za neko realno število a in neko obrnljivo matriko $S \in M_3(\mathbb{R})$. Matrika A komutira z nilpotentno matriko N ranga ena

$$N = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Ker je $N \in \mathcal{A}_1$, je $\phi(N) = N$. Torej $\phi(A)$ tudi komutira z matriko N. Ker je preslikava ϕ bijektivna, velja $\phi(A) \notin \mathcal{A}_1$. Iz tega sledi, da je $\phi(A) \in \mathcal{A}_2$. Torej je $\phi(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_2$ in $\phi(\mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_3$.

Naj bosta $A, B \in \mathcal{A}_2$. Vsaka matrika iz množice $\mathcal{A}_2$ komutira z neko nilpotentno matriko $N \in M_3(\mathbb{R})$ ranga ena (glej zgoraj). Če obstaja taka nilpotentna matrika $N \in M_3(\mathbb{R})$ ranga ena, da matriki A in B komutirata z N, potem bomo pisali $A \sim_2 B$. Relacija $\sim_2$ je ekvivalenčna relacija na množici $\mathcal{A}_2$. Torej ta relacija množico $\mathcal{A}_2$ razbije na ekvivalenčne razrede. Ker je $\phi(N) = N$, se vsak tak razred preslika s preslikavo ϕ sam nase. Naj bo nadalje $A \sim_2 B$. Potem matriki A in B komutirata natanko tedaj, ko je $A = p(B)$ za nek polinom p z realnimi koeficienti in $B = q(A)$ za nek polinom q z realnimi koeficienti. Če matriki A in B zadoščata temu pogoju, potem bomo pisali $A \leftrightarrow B$. Ta relacija $\leftrightarrow$ razbije vsak ekvivalenčni razred v $\mathcal{A}_2$ na še manjše ekvivalenčne razrede. Ker pa je $A \leftrightarrow B$ natanko tedaj, ko je $\phi(A) \leftrightarrow \phi(B)$, se vsak tak razred preslika bijektivno na drugega znotraj večjega ekvivalenčnega razreda. Seveda se dva različna ekvivalenčna razreda preslikata s preslikavo ϕ v dva različna ekvivalenčna razreda.

Naj bo $A \in \mathcal{A}_3$. Potem je

$$A = S \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} S^{-1}$$

za neka realna števila a, c, $b \neq 0$ in neko obrnljivo matriko $S \in M_3(\mathbb{R})$. Matrika A komutira z idempotentno matriko P ranga ena

$$P = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} \in \mathcal{A}_1.$$

Naj bosta sedaj $A, B \in \mathcal{A}_3$. Če obstaja taka idempotentna matrika $P \in M_3(\mathbb{R})$ ranga ena, da matriki A in B komutirata s P, potem bomo pisali $A \sim_3 B$. Relacija $\sim_3$ je ekvivalenčna relacija na množici $\mathcal{A}_3$. Torej ta relacija množico $\mathcal{A}_3$ razbije na ekvivalenčne razrede. Ker je $P \in \mathcal{A}_1$, je $\phi(P) = P$, iz česar sledi, da se vsak tak razred preslika s preslikavo ϕ sam nase. Naj bo nadalje $A \sim_3 B$. Potem matriki A in B komutirata natanko tedaj, ko je $A = p(B)$ za nek polinom p z realnimi koeficienti in $B = q(A)$ za nek polinom q z realnimi koeficienti. Če matriki A in B zadoščata temu pogoju, potem bomo pisali kot zgoraj $A \leftrightarrow B$. Ta relacija $\leftrightarrow$ razbije vsak ekvivalenčni razred v $\mathcal{A}_3$ na še manjše ekvivalenčne razrede. Ker pa je $A \leftrightarrow B$ natanko tedaj, ko je $\phi(A) \leftrightarrow \phi(B)$, se vsak tak razred preslika bijektivno na drugega znotraj večjega ekvivalenčnega razreda. Seveda se dva različna ekvivalenčna razreda preslikata s preslikavo ϕ v dva različna ekvivalenčna razreda.

Tako opisana preslikava je bijektivna in ohranja komutativnost v obe smeri, vendar ni nujno standardne oblike. Prav tako v tem primeru nismo potrebovali predpostavke o zveznosti. Do enakega zaključka kot v izreku 4.1 ne bi prišli tudi v primeru, če bi dodali predpostavko o zveznosti.

4.2 Ohranjanje komutativnosti v eno smer

Pred kratkim je Šemrl [59] karakteriziral injektivne zvezne preslikave na $M_n(\mathbb{C})$, $n > 3$, ki ohranjajo komutativnost samo v eni smeri. Pokazal je, da je vsaka injektivna zvezna preslikava $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $n > 3$, ki ohranja komutativnost, bodisi oblike

$$\phi(A) = Tp_A(A)T^{-1}$$

za vse matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, bodisi oblike

$$\phi(A) = Tp_A(A^t)T^{-1}$$

za vse matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, bodisi oblike

$$\phi(A) = Tp_A(\overline{A})T^{-1}$$

za vse matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, bodisi oblike

$$\phi(A) = Tp_A(A^*)T^{-1}$$

za vse matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, kjer je $T \in M_n(\mathbb{C})$ obrnljiva matrika in $A \mapsto p_A(A)$ lokalno polinomska preslikava. Naravno vprašanje, ki si ga lahko zastavimo ob tem rezultatu, je, ali velja analogni rezultat tudi za realne matrike. Naslednji izrek odgovarja na to vprašanje pritrdilno.

Izrek 4.3 *Naj bo $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $n > 3$, zvezna injektivna preslikava, ki ohranja komutativnost. Potem obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{R})$ in taka lokalno polinomska preslikava $A \mapsto p_A(A)$, da je*

$$\phi(A) = Tp_A(A)T^{-1}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}), \quad \textit{ali}$$

$$\phi(A) = Tp_A(A^t)T^{-1}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Še preden se lotimo dokaza zgornjega izreka, bomo predstavili nekaj rezultatov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Potem seveda za vsak par realnih števil $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, velja $(rA + sI)' = A'$. Označimo z E_{ij} matriko, ki ima same ničle, le koeficient na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca je enak ena. Z direktnim računom lahko preverimo, da je komutant matrike E_{11} množica vseh realnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Komutant matrike E_{12} pa je množica vseh realnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} a & * & * & \dots & * \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Vsaka realna matrika ranga ena je podobna bodisi neničelnemu realnemu večkratniku matrike E_{11}, bodisi je podobna neničelnemu realnemu večkratniku matrike E_{12}. Iz tega sledi, da je dimenzija komutanta vsake realne matrike ranga ena $n^2 - 2(n-1)$. Še več, $\dim A' \geq n^2 - 2(n-1)$ natanko tedaj, ko je A realna linearna kombinacija skalarne matrike in matrike ranga ena.

V nadaljevanju bomo vektor $x \in \mathbb{R}^n$ obravnavali kot $n \times 1$ realno matriko. Tako sestavljajo standardno bazo prostora $\mathbb{R}^n$ matrike $e_1, e_2, \dots, e_n$, ki imajo vse koeficiente enake 0, razen enega, ki je enak 1. Nadalje, če sta $x, y \in \mathbb{R}^n$ dva neničelna vektorja, potem je xy^t matrika ranga ena. Še več, vsaka matrika ranga ena se lahko zapiše v taki obliki. Tako je $E_{ij} = e_i e_j^t$, $1 \leq i, j \leq n$. Če sta xy^t in uv^t dve matriki ranga ena, potem bomo pisali

$$xy^t \sim uv^t$$

natanko tedaj, ko sta bodisi vektorja x in u linearno odvisna, bodisi sta vektorja y in v linearno odvisna. Za neničelna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ bomo uporabljali naslednji dve oznaki

$$L_x = \{xv^t \ : \ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$

in

$$R_y = \{uy^t \ : \ u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Zlahka preverimo, da sta realni matriki A in B ranga ena v relaciji $A \sim B$ natanko tedaj, ko je $A, B \in L_x$ za nek neničelni vektor x, ali pa je $A, B \in R_y$ za nek neničelni vektor y.

V dokazu izreka 4.3 bomo uporabili naslednjo lemo, ki jo je Šemrl [59, Theorem 3.1] dokazal za kompleksna števila. Ker pa dokaz deluje tudi za polje realnih števil, ga bomo tukaj izpustili.

Lema 4.6 *Naj bo $n > 3$ in naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dve linearno neodvisni realni matriki ranga ena. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) $A \sim B$,
(ii) $\dim(A' \cap B') = n^2 - 3n + 3$,
(iii) $\dim(A' \cap B') \geq n^2 - 3n + 3$.

Glavna ideja dokaza izreka 4.3 je enaka ideji, ki jo je uporabil Šemrl [59, Theorem 3.1]. Ker imamo predpostavko o zveznosti, lahko uporabimo izrek [29, str. 344], ki pravi: če je U odprta podmnožica $\mathbb{R}^m$ in je $F : U \to \mathbb{R}^m$ zvezna injektivna preslikava, potem je tudi množica $F(U)$ odprta. Če je torej $m < k$, potem ne obstaja zvezna injektivna preslikava, ki slika iz prostora $\mathbb{R}^k$ v prostor $\mathbb{R}^m$. Naj bo sedaj $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ zvezna injektivna preslikava, ki ohranja komutativnost. Potem za vsako realno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ velja

$$\phi(A') \subseteq \phi(A)'.$$

Iz tega sledi, da dimenzija komutanta realne matrike A ne more biti večja od dimenzije komutanta njegove slike $\phi(A)$.

Dokaz izreka 4.3. Naj bo $n > 3$ in $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ zvezna injektivna preslikava, ki ohranja komutativnost. Ker je $\phi(A') \subseteq \phi(A)'$ za vsako realno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$, velja

$$\phi(M_n(\mathbb{R})) = \phi((tI)') \subseteq \phi(tI)' \subseteq M_n(\mathbb{R}),$$

kjer je t poljubno realno število. Iz tega sledi, da je

$$\phi(\mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}I,$$

saj $\phi(tI)'$ ne more biti pravi podprostor algebre $M_n(\mathbb{R})$ (glej razlago zgoraj).

Vemo že, da je $\dim A' \geq n^2 - 2(n-1)$ natanko tedaj, ko je A realna linearna kombinacija skalarne matrike in matrike ranga ena. Recimo, da obstaja taka matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ ranga ena in taki realni števili $r, s \in \mathbb{R}$, da $\phi(rA + sI)$ ni realna linearna kombinacija skalarne matrike in matrike ranga ena. Potem bi veljalo $\dim \phi(A') \leq \dim \phi(A)' < \dim A'$, kar pa je protislovje. S tem smo pokazali, da preslikava ϕ množico realnih linearnih kombinacij skalarne matrike in matrike ranga ena preslika samo vase.

V nadaljevanju bomo pokazali, da za vsako realno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ ranga ena obstaja tako neničelno realno število t, da $\phi(tA)$ ni skalarna matrika.

Predpostavimo nasprotno. Recimo, da je $\phi(tA) = f(t)I$, $t \in \mathbb{R}$, za neko zvezno injektivno preslikavo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prav tako že vemo, da je $\phi(tI) = g(t)I$, $t \in \mathbb{R}$, za neko zvezno injektivno preslikavo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pri tem poudarimo, da je slika preslikave g odprta podmnožica $\mathbb{R}$. Ker je f zvezna preslikava, velja $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = g(0)$. Iz tega sledi, da obstajata taki neničelni realni števili t_1 in t_2, da je $f(t_1) = g(t_2)$. To pa je v nasprotju z injektivnostjo preslikave ϕ. Torej za vsako realno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ ranga ena obstaja tako neničelno realno število t, taka realna matrika B ranga ena in taka skalarja $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, da je $\phi(tA) = rB + sI$. Še več,

$$\phi(\mathbb{R}A + \mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B + \mathbb{R}I.$$

Namreč, če bi obstajala taka realna skalarja $r \neq 0$ in s, da bi vejalo $\phi(rA + sI) \notin \mathbb{R}B + \mathbb{R}I$, potem bi preslikava ϕ preslikala množico

$A' = (rA + sI)'$ injektivno in zvezno v presek $B' \cap \phi(rA + sI)'$, ki pa bi bil prava podmnožica komutanta B'. To pa zaradi enakega razloga kot zgoraj (dimenzije komutantov) ni možno.

Naj bo $\phi(\mathbb{R}A+\mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B_1+\mathbb{R}I$ in $\phi(\mathbb{R}A+\mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B_2+\mathbb{R}I$ za dve realni matriki B_1 in B_2 ranga ena. Potem je $\mathbb{R}B_1+\mathbb{R}I = \mathbb{R}B_2+\mathbb{R}I$, iz česar sledi, da sta matriki B_1 in B_2 linearno odvisni. Če je torej $\phi(\mathbb{R}A+\mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B+\mathbb{R}I$, potem je matrika B enolično določena do linearne odvisnosti natančno.

