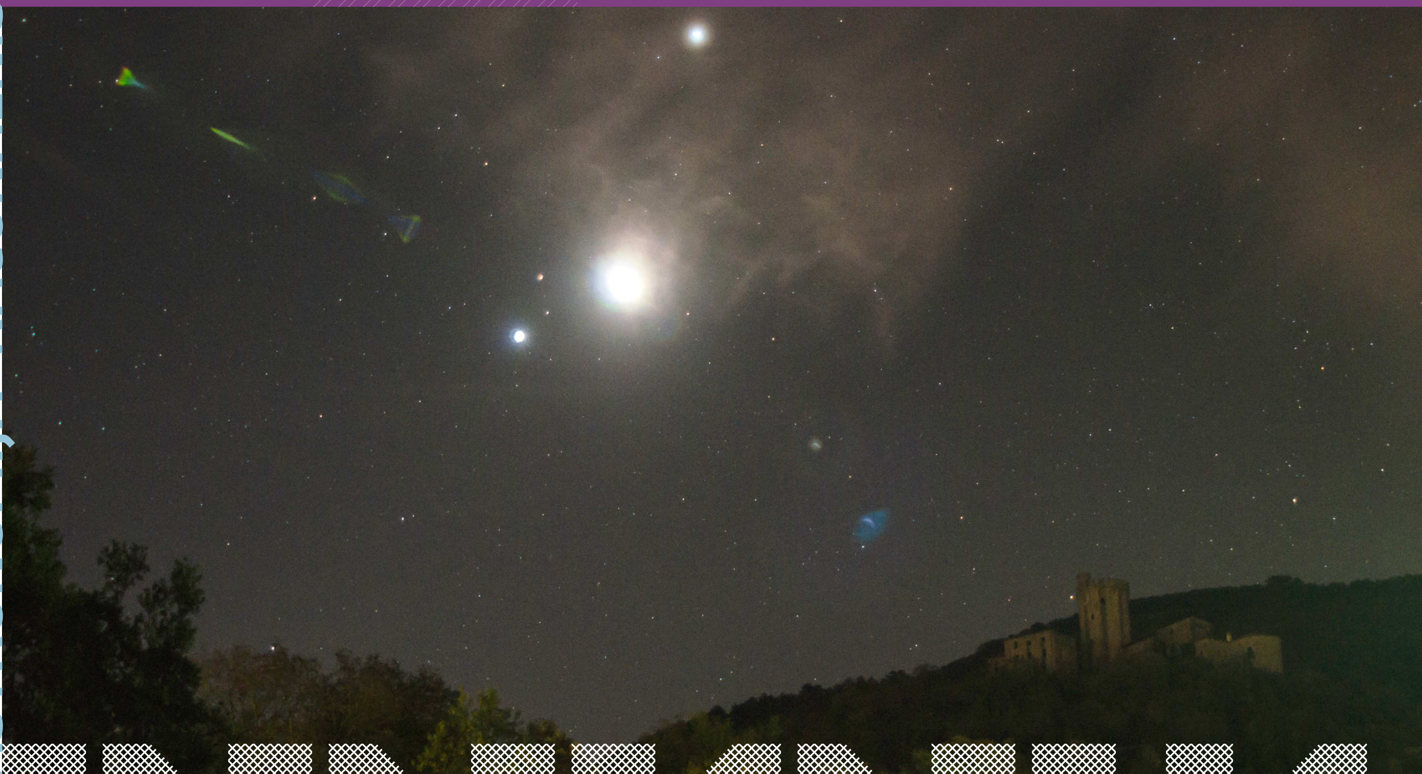
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

3

PRESEK LETNIK 43 (2015/2016) ŠTEVILKA 3



PRESEK

ISSN 0351-6652

9 770351 665333

Lasersko slikanje arheoloških najdišč

Vedno privlačna arheološka najdišča so žal pogosto zelo izpostavljena človeškim dejavnostim in vplivom okolja. Arheologi in inženirji s pomočjo laserjev slikajo strukture iz preteklosti in tako ustvarijo trirazsežne slike, na katere ne bosta vplivala onesnaženje in vandalizem. S pomočjo vektorske analize in linearne algebre pretvorijo milijarde meritev laserskih žarkov v koordinate. Primerjave zaporednih enakih meritev omogočajo konstrukcijo slik, ki so na milimeter natančne. Na ta način ohranijo strukture v digitalni obliki, ki velikokrat razkrije tudi skrivnosti o njihovi konstrukciji.

Lasersko slikanje iz zraka (obeta se tudi slikanje iz vesolja) prav tako uporabljajo za pridobivanje informacij o gozdovih, ki bi jih bilo zelo težko določiti na terenu. Zbrane podatke obdelajo ekologi za prve ocene statistik, npr. gostote gozdov, s pomočjo katerih lahko ocenijo porabo ogljikovega dioksida in vpliv požarov na različne vrste. Ker gozdovi žal hitreje propadajo kot rastejo, je to za gozdarje dirka s časom, za raziskovalce pa izziv, kako najti hitrejše in učinkovitejše algoritme za obdelavo zbranih podatkov.

Bolj radoveden bralec si lahko prebere članek *Least squares 3D surface and curve matching*, ki je izšel maja 2005 v reviji *ISPRS Journal of Photogrammerty and Remote Sensing*.

SLIKA.
Kondorjev tempelj, Machu Picchu, Center za napredne prostorske tehnologije Univerze v Arkansasu in Inštitut Cotsen za arheologijo UCLA.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 43, šolsko leto 2015/2016, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2015/2016 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Fotografija je bila posneta 7. novembra 2015 ob 5:20 v Braniku z objektivom Pentax 28-80, f/3,5 Takrat so bili nad jugovzhodnim obzorjem blizu skupaj Luna (najsvetlejši »madež« na sliki) in trije planeti: Jupiter (svetla pika zgoraj), Venera (svetla pika levo od Lune) in Mars (rdečkasta in manj svetla pika levo od Lune). Nebo se je poigralo še z oblaki, optika pa z odsevom cestne luči na lečah objektiva, o čemer je Aleš Mohorič pisal v prejšnji številki Preseka. Vse to daje fotografiji čarobno vzdušje, astronomsko gledano pa je povsem neuporabna. Poleg tega je objektiv »pričaral« še številne optične napake, saj zvezd ni preslikal v pike. Ali lahko ugotovite, katere optične napake so še vidne na fotografiji? Foto: Andrej Guštin.

Poslovil se je nestor slovenske matematike, akademik prof. dr. Ivan Vidav

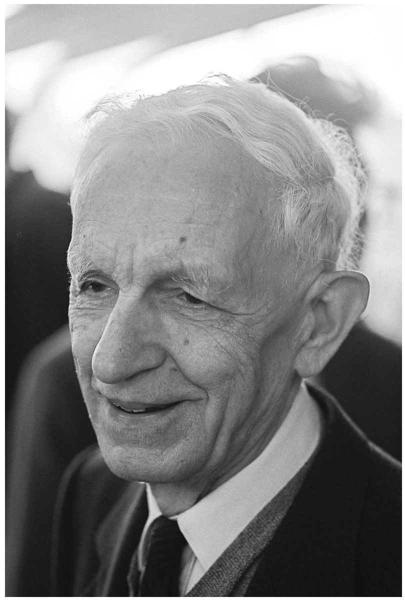
Marija Vencelj

Letos oktobra je v 98. letu starosti umrl eden največjih slovenskih matematikov, akademik profesor dr. Ivan Vidav. Njegov odhod je priložnost, da mlade bralce Preseka seznanimo z njegovim delom, ki je neposredno ali posredno preko njegovih učencev vplivalo tudi na razvoj Preseka.

Profesor Ivan Vidav se je rodil 1918. leta na Opčinah pri Trstu, osnovno šolo in gimnazijo obiskoval v Mariboru in se nato vpisal na študij matematike na ljubljanski univerzi. Diplomiral je aprila leta 1941, že mesec za tem pa tudi doktoriral pod mentorstvom profesorja Josipa Plemlja, enega od ustanoviteljev ljubljanske univerze in njenega prvega rektorja. S tako zgodnjim doktoratom je Ivan Vidav opozoril na svoj izjemni talent za matematiko. Profesor Plemelj mu je nato omogočil, da je svojo nadarjenost razvijal v okviru ljubljanske univerze. Postal je matematik svetovnega slovesa. Matematično znanost je obogatil s trajnimi prispevki, ki so priznani v svetovni matematični javnosti. Glavnino svojega življenja in dela pa je posvetil razvoju matematike na ljubljanski univerzi. Vzgojil je številne generacije slovenskih matematikov, napisal mnogo učbenikov, poljudnoznanstvenih knjig in člankov ter opravljal pomembne vodstvene funkcije na strokovnih področjih.

Mladim Presekovim bralcem so znanstvenoraziskovalna področja sodobne matematike razumljivo tuja, zato samo preletimo tovrstno profesorjevo delovanje.

V svojem zgodnjem raziskovalnem obdobju se je profesor Vidav ukvarjal s teorijo linearnih diferencialnih enačb, problemi aproksimacije, s harmoničnimi in subharmoničnimi funkcijami, pa tudi z geometrijo, ki se ji je sicer zares posvetil šele veliko kasneje.



Sredi petdesetih let preteklega stoletja ga je raziskovalno pritegnila funkcionalna analiza, tedaj novo hitro razvijajoče se področje matematike. Njej pripadajo Vidavova najboljša znanstvena dela. Ne samo to, nedvomno je bil eden od ustvarjalcev te veje matematike.

V svojem tretjem raziskovalnem obdobju se je profesor Vidav ukvarjal predvsem z uporabo funkcionalne analize v fiziki. Samostojno ali v sodelovanju z drugimi je objavil nekaj temeljnih člankov za razvoj tega področja. Za to svoje delo je leta 1970 prejel Kidričevo nagrado za izjemne znanstvene dosežke.

Njegovo nadaljnje delo zaznamuje velika širina. Omenimo le teorijo analitičnih funkcij, probleme operatorske teorije in nekatere mejne probleme med funkcionalno analizo in algebro.

Široki matematični in tehnični javnosti je bil morda profesor Vidav bolj kot znanstvenik poznan kot velik učitelj ter pisec strokovnih člankov in matematičnih knjig. Celo v svetovnem merilu ne najdemo veliko ljudi, ki zmorejo tako znanstveno delati kot pisati matematične knjige in biti hkrati odlični učitelji. Naš profesor je to bil.

Napisal je več kot dvajset matematičnih knjig, že na samem začetku svoje avtorske poti uspešnici Višja matematika I in Višja matematika II, visokošolska učbenika, za katera je leta 1952 prejel Prešernovo nagrado.

Poleg znanstvenih in strokovnih člankov, učbenikov in gradiv za študente je profesor Vidav pisal tudi za mladino in matematično manj izobražene bralce. V matematični zbirki Sigma so izšla tri njegova poljudnoznanstvena dela, za Presek je napisal 29 prispevkov[1]. Znal je in bil voljan pisati razumljivo in hkrati matematično korektno tudi za najskromnejše ljubitelje matematike.

Tudi kot univerzitetni učitelj matematike je profesor Vidav opravil velikansko delo. Dolga leta je zaradi pomanjkanja kadrov z velikim pedagoškim žarom in nedosegljivo kvaliteto opravljal najmanj dvojno učiteljsko delo. Predaval je številne specialne matematične predmete za študente matematike, nekaj časa tudi višjo matematiko za študente tehniških fakultet. Njegova zasluga je tudi organizacija znanstvenega dela iz matematike pri nas. Bil je prvi pobudnik podiplomskega študija matematike na ljubljanski univerzi in na začetku prevzel glavnino dela kot predavatelj in mentor.

Še bi lahko pripovedovali o njegovem delu v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, a naj za Presekove bralce povemo le, da je bil vrsto let tudi predsednik komisije za tekmovanje mladih matematikov.

