PRAVOKOTNIKI NA KRIVULJI

ŽIGA VIRK

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51M04 51M20

Pri podani enostavni sklenjeni krivulji v ravnini predstavimo nekaj konstrukcij večkotnikov, katerih oglišča ležijo na krivulji. Vprašanje obstoja kvadrata, katerega oglišča ležijo na taki krivulji, je odprto že več kot stoletje.

RECTANGLES ON A CURVE

We present some constructions of polygons, whose vertices lie on a given simple closed curve in the plane. The question whether such a square can always be found for a given curve has been open for more than a century.

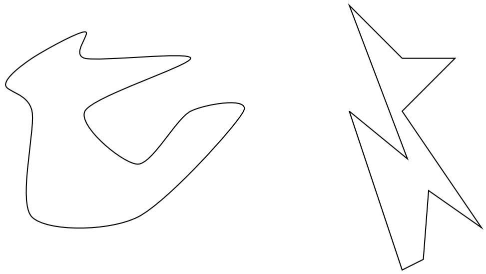
Definicije in zgodovinsko ozadje

Krivulja K v ravnini $\mathbb{R}^2$ je zvezna slika intervala. Krivulja je sklenjena, če je slika zaprtega enotskega intervala, pri čemer se prva in zadnja točka ujemata, tj. $K = f([0,1])$, pri čemer je $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ zvezna in $f(0) = f(1)$. Sklenjena krivulja je enostavna, če enakost $f(x) = f(y)$ pri pogoju $x < y$ velja samo za $x = 0, y = 1$. Enostavno sklenjeno krivuljo lahko ekvivalentno definiramo kot sliko injektivne zvezne preslikave iz krožnice v ravnino. Znameniti Jordanov izrek pravi, da enostavna sklenjena krivulja K ravnino razdeli na dva dela, izmed katerih je en del neomejen, drugi del, imenovan notranjost krivulje, pa je omejen. V čast Jordanu, ki je prvi formuliral in (večinoma) dokazal Jordanov izrek, pravimo enostavnim sklenjenim krivuljam Jordanove krivulje. Za Jordanovo krivuljo K naj $\widetilde{K}$ predstavlja unijo K ter njene notranjosti.

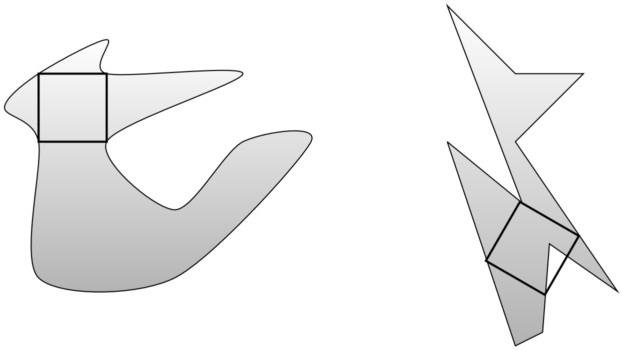
Jordanova krivulja K je poligonalna, če je sestavljena iz končnega števila daljic (slika 1). Ekvivalentno lahko rečemo, da je v tem primeru K slika kosoma linearne injektivne preslikave nekega n-kotnika v ravnino.

Naj bo K Jordanova krivulja in $A \subset \mathbb{R}^2$ m-kotnik v ravnini. A je *pričrtan* krivulji K, če vsa oglišča A ležijo na K. Če je $\widetilde{K}$ konveksna množica, tedaj pričrtan A leži v $\widetilde{K}$. V tem primeru bi lahko rekli, da je A včrtan v K. V primeru, ko $\widetilde{K}$ ni konveksna množica, lahko del pričrtanega A leži izven $\widetilde{K}$.