Predpostavimo, da obstajata dve taki linearno neodvisni realni matriki A_1 in A_2 ranga ena, da je $\phi(\mathbb{R}A_1 + \mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B + \mathbb{R}I$ in $\phi(\mathbb{R}A_2 + \mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B + \mathbb{R}I$ za neko realno matriko B ranga ena. Potem je $\phi(A_1')$ odprta podmnožica B', ki vsebuje $\phi(0) = t_0 I$. Naj bo C realna matrika, ki komutira z A_2 in ne komutira z A_1, torej $C \in A_2' \setminus A_1'$. Ker je $\lim_{t\to 0} \phi(tC) = \phi(0) = t_0 I$, lahko najdemo tako neničelno realno število t, da je $\phi(tC) \in \phi(A_1')$. To pa je v nasprotju z injektivnostjo preslikave ϕ. Če sta torej A_1 in A_2 dve linearno neodvisni matriki ranga ena in je $\phi(\mathbb{R}A_k+\mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B_k+\mathbb{R}I$, $k = 1, 2$, za neki matriki B_1 in B_2 ranga ena, potem morata biti tudi matriki B_1 in B_2 linearno neodvisni.

Označimo z $M_n^1(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ množico vseh realnih matrik ranga ena. To seveda ni vektorski prostor. Lahko pa definiramo pripadajoči projektivni prostor kot množico

$$\mathbb{P}M_n^1(\mathbb{R}) = \{[A] \ : \ A \in M_n^1(\mathbb{R})\},$$

kjer je $[A] = \{tA \ : \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Za poljubno podmnožico $\mathcal{S} \subseteq M_n^1(\mathbb{R})$ bomo v nadaljevanju pisali $\mathbb{P}\mathcal{S} = \{[A] \ : \ A \in \mathcal{S}\}$. Razmislimo lahko, da ϕ inducira injektivno preslikavo $\varphi : \mathbb{P}M_n^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}M_n^1(\mathbb{R})$ definirano s predpisom

$$\varphi([A]) = [B],$$

kjer sta A in B taki realni matriki ranga ena, da je $\phi(\mathbb{R}A + \mathbb{R}I) \subseteq \mathbb{R}B + \mathbb{R}I$.

Recimo, da sta $A, B \in M_n^1(\mathbb{R})$ taki linearno neodvisni matriki ranga ena, da je $A \sim B$ in $\varphi([A]) = [A_1]$, $\varphi([B]) = [B_1]$. Ker je $\phi(A' \cap B') \subseteq A_1' \cap B_1'$ in velja lema 4.6, je

$$n^2 - 3n + 3 = \dim(A' \cap B') \leq \dim(A_1' \cap B_1').$$

Iz tega sledi, da sta tudi matriki A_1 in B_1 v relaciji ($A_1 \sim B_1$). To pomeni, da za vsak neničelni $x \in \mathbb{R}^n$ velja bodisi $\varphi(\mathbb{P}L_x) \subseteq \mathbb{P}L_z$ za nek neničelni $z \in \mathbb{R}^n$, bodisi je $\varphi(\mathbb{P}L_x) \subseteq \mathbb{P}R_y$ za nek neničelni $y \in \mathbb{R}^n$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da obstaja tak neničelni $x \in \mathbb{R}^n$, da je $\varphi(\mathbb{P}L_x) \subseteq \mathbb{P}L_z$ za nek neničelni $z \in \mathbb{R}^n$ (če je potrebno preslikavo ϕ komponiramo s preslikavo $A \mapsto A^t$).

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $\varphi(\mathbb{P}L_x) = \mathbb{P}L_z$. Vemo že, da preslikava ϕ slika $(n+1)$-dimenzionalni prostor $\{rI + xv^t \ : \ r \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n\}$ injektivno in zvezno v $(n+1)$-dimenzionalni prostor $\{rI + zv^t \ : \ r \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n\}$. Ker je slika prvega prostora odprta podmnožica drugega prostora in vsebuje vsaj eno skalarno matriko, velja $\varphi(\mathbb{P}L_x) = \mathbb{P}L_z$.

Naj bo $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Podprostora

$$V_1 = \{rI + xv^t \ : \ r \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n\}$$

in

$$V_2 = \{rI + uy^t \ : \ r \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^n\}$$

imata presek dimenzije 2

$$V_1 \cap V_2 = \{rI + sxy^t \ : \ r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Vemo že, da velja bodisi $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}L_u$ za nek neničelni $u \in \mathbb{R}^n$, bodisi je $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}R_v$ za nek neničelni $v \in \mathbb{R}^n$. V nadaljevanju bomo pokazali, da prva možnost ni mogoča.

Recimo, da je $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}L_u$ za nek neničelni $u \in \mathbb{R}^n$. Potem je bodisi $\mathbb{P}L_z \cap \mathbb{P}L_u = \emptyset$, ali pa je $\mathbb{P}L_z = \mathbb{P}L_u$. Če bi veljala prva možnost, potem bi se dvodimenzionalni presek $V_1 \cap V_2$ injektivno in zvezno slikal v enodimenzionalni prostor skalarnih matrik, kar pa ni možno. Torej velja $\mathbb{P}L_z = \mathbb{P}L_u$. V tem primeru se V_1 slika na neko množico W_1, ki je odprta podmnožica množice $\{rI + zv^t \ : \ r \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n\}$. Podobno se V_2 slika na neko množico W_2, ki je odprta podmnožica množice $\{rI + zv^t \ : \ r \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n\}$. Če je $\phi(V_1 \cap V_2)$ prava podmnožica $W_1 \cap W_2$, potem lahko najdemo taki matriki $A_1 \in V_1 \setminus (V_1 \cap V_2)$ in $A_2 \in V_2 \setminus (V_1 \cap V_2)$, da je $\phi(A_1) = \phi(A_2) \in W_1 \cap W_2$. To pa je v protislovju z injektivnostjo preslikave ϕ. Torej je $\phi(V_1 \cap V_2) = W_1 \cap W_2$, kar pa ponovno ni možno, saj je $V_1 \cap V_2$ prostor dimenzije 2, medtem ko je $W_1 \cap W_2$ neprazna podmnožica $(n+1)$-dimenzionalnega prostora.

Pokazali smo torej, da za vsak neničelni $y \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak neničelni $v \in \mathbb{R}^n$, da je $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}R_v$. Z enakimi argumenti kot zgoraj lahko pokažemo, da za vsak neničelni $x \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak neničelni $z \in \mathbb{R}^n$, da je $\varphi(\mathbb{P}L_x) = \mathbb{P}L_z$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je preslikava φ bijektivna. Vemo že, da je injektivna. Dokazati moramo še surjektivnost. Izberimo neničelna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ in naj bo $\varphi(\mathbb{P}L_x) = \mathbb{P}L_z$ in $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}R_v$. Nadalje, naj bo $A = pq^t$ poljubna realna matrika ranga ena. Če sta p in z linearno odvisna, potem je $[A]$ vsebovan v sliki preslikave φ. Enako velja, če sta q in v linearno odvisna. Predpostavimo torej, da sta p in z linearno neodvisna vektorja in prav tako q in v linearno neodvisna vektorja. Ker je $pv^t \in R_v$ in velja $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}R_v$, je $\varphi([p_1 y^t]) = [pv^t]$ za nek neničelni vektor $p_1 \in \mathbb{R}^n$. Podobno je $\varphi([xq_1^t]) = [zq^t]$ za nek neničelni vektor $q_1 \in \mathbb{R}^n$. Označimo $\varphi([p_1 q_1^t]) = [ab^t]$. Potem je $ab^t \sim pv^t$ in $ab^t \sim zq^t$. Če sta a in p linearno odvisna, potem sta a in z linearno neodvisna. Ker pa je $ab^t \sim zq^t$, sta b in q linearno odvisna. Torej je $[ab^t] = [pq^t] = [A]$ vsebovan v sliki preslikave φ. Če pa sta a in p linearno neodvisna, potem sta b in v linearno odvisna, saj je $ab^t \sim pv^t$. Ker je $ab^t \sim zq^t$, sta tudi a in z linearno odvisna. Iz tega sledi, da je $\varphi([p_1 q_1^t]) = [ab^t] = [zv^t] = \varphi([xy^t])$. Vektorja p_1 in x sta linearno odvisna, saj je preslikava φ injektivna. Ker pa je $\varphi([p_1 y^t]) = [pv^t]$, velja $\varphi(\mathbb{P}L_x) = \mathbb{P}L_p$. Iz tega sledi, da je $\varphi(\mathbb{P}L_x) = \mathbb{P}L_z$. Torej sta vektorja p in z linearno odvisna. Prišli smo do protislovja.

Naj bosta $A = xy^t$ in $B = uv^t$ dve taki realni matriki ranga ena, da je $AB = 0$ in $\varphi([A]) = [A_1]$, $\varphi([B]) = [B_1]$. Potem je seveda $y^t u = 0$. Pokazali bomo, da velja $A_1 B_1 = 0$. Vemo že, da je $\varphi(\mathbb{P}L_u) = \mathbb{P}L_z$ za nek neničelni $z \in \mathbb{R}^n$ in $\varphi(\mathbb{P}R_y) = \mathbb{P}R_w$ za nek neničelni $w \in \mathbb{R}^n$. Seveda je $A_1 \in R_w$ in $B_1 \in L_z$. Izberimo tako matriko $C \in L_u$, da sta A in C linearno neodvisni matriki, ki komutirata. Velja $\varphi([C]) = [C_1]$ in $C_1 \in L_z$. Iz tega sledi, da sta tudi matriki A_1 in C_1 linearno neodvisni in med seboj komutirata. Torej je $A_1 C_1 = 0$, oziroma $w^t z = 0$. S tem smo pokazali, da velja $A_1 B_1 = 0$.

Po [54, Lemma 2.2] obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{R})$, da je

$$\varphi([A]) = [TAT^{-1}], \qquad [A] \in \mathbb{P}M_n^1(\mathbb{R}).$$

Po komponiranju preslikave ϕ s podobnostno preslikavo,

$$A \mapsto T^{-1}AT,$$

lahko predpostavimo, da je T identična matrika. Torej za vsako realno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ ranga ena obstajata taki realni števili $r, s \in \mathbb{R}$, da je

$$\phi(A) = rA + sI.$$

Naj bo $P \in M_n(\mathbb{R})$ poljubna idempotentna matrika, $P \neq I, 0$. Potem je

$$P = S \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}$$

za neko obrnljivo matriko $S \in M_n(\mathbb{R})$. Matrika P komutira z vsemi realnimi večkratniki idempotentne matrike Q ranga ena, ki je oblike

$$Q = S \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je R idempotentna matrika ranga ena ustrezne dimenzije. Podobno P komutira z vsemi realnimi večkratniki idempotentne matrike Q ranga ena, ki je oblike

$$Q = S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je R idempotentna matrika ranga ena ustrezne dimenzije. Ker $\phi(tP)$, $t \in \mathbb{R}$, komutira z vsemi matrikami $\phi(rQ)$, kjer je r poljubno realno število, je $\phi(tP)$ linearna kombinacija matrike P in identične matrike I za vsako realno število t. Enako kot pri matrikah ranga ena lahko pokažemo, da obstaja vsaj eno tako realno število t, da $\phi(tP)$ ni skalarna matrika. Naj bo sedaj $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, ki komutira z matriko P. Potem $\phi(A)$ komutira z matriko $\phi(tP)$, iz česar sledi, da tudi $\phi(A)$ komutira z matriko P.