Za svoje delo je poleg nagrad in priznanj, ki smo jih že omenili, profesor Vidav prejel številna visoka jugoslovanska priznanja, vsa izključno za svoje delo v matematiki. Leta 1992 je med prvimi v neodvisni Sloveniji prejel slovensko državno nagrado za življensko delo na raziskovalnem področju. Bil je redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti, častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter zaslužni profesor Univerze v Ljubljani, ki mu je leta 1997 podelila častni doktorat. Njegovi učenci in sodelavci smo bili zanesljivo bolj ponosni in veseli ob družbenih priznanjih, ki jih je prejel, kot on sam, ne nazadnje zaradi iskrenega prepričanja, da so se znašla v pravih rokah.

× × ×

Koliko je ura?

Ivan Vidav

→ **Gerald Weinstein je v časopisu *American Mathematical Monthly* postavil tole vprašanje: Ali lahko ugotovimo točen čas, če poznamo lego obeh kazalcev na uri, ne vemo pa, kateri kaže ure in kateri minute?**[2]

Odgovor se glasi: Ne vedno. Obstaja končno število leg kazalcev, pri katerih ne moremo določiti časa. To vidimo takole: Naj bo prvi kazalec med številkama a in $a+1$, in sicer naj bo njegova natančna lega $a+u$, $0 \leq u < 1$. (Dolžino med dvema zaporednima številkama na uri označimo torej z 1.) Lega drugega kazalca pa naj bo $b+v$, $0 \leq v < 1$. (Kadar je prvi (oz. drugi) kazalec med 12 in 1, vzamemo $a = 0$ (oz. $b = 0$).) Denimo, da prvi kazalec kaže ure. V času, ko je prišel od a do $a+u$, je drugi kazalec pretekel pot od številke 12 do $b+v$. Ker je hitrost drugega 12-krat večja, mora biti $12u = b+v$. Kadar ta enakost ni izpolnjena, prvi kazalec ne kaže ur temveč minute. Če pa je izpolnjena, nismo gotovi, da je urni kazalec. Poglejmo še drugi kazalec. Kakor pri prvem ugotovimo, da drugi ne kaže ur, kadar ni izpolnjena enakost $12v = a+u$. Na vprašanje, kateri je urni in kateri minutni kazalec, lahko odgovorimo, če ena od omenjenih enakosti ni izpolnjena. V dvomu pa smo

[1] Med prispevki, ki jih je za Presek napisal profesor Vidav, je tudi nekaj zanimivih nalog. Vsem je avtor dodal elegantne in natančne rešitve. V tej in naslednji številki ponovno objavljamo dve izmed njih.

[2] Amer. Math. Monthly, V. 99, 1992, str. 873, Naloga 10260.

tedaj, kadar sta izpolnjeni obe, kadar je torej

$$12u - v = b \quad \text{in} \quad -u + 12v = a.$$

Izračunajmo od tod u in v:

$$u = \frac{a + 12b}{143}, \quad v = \frac{12a + b}{143}. \tag{1}$$

Če je $a = b$, je tudi $u = v$; tedaj oba kazalca sovpadata in čas je določen. Koliko je ura, ne moremo ugotoviti le v primeru, ko je $a \neq b$ in se u in v izražata z (1). Lahko je namreč a ur in $5(b + v)$ minut ali pa b ur in $5(a + u)$ minut. Ker imamo za a dvanajst možnosti $a = 0, 1, \ldots, 11$) in pri izbranem a enajst možnosti za b (ker je $a \neq b$), je vseh leg $12 \times 11 = 132$. V teh primerih ne vemo, kateri je urni in kateri minutni kazalec; zato je različnih leg polovico manj, torej $132 : 2 = 66$. Weinstein je postavil še dodatno vprašanje: Kaj pa, če poznamo lego sekundnega kazalca, morda je tedaj čas vselej določen?

Denimo, da prvi kazalec kaže minute. Razmak med dvema številkama na uri pomeni 5 minut. Torej je preteklo $5u$ minut od trenutka, ko je bil ta kazalec usmerjan proti a. Število $5u$ ni nujno celo. Presežek nad celim številom pokaže sekundni kazalec (presežek ja treba pomnožiti s 60). Če se presežek ne sklada z lego sekundnega kazalca, potem prvi kazalec ne kaže minut temveč ure. Prav tako ugotovimo, da drugi kazalec ni minutni, kadar se z lego sekundnega kazalca ne ujema presežek števila $5v$ nad celim številom. V dvomu bi ostali tedaj, kadar bi bila oba presežka v skladu z lego sekundnega kazalca. V tem primeru pa bi morala biti oba presežka enaka in zato $5v - 5u$ celo število. Od prej vemo, da prideta v upoštev le u in v, ki se izražata z (1). Od tod izračunamo

$$5v - 5u = \frac{5 \cdot 11(a - b)}{143} = \frac{5(a - b)}{13}.$$

Desna stran je celo število le tedaj, če je razlika $a - b$ deljiva z 13. Ker sta a in b manjša od 12, mora biti $a - b = 0$, se pravi $a = b$. V tem primeru pa se kazala na uri ujemata in lahko razberemo, koliko je ura.

Tako smo ugotovili: Če poznamo lego obeh (velikih) kazalcev na uri in lego sekundnega kazalca, lahko določimo čas, čeprav ne vemo, kateri od kazalcev kaže ure in kateri minute.

×××

Matematik – pisatelj Kombinatorik

Ivan Pucelj

Znana čarovniška beseda ABRAKADABRA je vznemirila tudi tri šolarje: Miho, Jano in Jureta. To besedo so poskusili zapisati v »naravnem abecednem zaporedju« črk

- AAAAABBDKRR.

Jure je predlagal, naj v abecednem vrstnem redu zapišejo vse možne besede z 11 črkami, ki nastanejo, če vsakega od zgornjih simbolov uporabimo natanko enkrat.

»Koliko ›besed‹ bo imel ta slovar?« se sprašuje Miha.

»Na kateri strani in v kateri vrstici je beseda ABRAKADABRA, če ima vrstica dve besedi, stran pa 30 vrstic?« doda Jana.

»Koliko dragocenega časa bi porabil za izpis slovarja, če potrebujem sekundo za zapis črke?« vpraša Miha.

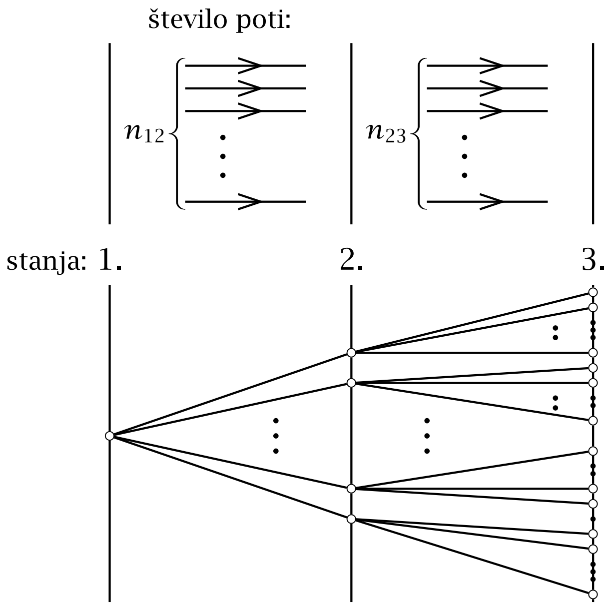
Problem, ki ga je zastavila naša trojka, je ena od osnovnih nalog kombinatorike, ki se ukvarja s *preštevanjem*.

Pa se še mi vključimo v reševanje zgornje naloge. Dela se lotimo s premisleki. Ko v besedi premešamo črke, pride beseda iz enega ›stanja‹ v drugo ›stanje‹, potem v tretje.

Če naredimo najprej npr. pet korakov, potem pa iz drugega stanja potrebujemo za prehod v tretje stanje npr. štiri korake, je na dlani, da vodi od prvega stanja v tretje stanje pet krat štiri korakov, torej dvajset korakov.

Tako smo prišli do prve zakonitosti, ki jo ponazorimo s sliko 1. Število poti (ali načinov) priti iz stanja 1 v 3 je:

$$n_{13} = n_{12} \cdot n_{23}.$$



SLIKA 1.

Nekoliko natančneje: Če je iz stanja 1 v 2 n_{12} možnih poti, iz stanja 2 v 3 pa n_{23} poti, je iz 1 v 3 $n_{13} = n_{12} \cdot n_{23}$ poti, pri pogoju, da se razmere ne spremené in da se poti dajo sestavljati.

Povedano lahko razširimo na primere, ko je stanj več (obravnavamo končno mnogo primerov), npr. k, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

- $n_{1k} = n_{12} \cdot n_{23} \cdot n_{34} \cdot \ldots \cdot n_{k-1,k}$.

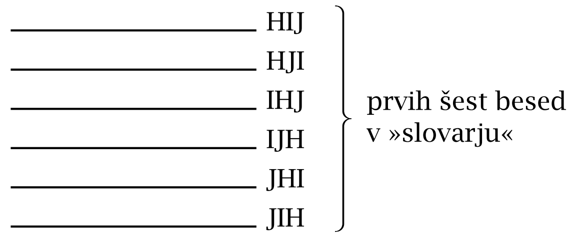
Opomba. Privzeli smo, da so si stanja različna.

Zgornja zakonitost zasluži poimenovanje *zlato pravilo kombinatorike*, saj je čarobni ključek v reševanju številnih kombinatoričnih nalog. Rečemo mu tudi pravilo produkta.

Najprej uporabimo to v primeru besede

- ABCČDEFGHIJ,

ki sestoji iz enajstih **različnih** črk **slovenske** abecede, ki so v tej besedi že **urejene** po slovarskem vrstnem redu. Koliko različnih besed nastane iz te besede – recimo ji začetna beseda, ko premeščamo v njej črke po slovarskem načinu? Po tem načinu zapišimo nekaj primerov – po vrstnem redu: premeščamo naprej **končno** trojico črk HIJ, **začetni rep** črk, torej ABCČDEFG, pustimo pri miru in dobimo:



Število vseh mogočih besed dobimo s premislekom. Najprej so besede z začetno črko A, rep ima deset črk, premeščamo jih na vse mogoče načine in zapisujemo po slovarskem redu oblikovane besede.

Potem pridejo na vrsto besede z začetno črko B. V teh primerih rep recimo izgleda takole:

- BACČDEFGHIJ.

Ker ima ta rep deset črk, dobimo s premeščanjem prav toliko besed kot prej (nove besede).

S postopkom nadaljujemo. Na koncu pridejo na vrsto besede z začetnica J:

- JABCČDEFGHI.

Torej: število vseh besed je enajst krat število vseh besed, ki imajo deset črk. (Zadnja beseda z začetkom J v tem slovarju je JIHGFEDČCBA.)

Pa zaznamujmo število besed, ki sestoje iz k različnih črk, z zapisom P_k (pri čemer je k v našem primeru lahko $k = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$).

Poznamo že enakost:

- $P_{11} = 11P_{10}$.

Za število P_{10} velja $P_{10} = 10P_9$. Sklepamo, da je $P_{11} = 11P_{11} = 11 \cdot 10 \cdot P_9 = 11 \cdot 10 \cdot 9P_8 = \ldots = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot P_1$ in

- $P_{11} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Desni izraz imenujemo v matematiki fakulteta in ga zaznamujemo ali zapišemo na kratko 11!.

Tako smo premislili: Oblikovani slovar ima 11! besed, pod vsako črko iz danih enajstih črk pa je 10! = $10 \cdot (9 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2) = 10 \cdot 72 \cdot 42 \cdot 20 \cdot 6 =$ 3628800 besed. Ker ima dan 86400 sekund, bi po Mihovem predlogu (sekunda za zapis črke) potrebovali za zapis slovarja $\frac{11 \cdot 11!}{86400}$ dni, blizu 14 let.