Ali lahko vsaki Jordanovi krivulji v ravnini pričrtamo kvadrat? (Kot »kvadrat« pri tem seveda ne mislimo točke, ki je sicer matematično duhovit



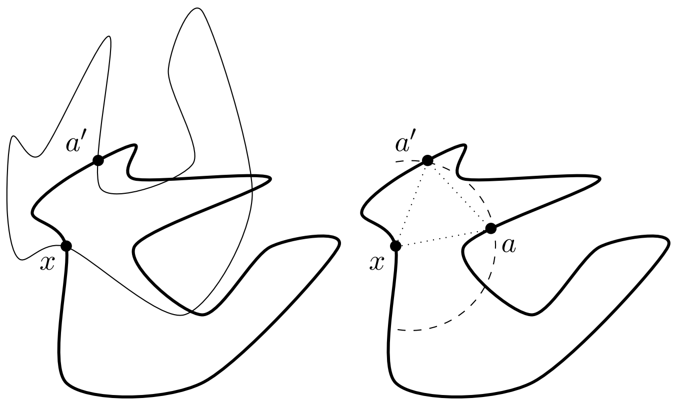
Slika 1. Primer gladke Jordanove krivulje (na levi) ter poligonalne Jordanove krivulje.



Slika 2. Primer pričrtanih kvadratov v gladko Jordanovo krivuljo (na levi) ter v poligonalno Jordanovo krivuljo.

primer kvadrata z ničelno stranico.) To je še vedno odprto vprašanje, ki ga je leta 1911 prvi formuliral Toeplitz [7]. Kljub enostavni formulaciji se je problem kmalu izkazal za precej težkega. Prvi dokaz posebnega primera je objavil Emch [2]. Do danes je bilo objavljenih mnogo člankov na to temo, od katerih pa še noben ni odgovoril na originalno vprašanje. Članki so večinoma vsebovali pritrdilen odgovor na Toeplitzovo vprašanje pod posebnimi pogoji, ki so s časom postajali vse bolj splošni. V času pisanja tega članka sta bila zadnja prispevka na to temo ([1] in [4]) objavljena v razmaku enega tedna okoli novega leta 2018. Za podrobno zgodovinsko ozadje bralcu priporočamo pregledni članek [3].

V tem prispevku bomo predstavili nekaj načinov, kako lahko ustrezno lepi Jordanovi krivulji pričrtamo trikotnik, pravokotnik ali kvadrat.



Slika 3. Primer enakostraničnega trikotnika, vrisanega v gladko Jordanovo krivuljo iz dokaza trditve 1.

Pričrtani trikotniki

Kaj je tako posebnega pri vrisanih štirikotnikih v primerjavi z drugimi n-kotniki? V tem delu pokažemo, da je pričrtavanje trikotnikov enostavno, večkotnika pa včasih sploh ne moremo pričrtati.

Trditev 1. *Naj bo K gladka Jordanova krivulja. Tedaj je vsaka točka na K oglišče vsaj enega pričrtanega enakostraničnega trikotnika.*

Dokaz. Izberimo $x \in K$. Krivuljo K zavrtimo okoli x za kot $\pi/3$ in tako dobljeno krivuljo imenujmo K'. Ker je K gladka, krivulja K' pri x seka krivuljo K, oziroma izstopi iz njene notranjosti. Torej mora K' nekje drugje vstopiti v notranjost K, kar pomeni, da $K \cap K'$ vsebuje vsaj še eno točko a', ki je različna od x (levi del slike 3). Naj bo a točka na K, dobljena z rotacijo točke a' okoli x za kot $-\pi/3$. Tedaj a in a' obe ležita na K, sta enako oddaljeni od x, kot (a, x, a') pa je $\pi/3$. Torej (a, x, a') določajo pričrtani enakostranični trikotnik (desni del slike 3). ∎

Izziv. Natančen pogled razkrije, da lahko prilagojen dokaz trditve 1 uporabimo tudi v primerih, ko:

- je K poligonalna Jordanova krivulja in x ni vozlišče K;
- je K poligonalna Jordanova krivulja in je x vozlišče K, pri katerem je notranji kot večji od $\pi/3$;

- je K gladka Jordanova krivulja in želimo pričrtati enakokraki trikotnik s poljubnim kotom.