Naj bo $k > 1$ in $h = n - 2k$. Naj bodo nadalje a, b, c realna števila, $b \neq 0$, $S \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika in B matrika oblike

$$B = S\mathrm{diag}\,(\underbrace{C(a,b), C(a,b), \ldots, C(a,b)}_{k-\text{times}}, \underbrace{c, c, \ldots, c}_{h-\text{times}})S^{-1}. \quad (4.5)$$

Ker B komutira z idempotenti

$$\begin{gathered} S\mathrm{diag}\,(I,\ldots,0,0,\ldots,0)S^{-1}, \\ \vdots \\ S\mathrm{diag}\,(0,\ldots,I,0,\ldots,0)S^{-1}, \\ S\mathrm{diag}\,(0,\ldots,0,1,\ldots,0)S^{-1}, \\ \vdots \\ S\mathrm{diag}\,(0,\ldots,0,0,\ldots,1)S^{-1}, \end{gathered}$$

tudi matrika $\phi(B)$ komutira s temi idempotenti, iz česar sledi, da je

$$\phi(B) = S\mathrm{diag}\,(B_1, B_2, \ldots, B_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h)S^{-1},$$

kjer so $B_1, B_2, \ldots, B_k$ 2×2 matrike in $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h \in \mathbb{R}$. Naj bo

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker matrika B komutira z idempotentno matriko $P = S(D\oplus 0)S^{-1}$, kjer 0 označuje $(n-4)\times(n-4)$ ničelno matriko, tudi njena slika $\phi(B)$ komutira s to matriko. Iz tega sledi, da je $B_1 = B_2 = C(\alpha,\beta)$ za neki realni števili α in β. Na enak način bi pokazali, da je $B_i = C(\alpha,\beta)$, $i = 3,\ldots,k$. Kot zgoraj lahko uporabimo predpostavko o zveznosti in pokažemo, da obstaja vsaj ena taka matrika $B \in M_n(\mathbb{R})$ oblike (4.5), da ima njena slika $\phi(B)$ nerealno lastno vrednost $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. V primeru, ko je $k = 1$, matrika

$$B = S\mathrm{diag}\,(C(a,b), \underbrace{c, c, \ldots, c}_{(n-2)-\text{times}})S^{-1}$$

komutira z matriko

$$S\mathrm{diag}\,(C(a,b), C(a,b), \underbrace{c, c, \ldots, c}_{(n-4)-\text{times}})S^{-1},$$

iz česar sledi, da je

$$\phi(B) = S\mathrm{diag}\,(C(\alpha,\beta),\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-2})S^{-1}.$$

Naj bo sedaj $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizabilna matrika. Potem lahko pišemo

$$A = S\mathrm{diag}\,(C(a_1,b_1),C(a_2,b_2),\ldots,C(a_k,b_k),c_1,c_2,\ldots,c_h)S^{-1}$$

za neko obrnljivo matriko $S \in M_n(\mathbb{R})$ in neka realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k, c_1, c_2, \ldots, c_h$. Tukaj je seveda $k \geq 0$ in $h = n-2k$. Kot zgoraj lahko pokažemo, da je

$$\phi(A) = S\mathrm{diag}\,(A_1,A_2,\ldots,A_k,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_h)S^{-1},$$

kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 2×2 realne matrike in $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_h \in \mathbb{R}$. Ker matriki A in B komutirata, tudi matriki $\phi(A)$ in $\phi(B)$ komutirata. Torej je $A_i = C(\alpha_i,\beta_i)$, $i = 1,2,\ldots,k$, kjer sta α_i in β_i realni števili. S tem smo pokazali, da je $A\phi(A) = \phi(A)A$ za vsako diagonalizabilno realno matriko A. Ker pa je množica vseh diagonalizabilnih matrik gosta v $M_n(\mathbb{R})$, za vsako realno matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ velja $A\phi(A) = \phi(A)A$.

Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ minimalna matrika. Vemo že, da v tem primeru A komutira z matriko B natanko tedaj, ko je B polinom matrike A. Ker pa A komutira s svojo sliko $\phi(A)$, je $\phi(A) = p_A(A)$ za nek realen polinom p_A.

Pokazati še moramo, da za vsako matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ obstaja tak realen polinom p_A, da je $\phi(A) = p_A(A)$. Najprej bomo to dokazali za matrike s samimi realnimi lastnimi vrednostmi. Zaradi enostavnosti bomo v nadaljevanju obravnavali le matrike, ki imajo v jordanski kanonični formi le dva jordanska bloka, saj enaka ideja dokaza deluje tudi v splošnem. Naj bo torej

$$A = S\ \mathrm{diag}(J_k(a), J_{n-k}(b))\ S^{-1},$$

kjer sta a in b realni lastni vrednosti matrike A in je $k \geq n-k$. Če je $a \neq b$, potem je A minimalna matrika in je dokaz končan. Naj bo sedaj $a = b$. Označimo

$$A_m = S\ \mathrm{diag}(J_k(a), J_{n-k}(a + \frac{1}{m}))\ S^{-1}$$

kjer je $m \in \mathbb{N}$. Vemo že, da je $\phi(A_m) = p_{A_m}(A_m)$ za neke realne polinome p_{A_m}. Iz tega sledi, da je slika matrike A_m oblike

$$S \begin{bmatrix} \begin{matrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ 0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & c_1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} d_1 & d_2 & \dots & d_{n-k} \\ 0 & d_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & d_2 \\ 0 & 0 & \dots & d_1 \end{matrix} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Ker je $A = \lim_{m\to\infty} A_m$, velja $\phi(A) = \lim_{m\to\infty} \phi(A_m)$. Iz tega sledi, da je tudi $\phi(A)$ take oblike, kot so matrike $\phi(A_m)$. Pokazati še moramo, da je $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_{n-k} = d_{n-k}$. Matrika A komutira z idempotentno matriko

$$P = S \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je $Q = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Tukaj I označuje identično matriko ustrezne velikosti. Iz tega sledi, da tudi $\phi(A)$ komutira s P. Torej je $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_{n-k} = d_{n-k}$.

Pokazati še moramo, da je $\phi(A) = p_A(A)$ ze matrike oblike

$$A = S \ \mathrm{diag}(C_k(a,b), C_h(a,b)) \ S^{-1},$$

kjer je $S \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n = 2k + 2h$ in $k \geq h$. Če je n liho število, potem lahko gledamo matriko oblike $A = S \ \mathrm{diag}(C_k(a,b), C_h(a,b), c) \ S^{-1}$, kjer je c realno število in $n = 2k + 2h + 1$.

Označimo

$$A_m = S \ \mathrm{diag}(C_k(a,b), C_h(a + \frac{1}{m}, b)) \ S^{-1}$$

za vse $m \in \mathbb{N}$. Vemo že, da je $\phi(A_m) = p_{A_m}(A_m)$ za neke realne polinome p_{A_m}. Torej se vsaka matrika A_m preslika v matriko oblike

$$S \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je

$$B = \begin{bmatrix} C(c_1, d_1) & C(c_2, d_2) & \dots & C(c_k, d_k) \\ 0 & C(c_1, d_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C(c_2, d_2) \\ 0 & 0 & \dots & C(c_1, d_1) \end{bmatrix}$$

in

$$D = \begin{bmatrix} C(e_1, f_1) & C(e_2, f_2) & \dots & C(e_h, f_h) \\ 0 & C(e_1, f_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C(e_2, f_2) \\ 0 & 0 & \dots & C(e_1, f_1) \end{bmatrix}.$$

Seveda velja $A = \lim_{m\to\infty} A_m$. Torej je $\phi(A) = \lim_{m\to\infty} \phi(A_m)$. Iz tega sledi, da je tudi matrika $\phi(A)$ enake oblike, kot so matrike $\phi(A_m)$. Pokazati še moramo, da je $C(c_1, d_1) = C(e_1, f_1), \dots,$ $C(c_h, d_h) = C(e_h, f_h)$. Matrika A komutira z idempotentno matriko

$$P = S \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1},$$

kjer je

$$Q = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prva matrika I označuje $2k \times 2k$ identično matriko in druga matrika I označuje $2h \times 2h$ identično matriko. Torej tudi matrika $\phi(A)$ komutira z matriko P, iz česar sledijo enakosti $C(c_1, d_1) = C(e_1, f_1), \dots, C(c_h, d_h) = C(e_h, f_h)$. S tem je dokaz izreka končan. $\square$

5 Ohranjevalci urejenosti

Naj bo $M_n(\mathbb{F})$ algebra vseh $n \times n$ matrik nad poljem $\mathbb{F}$ in $P_n(\mathbb{F}) \subseteq M_n(\mathbb{F})$ množica vseh $n \times n$ idempotentnih matrik nad poljem $\mathbb{F}$. Za vsako idempotentno matriko $P \neq 0, I$ obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{F})$, da je

$$TPT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Množica $P_n(\mathbb{F})$ postane delno urejena množica, če vpeljemo relacijo $\leq$ s predpisom

$$P \leq Q \iff PQ = QP = P, \qquad P, Q \in P_n(\mathbb{F}).$$

Če je $P = 0$ ali $Q = I$ ali $P = Q$, potem je seveda $P \leq Q$. Sicer pa iz $P \leq Q$ sledi, da obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{F})$, da je

$$TPT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad TQT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\phi : P_n(\mathbb{F}) \to P_n(\mathbb{F})$ ***ohranja urejenost***, če iz $P \leq Q$ sledi $\phi(P) \leq \phi(Q)$, in ***ohranja urejenost v obe smeri***, če je $P \leq Q$ natanko tedaj, ko je $\phi(P) \leq \phi(Q)$.

Definicija 5.1 ***Avtomorfizem*** *delno urejene množice $P_n(\mathbb{F})$ je bijektivna preslikava $\phi : P_n(\mathbb{F}) \to P_n(\mathbb{F})$, ki ohranja urejenost v obe smeri.*

Idempotenta $P, Q \in P_n(\mathbb{F})$ sta *ortogonalna* natanko tedaj, ko je $PQ = QP = 0$. Če je $P = 0$ ali $Q = 0$ ali $P = I - Q$, potem sta seveda P in Q ortogonalna idempotenta. Če pa sta P in Q ortogonalna idempotenta in ni izpolnjen noben od zgoraj omenjenih trivialnih pogojev, potem obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_n(\mathbb{F})$, da je

$$TPT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad TQT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\phi : P_n(\mathbb{F}) \to P_n(\mathbb{F})$ ***ohranja ortogonalnost***, če sta $\phi(P)$ in $\phi(Q)$ ortogonalna idempotenta za vsak par ortogonalnih idempotentov P in Q.

Poleg matrične algebre $M_n(\mathbb{F})$ obstajajo tudi druge pomembne podalgebre in z njimi povezane delno urejene množice idempotentov. V tem poglavju bomo posvetili pozornost zgoraj trikotnim matrikam in delno urejeni množici zgoraj trikotnih idempotentnih matrik.

Naj bo $T_n(\mathbb{F})$ algebra vseh $n \times n$ zgoraj trikotnih matrik nad poljem $\mathbb{F}$ in $PT_n(\mathbb{F}) \subseteq T_n(\mathbb{F})$ množica $n \times n$ zgoraj trikotnih idempotentnih matrik nad poljem $\mathbb{F}$. Množica $PT_n(\mathbb{F})$ postane delno urejena množica, če vpeljemo relacijo $\leq$ s predpisom

$$P \leq Q \iff PQ = QP = P, \qquad P, Q \in PT_n(\mathbb{F}).$$

Enako kot zgoraj definiramo avtomorfizem delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$ kot bijektivno preslikavo, ki ohranja urejenost v obe smeri.

Opomba. Če je $P \in PT_n(\mathbb{F})$, potem obstaja taka obrnljiva matrika $T \in T_n(\mathbb{F})$, da je TPT^{-1} diagonalna matrika z ničlami in enicami po diagonali.

Če je $T \in T_n(\mathbb{F})$ obrnljiva matrika, potem ni težko videti, da je preslikava, ki vsaki zgoraj trikotni idempotentni matriki P priredi matriko TPT^{-1}, avtomorfizem delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$. Naj bo h avtomorfizem polja $\mathbb{F}$. Potem je preslikava $[p_{ij}] \mapsto [h(p_{ij})]$, $[p_{ij}] \in PT_n(\mathbb{F})$, prav tako avtomorfizem delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$. Naj bo $J = E_{n1} + E_{n-1,2} + \cdots + E_{1n}$ in $P \in PT_n(\mathbb{F})$. S P^f bomo označili matriko $P^f = JP^tJ$. Enako kot za prejšnja dva primera lahko preverimo, da je preslikava

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ 0 & 0 & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \mapsto$$

$$P^f = \begin{bmatrix} p_{nn} & p_{n-1,n} & p_{n-2,n} & \dots & p_{1n} \\ 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-2,n-1} & \dots & p_{1,n-1} \\ 0 & 0 & p_{n-2,n-2} & \dots & p_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{11} \end{bmatrix}$$

avtomorfizem delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$.

Izkaže se, da zgoraj opisane preslikave generirajo grupo vseh avtomorfizmov delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$, $n \geq 3$, ki ohranjajo ortogonalnost. Še več, vsaka bijektivna preslikava na $PT_n(\mathbb{F})$, $n \geq 3$, ki ohranja urejenost (samo v eni smeri) in ortogonalnost, je kompozitum teh preslikav, kar bomo pokazali v nadaljevanju.