Končno, prišli smo pripravljeni do naše čarovniške besede. Tudi ta ima enajst črk, ki pa niso med sabo različne, v njej je pet A-jev, dva B-ja in dva R-ja. Ko začenši z besedo

- AAAAABBDKRR

začnemo oblikovati slovar, bo ta imel zagotovo manj kot 11! besed. Kolikokrat manj?

Označimo z x iskano število. Poiskali ga bomo v devetih korakih.

1\. korak: Oblikujmo besedo iz enajstih različnih znakov v obliki $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2DKR_1R_2$.

2\. korak: Zapišimo eno izmed 11! mogočih permutacij, npr.

- $KA_2R_2DA_5B_2B_1R_1A_3A_4A_1$

na beli listek.

3\. korak: Prijazni čarovnik začara v tej besedi vse A_i v A, vse B_j v B in vse R_k v R ($i = 1,2,3,4,5$; $j = 1,2$; $k = 1,2$).

4\. korak: Začarano besedo

- KARDABBRAAA

zapišemo na rdeči listek in ga položimo na mizo.

5\. korak: V vsaki besedi drugega koraka naredimo vse permutacije med A_i, vse permutacije med B_j in vse permutacije med R_k ($i = 1,2,3,4,5$; $j = 1,2$; $k = 1,2$).

6\. korak: Tako dobimo po zlatem pravilu

- $5! \cdot 2! \cdot 2! = 480$

besed, ki so različne, če upoštevamo indekse in enake, če indekse izbrišemo. Zapišimo vsako od njih na beli listek. Lepo poravnan *šop* teh listkov spravimo v omaro nad mizo, tako da je ta beli šop nad rdečim listkom iz četrtega koraka.

7\. korak: Na vsaki iz 11! izbranih besed iz drugega koraka ponavljamo po vrsti naslednje korake (torej 3., 4., 5., in 6. korak).

8\. korak: Ko izčrpamo vseh 11! možnosti, imamo

a) na mizi x rdečih listkov (torej ves slovar!) čarovniške besede ABRAKADABRA;
b) v omari nad mizo pa 11! belih listkov, ki so razvrščeni po šopih (svežnjih) $480 = 5! \cdot 2! \cdot 2!$ listkov. Ti svežnji so si vsi med seboj *tuji*, nobena dva svežnja nimata kaka skupne besede.

9\. korak: Ponazori naj ga slika zlatega pravila. Miha naj to sliko za naš primer nariše. Iz zadnjih dveh korakov sledi: $x \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! = 11!$

Miha naj preveri, da je $x = 83160$ besed. Za pisanje porabi $83160 \cdot 11$ sekund, kar je več kot deset dni (približno 10,58... dneva).

Koliko časa pa potrebuje Miha, da pride v slovarju do razporeditve

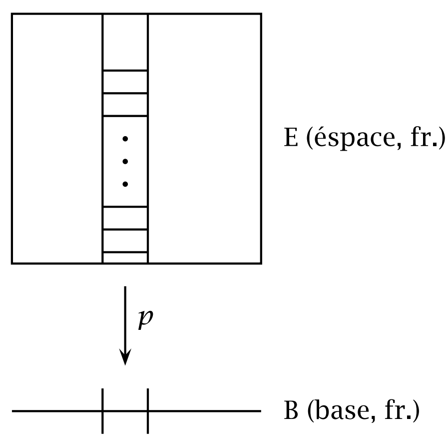
- ABRAKADABRA?

Dodatna opomba za mlade in starejše matematike:

V gornjih vrsticah smo se srečali z enim od primerov *vlaknastih svežnjev*. Ta sodobni matematični pojem so uvedli tudi živahni in šaljivi francoski matematiki, ki so preživljali težke dni v ujetništvu.

Miza iz slike 2 je *baza*, omara pa *prostor* svežnja, čaranje je *projekcija* svežnja. Od tod oznaka

- (E, p, B)



SLIKA 2.

Omenimo, da se dejavno ukvarjajo s teorijo svežnjev tudi uspešni slovenski matematiki. Pisec meni, da se jim kmalu pridružijo Jure, Jana in Miha.

Pred besedo ABRAKADABRA so gotovo vse besede, ki se začnejo z AA. Ker se take besede končajo s črkami AAABBDKRR v poljubnem vrstnem redu, je teh besed $\frac{9!}{3!2!2!} = 15120$. Prav tako so pred ABRAKADABRA tudi vse besede, ki se začnejo z ABA, ABB, ABD, ABK, ABRAA, ABRAB, ABRAD, ABRAKAA, ABRAKAB, ABRAKADAA, ABRAKADABA. Naslednja tabela prikazuje vse možne začetke besed, ki so pred ABRAKADABRA, preostale črke v tej besedi in število vseh takih besed.

začetek	ostale črke	število besed
AA	AAABBDKRR	$\frac{9!}{3!2!2!} = 15120$
ABA	AAABDKRR	$\frac{8!}{3!2!} = 3360$
ABB	AAAADKRR	$\frac{8!}{4!2!} = 840$
ABD	AAAABKRR	$\frac{8!}{4!2!} = 840$
ABK	AAAABDRR	$\frac{8!}{4!2!} = 840$
ABRAA	AABDKR	$\frac{6!}{2!} = 360$
ABRAB	AAADKR	$\frac{6!}{3!} = 120$
ABRAD	AAABKR	$\frac{6!}{3!} = 120$
ABRAKAA	ABDR	$4! = 24$
ABRAKAB	AADR	$\frac{4!}{2!} = 12$
ABRAKADAA	BR	$2! = 2$
ABRAKADABA	R	$1! = 1$

Pred besedo ABRAKADABRA je torej $15120 + 3360 + 840 + 840 + 840 + 360 + 120 + 120 + 24 + 12 + 2 + 1 = 21639$ besed. Zato je beseda ABRAKADABRA na 21640. mestu.

Odgovorimo na zastavljena vprašanja!

Prvo Mihovo vprašanje. Slovar ima

- $$\frac{11!}{5!2!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = (11 \cdot 10 \cdot 9)(2 \cdot 7 \cdot 6) = 990 \cdot 84 = 83160 \text{ besed.}$$

Na Janino vprašanje: ABRAKADABRA je v slovarju na 361. strani v dvajseti vrstici na desni:

- $21640 = 360 \cdot 60 + 2 \cdot 20.$

Odgovor Jani in Mihu. Da pridemo s pisanjem do čarovniške besede, bi porabili dva dni, osemnajst ur, sedem minut in dvajset sekund dragocenega časa:

- $21640 \cdot 11 = 2 \cdot 86400 + 18 \cdot 3600 + 7 \cdot 60 + 20.$

- »Ali je morda vse to kje uporabno?« vprašuje Jana.
- »Seveda!«, sta zagrmela fanta.

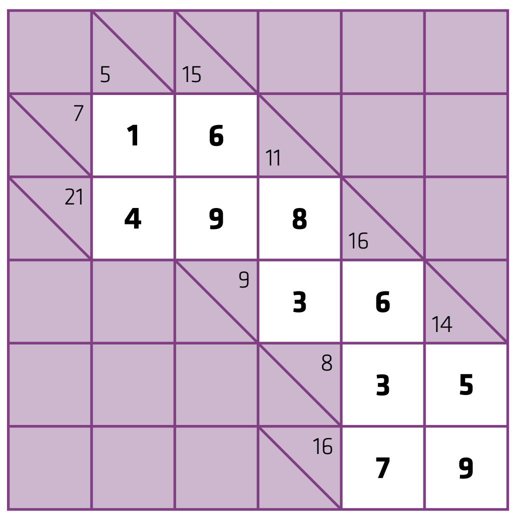
Kombinatorik želi, da ga razveselite na dva načina:

- z besedo z indeksom sedeminsedemdeset tisoč sedem sto sedeminsedemdeset v gornjem slovarju;
- z indeksi vseh besed v tem slovarju, ki vsebujejo podbesedo ...KADABRA ...(koliko je teh besed?).

× × ×

Križne vsote

Rešitev s strani 29



× × ×

Kako so Babilonci računali kvadratne korene

Marjan Jerman

Babilonska matematika

Mezopotamija je ozemlje med rekama Evfrat in Tigris, ki se približno prekriva z današnjim južnim delom Iraka in Kuvajtom. Zaradi ugodne klime in rodovitne prsti so se na tem območju razvile pomembne civilizacije več kot 5000 let pred našim štetjem. Proučevanje zgodovine teh predelov je olajšano, saj so tam živeči narodi pisali najprej na kamene, kasneje pa na precej obstojne glinaste tablice, ki so se ohranile do danes. Tako vemo nenavadno veliko o sumerskem, akadskem, babilonskem in asirskem imperiju.

Matematično je zelo zanimiva približno osem centimetrov velika tablica, kasneje poimenovana YBC 7289, približno iz let 1800–1600 pred našim štetjem, ki jo hranijo v knjižnici ameriške univerze Yale. Njena fotografija je na zgornjem delu slike 1. Na spodnjem delu iste slike je tablica ilustrirana shematsko, babilonske števike pa so prevedene v arabske.

Za razumevanje tablice moramo vedeti, da so Babilonci uporabljali šestdesetiški sistem, ki se je ohranil do danes pri merjenju časa in kotov. Tako je

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1{,}41421296,$$

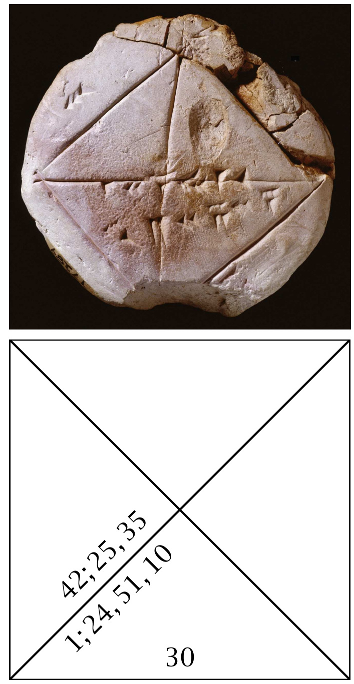
$$42;25,35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \doteq 42{,}42638889.$$

Malo bolj natančno si poglejte shematsko sliko in prvo od števil!

Verjetno ste opazili, da slika kaže, kako izračunati diagonalo kvadrata s stranico 30. Število $1;24,51,10$ je nenavadno blizu natančni vrednosti števila

$$\sqrt{2} \doteq 1,41421356,$$

število $42;25,35$ pa zelo dobro ustreza dolžini diagonale $30\sqrt{2}$. Še več, pri izbrani natančnosti v šestdesetiškem sistemu sta obe števili najboljša približka za števili $\sqrt{2}$ in $30\sqrt{2}$.



SLIKA 1.
Zgoraj: originalna tablica YBC 7289, spodaj: njena shema s prevodom.

Računanje kvadratnega korena

Predstavljajte si, da se nahajate pred 4000 leti v Babilonu, nimate kalkulatorja, ne poznate oznak za osnovne računske operacije, pomagate pa si lahko le s pomožnimi računi, zapisanimi v klinopisu na glineno tablico. Za množenje števil so Babilonci zelo zvito uporabljali tabele kvadratov in eno izmed formul

$$ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - a^2 - b^2\right),$$

- $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$.

Prva formula potrebuje tri kvadrate in razpolavljanje, pri drugi formuli pa sta dovolj dva kvadrata, a je treba rezultat razpoloviti dvakrat. Za deljenje števil so uporabljali tabelice recipročnih vrednosti in produkt

- $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Kako so Babilonci prišli do tako natančnega približka števila $\sqrt{2}$? Najbolj enostavna in naravna bisekcija je zamudna in v povprečju zahteva vsaj tri korake za vsako novo decimalko.