Za vsakega izmed teh primerov poiščite ustrezen dokaz.

Trikotnikov torej ni težko pričrtati. Po drugi strani pa večkotnikov včasih ne moremo pričrtati. Bralec se lahko brez težav prepriča, da nobenega pravilnega n-kotnika za $n > 4$ ne moremo pričrtati dolgemu ozkemu pravokotniku. Prav tako za $n \geq 7$ pravilnega n-kotnika ne moremo pričrtati nobenemu trikotniku, saj oglišča takega večkotnika ne ležijo na treh premicah.

Pričrtani kvadrati

Oglejmo si najprej nekaj primerov pričrtanih kvadratov:

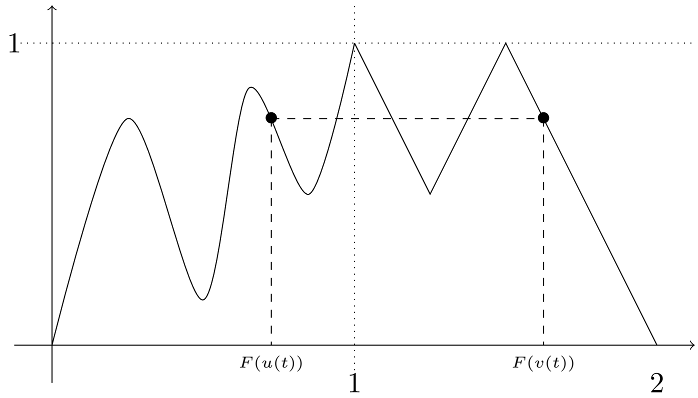
Primer 2. Naj bo K kvadrat. Tedaj je vsaka točka K oglišče pričrtanega kvadrata.

Primer 3. Naj bo K enakokrak trikotnik z enim kotom večjim od $\pi/2$. Če je kvadrat C pričrtan K, potem ima par oglišč na isti stranici trikotnika K. Ta stranica ne more biti krak, saj v tem primeru nobeno izmed preostalih oglišč zaradi pogoja o kotu ne more biti na drugem kraku. Zato mora biti omenjena stranica osnovnica, iz česar ni težko opaziti, da ima K natanko en pričrtan kvadrat.

V nadaljevanju si bomo pri pričrtavanju kvadratov pomagali z naslednjim izrekom o plezanju po gorah. Več o izreku v primeru kosoma linearnih funkcij najdemo v [6, Theorem 5.5].

Izrek 4 (Mountain Climbing Theorem). *Naj bo $F\colon [0,2] \to [0,1]$ zvezna funkcija, za katero velja $F(0) = F(2) = 0$ in $F(1) = 1$. Poleg tega predpostavimo, da je F na vsakem odprtem intervalu nekonstantna. Tedaj obstajata zvezni funkciji $u\colon [0,1] \to [0,1]$ in $v\colon [0,1] \to [1,2]$, za kateri velja $u(0) = 0, u(1) = 1 = v(1), v(0) = 2$ ter $F \circ u = F \circ v$.*

Dokaz. Podali bomo idejo dokaza v primeru, ko je F kosoma linearna funkcija. Definirajmo funkcijo $G\colon [0,1] \times [1,2] \to [-1,1]$ s predpisom $G(x,y) = F(x) - F(y)$. Množica $A = G^{-1}(0)$ je kosoma linearna (tj. sestavljena iz daljic, točk in trikotnikov) podmnožica v kvadratu $[0,1] \times [1,2]$. Množica A predstavlja vse pare koordinat (x,y), za katere velja $F(x) = F(y)$. Ker



Slika 4. Primer usklajenega plezanja na goro iz izreka 4. Vrh, kjer se plezalca srečata, je pri $(1, 1)$. Plezalca (piki) sta vseskozi na isti višini.