Leta 1993 je Ovchinnikov [51] pokazal, da je vsak avtomorfizem delno urejene množice vseh $n \times n$ ($n \geq 3$) idempotentnih matrik nad poljem realnih števil ali nad poljem kompleksnih števil bodisi oblike

$$[p_{ij}] \mapsto T[h(p_{ij})]T^{-1}, \qquad [p_{ij}] \in P_n(\mathbb{F}),$$

bodisi oblike

$$[p_{ij}] \mapsto T[h(p_{ij})]^t T^{-1}, \qquad [p_{ij}] \in P_n(\mathbb{F}),$$

kjer je $T \in M_n(\mathbb{F})$ obrnljiva matrika in h avtomorfizem polja $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Pravzaprav je Ovchinnikov karakteriziral avtomorfizme delno urejene množice vseh idempotentov iz algebre vseh omejenih linearnih operatorjev na Hilbertovem prostoru, katerega dimenzija je večja od dva. Naravno vprašanje, ki si ga lahko ob tem postavimo, je, ali velja kaj podobnega za delno urejeno množico vseh zgoraj trikotnih idempotentnih matrik. Na to vprašanje nam odgovarja naslednji izrek.

Izrek 5.1 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje, $n \geq 3$ in $\phi : PT_n(\mathbb{F}) \to PT_n(\mathbb{F})$ bijektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Potem je bodisi*

$$\phi([p_{ij}]) = T[h(p_{ij})]T^{-1}, \qquad [p_{ij}] \in PT_n(\mathbb{F}), \tag{5.1}$$

bodisi

$$\phi([p_{ij}]) = T[h(p_{ij})]^f T^{-1}, \qquad [p_{ij}] \in PT_n(\mathbb{F}), \tag{5.2}$$

kjer je $T \in T_n(\mathbb{F})$ obrnljiva matrika in h avtomorfizem polja $\mathbb{F}$.

Posledica 5.1 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje, $n \geq 3$ in ϕ avtomorfizem delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$, ki ohranja ortogonalnost. Potem je ϕ bodisi oblike (5.1) bodisi oblike (5.2).*

Če primerjamo ta rezultat z Ovchinnikovim izrekom, vidimo, da smo dodali predpostavko o ohranjanju ortogonalnosti. Seveda je bil prvotni cilj pokazati zgornji izrek brez te dodatne predpostavke, vendar se je izkazalo, da je zgoraj trikotni primer veliko bolj zapleten in da grupa vseh avtomorfizmov delno urejene množice $PT_n(\mathbb{F})$ nima lepe strukture, kar bomo pokazali s primerom na koncu tega poglavja.

Drugo vprašanje se glasi: ali velja izrek 5.1 brez predpostavke o surjektivnosti? Odgovor na to vprašanje je pritrdilen za določena polja.

Izrek 5.2 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje z lastnostjo, da je vsak neničelni homomorfizem $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ surjektiven, in naj bo $\phi : PT_n(\mathbb{F}) \to PT_n(\mathbb{F})$, $n \geq 3$, injektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Potem je ϕ bodisi oblike (5.1) bodisi oblike (5.2).*

Ker je identična preslikava edini neničelni endomorfizem realnih števil, velja naslednja posledica.

Posledica 5.2 *Naj bo $\phi : PT_n(\mathbb{R}) \to PT_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, injektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Potem je bodisi*

$$\phi(P) = TPT^{-1}, \qquad P \in PT_n(\mathbb{R}),$$

bodisi

$$\phi(P) = TP^f T^{-1}, \qquad P \in PT_n(\mathbb{R}),$$

kjer je $T \in T_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika.

Naslednji primer bo pokazal, da obstajajo neinjektivne preslikave na delno urejeni množici zgoraj trikotnih matrik, ki ohranjajo urejenost in ortogonalnost in niso niti oblike 5.1 niti oblike 5.2.

Primer 5.1 Naj bo $\mathbb{F}$ polje in $\phi : PT_3(\mathbb{F}) \to PT_3(\mathbb{F})$ preslikava, ki vsako matriko $P \in PT_3(\mathbb{F})$ ranga ena preslika v 0, vsako matriko $P \in PT_3(\mathbb{F})$ ranga dva preslika samo vase ter $\phi(0) = 0$ in $\phi(I) = I$. Potem preslikava ϕ ohranja urejenost in ortogonalnost in ni niti oblike 5.1 niti oblike 5.2.

5.1 Zgoraj trikotne 3 $\times$ 3 idempotentne matrike

Izreka 5.1 in 5.2 bomo dokazali s pomočjo matematične indukcije po naravnem številu n. V tem poglavju bomo pokazali, da izreka veljata za 3×3 zgoraj trikotne idempotentne matrike.

V nadaljevanju bomo s $PT_3^k(\mathbb{F})$, $k = 1, 2$, označili množico vseh idempotentnih matrik $P \in PT_3(\mathbb{F})$ ranga k. Naj bosta $x, y \in \mathbb{F}$ poljubna skalarja in

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & y & xy \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označimo $\mathcal{A} = \{A(x,y) : x, y \in \mathbb{F}\} \subset PT_3(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} = \{B(x,y) : x, y \in \mathbb{F}\} \subset PT_3(\mathbb{F})$ in $\mathcal{C} = \{C(x,y) : x, y \in \mathbb{F}\} \subset PT_3(\mathbb{F})$. Vsak idempotent ranga ena iz $PT_3(\mathbb{F})$ ima na diagonali eno enico in dve ničli in ni težko videti, da je $PT_3^1(\mathbb{F})$ unija množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$.

Podobno naj bosta $u, v \in \mathbb{F}$ skalarja in

$$K(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & u & -uv \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označimo $\mathcal{K} = \{K(u,v) : u, v \in \mathbb{F}\} \subset PT_3(\mathbb{F})$, $\mathcal{L} = \{L(u,v) : u, v \in \mathbb{F}\} \subset PT_3(\mathbb{F})$ in $\mathcal{M} = \{M(u,v) : u, v \in \mathbb{F}\} \subset PT_3(\mathbb{F})$. Vsak idempotent ranga dva iz $PT_3(\mathbb{F})$ ima na diagonali eno ničlo in dve enici in ni težko videti, da je $PT_3^2(\mathbb{F})$ unija množic $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$.

Za poljubna idempotenta $P \in PT_3^1(\mathbb{F})$ in $Q \in PT_3^2(\mathbb{F})$ sta naslednji dve trditvi ekvivalentni:

(i) $P \leq Q$,

(ii) velja ena izmed naslednjih šestih točk:

1. $P = A(x, y)$ in $Q = K(u, v)$ za skalarje $x, y, u, v \in \mathbb{F}$, ki zadoščajo $y = vx + u$,
2. $P = A(x, y)$ in $Q = L(u, v)$ za skalarje $x, y, u, v \in \mathbb{F}$, ki zadoščajo $x = u$,
3. $P = B(x, y)$ in $Q = K(u, v)$ za skalarje $x, y, u, v \in \mathbb{F}$, ki zadoščajo $x = v$,
4. $P = B(x, y)$ in $Q = M(u, v)$ za skalarje $x, y, u, v \in \mathbb{F}$, ki zadoščajo $y = u$,
5. $P = C(x, y)$ in $Q = L(u, v)$ za skalarje $x, y, u, v \in \mathbb{F}$, ki zadoščajo $x = v$,
6. $P = C(x, y)$ in $Q = M(u, v)$ za skalarje $x, y, u, v \in \mathbb{F}$, ki zadoščajo $y = ux + v$.

Na množici $PT_3^1(\mathbb{F})$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom: $P \sim Q$ natanko tedaj, ko obstajata taka različna idempotenta $R_1, R_2 \in PT_3(\mathbb{F})$ ranga dva, da je $P \leq R_1$, $P \leq R_2$, $Q \leq R_1$ in $Q \leq R_2$. Če sta $P, Q \in PT_3^1(\mathbb{F})$ in velja $P \sim Q$, potem ni težko videti, da sta $P, Q \in \mathcal{A}$ ali $P, Q \in \mathcal{B}$ ali $P, Q \in \mathcal{C}$.

Ekvivalenca naslednjih dveh trditev je direktna posledica zgoraj opisanih lastnosti:

(i) $P \sim Q$,

(ii) velja ena izmed naslednjih štirih točk:

1. $P = A(x, y)$ in $Q = A(x, y')$ za neke skalarje $x, y, y' \in \mathbb{F}$,
2. $P = B(x, y)$ in $Q = B(x, y')$ za neke skalarje $x, y, y' \in \mathbb{F}$,
3. $P = B(x, y)$ in $Q = B(x', y)$ za neke skalarje $x, y, x' \in \mathbb{F}$,
4. $P = C(x, y)$ in $Q = C(x, y')$ za neke skalarje $x, y, y' \in \mathbb{F}$.

Če je $P = A(x, y)$ za neka skalarja x in y in $P \sim Q$ ter $Q \sim R$, potem je tudi $P \sim R$. Podobno, če je $P = C(x, y)$ za neka skalarja x in y in $P \sim Q$ ter $Q \sim R$, potem je tudi $P \sim R$. V nasprotju s tem pa za poljubna skalarja x, y velja $B(x, y) \sim B(x, y + 1)$ in $B(x, y + 1) \sim B(x + 1, y + 1)$ ter $B(x, y) \not\sim B(x + 1, y + 1)$. S tem smo pokazali, da sta za $P \in PT_3^1(\mathbb{F})$ naslednji trditvi ekvivalentni:

(i) $P \in \mathcal{B}$,

(ii) obstajata taka idempotenta $Q, R \in PT_3^1(\mathbb{F})$, da je $P \sim Q$, $Q \sim R$ in $P \not\sim R$.

V dokazu izreka 5.3 in dokazu izreka 5.5 bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 5.1 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje in $\phi : PT_3(\mathbb{F}) \to PT_3(\mathbb{F})$ injektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Potem je $\phi(PT_3^1(\mathbb{F})) \subseteq PT_3^1(\mathbb{F})$ in $\phi(PT_3^2(\mathbb{F})) \subseteq PT_3^2(\mathbb{F})$. Še več, $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ ali $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$, $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.*

Dokaz. Naj bo $P \in PT_3^1(\mathbb{F})$. Potem obstaja tak idempotent Q ranga dva, da je $0 \leq P \leq Q \leq I$. Ker je ϕ injektivna preslikava, ki ohranja urejenost, je $\phi(0) \leq \phi(P) \leq \phi(Q) \leq \phi(I)$ in $\phi(0) \neq \phi(P)$, $\phi(P) \neq \phi(Q)$, $\phi(Q) \neq \phi(I)$. Iz tega sledi, da je $\phi(0) = 0$, $\phi(I) = I$ in $\operatorname{rank}(\phi(P)) = 1$. Torej je $\phi(PT_3^1(\mathbb{F})) \subseteq PT_3^1(\mathbb{F})$ in podobno $\phi(PT_3^2(\mathbb{F})) \subseteq PT_3^2(\mathbb{F})$. Zgornji razmislek nam med drugim pove, da se relacija $\sim$ ohranja (t.j. $\phi(P) \sim \phi(Q)$ za vsak par idempotentov $P, Q \in PT_3^1(\mathbb{F})$ z lastnostjo $P \sim Q$).

Recimo, da je $\phi(B(0,0)) \in \mathcal{A}$. Za poljubna skalarja $x, y \in \mathbb{F}$ je $B(x,y) \sim B(x,0)$ in $B(x,0) \sim B(0,0)$, iz česar sledi, da je $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$. Podobno, če je $\phi(B(0,0)) \in \mathcal{B}$, potem je $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$, in če je $\phi(B(0,0)) \in \mathcal{C}$, potem je $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}$.

Naj bosta $u, v \in \mathbb{F}$ poljubna skalarja in predpostavimo, da je $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$. Ker sta $L(u,v)$ in $B(-v,-u)$ ortogonalna idempotenta, enako velja za $\phi(L(u,v))$ in $\phi(B(-v,-u))$. Iz tega sledi, da je $\phi(L(u,v)) \in \mathcal{M}$ (pri tem upoštevamo, da je $\phi(B(-v,-u)) \in \mathcal{A}$ in $\operatorname{rank}(\phi(L(u,v))) = 2$) in zato je $\phi(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{M}$. Ker je $A(x,y) \leq L(x,0)$ za poljubna skalarja x, y in $\phi(L(x,0)) \in \mathcal{M}$, je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, kar implicira $\phi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$, saj sta $M(u,v)$ in $A(-u,-v)$ ortogonalna idempotenta za vsak par $u, v \in \mathbb{F}$. Enako velja za množici $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$ (t.j. $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ in $\phi(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$).

Vemo že, da je $\phi(\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. V nadaljevanju bomo pokazali, da je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ ali $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$. Recimo, da obstajajo taki skalarji x_1, x_2, y_1, y_2, da je $\phi(A(x_1,y_1)) \in \mathcal{B}$ in $\phi(A(x_2,y_2)) \in \mathcal{C}$. Ker je $A(x_1,y_2) \sim A(x_1,y_1)$, je $\phi(A(x_1,y_2)) \in \mathcal{B}$. Po drugi strani pa je $A(x_1,y_2) \leq K(y_2,0)$ in zato je $\phi(A(x_1,y_2)) \leq \phi(K(y_2,0))$.