Nekateri zgodovinarji matematike domnevajo, da so Babilonci uporabljali zelo učinkovito metodo za iskanje korenov, ki jo je veliko kasneje zapisal starogrški matematik Heron iz Aleksandrije (pribl. 10–70 našega štetja). Recimo, da želimo izračunati kvadratni koren pozitivnega realnega števila a. Za prvi približek x_1 vzamemo najmanjše celo število, ki je večje ali enako $\sqrt{a}$, vse naslednje približke pa dobimo z rekurzivno formulo

- $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \qquad (1)$$

V primeru $a = 2$ gre postopek takole:

- $$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(2 + \tfrac{2}{2}) = \tfrac{3}{2} = 1,5 \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2} + \tfrac{2\cdot 2}{3}) = \tfrac{17}{12} \doteq 1,41666667 \\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{17}{12} + \tfrac{2\cdot 12}{17}) = \tfrac{577}{408} \doteq 1,41421569 \\ x_5 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{577}{408} + \tfrac{2\cdot 408}{577}) = \tfrac{665857}{470832} \doteq 1,41421356 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Če dobro pogledamo številke, opazimo, da se vrednosti zaporedja presenetljivo hitro bližajo točni vrednosti števila $\sqrt{2}$.

Babilonci so seveda računali v šestdesetiškem sistemu. Tako so zapisali $x_1 = 2$, $x_2 = 1;30$ in $x_3 = 1;25$. Pri četrtem približku pa se stvari zapletejo, ker je treba deliti s številom 17. V šestdesetiškem sistemu imajo končen zapis le ulomki, katerih imenovalec ima enake prafaktorje kot število 60, torej 2, 3 ali 5. Zato so njihovi zaokroženi približki drugačni, na primer

- $$\frac{24}{17} \doteq \frac{304941}{60^3} = 1;24,42,21$$

in že v četrtem koraku dobimo približek

- $$x_4 = \frac{1}{2}(1;25 + 1;24,42,21) = 1;24,51,10,30,$$

ki smo ga našli na glineni tablici.

Babilonci so bili zadovoljni, ker je postopek v praksi zelo hitro dal zelo natančne približke, danes pa so matematični standardi strožji, zato bi želeli pokazati, da postopek vedno deluje.

Napaka približka

Postopek bo deloval, če pokažemo, da se števila x_n poljubno približajo številu $\sqrt{a}$. Drugače, števila x_n^2 se morajo z rastočim indeksom n poljubno malo razlikovati od števila a. Zato uvedimo novo zaporedje

- $$y_n = x_n^2 - a, \qquad (2)$$

ki bo merilo odstopanje n-tega člena zaporedja približkov od pravilne vrednosti.

Rekurzivno formulo (1) napišimo malo drugače:

- $$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{y_n}{2x_n}. \end{aligned}$$

Tedaj je

- $$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1}^2 - a = x_n^2 - y_n + \frac{y_n^2}{4x_n^2} - a \\ &= \left((x_n^2 - a) - y_n\right) + \frac{y_n^2}{4x_n^2} = \frac{y_n^2}{4x_n^2}. \end{aligned}$$

Prvi oklepaj je po definiciji (2) enak 0. Zadnjo formulo pojasnimo z besedami: če je bila napaka v n-tem koraku enaka y_n, je v naslednjem le še $\frac{y_n^2}{4x_n^2}$. Ker so napake glede na izbiro prvega člena manjše od 1, jih kvadriranje zelo zmanjša (npr. napaka na tretji decimalki se premakne na šesto decimalko), dodatno pa delimo še s 4 in z x_n^2. Tako v primeru $a \geq 1$ v vsakem koraku vsaj podvojimo število točnih decimalk in zaporedje x_n izjemno hitro konvergira k točni vrednosti $\sqrt{a}$.

Analiza zaporedja

Zaporedje približkov lahko opazujemo tudi takole: Če upoštevamo znano neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino pozitivnih števil

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

ugotovimo, da je zaporedje navzdol omejeno s $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Ker je zato

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

vidimo, da zaporedje pada, to je $x_{n+1} \leq x_n$.

Za padajoče zaporedje s spodnjo mejo vemo, da je konvergentno. Iz ocene za napako lahko vidimo, da je limita zaporedja enaka $\sqrt{a}$. To je mogoče videti tudi neposredno. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja limita

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Če v definiciji (1) pošljemo n proti neskončno, dobimo

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

zato mora število L izpolnjevati enakost

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right).$$

Po množenju enakosti z $2L$ dobimo enačbo $2L^2 = L^2 + a$, kar pomeni, da mora limita L zadoščati enačbi

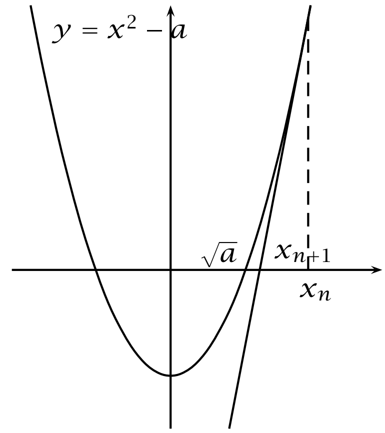
$$L^2 = a.$$

Ker vemo, da so členi zaporedja nenegativni, je ustrezna le pozitivna rešitev $L = \sqrt{a}$.

Tangentna metoda

Poglejmo si, kako lahko zaporedje približkov vidimo še malo drugače. Parabola

$$y = x^2 - a \qquad (3)$$



SLIKA 2.
Heronova metoda je v tem primeru ekvivalentna iskanju pozitivne ničle funkcije $y = x^2 - a$ s tangentno metodo.

seka pozitivni del abscisne osi pri $x = \sqrt{a}$. Prvi člen zaporedja x_1 je prvo celo število na abscisni osi, ki stoji za parabolino pozitivno ničlo.

Iz točke $(x_n, x_n^2 - a)$ na paraboli (3) spustimo tangento na parabolo. Intuitivno in grafično je jasno, da tangenta seka abscisno os nekje med ničlo $\sqrt{a}$ in x_n, precej bližje $\sqrt{a}$ kot x_n. Tangenta ima za naklonski koeficient odvod $2x_n$, zato je njena enačba

$$y - (x_n^2 - a) = 2x_n(x - x_n).$$

Tangenta seka abscisno os pri $y = 0$, torej v točki x, ki zadošča enačbi

$$-x_n^2 + a = 2x_n(x - x_n).$$

Ko iz enačbe izrazimo x, dobimo

$$x = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

kar presenetljivo pomeni, da smo tako dobili naslednji člen zaporedja x_{n+1}.

Tako smo dobili še geometrično predstavo Heronove metode. Iskanju ničel funkcije s pomočjo spuščanja tangent pravimo tudi Newtonova metoda. V numerični matematiki je zelo priljubljena, ker pri razumnih pogojih za funkcijo zelo hitro daje zelo natančne približke ničle. Podobno kot v našem posebnem primeru so v primeru enostavnih ničel napake v vsakem naslednjem koraku velikostnega razreda kvadratov napak v prejšnjem koraku.

×××

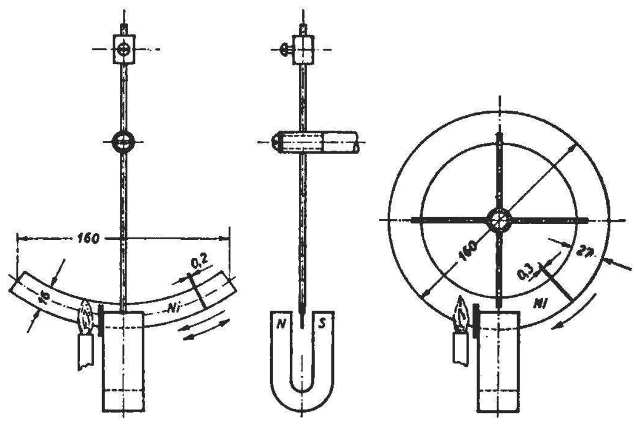
Stefanov termomagnetni motor

Ob 180-letnici Stefanovega rojstva

Janez Strnad in Primož Ziherl

Na začetku leta 1888 je Jožef Stefan matematično-naravoslovnemu razredu akademije znanosti na Dunaju poročal *O termomagnetnih motorjih.* Izkoristil je pojav, da snovi, iz katerih so trajni magneti, postanejo nemagnetne, če jih segrejemo do Curiejeve temperature. Magnetne postanejo zopet, ko se ohladijo. Stefan je delal poskuse s pločevino iz niklja s Curiejevo temperaturo okoli 340 °C. To temperaturo je dosegel z gorilnikom na špirit. Opisal je dve preprosti napravi, ki ju je bilo mogoče pokazati tudi v šoli. Kako delujeta, je Kemijskemu in fizikalnemu društvu pokazal že leto prej.

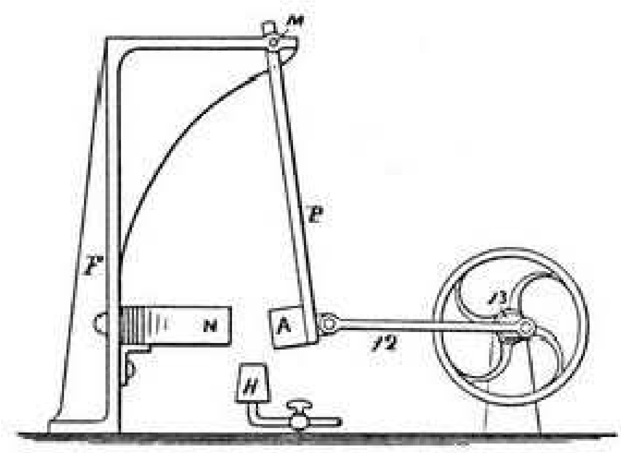
Iz 0,3 milimetra debele nikljeve pločevine je izrezal obroč z zunanjim premerom 16 centimetrov in širino 2,7 centimetra. S štirimi naperami iz tankih medeninastih cevi ga je povezal z osjo — podobno kot kolo dvokolesa. Na najnižji točki je obroč segel med pola podkvastega magneta. Gorilnik je bil malo premaknjen iz te točke (slika 1). Njegov plamen je segrel del obroča, ki ga zato magnet ni več privlačil. Magnet pa je še naprej privlačil sosednji, nesegreti del obroča. Ta sila je prevladala in zaradi nje se je segreti del dvignil. Potem se je ohladil in so se mu povrnile prejšnje lastnosti. Plamen je segrel sosednji del, ki se je zaradi tega dvignil. Pojav se je nadaljeval, segreti del se je nenehno dvigal in nikljev obroč se je vrtel. To je bil *termomagnetni motor*. Pozneje je Stefan s plinskim gorilnikom dosegel, da se je motor vrtel hitreje. Poskus je ponovil tudi s kolesom, sestavljenim iz odsekov železnih žic. Glavno pozornost je posvetil termodinamični obravnavi idealiziranega termomagnetnega motorja, ki ji ne bomo sledili.