je F na vsakem odprtem intervalu nekonstantna, se da pokazati, da je A kombinatoričen graf, tj., A je sestavljena iz daljic in točk. Poleg tega velja, da iz vsakega vozlišča (točke) v A izhaja sodo mnogo povezav (daljic), razen iz vozlišč $(0, 2)$ ter $(1, 1)$, iz katerih izhaja natanko ena povezava. Ker ima vsaka povezana komponenta poljubnega grafa sodo število vozlišč, iz katerih izhaja liho mnogo povezav, se $(0, 2)$ ter $(1, 1)$ nahajata v isti komponenti A. Koordinatni projekciji poti med $(0, 2)$ ter $(1, 1)$ v A sta funkciji u in v. ■

Izrek 4 je dobil ime po interpretaciji v povezavi s plezanjem v gore (slika 4). Naj bo gora podana kot graf funkcije F, definirane na intervalu $[0, 2]$. Vrh gore bo v točki $(1, 1)$. Levo pobočje podaja funkcija $F|_{[0,1]}$, desno funkcija $F|_{[1,2]}$.

Plezalca začneta plezati na goro po grafu F, vsak iz svojega izhodišča na višini 0: levi plezalec začne v $(0, 0)$, desni pa v $(2, 0)$. Izrek 4 tedaj pove, da lahko plezalca izbereta taki poti u in v, da bosta med celotno potjo na vrh njuni višini enaki. Pri tem parametrizaciji u in v v splošnem nista monotoni, kar pomeni, da tako usklajena pot plezalcev včasih vključuje začasno vračanje po poti nazaj.

Trditev 5. *Naj bo* $F\colon [0, 2] \to [0, 1]$ *zvezna funkcija, katere ničli sta natanko* 0 *in* 2 *ter za katero velja* $F(1) = 1$. *Jordanovo krivuljo* K *definiramo kot unijo grafa funkcije* F *in daljice med točkama* $(0, 0)$ *ter* $(2, 0)$. *Tedaj obstaja kvadrat, pričrtan* K.

Dokaz. Z uporabo izreka 4 izberimo pripadajoči funkciji u in v. Opazimo, da za vsak $t \in [0, 1]$ točke $u(t), v(t), F(v(t)), F(u(t))$ tvorijo pričrtan pravokotnik krivulji K (slika 4). Razlika med višino ter dolžino pravokotnika je zvezna funkcija $R(t) = F(v(t)) - (v(t) - u(t))$. Opazimo, da je $R(0) = -2, R(1) = 1$, kar pomeni, da obstaja $s \in (0,1)$, za katerega velja $R(s) = 0$. Torej točke $u(s), v(s), F(v(s)), F(u(s))$ tvorijo pričrtan kvadrat. ■

Izziv. Z manjšo prilagoditvijo dokaza in izreka 4 posplošite trditev 5 na naslednje načine:

- V predpostavki uporabite poljubno zvezno funkcijo $F : [a,b] \to [0,c]$, katere edini ničli sta a in b, pri čemer velja $a < b$ ter $c > 0$;
- V predpostavki uporabite poljubno Jordanovo krivuljo, ki je simetrična glede na premico p;
- Pri predpostavkah trditve 5 za poljuben $k > 0$ pričrtajte pravokotnik, katerega razmerje med višino in dolžino je k.

Pričrtani pravokotniki

V tem delu si bomo ogledali konstrukcijo pričrtanih pravokotnikov splošni Jordanovi krivulji. Ta način je prvi predstavil Vaughan, v pisni obliki pa se pojavi v [5].