Upoštevamo, da je $\phi(A(x_2, y_2)) \leq \phi(K(y_2, 0))$, $\phi(A(x_2, y_2)) \in \mathcal{C}$ in $\phi(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$, iz česar sledi, da je $\phi(K(y_2, 0)) \in \mathcal{L}$, kar pa je protislovje. S tem smo pokazali, da je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ ali $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$ in enako velja za množico $\mathcal{C}$. Ker sta $A(0,0)$ in $C(0,0)$ ortogonalna idempotenta in ϕ ohranja ortogonalnost, je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ ali $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$.

Recimo, da je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ (dokaz je enak, če velja druga možnost). Po predpostavki je $\phi(B(0,0)) \in \mathcal{A}$. Če preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno podobnostno preslikavo, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(B(0,0)) = A(0,0)$. Naj bosta x in y poljubna skalarja. Ker je $B(x,y) \sim B(x,0)$ in $B(x,0) \sim B(0,0)$, je $\phi(B(x,y)) = A(0, g(x,y))$ za neko injektivno preslikavo $g : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$. Idempotenta $C(0,0)$ in $B(0,0)$ sta ortogonalna in enako velja za $C(0,0)$ ter $B(0,1)$ iz česar sledi, da sta tudi $\phi(C(0,0))$ in $\phi(B(0,0)) = A(0,0)$ ortogonalna idempotenta in prav tako $\phi(C(0,0))$ in $\phi(B(0,1)) = A(0, g(0,1))$. Ker je $\phi(C(0,0)) = C(x,y)$ za neka skalarja x, y, je $g(0,1) = 0$. Torej je $\phi(B(0,0)) = \phi(B(0,1))$, kar je v nasprotju z injektivnostjo preslikave ϕ. Enako pridemo do protislovja, če predpostavimo, da je $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}$. Torej smo pokazali, da je $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$. Potem pa lahko na enak način kot zgoraj dokažemo, da je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ ali $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$. S tem je dokaz leme končan. $\square$

Izrek 5.3 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje in $\phi : PT_3(\mathbb{F}) \to PT_3(\mathbb{F})$ bijektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Potem je ϕ bodisi oblike (5.1) bodisi oblike (5.2).*

Dokaz. Po lemi 5.1 je $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $\phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ ali $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$, $\phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da velja prva možnost (če je potrebno, preslikavo ϕ komponiramo s preslikavo $P \mapsto P^f$, $P \in PT_3(\mathbb{F})$). Potem pa je $\phi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, $\phi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ in $\phi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, saj ϕ ohranja ortogonalnost in je $\phi(PT_3^2(\mathbb{F})) = PT_3^2(\mathbb{F})$. Torej je $\phi(E_{11} + E_{22}) \in \mathcal{K}$. Če preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno podobnostno preslikavo, lahko predpostavimo, da je $\phi(E_{11} + E_{22}) = E_{11} + E_{22}$. Ker velja $\phi(E_{22}) \leq \phi(E_{11} + E_{22})$ in $\phi(E_{22}) \in \mathcal{B}$, je $\phi(E_{22}) = B(0, y)$ za nek skalar y. Če ϕ komponiramo s še eno podobnostno preslikavo, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(E_{11} + E_{22}) = E_{11} + E_{22}$ in $\phi(E_{22}) = E_{22}$. Potem pa obstaja taka injektivna preslikava $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, da je $\phi(A(x,0)) = A(f(x),0)$ za vsak $x \in \mathbb{F}$, saj je $E_{11} + xE_{12} \leq E_{11} + E_{22}$, $x \in \mathbb{F}$, in $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Naj bo x poljuben skalar. Potem obstajata taka skalarja $x_0, y_0 \in \mathbb{F}$, da je $\phi(A(x_0,y_0)) = A(x,0)$. Ker je $A(x_0,0) \sim A(x_0,y_0)$, je $A(f(x_0),0) = \phi(A(x_0,0)) \sim \phi(A(x_0,y_0)) = A(x,0)$, iz česar sledi, da je $f(x_0) = x$. S tem smo pokazali, da je preslikava f surjektivna.

Naj bo $y \in \mathbb{F}$. Potem je $A(x,0) \sim A(x,y)$ in zato je $A(f(x),0) \sim \phi(A(x,y))$. Iz tega sledi, da je $\phi(A(x,y)) = A(f(x),g(x,y))$ za neko preslikavo $g : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ z lastnostjo $g(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{F}$. Preslikava $\varphi : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$, definirana s predpisom $\varphi(x,y) = (f(x),g(x,y))$, je bijekcija. Naj bo $\Delta \subset \mathbb{F}^2$ premica, ki vsebuje vse točke (x,y), ki zadoščajo enakosti $y = ax + b$ za neka skalarja $a, b \in \mathbb{F}$. Potem je $A(x,y) \leq K(b,a)$ za vsako točko $(x,y) \in \Delta$. Vemo že, da je $\phi(K(b,a)) = K(d,c)$ za neka skalarja $c, d \in \mathbb{F}$, iz česar sledi, da je $A(f(x),g(x,y)) \leq K(d,c)$ za vsak par $(x,y) \in \Delta$. Naj bo $x_0 \in \mathbb{F}$. Potem obstajata taka skalarja x in y, da je $\phi(A(x,y)) = A(x_0, cx_0 + d)$. Ker je $A(x, ax+b) \leq K(b,a)$ in $A(x,ax+b) \sim A(x,y)$, je $\phi(A(x,ax+b)) = A(x_0, cx_0+d)$. Torej je $\varphi(\Delta)$ premica, ki vsebuje vse točke (x,y), za katere velja $y = cx + d$.

Vemo že, da se premice $\{(e,y) \ : \ y \in \mathbb{F}\}$ preslikajo s preslikavo ϕ na premice $\{(f(e),y) \ : \ y \in \mathbb{F}\}$, saj če je $y_0 \in \mathbb{F}$, potem obstajata taka skalarja x in y, da je $\phi(A(x,y)) = A(f(e),y_0)$. Ker je $A(x,0) \sim A(x,y)$ in $\phi(A(x,0)) = A(f(x),0)$, je $f(x) = f(e)$ in zato je $x = e$. Po osnovnem izreku afine geometrije je $\varphi(x,y) = (\alpha k(x) + \beta, \gamma k(x) + \delta k(y) + \sigma)$ za neke skalarje $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma$ in nek avtomorfizem k polja $\mathbb{F}$. Ker je $g(x,0) = 0$, je $\gamma = \sigma = 0$. Potem sta seveda skalarja α in δ neničelna. Če preslikavo ϕ komponiramo s podobnostno preslikavo $P \mapsto DPD^{-1}$, kjer je $D = \mathrm{diag}(1,\alpha,\delta)$, in nato še s preslikavo $[p_{ij}] \mapsto [k^{-1}(p_{ij})]$, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(E_{11}+E_{22}) = E_{11}+E_{22}$, $\phi(E_{22}) = E_{22}$ in

$$\phi(A(x,y)) = A(x+a,y), \qquad x, y \in \mathbb{F},$$

za nek skalar $a \in \mathbb{F}$.

Vemo že, da je $\phi(E_{22}+E_{33}) \in \mathcal{M}$. Ker je $E_{22} = \phi(E_{22}) \leq \phi(E_{22} + E_{33})$, je $\phi(E_{22} + E_{33}) = M(0,v_0)$ za nek skalar $v_0 \in \mathbb{F}$. Prav tako je $xE_{23} + E_{33} \leq E_{22} + E_{33}$ za vsak $x \in \mathbb{F}$ in $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, iz česar sledi, da se množica vseh idempotentov oblike $xE_{23} + E_{33}$, $x \in$

$\mathbb{F}$, preslika v množico vseh idempotentov oblike $v_0E_{13} + xE_{23} + E_{33}$, $x \in \mathbb{F}$. Torej obstaja taka injektivna preslikava $f' : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, da je $\phi(C(x,0)) = C(f'(x), v_0)$, $x \in \mathbb{F}$. Še več, preslikava f' je surjektivna (glej prvi del dokaza). Za vsak skalar $y \in \mathbb{F}$ je $C(x,0) \sim C(x,y)$, iz česar sledi, da je $C(f'(x), v_0) \sim \phi(C(x,y))$. Torej je $\phi(C(x,y)) = C(f'(x), g'(x,y))$ za neko preslikavo $g' : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ z lastnostjo $g'(x,0) = v_0$, $x \in \mathbb{F}$. Preslikava $\varphi' : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ definirana s predpisom $\varphi'(x,y) = (f'(x), g'(x,y))$ je bijekcija. Enako kot zgoraj lahko pokažemo, da je

$$\phi(C(x,y)) = C(bh(x) + c, dh(y) + e), \qquad x, y \in \mathbb{F},$$

za neke skalarje $b, c, d, e = v_0$ ($b \neq 0$ in $d \neq 0$) in nek avtomorfizem h polja $\mathbb{F}$. Potem pa je

$$\phi(M(u,v)) = M(\frac{d}{b}h(u), dh(v) - \frac{cd}{b}h(u) + e), \qquad u, v \in \mathbb{F}.$$

Ker sta $A(x,y)$ in $M(-x,-y)$ ortogonalna idempotenta za vsak par $x, y \in \mathbb{F}$, je

$$A(x+a,y) \cdot M(-\frac{d}{b}h(x), -dh(y) + \frac{cd}{b}h(x) + e) = 0, \qquad x, y \in \mathbb{F}.$$

Torej je

$$x - \frac{d}{b}h(x) + a = 0 \quad \text{in} \quad y - dh(y) + \frac{cd}{b}h(x) + e = 0$$

za vsaka skalarja $x, y \in \mathbb{F}$, iz česar sledi, da je $a = c = e = 0$, $b = d = 1$ in h je identična preslikava na $\mathbb{F}$. Zato je $\phi(A(x,y)) = A(x,y)$, $\phi(C(x,y)) = C(x,y)$ in $\phi(B(x,y)) = B(x,y)$ za vsak par skalarjev $x, y \in \mathbb{F}$. Iz tega sledi, da je $\phi = I$. S tem je dokaz izreka končan. □

Dokaz izreka 5.5 je podoben dokazu izreka 5.3. Pravzaprav je edina razlika, da v dokazu izreka 5.5 uporabimo namesto osnovnega izreka afine geometrije naslednji izrek, ki ga bomo podali brez dokaza.

Izrek 5.4 *Naj bo $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ polje z lastnostjo, da je vsak neničelni homomorfizem $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ surjektiven, in $\varphi : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ injektivna kolineacija, katere slika ni vsebovana v nobeni afini hiperravnini.*

Potem obstaja taka obrnljiva matrika $T \in M_2(\mathbb{F})$, tak avtomorfizem k polja $\mathbb{F}$ ter skalarja $a, b \in \mathbb{F}$, da je

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T \begin{bmatrix} h(x) \\ h(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{F}.$$

Opomba. Tukaj $\mathbb{F}_2$ označuje polje z dvema elementoma.

Izrek 5.5 *Naj bo $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ polje z lastnostjo, da je vsak neničelni homomorfizem $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ surjektiven, in naj bo $\phi : PT_3(\mathbb{F}) \to PT_3(\mathbb{F})$ injektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Potem je ϕ bodisi oblike (5.1) bodisi oblike (5.2).*

Dokaz. Po lemi 5.1 je $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ ali $\phi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$, $\phi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ in $\phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da velja prva možnost (če je potrebno, preslikavo ϕ komponiramo s preslikavo $P \mapsto P^f$, $P \in PT_3(\mathbb{F})$). Potem pa je $\phi(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, $\phi(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ in $\phi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$, saj ϕ ohranja ortogonalnost in je $\phi(PT_3^2(\mathbb{F})) \subseteq PT_3^2(\mathbb{F})$. Torej je $\phi(E_{11} + E_{22}) \in \mathcal{K}$. Če preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno podobnostno preslikavo, lahko predpostavimo, da je $\phi(E_{11}+E_{22}) = E_{11}+E_{22}$. Ker velja $\phi(E_{22}) \leq \phi(E_{11} + E_{22})$ in $\phi(E_{22}) \in \mathcal{B}$, je $\phi(E_{22}) = B(0, y)$ za nek skalar y. Če ϕ komponiramo s še eno podobnostno preslikavo, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(E_{11} + E_{22}) = E_{11} + E_{22}$ in $\phi(E_{22}) = E_{22}$.