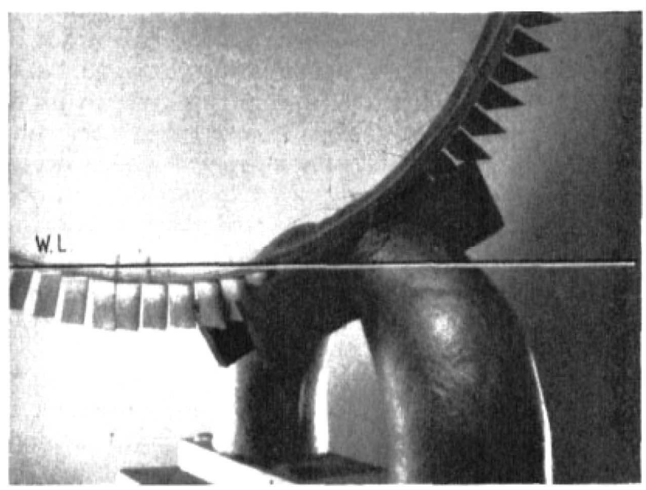
SLIKA 1.
Risbi Stefanovega termomagnetnega nihala (levo in v sredini) in termomagnetnega motorja (desno) z nikljevo pločevino. V Stefanovih člankih ni veliko risb. To risbo so narisali pozneje in je posneta po knjigi Lava Čermelja *Jožef Stefan, Življenje in delo velikega fizika.*

Stefan je naredil tudi termomagnetno nihalo. Iz 0,2 milimetra debele nikljeve pločevine je izrezal 16 centimetrov dolg in 1,6 centimetra širok del krožnega izseka in ga pritrdil na eno samo 16 centimetrov dolgo medeninasto cevko. Na začetku se je izsek dvignil, ko ga je plamen segrel. Potem je prevladala teža in se je izsek zopet spustil. Čez čas je začetno neurejeno gibanje prešlo v nihanje.

Stefan je omenil, da so termomagnetne motorje izdelali že pred njim. O enem od njih sta Edwin James Houston in Elihu Thomson poročala leta 1879. Tak motor je izdelal tudi Thomas Alva Edison leta 1887. Z dvema plinskima gorilnikoma je dosegel moč 17 wattov. Po patentni prijavi je mogoče razbrati, da je Nikola Tesla leta 1886 predlagal več izvedb termomagnetnega motorja in zanje leta 1889 dobil patent (slika 2). Vsi ti motorji so vsebovali dele iz železa s Curiejevo temperaturo okoli 770 °C in so jih morali poganjati s plinskimi gorilniki. Pozneje so odkrili snovi z veliko nižjo Curiejevo temperaturo. Heinz Siegfried Wolff je leta 1964 opisal motor s ploščicami iz zlitine niklja in železa, ki magnetne lastnosti izgubi postopno do temperature 60 °C. Za pogon je zadostovala voda s temperaturo 40 °C (slika 3). Pri premeru 30 centimetrov se je pri temperaturi zraka 18 °C obroč zavrtel 20-krat v minuti. Z gadolinijem, ki ima Curiejevo temperaturo 21 °C, je mogoče narediti termomagnetni motor, ki deluje pri sobni temperaturi. Na Japonskem so sestavili termomagnetni motor, ki je dosegel moč 100 wattov in se zavrtel 30 do 90-krat v minuti. Za izkoristek so izmerili 0,02 %. Anton Karle je leta 2001 podrobno pregledal možnosti termomagnetnih Curiejevih motorjev za pretvorbo toplote v delo. Med prednostmi je naštel preprosto zgradbo in mehanično odpornost. Ker je moč odvisna od temperaturne razlike, je mogoče s takim motorjem zaznavati temperaturo. Tovrstne motorje je moč izdelati v majhni izvedbi in jih poganjati s sončno svetlobo, ki jo navadno zberejo z lečo. Preprosto je mogoče obrniti smer gibanja. Z ravnim drogom namesto obroča naredijo linearni motor. Tega lahko izkoristijo za aktuator, to je napravo, ki se na spremembo razmer (tlaka, električne napetosti, temperature itd.) odzove s premikom. S tem lahko sproži delovanje druge naprave in tako nadzira stanje sistema. Slabosti pa sta majhna hitrost in majhna frekvenca (oboje zaradi tega, ker delovne snovi ni mogoče segreti in ohladiti zelo hitro) ter majhna moč in majhen izkoristek. Obstajajo tudi termomagnetni motorji za večjo moč, vendar niso poceni. Pred leti so prijavili nekaj novih patentov. Nekatere od njih so industrijsko preizkusili, a nobenega niso začeli izdelovati na veliko. Izjema je motor, s katerim dijakom in študentom pokažejo delovanje termomagnetnega motorja in odvisnost magnetnih lastnosti snovi od temperature. V večji meri utegnejo termomagnetne motorje uporabljati v posebnih razmerah, npr. na umetnih satelitih.

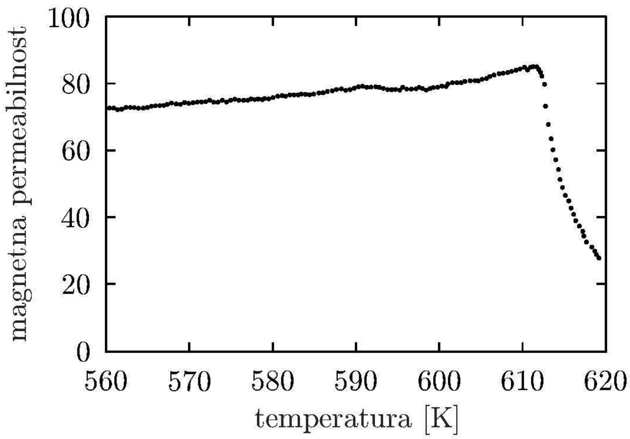


SLIKA 2.
Ena od izvedb termomagnetnega motorja iz patentne prijave Nikola Tesla. Pol trajnega magneta N privlači kos železa A in ga neha privlačiti, ko ga plamen gorilnika H segreje. Vzvod nihanje spremeni v vrtenje.



SLIKA 3.
Termomagnetni motor Heinza Siegfrieda Wolffa. Namesto plamena je uporabil vodo s temperaturo 40 °C; »W.L.« na fotografiji označuje gladino vode, viden je tudi permanentni magnet. Obroč iz pločevine je Wolff nadomestil s ploščicami, da je povečal navor. Slika je iz Wolffovega članka v reviji Journal of Scientific Instruments iz leta 1964.

Magnetne lastnosti snovi določa *permeabilnost* (relativna permeabilnost) μ. Iz snovi si mislimo izdelan svitek, to je v obroč zvit valj. Okoli svitka ovijemo žico, po kateri teče električni tok; tako naviti žici pravimo tuljava. Zaradi prisotnosti snovi v svitku je gostota magnetnega polja B drugačna kot v prazni tuljavi. Velja $B = \mu B_0$, če je B_0 gostota v praznem prostoru v ovojih. V *diamagnetnih snoveh*, npr. v bizmutu, je permeabilnost npr. malo manjša kot 1, v praznem prostoru je enaka 1 in v *paramagnetnih snoveh*, npr. v aluminiju, je malo večja kot 1. V diamagnetnih in paramagnetnih snoveh je gostota magnetnega polja sorazmerna s tokom po ovojih. V feromagnetnih snoveh, npr. v železu, niklju, kobaltu ter nekaterih spojinah in zlitinah, je permeabilnost veliko večja od 1 (slika 4). Gostota magnetnega polja v teh snoveh ni sorazmerna s tokom po ovojih, kar upoštevamo tako, da je permeabilnost odvisna od gostote magnetnega polja $\mu = \mu(B)$. Poskuse s feromagnetnimi snovmi je zato treba izvajati premišljeno. Njihov izid je odvisen tudi od tega, kar se je z vzorcem dogajalo prej. V feromagnetni snovi, ki jo vzamemo iz magnetnega polja, preostane nekaj magnetnega polja, zato ju lahko uporabimo za izdelavo trajnih magnetov.



SLIKA 4.
Odvisnost permeabilnosti niklja od temperature. Povzeto po članku Yaakova Kraftmakherja v reviji European Journal of Physics iz leta 1997. Ta meritev je dala Curiejevo temperaturo okoli 612 K; nekateri drugi viri navajajo malo višjo vrednost (približno 627 K).

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

		3				4	2
	1				8		
1							5
4			6				
7	3				4	1	
6					5		3
5	7	1			3		
		6				8	

REŠITEV BARVNI SUDOKU

8	6	3	5	1	7	4	2
2	1	4	7	3	8	5	6
1	8	2	3	6	6	7	5
4	5	7	6	8	2	3	1
7	3	5	2	6	4	1	8
6	4	8	1	7	5	2	3
5	7	1	8	2	3	6	4
3	2	6	4	5	1	8	7

↓↓↓

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ

PRAVILA, KI UREJAJO ODNOSE V DRUŽBI

PONAVLJAVEC RAZREDA

OBLIKE KEMIJSK. ELEMENTA Z RAZLIČNO MASO

NADOMESTEK

PRITOK DONAVE V ROMUNIJI

ENAKA SOGLASNIKA

NACIZEM, NACIONALSOCIALIZEM

ČRNO-BELO PROGAST OKRASNI KAMEN

DOSLEDNOST, NATANČNOST

1

NAVZOČNOST

VSOTA VSEH SIL, KI DELUJEJO NA TELO

PRISPEVEK K IMETJU, PRINOSILO

LEDENIŠKA KRNICA

ZMAGOVIT KONEC ŠAH. IGRE

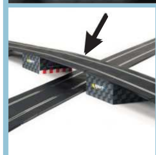
PREPREČITEV SKLEPA

TISKAR BAMBERG

GR. SKLADATELJ THEODORAKIS

RDEČI KRIŽ

8



dMFA

MOUNT

BRIT. PEVKA KOSOV. RODU (RITA)

ŠVIC. MATEMATIK, FIZIK IN ASTRONOM (JOHANN)

OBMOČNA ENOTA

VLOŽEK (V PROCES ALI DELO)

LUNINO ŠTEVILO

LEPOSLOVNI SPIS

SOSEDI ČRKE Š

IGRALEC PACINO

MOLIBDENOV SIJAJNIK

GR. GORSKE NIMFE

KRIPTON

NAŠ SLIKAR IN GRAFIK (SAŠA)

POŠKODBA TKIVA

PROSTOR ZNOTRAJ ČESA

KDOR UPRAVLJA PLUG

PERUT

GRŠKA BOGINJA RODOVITNOSTI

100 m²

FR. FIZIK IN MATEM. (ANDRE)

MESTO V JUŽ. FRANC.

ODSEV

POKOJNI RADIJSKI NOVINAR (STANE)

RAZKOL

GIBLJIVI NASTAVKI ZA PRITISKANJE

REDKO ŽENSKO IME

SKRADINSKI ?

SEVERNI JELEN LOPATAR

IGRALEC IVANUŠIČ

FR. ŠANSONJER (CHARLES)

NEM. MATEMATIK (EUGEN; TEORIJA GRUP)

GLAVNO MESTO MALTE

9

RAČUNAL. POMNILNIK

NEKDANJI INDONEZ. DIKTATOR

6

CITROENOV OLDTAJMER

NAJVEČJI GR. OTOK

FR. FIZIK (JEAN-BAPTISTE)

KRČEVINA

IZVOLJENA SKUPINA LJUDI ZA DOLOČENE NALOGE

RASTLIN. EKSPLANTAT

OZNAČBA

BELGIJSKI PISATELJ (CHARLES)

PIŠČAL

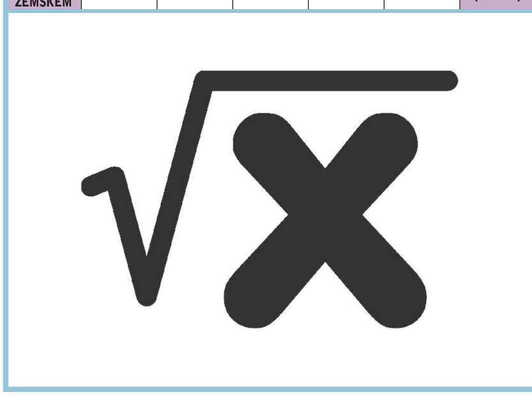
MESTO PRI UTRECHTU NA NIZOZEMSKEM

NAŠ NEKDANJI HOKEJIST (TOMAŽ)

10

MASLENE TROPINE

KRAJ PRI LJUBLJAN. LETALIŠČU



ANDREJ HIENG

KOŠARKARSKI KLUB

ASINDETON

PIONIR SL. PEDIATRIJE (BOGDAN)