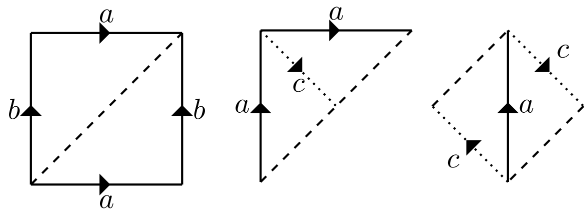
Izrek 6. *Naj bo K Jordanova krivulja. Tedaj obstaja pravokotnik, pričrtan K.*

Bistven korak v dokazu bo predstavljala naslednja trditev, ki opisuje prostor neurejenih parov točk na K. Prostor urejenih parov točk je $S^1 \times S^1$, kar je torus, saj je K homeomorfen krožnici S^1.

Trditev 7. *Naj bo P prostor vseh neurejenih parov točk na Jordanovi krivulji K. Tedaj je P homeomorfen Moebiusovemu traku.*

Dokaz. Oglejmo si prostor vseh neurejenih parov točk na K. Krivulja K je slika preslikave $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, pri čemer enakost $f(x) = f(y)$ pri pogoju $x < y$ velja samo za $x = 0, y = 1$.

Prvi način: Preslikava $F\colon [0,1] \times [0,1] \to P$, definirana kot $F(s,t) = \{f(s), f(t)\}$, je zvezna surjektivna preslikava, definirana na $[0,1]^2$. Njeno definicijsko območje je skicirano na levi strani slike 5. Na tem definicijskem območju bomo identificirali pare točk, ki se slikajo v isti neurejen par v P. Ker je $f(0) = f(1)$, to pomeni, da identificiramo:



Slika 5. Prostor neurejenih parov točk na krivulji je Moebiusov trak. Začnemo s prostorom urejenih parov, ki je torus (levi del). Neodvisnost od vrstnega reda točk pomeni, da identificiramo vsak par točk, ki je zrcalen glede na črtkasto diagonalo. Pri tem se identificirata stranici a in b. Na sliki vsako točko pod črtkasto diagonalo prenesemo na pripadajočo simetralno točko nad diagonalo. Posledično dobimo reprezentacijo na sredini. S prerezom vzdolž pikčaste poti c in preureditvijo dveh trikotnikov (lepljenjem vzdolž a) dobimo reprezentacijo na desni, ki predstavlja Moebiusov trak.

- $(s, 0) \sim (s, 1)$ za vsak $t \in [0, 1]$. To identifikacijo predstavlja identifikacija stranic a na sliki 5.
- $(0, t) \sim (1, t)$ za vsak $t \in [0, 1]$. To identifikacijo predstavlja identifikacija stranic b na sliki 5.

S to identifikacijo iz $[0, 1]^2$ dobimo torus. Ker pa slikamo v neurejene pare, moramo identificirati še $(s, t) \sim (t, s)$ za vsak $s, t \in [0, 1]$. To identifikacijo predstavlja identifikacija parov točk na levem kvadratu slike 5, ki so zrcalne glede na črtkasto diagonalo. Prostor na sredini slike 5, ki ga dobimo kot rezultat tega lepljenja, je homeomorfen P. Slika 5 demonstrira, da je rezultat Moebiusov trak.

Drugi način: Preslikava $G\colon [0, 1/2] \times [0, 1/2] \to P$, definirana kot $G(s, t) = \{f(s - t \pmod 1), f(s + t)\}$ je zvezna preslikava, definirana na $[0, 1/2]^2$, pri čemer $s - t \pmod 1 = (s - t) - \lfloor s - t \rfloor$ predstavlja decimalni del števila, npr. $0{,}2 \pmod 1 = 0{,}2$, $-0{,}2 \pmod 1 = 0{,}8$ ter $1 \pmod 1 = 0$. Z direktnim izračunom lahko preverimo, da je G surjektivna in da je injektivna na $[0, 1/2) \times [0, 1/2]$. Opazimo še, da velja $G(0, t) = G(1/2, 1/2 - t)$. Prostor P torej dobimo z identifikacijo $(0, t) \sim (1/2, 1/2 - t)$ na kvadratu $[0, 1/2]^2$, kar predstavlja standardno konstrukcijo Moebiusovega traku. ∎