Kot v dokazu izreka 5.3 lahko pokažemo, da je $\phi(A(x, y)) = A(f(x), g(x, y))$, $x, y \in \mathbb{F}$, za neko preslikavo $g : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ z lastnostjo $g(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{F}$, in neko injektivno preslikavo $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Definirajmo preslikavo $\varphi : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ s predpisom $\varphi(x, y) = (f(x), g(x, y))$. Preslikava φ je seveda injektivna. Naj bo $\Delta \subset \mathbb{F}^2$ premica, ki vsebuje vse točke (x, y), ki zadoščajo enakosti $y = ax + b$ za neka skalarja $a, b \in \mathbb{F}$. Potem je $A(x, y) \leq K(b, a)$ za vsako točko $(x, y) \in \Delta$. Vemo že, da je $\phi(K(b, a)) = K(d, c)$ za neka skalarja $c, d \in \mathbb{F}$, iz česar sledi, da je $A(f(x), g(x, y)) \leq K(d, c)$ za vsak par $(x, y) \in \Delta$. Torej je $\varphi(\Delta) \subseteq \Delta'$, kjer je Δ' premica, ki vsebuje vse točke (x, y), za katere velja $y = cx + d$. Vemo že, da se premice $\{(e, y) \; : \; y \in \mathbb{F}\}$ preslikajo s preslikavo ϕ v premice $\{(f(e), y) \; : \; y \in \mathbb{F}\}$. Po izreku 5.4 je $\varphi(x, y) = (\alpha k(x) + \beta, \gamma k(x) + \delta k(y) + \sigma)$ za neke skalarje $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma$ in nek avtomorfizem k polja $\mathbb{F}$. Ker je $g(x, 0) = 0$, je

$\gamma = \sigma = 0$. Potem sta seveda skalarja α in δ neničelna. Če preslikavo ϕ komponiramo s podobnostno preslikavo $P \mapsto DPD^{-1}$, kjer je $D = \mathrm{diag}(1, \alpha, \delta)$, in nato še s preslikavo $[p_{ij}] \mapsto [k^{-1}(p_{ij})]$, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(E_{11}+E_{22}) = E_{11} + E_{22}$, $\phi(E_{22}) = E_{22}$ in

$$\phi(A(x,y)) = A(x+a,y), \qquad x,y \in \mathbb{F},$$

za nek skalar $a \in \mathbb{F}$. Na enak način kot v dokazu izreka 5.3 lahko pokažemo, da je

$$\phi(C(x,y)) = C(bh(x)+c, dh(y)+e), \qquad x,y \in \mathbb{F},$$

za neke skalarje $b, c, d, e = v_0$ ($b \neq 0$ in $d \neq 0$) in nek avtomorfizem h polja $\mathbb{F}$. Ker preslikava ϕ ohranja ortogonalnost, iz zgornjega sledi, da je $\phi(A(x,y)) = A(x,y)$, $\phi(C(x,y)) = C(x,y)$ in $\phi(B(x,y)) = B(x,y)$ za vsak par skalarjev $x, y \in \mathbb{F}$. Torej je $\phi = I$. S tem je dokaz izreka končan. $\square$

5.2 Zgoraj trikotne n × n idempotentne matrike

Naj bo $P = [p_{ij}] \in PT_n(\mathbb{F})$, $n \geq 3$, idempotentna matrika ranga ena s $p_{kk} = 1$, $1 \leq k \leq n$. Potem je

$$P = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & x_1 & x_1y_{k+1} & x_1y_{k+2} & \dots & x_1y_n \\ 0 \dots 0 & x_2 & x_2y_{k+1} & x_2y_{k+2} & \dots & x_2y_n \\ \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots 0 & x_{k-1} & x_{k-1}y_{k+1} & x_{k-1}y_{k+2} & \dots & x_{k-1}y_n \\ 0 \dots 0 & 1 & y_{k+1} & y_{k+2} & \dots & y_n \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

kjer so $x_1, \dots, x_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n \in \mathbb{F}$. Idempotent P ranga ena bomo označili s $P_k(x_1, \dots, x_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$.

Naslednjo lemo bomo uporabili v dokazu izreka 5.1.

Lema 5.2 *Naj bo $\mathbb{F}$ polje, $n > 3$ in $\phi : PT_n(\mathbb{F}) \to PT_n(\mathbb{F})$ injektivna preslikava, ki ohranja urejenost in ortogonalnost. Naj bo k naravno število, $1 \leq k \leq n$. Potem je $\phi(E_{kk}) = [q_{ij}]$ idempotent ranga ena s $q_{ll} = 1$ za nek indeks $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$. Še več, vsak idempotent $P = [p_{ij}]$ ranga ena s $p_{kk} = 1$ se preslika s preslikavo ϕ v idempotent $R = [r_{ij}]$ ranga ena z $r_{ll} = 1$.*

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da je $\operatorname{rank}(P) = \operatorname{rank}(\phi(P))$ za vsak idempotent $P \in PT_n(\mathbb{F})$. Naj bo torej $P \in PT_n(\mathbb{F})$ in $\operatorname{rank}(P) = m$, $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ker za vsako zgoraj trikotno idempotentno matriko R obstaja taka obrnljiva zgoraj trikotna matrika T, da je matrika TRT^{-1} diagonalna, obstaja zaporedje idempotentov $0 = P_0 < P_1 < \cdots < P_n = I$, pri čemer je $P = P_m$. Ker je preslikava ϕ injektivna in ohranja urejenost, je $\phi(P_0) < \phi(P_1) < \cdots < \phi(P_n)$. Torej je $\operatorname{rank}(\phi(P)) = \operatorname{rank}(\phi(P_m)) = m$. Iz tega sledi, da je $\phi(E_{kk}) = [q_{ij}]$ idempotent ranga ena s $q_{ll} = 1$ za nek $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$.

Naj bo i naravno število, $1 \leq i \leq n$, $i \neq k$. Potem je tudi $\phi(E_{ii})$ idempotentna matrika ranga ena s $p_{m_i m_i} = 1$ za nek $m_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq m_i \leq n$, $m_i \neq l$. Poleg tega je $m_i \neq m_j$, če je $i \neq j$, saj sta E_{ii} in E_{jj} ortogonalna idempotenta.

Recimo, da je $1 < k < n$, in naj bo $P = P_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ idempotentna matrika ranga ena za neke skalarje $x_1, \ldots, x_{k-1}$, $y_{k+1}, \ldots, y_n \in \mathbb{F}$. Naj bo nadalje $1 \leq i \leq k-1$ in $k+1 \leq j \leq n$. Označimo $Q_i = E_{ii} - x_i E_{ik}$ in $R_j = E_{jj} - y_j E_{kj}$. Idempotenta P in Q_i sta ortogonalna in prav tako idempotenta P in R_j. Iz tega sledi, da sta ortogonalna idempotenta $\phi(P)$ in $\phi(Q_i)$ in enako velja za $\phi(P)$ in $\phi(R_j)$.

Recimo, da je $k \neq 2, n-1$, in naj bo $1 \leq i < k-1$. Potem je $Q_i \leq E_{ii} + E_{i+1,i+1} + E_{kk}$. Vemo že, da je $\phi(E_{ii} + E_{i+1,i+1} + E_{kk})$ idempotentna matrika ranga tri. Naj bo $\mathcal{S}$ množica vsah idempotentov $S \in PT_n(\mathbb{F})$, za katere velja $S \leq E_{ii} + E_{i+1,i+1} + E_{kk}$, in $\mathcal{R}$ množica vseh idempotentov $R \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $R \leq \phi(E_{ii} + E_{i+1,i+1} + E_{kk})$. Množici $\mathcal{S}$ in $\mathcal{R}$ sta izomorfni množici $PT_3(\mathbb{F})$. Po naših predpostavkah se množica $\mathcal{S}$ preslika v množico $\mathcal{R}$. Vemo že, da je $\phi(E_{ii})$ idempotent ranga ena s $p_{m_i m_i} = 1$ za neko naravno število m_i, $1 \leq m_i \leq n$, $m_i \neq l$. Po lemi 5.1 se Q_i preslika v idempotent ranga ena s $p_{m_i m_i} = 1$. Enako velja za

Q_{k-1}, saj je $Q_{k-1} \leq E_{k-2,k-2}+E_{k-1,k-1}+E_{kk}$, in prav tako za R_j, $k+1 \leq j \leq n$ (če je $\phi(E_{jj})$ idempotent ranga ena s $p_{m_j m_j} = 1$, kjer je m_j naravno število, $1 \leq m_j \leq n$, $m_j \neq l$, potem je $\phi(R_j)$ idempotent ranga ena s $p_{m_j m_j} = 1$). Iz tega sledi, da je $\phi(P)$ idempotent ranga ena s $p_{ll} = 1$.

Naj bo $k = 2$. Potem je $Q_1 \leq E_{11} + E_{22} + E_{33}$. Kot zgoraj lahko pokažemo: če je $\phi(E_{11})$ idempotentna matrika ranga ena s $p_{m_1 m_1} = 1$ za neko naravno število m_1, $1 \leq m_1 \leq n$, $m_1 \neq l$, potem se Q_1 preslika v idempotent ranga ena s $p_{m_1 m_1} = 1$. Enako velja za R_j, $3 \leq j \leq n$ (če je $\phi(E_{jj})$ idempotent ranga ena s $p_{m_j m_j} = 1$, kjer je m_j naravno število, $1 \leq m_j \leq n$, $m_j \neq l$, potem je $\phi(R_j)$ idempotent ranga ena s $p_{m_j m_j} = 1$). Iz tega sledi, da je $\phi(P)$ idempotent ranga ena s $p_{ll} = 1$. Dokaz je enak, če je $k = n - 1$.

Pokazati še moramo, da trditev velja za $k = 1$ in $k = n$. Obravnavali bomo le prvi primer (za $k = n$ dokaz poteka na enak način). Naj bo torej $P = P_1(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ idempotentna matrika ranga ena za neke skalarje $y_2, y_3, \ldots, y_n \in \mathbb{F}$. Naj bo nadalje $2 \leq j \leq n$. Označimo $R_j = E_{jj} - y_j E_{1j}$. Idempotenta P in R_j sta ortogonalna. Zato sta tudi idempotenta $\phi(P)$ in $\phi(R_j)$ ortogonalna. Naj bo $2 < j \leq n$. Potem je $R_j \leq E_{11} + E_{j-1,j-1} + E_{jj}$. Vemo že, da je $\phi(E_{11} + E_{j-1,j-1} + E_{jj})$ idempotent ranga tri. Označimo s $\mathcal{S}$ množico vseh idempotentov $S \in PT_n(\mathbb{F})$, za katere velja $S \leq E_{11} + E_{j-1,j-1} + E_{jj}$, in z $\mathcal{R}$ množico vseh idempotentov $R \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $R \leq \phi(E_{11} + E_{j-1,j-1} + E_{jj})$. Množici $\mathcal{S}$ in $\mathcal{R}$ sta izomorfni množici $PT_3(\mathbb{F})$. Po naših predpostavkah se $\mathcal{S}$ preslika v množico $\mathcal{R}$. Vemo že, da je $\phi(E_{jj})$ idempotent ranga ena s $p_{m_j m_j} = 1$ za neko naravno število m_j, $1 \leq m_j \leq n$, $m_j \neq l$. Po lemi 5.1 se R_j preslika v idempotent ranga ena s $p_{m_j m_j} = 1$. Enako velja za R_2, saj je $R_2 \leq E_{11} + E_{22} + E_{33}$. Torej je $\phi(P)$ idempotent ranga ena s $p_{ll} = 1$. □

Dokaz izreka 5.1. Izrek 5.1 bomo pokazali s pomočjo matematične indukcije po naravnem številu n. Za $n = 3$ smo trditev že pokazali (izrek 5.3). Naj bo torej $n > 3$ in predpostavimo, da trditev velja za naravno število $n - 1$.

Pri dokazu indukcijskega koraka bomo večkrat uporabili naslednji dve opazki. Naj bo $m \geq 3$ in $1 \leq k \leq m$. Naj bo nadalje T obrnljiva $m \times m$ zgoraj trikotna matrika in h avtomorfizem polja $\mathbb{F}$. Če je $\phi([p_{ij}]) = T[h(p_{ij})]T^{-1}$ za vse idempotentne matrike $[p_{ij}] \in PT_m(\mathbb{F})$, potem ϕ preslika množico vseh idempotentnih matrik ranga ena s $p_{kk} = 1$ samo nase. Če pa je $\phi([p_{ij}]) = T[h(p_{ij})]^f T^{-1}$ za vsak idempotent $[p_{ij}] \in PT_m(\mathbb{F})$, potem pa ϕ preslika množico vseh idempotentnih matrik ranga ena s $p_{kk} = 1$ na množico vseh idempotentnih matrik ranga ena s $p_{m+1-k,m+1-k} = 1$.