SEDMA GRŠKA ČRKA

SUMERSKI BOG NEBA

DRUGA NAJVEČJA REKA V ŠVICI

PASCAL

RUBRIKA V TABELI

OZNAKA TURČIJE

5

PULZ

NAŠ PESNIK (DRAGOTIN)

ORODJE IZ DROGA IN UTEŽI ZA VADBO MOČI

ZVOČNI ZNAK, KI OPOZARJA NA NEVARNOST

VOZNIK NAJETEGA AVTOMOBILA

KOPIČENJE POMENSKO SORODNIH BESED PRI GOVORJENJU, BESEDNO PREOBILJE | NAŠA MLADINSKA PESNICA (META) | ABSCES | RDEČKASTO RJAV VOL V KOROŠ. NAREČJU | VSAK ZAKAJ IMA SVOJ ? | VELIKA ZAGNANOST PRI DELU | FRANC. VOZNIK RALLYJA (SEBASTIEN) | ZOBNI GLAS, ZOBNIK

IZDELEK, PRODUKT

VODILNI FR. MATEMATIK (JOSEPH-LOUIS)

11

VELIKI NEMŠKI FIZIK (ALBERT)

ČLOVEKOV NEZAVEDNI JAZ

MALTA NA ZIDU

VRH NAD HUDIČEVIM BORŠTOM

ALPINIST ZAPLOTNIK

LEDENI KRISTALČKI NA DREVJU

PREDUJEM, AVANS

DRAMA IVA BREŠANA

LUTKOVNI REŽISER MAJARON | GLAVNO MESTO PORTUGALSKE | GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | NAPAKA V DELOVANJU, DEFEKT | KOZJI GLAS | MESTO V NEMČIJI | DRISKA | ŠPANSKO MESTO OB TAJU

NAŠ JEZIKOSLOVEC (JANEZ)

50 Z RIM. ŠTEVILKAMI

PIHALO (GLASBILO)

SLABŠALNI NAZIV ZA KMETA

2. NAJSVET. ZVEZDA NA NEBU

OBRTNO ZDRUŽENJE

DEL ELEKTROMOTORJA ALI GENERATORJA

501 Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI

KONJIČEK

ASTRONAVT

NEKDANJI SPRINTER OSOVNIKAR

REKA V LITVI, OB KATERI LEŽI VILNA

4

3

VRH NAD ZAGREBOM

TALENT

ELEKTRIN IN IFIGENIJIN BRAT

PISATELJ MURNIK

AM. FIZIK, "OČE" TRANZISTORJA

ANTIGONINA SESTRA

UMETNOSTNA SMER PO ROMANTIKI

SOSEDNJA DRŽAVA

POKRAJINA V VZHODNI FRANCIJI

PIRENEJ. DRŽAVICA

STROKOVNJAK, IZVEDENEC

SIMBOL ZA AKTINIJ

AM. PEVEC IN PIANIST KING COLE

NATAŠA URBANČIČ

VOGAL

DRŽAVNIK TÜRK

VELEMESTO V NIGERIJI

NEMŠKI LIKOVNIK (HEINZ)

VPREŽNA PRIPRAVA

LJUDSKA POSKOČNICA

ANGLEŠKA VRSTA PIVA

NOG. KLUB IZ RIMA

MEHKA PLETENA KOŠARA

DISCIPLINSKA KAZEN

DEL KONJSKE OPREME

EVROPSKI VESOLJSKI LABORATORIJ

7

ZIMSKA NADLOGA NA CESTI

2

TON MED D IN E

KITAJSKI, POŽARNI, ZVOČNI ?

PEVSKI ZLOG

ANGLEŠKI IGRALEC BOGARDE

CESTA MED VRSTAMA DREVES, DREVORED

DANSKA IGRALKA NIELSEN

INDIJSKI FIZIK, KI JE RAZISKOVAL SIPANJE SVETLOBE

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

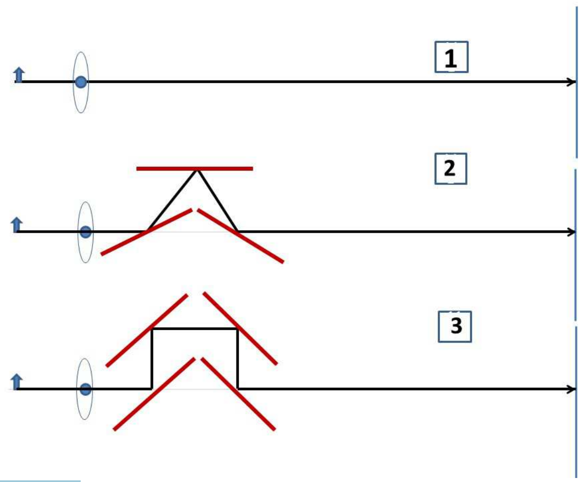
www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. januarja 2016**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Razmisli in poskusi

Mitja Rosina



SLIKA 1.
Potek žarka, ki gre skozi sredino leče proti zaslonu pri konstrukciji brez zrcal (1), s tremi (2) in štirimi zrcali (3).

59. Obračanje slik z zrcali

S projektorjem projiciraš diapozitiv na platno in opaziš, da je pomotoma zasukan okrog navpične osi in je slika zrcalna. Zamudno je vleči diapozitiv iz projektorja in ga obračati. Če imaš konstrukcijo iz zrcal, pa jo samo prisloniš v žarek in dobiš pravo sliko.

Dandanes je to laže, ko imamo namesto diapozitivov digitalne datoteke v računalniku in lahko obračamo računalniško. Vendar bi tudi tu morda prišla prav konstrukcija iz zrcal.

Vprašanje. Na kateri od skic 2 in 3 je na zaslonu zrcalna slika in na kateri ni?

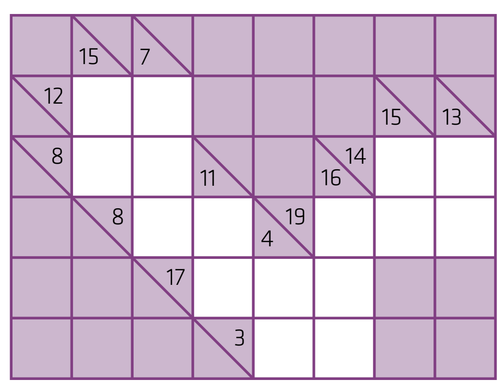
Naloga. Na skicah 1, 2 in 3 je narisan samo potek žarka, ki gre iz repa puščice skozi sredino leče proti zaslonu. Nariši še žarek iz konice puščice skozi sredino leče, da boš videl, kako je obrnjena slika na zaslonu.

Potem pa zares postavi tri ali štiri zrcala pred projektor in preveri, kako je orientirana slika na zaslonu v primerjavi s sliko brez zrcal. (Ne pozabi, da dá preslikava z lečo obrnjeno realno sliko). Lahko tudi napraviš podobno konstrukcijo z zrcali in opazuješ neposredno kak predmet.

Težja naloga. Koliko zrcal potrebuješ in kako jih postaviš, da obrneš sliko na zaslonu na glavo v primerjavi s sliko brez zrcal (zrcaljenje okrog vodoravne in navpične ravnine)?

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



53. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije za Stefanova priznanja

CIRIL DOMINKO

Šolsko tekmovanje – skupina O je bilo lani izvedeno poskusno, od letos pa je sestavni del tekmovanja srednješolcev v znanju fizike za Stefanova priznanja. Izvedeno je bilo 4. marca 2015 na 75-ih srednjih šolah, ki so na tekmovanje prijavile 1322 dijakov. Tekmovali so lahko dijaki, ki se v tekočem šolskem letu prvič učijo fiziko na srednješolski stopnji. V glavnem so tekmovali dijaki 1. letnika na gimnazijah, na nekaterih šolah z drugimi programi pa tudi dijaki višjih letnikov. Tekmovalci so reševali naloge izbirnega tipa iz snovi osnovnošolske fizike. Izdelke je ocenjevalo 147 učiteljev fizike, članov šolskih tekmovalnih komisij. Podeljenih je bilo 441 bronastih priznanj.

Regijsko tekmovanje je potekalo v treh tekmovalnih skupinah I, II in III, ki se razlikujejo po snovi. Izvedeno je bilo 27. marca 2015 istočasno na naslednjih srednjih šolah v osmih regijah: Gimnazija Celje – Center; Srednja šola Črnomelj; Gimnazija Jesenice; Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gimnazija Moste, Ljubljana; Gimnazija Ormož; Srednja tehniška šola Koper in Šolski center Nova Gorica, Elektrotehniška in računalniška šola. Na tekmovanju je sodelovalo 885 dijakov iz 66-ih srednjih šol. Izdelke je ocenjevalo osem regijskih komisij, v katerih je sodelovalo 93 učiteljev fizike iz sodelujočih šol. Na tekmovanju je bilo podeljenih 300 bronastih priznanj, komisije iz posameznih regij pa so predlagale skupno 128 tekmovalcev za državno tekmovanje.

Državno tekmovanje je bilo 11. aprila 2015 na Gimnaziji Škofja Loka. Tekmovanja se je izmed predlaganih z regijskega tekmovanja udeležilo 127 tekmovalcev iz 34-ih srednjih šol. Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa so krili *Društvo, Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport* ter soorganizator državnega tekmovanja – *Gimnazija Škofja Loka*. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so sodelovali študentje fizike, sodelavci Fakultete za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko, sodelavci Pedagoške fakultete v Ljubljani in sodelavci Inštituta Jožefa Stefana. Na tekmovanju je komisija razglasila osem prvih nagrad, osem drugih in 11 tretjih. Zlato priznanje je prejelo 23 tekmovalcev. Svečana podelitev nagrad je bila 24. maja 2015 na prireditvi v Unionski dvorani v Ljubljani.

Podeljene nagrade in zlata priznanja:

SKUPINA I

I. nagrada in zlato priznanje

- LUKA GOVEDIČ, II. gimnazija Maribor;
- ZALA POTOČNIK, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

II. nagrada in zlato priznanje

- NEJC ZAJC, Šolski center Velenje, Gimnazija;
- VID KERMELJ, Gimnazija Škofja Loka;
- MAJ KRISTAN, Gimnazija Jurija Vege Idrija.

III. nagrada

- GREGOR KIKELJ, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehnična gimnazija;
- MARTINA LOKAR, Škofijska gimnazija Vipava;
- DAVID OPALIČ, I. gimnazija v Celju;
- LEON SAMOTORČAN, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

Skupina II

I. nagrada in zlato priznanje

- Rok Čepin, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Martin Urigelj, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehnična gimnazija;
- Domen Vaupotič, II. gimnazija Maribor.

II. nagrada in zlato priznanje

- Uroš Prešern, Gimnazija Novo mesto;
- Laura Pavlin Gregorčič, Gimnazija Brežice.

III. nagrada in zlato priznanje

- Matej Langus, Šolski center Kranj, Strokovna gimnazija;
- Eva Seme, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Katarina Dobaja, II. gimnazija Maribor.

Skupina III

I. nagrada in zlato priznanje

- Blaž Karner, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Jakob Jazbec, Šolski center Srečka Kosovela Sežana, Gimnazija in ekonomska šola;
- Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor.

II. nagrada in zlato priznanje

- Aleksej Jurca, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Amadej Kristjan Kocbek, II. gimnazija Maribor;
- Tomaž Cvetko, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

III. nagrada in zlato priznanje

- Rok Medveš, Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje;
- Tomaž Brzin, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehnična gimnazija;
- Jaka Šikonja, Srednja šola Črnomelj;
- Rok Šikonja, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehnična gimnazija.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 23. aprila 2015 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Povabljenih je bilo 10 najboljših tekmovalcev iz III. tekmovalne skupine. Na 46. mednarodno fizikalno olimpijado, ki je potekala od 5. do 12. julija 2015 v Mumbaju v Indiji, se je na podlagi rezultatov državnega in izbirnega tekmovanja uvrstilo pet tekmovalcev: Jakob Jazbec, Šolski center Srečka Kosovela Sežana, Gimnazija in ekonomska šola, Blaž Karner, Aleksej Jurca, Tomaž Cvetko, vsi Gimnazija Bežigrad, Gimnazija ter Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor. V olimpijsko ekipo se je uvrstil tudi Amadej Kristjan Kocbek, II. gimnazija Maribor, vendar se je odločil, da bo tekmoval na matematični olimpijadi, ki se je časovno prekrivala s fizikalno olimpijado.