Dokaz izreka 6. Po trditvi 7 je P, prostor vseh neurejenih parov točk na Jordanovi krivulji K, homeomorfen Moebiusovemu traku. V dokazu trditve 7 opazimo, da krožnica, ki je rob tako dobljenega Moebiusovega traku P, predstavlja vse pare točk oblike $(x, x) \in K \times K$. V prvem načinu dokaza trditve 7 krožnica sovpada z diagonalo v levem diagramu slike 5, v drugem pa s podprostorom $[0, 1/2] \times \{0, 1/2\}$ definicijskega območja preslikave G.

To robno krožnico identificiramo s krivuljo K, ter vzdolž nje na P prilepimo $\widetilde{K}$, ki je topološki disk. Zlepek X je povsem legitimen geometrijski objekt, ki pa se ga ne da vložiti v $\mathbb{R}^3$. Geometrijsko je namreč nazorno, da vzdolž robne komponente Moebiusovega traku v $\mathbb{R}^3$ ne moremo nalepiti diska. Formalen dokaz tega dejstva je tu opuščen.

Definirajmo sedaj zvezno preslikavo $F\colon X \to \mathbb{R}^3$:

- za $(x, y) \in \widetilde{K}$ definirajmo $F(x, y) = (x, y, 0)$;
- za točko na P, ki pripada paru točk $\{u, v\}$ na krivulji K, definiramo $F(\{u, v\}) = (\frac{u+v}{2}, ||u - v||)$, pri čemer je $||u - v||$ evklidska razdalja med u in v.

Preslikava F je zvezna na vsakem izmed kosov P in $\widetilde{K}$. Na preseku $P \cap \widetilde{K}$ se zapisa ujemata, ker je (z manjšo zlorabo zapisa) $F(\{u, u\}) = (u, 0) = F(u)$. Torej je F zvezna.

Preslikava F ne more biti injektivna, saj X ne moremo vložiti v $\mathbb{R}^3$. Zaradi tega sklepamo, da obstajata točki $p, q \in X$, za kateri velja $F(p) = F(q)$. Ker je F injektivna na disku $\widetilde{K}$ v ravnini $z = 0$, tretja koordinata slike vseh točk iz $X \setminus \widetilde{K}$ pa je pozitivna, mora veljati $p, q \notin \widetilde{K}$. Zato po definiciji F za $p = \{p_1, p_2\}, q = \{q_1, q_2\}$ velja $(\frac{p_1+p_2}{2}, ||p_1 - p_2||) = (\frac{q_1+q_2}{2}, ||q_1 - q_2||)$. Para točk p in q imata torej isto središčno točko, razdalji med točkama pa sta enaki v obeh parih. Para zato predstavljata diagonalna para točk pravokotnika. Torej p_1, q_1, p_2, q_2 določajo pričrtani pravokotnik. ∎

Opomba 8. Prostor X v dokazu izreka 6 je projektivna ravnina. Formalen dokaz dejstva, da se je ne da vložiti v $\mathbb{R}^3$, uporablja orodja algebrajske topologije.

LITERATURA

[1] A. Akopyan in S. Avvakumov, *Any cyclic quadrilateral can be inscribed in any closed convex smooth curve*, arXiv:1712.10205.

[2] A. Emch, *Some properties of closed convex curves in a plane*, Amer. J. Math **35** (1913), 407–412.

[3] B. Matschke, *A survey on the square peg problem*, Notices Amer. Math. Soc. **61** (2014), 346–352.

[4] B. Matschke, *Quadrilaterals inscribed in convex curves*, arXiv:1801.01945.

[5] M. D. Meyerson, *Balancing acts*, Topology Proc. 6: 59–75, 1981.

[6] I. Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010, dostopno na `www.math.ucla.edu/~pak/book.htm`, ogled 7. 11. 2018.

[7] O. Toeplitz, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn, **4** (1911), 197.