Ker je $\operatorname{rank}(P) = \operatorname{rank}(\phi(P))$ za vsak idempotent $P \in PT_n(\mathbb{F})$ (glej dokaz leme 5.2), je matrika $\phi(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1})$ ranga $n-1$. Če preslikavo ϕ komponiramo s podobnostno preslikavo, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1})$ diagonalna matrika. Torej je $\phi(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}) = I - E_{kk}$ za neko naravno število k, $1 \le k \le n$. Naj bo $\mathcal{S}$ množica vseh takih idempotentnih matrik $P \in PT_n(\mathbb{F})$, za katere je $P \le E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}$, in naj bo $\mathcal{R}$ množica vseh idempotentnih matrik $Q \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $Q \le I - E_{kk}$. Množici $\mathcal{S}$ in $\mathcal{R}$ sta izomorfni množici $PT_{n-1}(\mathbb{F})$. Po naših predpostavkah se množica $\mathcal{S}$ preslika v množico $\mathcal{R}$.

Recimo, da obstaja taka idempotentna matrika $P = [p_{ij}] \in PT_n(\mathbb{F})$ ranga ena s $p_{mm} = 1$, $1 \le m \le n$, da velja $P \notin \mathcal{S}$ in $\phi(P) \in \mathcal{R}$. Potem je $\phi(P)$ idempotentna matrika ranga ena s $p_{ll} = 1$, kjer je $1 \le l \le n$ in $l \ne k$. Ker je $\phi(E_{mm})$ prav tako idempotentna matrika ranga ena s $p_{ll} = 1$ (glej lemo 5.2), je $m \ne n$ ($E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$ so paroma ortogonalni idempotenti in $E_{ii} \le E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}$, $1 \le i \le n-1$). Torej je $P = P_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ za neke skalarje $x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{m+1}, \ldots, y_n \in \mathbb{F}$. Naj bo $1 \le i \le m-1$ in $m+1 \le j \le n-1$. Označimo $Q_i = E_{ii} - x_i E_{im}$ in $R_j = E_{jj} - y_j E_{mj}$. Idempotenta P in Q_i sta ortogonalna in enako velja za P in R_j. Torej sta tudi idempotenta $\phi(P)$ in $\phi(Q_i)$ ortogonalna in prav tako $\phi(P)$ in $\phi(R_j)$. Naj bo $P' = P_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{m+1}, \ldots, y_{n-1}, 0)$. Seveda je $P' \in \mathcal{S}$ in zato je $\phi(P') \in \mathcal{R}$. Ker sta idempotenta P' in Q_i ortogonalna in tudi P' in R_j, sta idempotenta $\phi(P')$ in $\phi(Q_i)$ ortogonalna in enako velja za $\phi(P')$ in $\phi(R_j)$. Iz vsega tega sledi, da je $\phi(P') = \phi(P)$, kar pa je protislovje z injektivnostjo preslikave ϕ.

Recimo, da obstaja taka idempotentna matrika $Q \in PT_n(\mathbb{F})$ ranga m, $1 < m \le n-1$, da je $Q \notin \mathcal{S}$ in $\phi(Q) \in \mathcal{R}$. Pokazali bomo, da potem obstaja taka idempotentna matrika P ranga ena, da je $P \notin \mathcal{S}$ in $P \le Q$. Recimo, da to ni res. Ker je Q idempotent ranga m, obstajajo taki idempotenti $Q_1, \dots, Q_m$ ranga ena, da je $Q = Q_1 + \cdots + Q_m$ in $Q_i \leq Q$, $i = 1, \dots, m$. Po predpostavki je $Q_i \leq E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}$, $i = 1, \dots, m$. Torej je $Q(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}) = (Q_1 + \cdots + Q_m)(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}) = Q_1 + \cdots + Q_m = Q$ in prav tako je $(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1})Q = (E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1})(Q_1 + \cdots + Q_m) = Q_1 + \cdots + Q_m = Q$. Potem pa je $Q \in \mathcal{S}$, kar pa je protislovje. Torej obstaja taka idempotentna matrika P ranga ena, da je $P \notin \mathcal{S}$ in $P \leq Q$. Iz tega sledi, da je $\phi(P) \leq \phi(Q) \leq \phi(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1})$. Torej je $\phi(P) \in \mathcal{R}$, kar pa je protislovje (glej zgoraj). S tem smo pokazali, da se množica $\mathcal{S}$ preslika na množico $\mathcal{R}$.

Recimo, da je $1 < k < n$, kjer je k tako naravno število, da je $\phi(E_{11} + \cdots + E_{n-1,n-1}) = I - E_{kk}$. Po indukcijski predpostavki je

$$\begin{aligned}\phi(E_{11}) &= E_{11} + x_1E_{12} + \cdots + x_{k-2}E_{1,k-1} + x_{k-1}E_{1,k+1} \\ &\quad + \cdots + x_{n-2}E_{1n}, \\ \phi(E_{n-1,n-1}) &= E_{nn} + y_1E_{1n} + \cdots + y_{k-1}E_{k-1,n} + y_kE_{k+1,n} \\ &\quad + \cdots + y_{n-2}E_{n-1,n}\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned}\phi(E_{11}) &= E_{nn} + x_1E_{1n} + \cdots + x_{k-1}E_{k-1,n} + x_kE_{k+1,n} \\ &\quad + \cdots + x_{n-2}E_{n-1,n}, \\ \phi(E_{n-1,n-1}) &= E_{11} + y_1E_{12} + \cdots + y_{k-2}E_{1,k-1} + y_{k-1}E_{1,k+1} \\ &\quad + \cdots + y_{n-2}E_{1n}\end{aligned}$$

za neke skalarje $x_1, \dots, x_{n-2}, y_1, \dots, y_{n-2} \in \mathbb{F}$. Recimo, da velja prva možnost. Vemo že, da je $\phi(E_{22} + \cdots + E_{nn})$ idempotentna matrika ranga $n-1$. Ker sta E_{11} in $E_{22} + \cdots + E_{nn}$ ortogonalna idempotenta, je $\phi(E_{22} + \cdots + E_{nn}) = E_{22} + \cdots + E_{nn} - (x_1E_{12} + \cdots + x_{k-2}E_{1,k-1} + x_{k-1}E_{1,k+1} + \cdots + x_{n-2}E_{1n})$. Označimo s $\mathcal{S}'$ množico vseh takih idempotentov $P \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $P \leq E_{22} + \cdots + E_{nn}$, in naj bo $\mathcal{R}'$ množica vseh takih idempotentov $Q \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $Q \leq \phi(E_{22} + \cdots + E_{nn})$. Množici $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{R}'$ sta izomorfni množici $PT_{n-1}(\mathbb{F})$. Po naših predpostavkah se množica $\mathcal{S}'$ preslika na množico $\mathcal{R}'$ (glej zgoraj). Vemo že, da je $\phi(E_{n-1,n-1})$ idempotentna matrika ranga ena s $p_{nn} = 1$. Po indukcijski predpostavki pa se $\phi(E_{n-1,n-1})$ preslika v idempotent ranga ena z neničelnim diagonalnim koeficientom na tretjem ali predzadnjem mestu (pri tem smo uporabili indukcijsko predpostavko na zožitvi $\phi|\mathcal{S}' : \mathcal{S}' \to \mathcal{R}'$), kar pa je protislovje. Prav tako pridemo v protislovje, če predpostavimo drugo možnost.

Pokazali smo, da je $\phi(E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}) = E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}$ ali $\phi(E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}) = E_{22}+\cdots+E_{nn}$. Če preslikavo ϕ komponiramo s preslikavo $P \mapsto P^f$, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je

$$\phi(E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}) = E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}.$$

Ponovno uporabimo indukcijsko predpostavko, sedaj na množici vseh idempotentov, ki so pod $E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}$. Ta zožitev je lahko prvega tipa (5.1) ali drugega tipa (5.2). Najprej bomo pokazali, da mora biti prvega tipa. Recimo torej, da je

$$\phi(E_{11}) = E_{n-1,n-1} + x_1E_{1,n-1} + \cdots + x_{n-2}E_{n-2,n-1},$$

kjer so $x_1, \ldots, x_{n-2} \in \mathbb{F}$. Potem je

$$\phi(E_{n-1,n-1}) = E_{11} + y_1E_{12} + \cdots + y_{n-2}E_{1,n-1}$$

za neke skalarje $y_1, \ldots, y_{n-2} \in \mathbb{F}$. Enako kot zgoraj lahko pokažemo, da je $\phi(E_{22}+\cdots+E_{nn}) = E_{11}+\cdots+E_{n-2,n-2}+E_{nn} - (x_1E_{1,n-1}+\cdots+x_{n-2}E_{n-2,n-1})$ in da se množica vseh idempotentov $P \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $P \le E_{22}+\cdots+E_{nn}$, preslika na množico vseh idempotentov $Q \in PT_n(\mathbb{F})$, za katere velja $Q \le \phi(E_{22}+\cdots+E_{nn})$. Ampak $\phi(E_{n-1,n-1})$ je idempotentna matrika ranga ena s $p_{11} = 1$, protislovje. Pokazali smo torej, da je

$$\phi(E_{11}) = E_{11} + x_1E_{12} + \cdots + x_{n-2}E_{1,n-1}$$

za neke skalarje $x_1, \ldots, x_{n-2} \in \mathbb{F}$.

Naj bo kot zgoraj $\mathcal{S}$ množica vseh idempotentnih matrik $P \in PT_n(\mathbb{F})$, ki zadoščajo $P \le E_{11}+\cdots+E_{n-1,n-1}$. Po naših predpostavkah se množica $\mathcal{S}$ preslika sama nase. Predpostavimo lahko (po komponiranju preslikave ϕ s podobnostno preslikavo in nato še s preslikavo $[p_{ij}] \mapsto [h(p_{ij})]$, kjer je h ustrezen avtomorfizem polja $\mathbb{F}$), da je $\phi(P) = P$ za vsako idempotentno matriko $P \in \mathcal{S}$. Ker sta E_{11} in $E_{22}+\cdots+E_{nn}$ ortogonalna idempotenta in je $\phi(E_{11}) = E_{11}$, je

$\phi(E_{22}+\cdots+E_{nn}) = E_{22}+\cdots+E_{nn}$. Naj bo $\mathcal{S}'$ množica vseh idempotentnih matrik $P \in PT_n(\mathbb{F})$, za katere velja $P \leq E_{22}+\cdots+E_{nn}$. Enako kot zgoraj lahko pokažemo, da se množica $\mathcal{S}'$ preslika sama nase. Množica $\mathcal{S}'$ je prav tako izomorfna množici $PT_{n-1}(\mathbb{F})$. Torej mora biti zožitev preslikave ϕ na množico $\mathcal{S}'$ enaka eni izmed oblik (5.1) ali (5.2). Ker je $\phi(P) = P$ za vse matrike $P \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$, mora biti ustrezen avtomorfizem h polja $\mathbb{F}$ identična preslikava in zožitev preslikave ϕ na množico $\mathcal{S}'$ mora biti prvega tipa. Prav tako mora biti $(n-1)\times(n-1)$ matrika T, ki inducira podobnostno preslikavo, posebne oblike. Pravzaprav je matrika T vsota identične matrike in matrike, ki ima neničelne koeficiente le v zadnjem stolpcu. Če torej našo preslikavo ϕ komponiramo z ustrezno podobnostno preslikavo, lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $\phi(P) = P$ za vsako matriko $P \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$. V nadaljevanju bomo pokazali, da je $\phi(P) = P$ za vsak idempotent $P \in PT_n(\mathbb{F})$ ranga ena, iz česar sledi, da je $\phi = I$.

Naj bo $P = P_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ idempotent ranga ena s $p_{kk} = 1$, kjer je $1 < k < n$. Naj bo nadalje $1 \leq i \leq k-1$ in $k+1 \leq j \leq n$. Označimo $Q_i = E_{ii} - x_i E_{ik}$ in $R_j = E_{jj} - y_j E_{kj}$. Vemo že, da je $\phi(Q_i) = Q_i$ za vse i, $1 \leq i \leq k-1$, in da je $\phi(R_j) = R_j$ za vse j, $k+1 \leq j \leq n$. Idempotenta P in Q_i sta ortogonalna in enako velja za P in R_j. Iz tega sledi, da je $\phi(P) = P$.

Pokazati še moramo, da je $\phi(P) = P$ za vsako idempotentno matriko ranga ena, ki je ene izmed naslednjih dveh oblik

$$\begin{bmatrix} 1 & \star & \star & \ldots & \star & p_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kjer je $p_{1n} \neq 0$. Obravnavali bomo le prvi primer (dokaz drugega primera poteka na enak način).