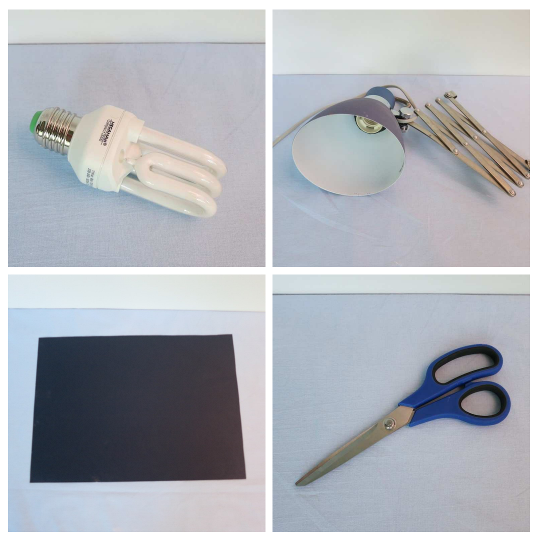
× × ×

Kresnička

Barbara Rovšek in Sašo Žigon

4. in 5. razred / 3. poskus – Preslikava skozi luknjico

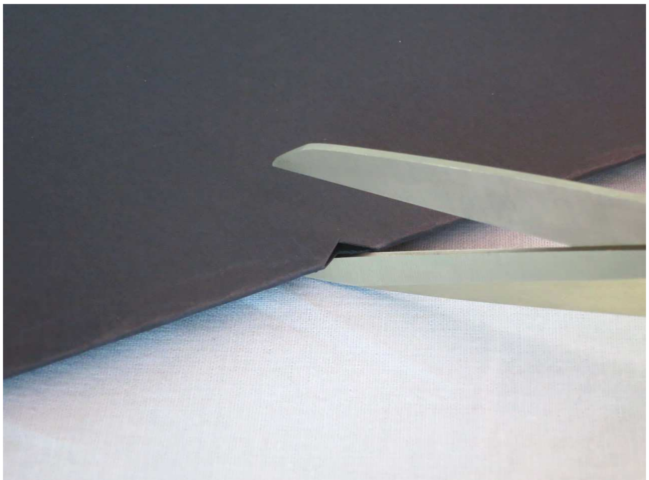
Pripomočki: svetilka z žarnico posebne oblike (za silo se lahko poskus izvede tudi s svečo), trši temen papir formata A3 ali A4, škarje.



SLIKA 1.
Pripomočki za poskus

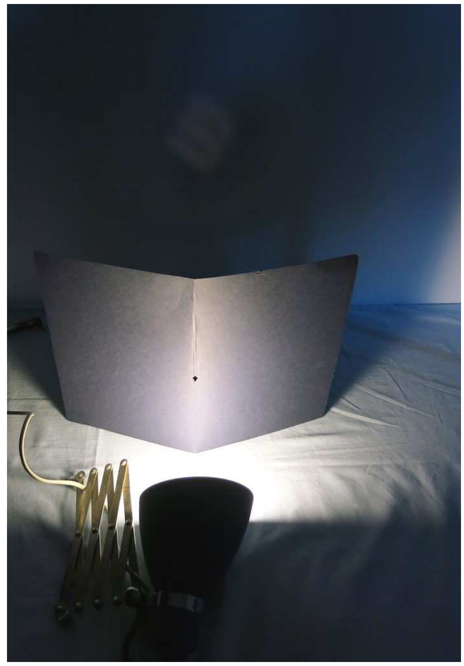
Priporočilo Opazovanja pri tem poskusu boš lažje opravil v zatemnjenem prostoru. Pri delu s svetilko naj ti pomaga odrasla oseba.

1. Temen trši papir bo zaslonka z luknjico. Papir prepogni na polovici in iz prepognjenega roba na sredini izreži majhno luknjico.



2. Žarnico privij v svetilko.

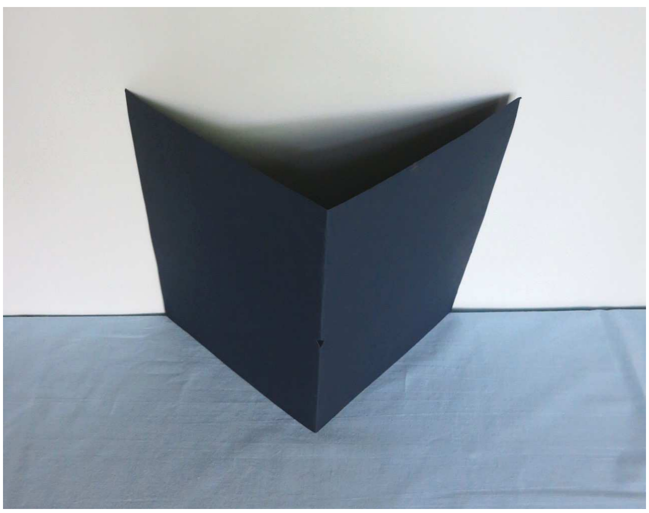
3. Zaslonko z luknjico postavi pred zaslon (na primer belo steno). Na drugo stran zaslonke postavi vključeno svetilko. Opazuj svetlobo, ki pride od žarnice skozi luknjico v zaslonki do zaslona. Opiši, kaj vidiš.



4. Zaslonka naj ostane, kjer je, razdaljo med svetilko in zaslonko pa spreminjaj. Opazuj svetlobo, ki pride skozi luknjico do zaslona. Potem spreminjaj še razdaljo med zaslonko in zaslonom. Poskusi ugotoviti pravilo, ki pove, kaj vidiš na zaslonu.

5. Ta del poskusa lahko opraviš, ko je prizor, ki ga vidiš skozi okno, obsijan, v sobo pa Sonce ne sije (okno ne gleda proti Soncu).

6. Zaslonko postavi tik ob zaslon (belo steno) tako, da je za njo na zaslonu čim temneje, pred njo pa nezastrto okno. Kot med obema deloma zaslonke naj bo približno pravi, navpični stranici naj bosta tik ob zaslonu. Nekaj svetlobe pride skozi luknjico v zaslonki do zaslona. Kaj vidiš?



Razmisli, preizkusi, poišči, vprašaj ...

- V zaslonko izreži različno velike luknjice in ugotovi, kako na to, kar vidiš na zaslonu, vpliva velikost luknjice. Ena luknjica naj bo res velika, na primer pravokotnik s stranicama dolgima 2 cm in 3 cm. Lahko pa seveda poskusiš še z večjimi.
- V zaslonko izreži luknjice različnih oblik. Med njimi naj bodo kvadratek, trikotnik in luknjica v obliki črke L. Ugotovi, kako na poskus vpliva oblika luknjice.
- Skozi luknjico lahko preslikaš tudi Sonce. Pojdi ven, ko zunaj sije Sonce, in postavi zaslonko z luknjico pravokotno na sončne žarke. Na tleh (ali na zidu) opazuj svetlobo, ki gre od Sonca skozi luknjico. Kako na poskus vplivata oblika in velikost luknjice?
- Zakaj je pomembno, da v prostoru, kjer opravljaš ta poskus, ni preveč svetlo? Preveri.
- Zakaj je pomembno, da imaš na drugi strani zaslonke zelo svetel predmet (žarnico ali dobro osvetljeno okolico)? Preveri.
- Zakaj je pomembno, da si v poskusu uporabil žarnico neobičajne oblike, predvsem pa ne okrogle in v mlečnem steklu?
- Poskus lahko opraviš tudi s staromodno veliko žarnico s prozornim steklom in z žarilno nitko. Se ti posreči na zaslon ujeti dovolj svetlo in razločno sliko žarilne nitke?
- Si že slišal za izraz camera obscura? Na spletu poišči nekaj slik camere obscure in jo primerjaj s svojim poskusom.

O preslikavi skozi luknjico si lahko prebereš tudi v reviji *Fizika v šoli* **13** iz leta 2007 na strani 50.

× × ×

Zorno polje daljnogleda

Marijan Prosen

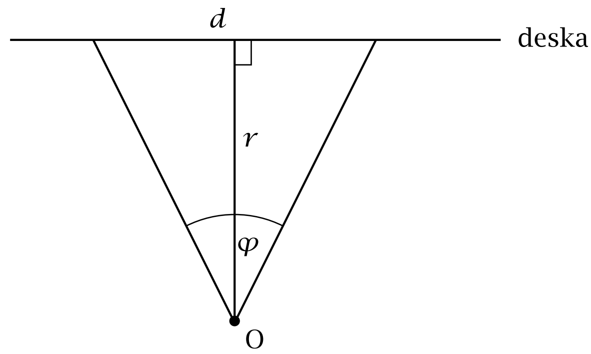
Zorno polje daljnogleda (teleskopa) je ena od osnovnih karakteristik daljnogleda. Definirano je z zornim kotom, ki ga v celoti zajame daljnogled z znano (dano) povečavo. Na splošno je odvisno od premera objektiva in okularja, goriščne razdalje objektiva in okularja. Običajno pa rečemo, da je odvisno od povečave daljnogleda, ki je podana s kvocientom goriščne razdalje objektiva in goriščne razdalje okularja. Pri večji povečavi je zorno polje manjše, toda zveza ni linearna.

O zornem polju daljnogleda je Presek že pisal: Presekova knjižnica *Astronomska opazovanja*, 1978, str. 239 in članek v letniku 21 (1993/94), str. 86. Zorno polje daljnogleda lahko izmerimo (ocenimo) na več načinov, eden je podan v zgoraj navedenem članku. Mi bomo navedli še dva; prvega izvedemo podnevi, drugega ponoči.

Splošno navodilo pri merjenju količin za ugotovitev vrednosti zornega polja daljnogleda je: dolžino merimo na decimeter natančno, čas na sekundo, vrednost za deklinacijo zvezde odberemo takšno, kakor je podana v zvezdnih katalogih oz. literaturi, na spletu ali v računalniškem planetariju Stellarium, zorno polje daljnogleda pa izračunamo na desetinko kotne stopinje. To je za naš šolski namen dovolj natančno. Sami pa se lahko odločite drugače in zorno polje daljnogleda izračunate tudi na kotno minuto natančno ali še natančneje.

Dnevna meritev zornega polja daljnogleda z znano povečavo

Daljnogled postavimo na trdno stojalo, da se ne premika. Vzamemo dolgo ravno desko in jo postavimo vodoravno. Z daljnogledom pogledamo nanjo v pravokotni smeri, in sicer tako, da gre deska čez sredino zornega polja daljnogleda. Del d deske v razdalji r z daljnogledom zajamemo (vidimo) v kotu φ, ki predstavlja zorno polje daljnogleda. Izmerimo d in r.



SLIKA 1.
Meritev zornega polja daljnogleda φ– podnevi. Z daljnogledom gledamo iz O (opazovališče) na desko pravokotno, d je del deske, ki ga zajamemo z daljnogledom, r pa njena razdalja od nas.

Opomba. Pri meritvi d smo lahko ustvarjalni. Na desko lahko pritrdimo tračni meter ali podobno merilo. Tako lahko d neposredno odčitamo kar v okularju daljnogleda. Vajo lahko npr. izvajajo trije učenci, pri čemer en učenec gleda skozi daljnogled, dva pa na deski označujeta rob zornega polja.