Označimo s $\mathcal{P}$ množico vseh idempotentnih matrik $P \in PT_n(\mathbb{F})$, za katere velja $P \leq E_{11} + E_{22} + E_{nn}$. Množica $\mathcal{P}$ je izomorfna množici $PT_3(\mathbb{F})$. Vemo že, da je $\phi(E_{11}+E_{22}+E_{nn})$ idempotentna matrika ranga tri. Ker sta idempotenta $E_{33}+\cdots+E_{n-1,n-1}$ in $E_{11}+E_{22}+E_{nn}$ ortogonalna in je $\phi(E_{33}+\cdots+E_{n-1,n-1}) = E_{33}+\cdots+E_{n-1,n-1}$, je $\phi(E_{11}+E_{22}+E_{nn}) = E_{11}+E_{22}+E_{nn}$. Iz tega sledi, da se množica $\mathcal{P}$ preslika s preslikavo ϕ sama nase. Ker je $\phi(P) = P$ za vsako idempotentno matriko $P \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$, je $\phi(P) = P$ za vsak $P \in \mathcal{P}$. Med drugim je $\phi(E_{11}+xE_{1n}) = E_{11}+xE_{1n}$ in $\phi(E_{nn}+xE_{1n}) = E_{nn}+xE_{1n}$ za vsak skalar x.

Naj bo $P = E_{11}+x_1E_{12}+\cdots+x_{n-1}E_{1n}$ za neke skalarje $x_1,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{F}$. Označimo $Q_i = E_{ii} - x_{i-1}E_{1i}$, kjer je $1 < i \leq n$. Vemo že, da je $\phi(Q_i) = Q_i$ za vse i, $1 < i \leq n$. Upoštevamo še, da sta P in Q_i ortogonalna idempotenta. Iz tega sledi, da je $\phi(P) = P$. S tem je dokaz izreka končan. □

Dokaz izreka 5.2. Če je $\mathbb{F}$ polje z več kot dvema elementoma, potem dokaz poteka na skoraj enak način kot dokaz izreka 5.1. Pravzaprav je edina razlika, da uporabimo izrek 5.5 namesto izreka 5.3. Vsi ostali koraki so enaki. Pri uporabi indukcijske predpostavke se celo izkaže, da je dokaz izreka 5.2 enostavnejši od dokaza izreka 5.1.

Preostane nam torej le še primer, ko je $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Potem pa je $PT_n(\mathbb{F}_2)$ končna množica in je zato injektivna preslikava ϕ avtomatično bijektivna. V tem primeru je torej izrek 5.2 direktna posledica izreka 5.1. □

V nadaljevanju bomo pokazali dva primera avtomorfizmov delno urejene množice $PT_3(\mathbb{F})$, ki nista niti oblike (5.1) niti oblike (5.2).

Primer 5.2 Naj bo h avtomorfizem polja $\mathbb{F}$ in naj bo $\phi : PT_3(\mathbb{F}) \to PT_3(\mathbb{F})$ preslikava, ki ničelno matriko preslika samo vase, identično matriko preslika v identično matriko in je na netrivialnih idempotentih definirana na naslednji način:
$A(x,y) \mapsto A(h(x),h(y)), \quad x,y \in \mathbb{F};$
$B(x,y) \mapsto B(h(x),y), \quad x,y \in \mathbb{F};$
$C(x,y) \mapsto C(x,y), \quad x,y \in \mathbb{F};$
$K(u,v) \mapsto K(h(u),h(v)), \quad u,v \in \mathbb{F};$
$L(u,v) \mapsto L(h(u),v), \quad u,v \in \mathbb{F};$
$M(u,v) \mapsto M(u,v), \quad u,v \in \mathbb{F}.$
Tako definirana preslikava ϕ je seveda bijektivna in ohranja urejenost v obe smeri, vendar ni niti oblike (5.1) niti oblike (5.2).

Primer 5.3 Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ poljubni skalarji, $a, c \neq 0$, in naj bo $\phi : PT_3(\mathbb{F}) \to PT_3(\mathbb{F})$ preslikava, ki ničelno matriko preslika samo vase, identično matriko preslika v identično matriko in je na netrivialnih idempotentih definirana na naslednji način:
$A(x, y) \mapsto A(ax + b, cy + d), \quad x, y \in \mathbb{F};$
$B(x, y) \mapsto B(\frac{c}{a}x, y), \quad x, y \in \mathbb{F};$
$C(x, y) \mapsto C(x, y), \quad x, y \in \mathbb{F};$
$K(u, v) \mapsto K(cu - \frac{bc}{a}v + d, \frac{c}{a}v), \quad u, v \in \mathbb{F};$
$L(u, v) \mapsto L(au + b, v), \quad u, v \in \mathbb{F};$
$M(u, v) \mapsto M(u, v), \quad u, v \in \mathbb{F}.$
Kot v prejšnjem primeru lahko preverimo, da je tako definirana preslikava ϕ bijektivna in ohranja urejenost v obe smeri, vendar ni niti oblike (5.1) niti oblike (5.2).

Literatura

[1] **J. Aczél, J. Dhombres**, Functional equations in several variables, Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[2] **B. Aupetit**, The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach Jordan algebras, J. Funct. Anal. 47 (1982), 1–6.

[3] **B. Aupetit**, A primer on spectral theory, Springer-Verlag, 1991.

[4] **B. Aupetit**, Spectrum-preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras, J. London Math. Soc. 62 (2000), 917–924.

[5] **B. Aupetit, H. du Mouton**, Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras, Studia Math. 109 (1994), 91–100.

[6] **L. Baribeau, T. Ransford**, Non-linear spectrum-preserving maps, Bull. London Math. Soc. 32 (2000), 8–14.

[7] **W. Benz**, Geometrische Transformationen, BI-Wissenschaftsverlag, Manheim-Leipzig-Wien-Zürich 1992.

[8] **M. Brešar**, Commuting traces of biadditive mappings, commutativity preserving mappings, and Lie mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 525–546.

[9] **M. Brešar, A. Fošner, P. Šemrl**, A note on invertibility preservers on Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 3833–3837.

[10] **M. Brešar, C. R. Miers**, Commutativity preserving mappings of von Neumann algebras, Canad. J. Math. 45 (1993), 695–708.

[11] **M. Brešar, P. Šemrl**, On local automorphisms and mappings that preserve idempotents, Studia Math. 113 (1995), 101–108.

[12] **M. Brešar, P. Šemrl**, Linear maps preserving the spectral radius, J. Funct. Anal. 142 (1996), 360–368.

[13] **M. Brešar, P. Šemrl**, Finite rank elements in semisimple Banach algebras, Studia Math. 128 (1998), 287–298.

[14] **M. Brešar, P. Šemrl**, Spectral characterization of idempotents and invertibility preserving linear maps, Expo. Math. 17 (1999), 185-192.

[15] **M. D. Choi, A. A. Jafarian, H. Radjavi**, Linear maps preserving commutativity, Linear Algebra Appl. 87 (1987), 227–241.

[16] **J. Dieudonne**, Sur une generalisation du groupe orthogonal a quatre variables, Arch. Math. 1 (1949), 282–287.

[17] **M. Eidelheit**, On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. 9 (1940), 97–105.

[18] **C.-A. Faure**, An elementary proof of the fundamental theorem of projective geometry, Geom. Dedicata 90 (2002), 145–151.

[19] **A. Fošner**, Ohranjevalci obrnljivosti na Banachovih algebrah, magistrsko delo, Maribor 2004.

[20] **A. Fošner**, Automorphisms of the poset of upper triangular idempotent matrices, Linear and Multilinear Algebra 53 (2005), 27–44.

[21] **A. Fošner**, Order preserving maps on the poset of upper triangular idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 403 (2005), 248–262.

[22] **A. Fošner**, Ohranjevalci na algebrah, doktorska disertacija, Maribor 2005.

[23] **A. Fošner**, Non-linear commutativity preserving maps on $M_n(\mathbb{R})$, Linear and Multilinear Algebra 53 (2005), 323–344.

[24] **A. Fošner**, A note on local automorphisms, Czech. Math. J. 56 (2006), 981–986.

[25] **A. Fošner**, Commutativity preserving maps on $M_n(\mathbb{R})$, Glas. Mat. 44 (2009), 127–140.

[26] **A. Fošner, P. Šemrl**, Spectrally bounded linear maps on $\mathcal{B}(X)$, Canad. Math. Bull. 47 (2004), 369–371.

[27] **A. Fošner, P. Šemrl**, Additive maps on matrix algebras preserving invertibility or singularity, Acta Math. Sinica 21 (2005), 681–684.

[28] **G. Frobenius**, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen I, Sitzungberichte Königlich Preussischen Akademie Wissenschaften Berlin (1897), 994-1015.

[29] **W. Fulton**, Algebraic topology: a first course, Springer, Graduate Texts in Mathematics vol 153, New York 1995.

[30] **A. Gleason**, A characterization of maximal ideals, J. Analyse Math. 19 (1967), 171–172.

[31] **I. N. Herstein**, Jordan homomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 331–341.

[32] **R. A. Horn, C. R. Johnson**, Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

[33] **L.-K. Hua**, A theorem on matrices over a field and its applications, Acta. Math. Sinica 1 (1951), 109–163.

[34] **N. Jacobson, C. Rickart**, Jordan homomorphisms of rings, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 479–520.

[35] **A. A. Jafarian, A. R. Suorour**, Spectrum preserving linear maps, J. Funct. Anal. 66 (1986), 255–261.

[36] **J. P. Kahane, W. Żelazko**, A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras, Studia. Math. 29 (1968), 339–343.

[37] **I. Kaplansky**, Algebraic and analytic aspects of operator algebras, American Mathematical Society, Providence 1970.

[38] **B. Kuzma**, Additive mappings decreasing rank one, Linear Algebra Appl. 348 (2002), 175–187.

[39] **D. Larson, A. R. Sourour**, Local derivations and local automorphisms of $\mathcal{B}(X)$, Proc. Symp. Pure Math. 51 (1990), 187–194.

[40] **C.-K. Li, S. Pierce**, Linear preserver problems, Amer. Math. Monthly 108 (2001), 591–605.

[41] **C.-K. Li, N.-K. Tsing**, Linear preserver problems : A brief introduction and some special techniques, Linear Algebra Appl. 162-164 (1992), 217–236.

[42] **M. Marcus, R. Purves**, Linear transformations on algebras of matrices: The invariance of the elementary symmetric functions, Canad. J. Math. 11 (1959), 383–396.

[43] **M. Mathieu**, Spectrally bounded traces on C^*-algebras, Bull. Austral. Math. Soc. 68 (2003), 169–173.

[44] **M. Mathieu, G. J. Schick**, First results on spectrally bounded operators, Studia Math. 152 (2002), 187–199.

[45] **M. Mathieu, G. J. Schick**, Spectrally bounded operators from von Neumann algebras, J. Operator Theory 49 (2003), 285-293.

[46] **B. S. Mityagin, I. S. Edelhstein**, Homotopy type of linear groups for two classes of Banach spaces, Funktsional. Anal. Prilozhen. 4 (1970), 61–72 (in Russian).

[47] **L. Molnár**, Orthogonality preserving transformations on indefinite inner product spaces: generalization of Uhlhorn's version of Wigner's theorem, J. Funct. Anal. 194 (2002), 248–262.

[48] **L. Molnár**, Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[49] **L. Molnár, P. Šemrl**, Some linear preserver problems on upper triangular matrices, Linear and Multilinear Algebra 45 (1998), 189–206.

[50] **M. Omladič, H. Radjavi, P. Šemrl**, Preserving commutativity, J. Pure Appl. Algebra 156 (2001), 309–328.

[51] **P. G. Ovchinnikov**, Automorphisms of the poset of skew projections, J. Funct. Anal. 115 (1993), 184–189.

[52] **C. Pearcy, D. Topping**, Sums of small numbers of idempotents, Michigan Math. J. 14 (1967), 453–465.

[53] **S. Pierce et al.**, A survey of linear preserver problems, Linear and Multilinear Algebra 33 (1992), 1–130.

[54] **L. Rodman, P. Šemrl**, Orthogonality preserving bijective maps on real and complex projective spaces, Linear and Multilinear Algebra. 54 (2006), 335–367.

[55] **A. R. Sourour**, Invertibility preserving linear maps on $\mathcal{L}(X)$, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 13–30.

[56] **P. Šemrl**, Linear maps that preserve the nilpotent operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 61 (1995), 523–534.

[57] **P. Šemrl**, Spectrally bounded linear maps on $\mathcal{B}(H)$, Quart. J. Math. Oxford 49 (1998), 87–92.

[58] **P. Šemrl**, Non-linear commutativity preserving maps, Acta Sci. Math. (Szeged) 71 (2005), 781–819.

[59] **P. Šemrl**, Commutativity preserving maps, Linear Algebra Appl. 429, (2008), 1051–1070.

[60] **P. Šemrl**, Non-linear commutativity preserving maps on hermitian matrices, Proc. R. Soc. Edinb. 139 (2008), 157–168.

[61] **W. Watkins**, Polynomial functions that preserve commuting pairs of matrices, Linear and Multilinear Algebra 5 (1977/78), 87–90.

[62] **A. Wilansky**, Subalgebras of $\mathcal{B}(X)$, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 355–360.

[63] **W. Żelazko**, A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras, Studia Math. 30 (1968), 83–85.