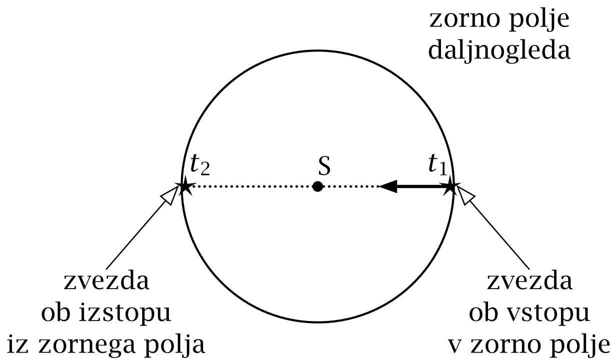
Zorno polje φ daljnogleda v stopinjah izračunamo iz enačbe $\varphi = (d/r) \cdot (360^\circ/2\pi)$, saj sta d in r znana iz meritve.

Opomba. Za zorno polje dejansko velja: $\tan(\varphi/2) = (d/2)/r$. Ker pa je zorno polje daljnogledov navadno majhno, lahko delamo s približkom $\tan \varphi/2 \approx \varphi/2$ radianov.

Zgled. Meritve zornega polja daljnogleda z določeno povečavo.

- $d = \ldots$ dm
  $r = \ldots$ dm
  $\varphi = 360^\circ d/2\pi r = \ldots$

(izračunano na desetinko kotne stopinje)



SLIKA 2.
Navidezno gibanje zvezde čez sredino S zornega polja mirujočega daljnogleda; t_1 čas vstopa zvezde v zorno polje, t_2 čas izstopa zvezde iz zornega polja.

Nočna meritev zornega polja daljnogleda z znano povečavo

Zorno polje daljnogleda lahko določimo tudi z opazovanjem prehoda zvezde čez sredino polja. Zorno polje izračunamo iz enačbe $\varphi = \omega t \cos\delta$, kjer so $\omega = 360°/24$ h $= 15°$/h $= 15'$/min kotna hitrost navideznega vrtenja nebesne krogle, t čas prečkanja zvezde čez sredino zornega polja mirujočega daljnogleda, δ znana deklinacija zvezde. Kako izpeljemo to enačbo, glej v knjižici Astronomska opazovanja.

Daljnogled postavimo na trdno stojalo, da se ne premika. Izberemo znano svetlo zvezdo z določeno (znano) deklinacijo δ, nanjo usmerimo daljnogled tako, da bo šla čez sredino zornega polja. Čas prečkanja je $t = t_2 - t_1$, če je t_1 čas vstopa zvezde v zorno polje, t_2 pa čas izstopa zvezde iz zornega polja daljnogleda. Iz opazovanj izmerimo čas prečkanja t kot razliko časov ali pa kar s štoparico v roki in pri znanih ω in $\cos\delta$ izračunamo zorno polje daljnogleda z določeno povečavo. Če izberemo drugo zvezdo, ki ima drugačno deklinacijo, bo seveda čas prečkanja drugačen, a zorno polje daljnogleda mora imeti vselej enako vrednost, če le ne naredimo kake večje napake pri merjenju časa ali računanju. Če želimo dobiti natančnejšo vrednost za zorno polje, opravimo več meritev časa prečkanja zvezd z različno deklinacijo in izračunamo povprečno vrednost.

Zgled. Meritve zornega polja daljnogleda z znano povečavo.

- Ime zvezde = ...

$$\delta = \dots$$
$$\cos\delta = \dots$$
$$t = \dots$$
$$t\cos\delta = \dots$$
$$\varphi = \omega t \cos\delta = \dots$$

(izračunano na desetinko kotne stopinje)

Dnevna in nočna meritev zornega polja daljnogleda bi se morali ujemati. Vendar zaradi različnih napak pri merjenju ali računanju lahko pride do manjše razlike. Skrbna merjenja razlike zmanjšajo, vendar idealnih meritev brez opazovalnih napak ni.

Ob koncu članka predlagamo, da na oba načina izmerite zorno polje svojega daljnogleda z znano (določeno) povečavo. Razpravljajte, kaj vpliva na natančnost dobljenega rezultata v obeh primerih.

Tri naloge. Za tiste, ki imate v sebi razvito raziskovalno žilico, pa predlagamo še naslednje tri zanimive raziskovalne naloge, pri katerih vedno razpravljamo o dobljenem rezultatu.

- Izmerite zorno polje svojega daljnogleda z znano (določeno) povečavo iz več (vsaj pet) časov prečkanja zvezd z znano deklinacijo. Kakšne vrednosti za zorno polje izmerite?
- Izmerite zorno polje svojega daljnogleda pri vsaj petih znanih (določenih) povečavah s časom prečkanja ene in iste zvezde z znano deklinacijo. Narišite graf: zorno polje daljnogleda v odvisnosti od povečave. (Mimogrede omenimo, da je povečava obratno sorazmerna z goriščno razdaljo okularja. Tako lahko narišemo tudi graf: zorno polje daljnogleda v odvisnosti od goriščne razdalje okularja). Kaj ugotovite?
- Za svoj daljnogled izmerite čas prečkanja več (vsaj deset) zvezd z različno deklinacijo. Narišite graf: čas prečkanja zvezde v odvisnosti od kosinusa deklinacije zvezde. Kaj ugotovite? Kakšna je matematična odvisnost raziskovanih količin?

Odgovore na vprašanja najdete v naslednji številki Preseka.

× × ×

Moje srečanje z Omarjem Hajamom

Marijan Prosen

Pri svojem poklicnem delu pogosto naletim na zanimive zgodovinske osebnosti. Ena je posebno svetla med njimi, močno se mi je vsidrala v dušo in srce. To je veliki perzijski učenjak in pesnik tadžikistanskega porekla, Omar Hajam.

Bil je znanstvenik svetovnega slovesa, filozof, geograf, matematik, astronom, glasbenik in tudi prodoren pesnik, predvsem znan po svojih štirivrstičnih pesniških verzih – rubajamih. Prvič sem slišal o njem v prvem letniku na univerzi, ko smo pri astronomiji študenti poslušali poglavje o koledarju, pozneje pa sem se še velikokrat srečal z njim, ga globoko doživljal kot naravoslovca in pesnika in o njem tudi pisal. Prevedel sem celo pet njegovih rubajamov. Dva objavim tu.

Na Vzhodu Hajama častijo kot astronoma, na Zahodu kot pesnika. Bil je revolucionar v znanosti in pesništvu. Že tedaj je menil, da Zemlja kroži okrog Sonca in se še vrti. Menil je tudi, da je vesolje večno in le znanost je sposobna, da odkrije zakone v njem. Zaradi svobodomiselnega mišljenja je bil preganjan. Umrl je v bedi, ponižan, vendar ne pozabljen.

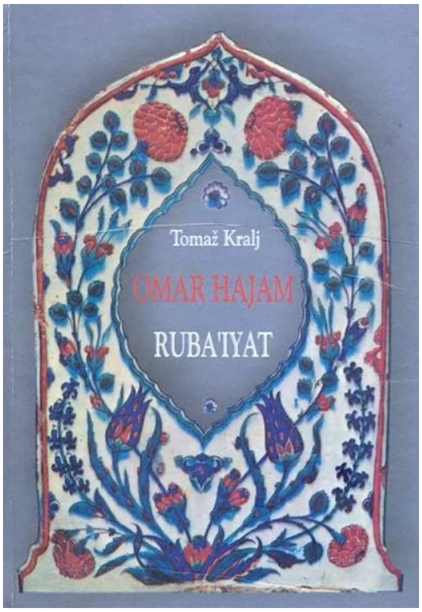
Hajamovo delo v astronomiji poznam bolje kot njegovo pesniško stvaritev, ki sem jo po kosih spoznaval razmeroma pozno, in še to preko matematičnih in astronomskih besedil. Vendar se mi zdijo že ti pesniški drobci tako zanimivi in ustvarjalni, da se še v nadalje želim čim popolnejše seznanjati z njegovim pesniškim opusom. To mi za zdaj kar uspeva, saj je pred leti izšla knjižica z njegovimi štirivrtstičnicami, ki jih je odlično prevedel v slovenščino in komentiral Tomaž Kralj.

Kakor nebesni Vodnar, ki iz ogromnega vrča zliva neskončne količine vode v usta nebesne Južne ribe, tako tudi Hajam vso svojo mogočno pesniško dušo

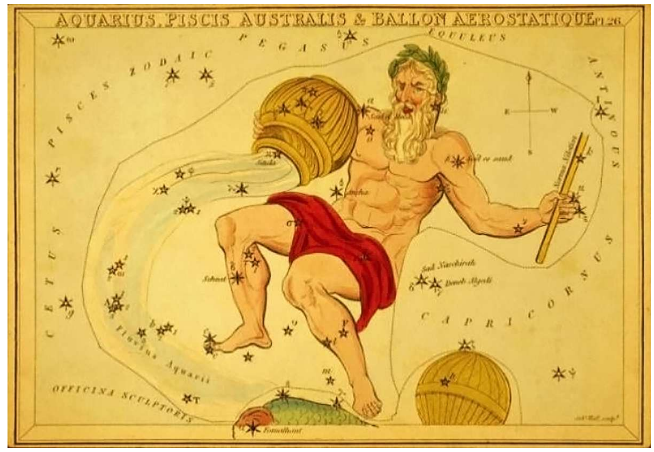
SLIKA 1.
Omar Hajam (1048–1131), eden največjih matematikov in astronomov srednjeveškega Srednjega vzhoda. Rojen je bil v Nišapuru, glavnemu mestu dežele Horasan, ki je ležala v državi Seldžukov (danes Iran). Živel in delal je v Samarkandu, Isfahanu, Buhari in drugih mestih srednje Azije.

pretoči v modrosti polne rubajame. Iz njih lahko razberemo splošen upor proti vsakovrstnemu nasilju, verskemu pridiganju, različnim zemeljskim prepovedim, da se ljudi odvrne od želje do boljšega in lepšega življenja. Pravičnost, dobrota, svoboda, poštenost, so ideali tega pesnika. Opeva veselje do življenja, hkrati pa graja krivične razmere svojega časa in sanja o boljših časih.

V svojih nepozabnih rubajamih Omar Hajam realno slika življenje, človekova čustva in doživljanja, pretresljiva vprašanja življenja in smrti in še druga vsakdanja in nevsakdanja razmišljanja. Ko razmišlja o teh idealih in drugih življenjskih rečeh, piše:



SLIKA 2.
Čudovita, vedno branja vredna knjižica: Omar Hajam, Ruba'iyat (Ljubljana 2001) – prevod in komentarji Tomaž Kralj



SLIKA 3.
Nebesni Vodnar zliva neskončne količine voda – alegorična primerjava z vrelcem pesniške duše Omarja Hajama

Niso toliko pomembni posvetni zakoni, molitve in stan; če le moreš, raje vse deli z lačnim revežem. Bodi dober! Jamčim ti, da za nagrado dobiš zdaj zemeljsko vino, pozneje nebeški raj.

Leta 1074 je Hajam postal dvorni astronom in vodja astronomskega observatorija v prestolnici Isfahan. Sestavil je astronomske tabele in vodil reformo starega perzijskega koledarja. Reforme koledarja na žalost ni izpeljal. Hajamov koledar bi bil zelo natančen. Napaka za en dan se v njem nabere šele v 5000-ih letih, medtem ko se ta napaka v našem gregorijanskem koledarju nabere že v 3300-ih letih.

V treh knjigah je Hajam zaključil komentarje o težavnejših poglavjih v Evklidovih Elementih. Izrekel je vrsto zanimivih razmišljanj, ki so vplivala na nadaljni razvoj matematike (posebno algebre). V delu O spretnosti določitve količine zlata in srebra, iz katerih je sestavljeno telo, je obravnaval klasično nalogo o zmeseh, ki jo je reševal že starogrški učenjak Arhimed iz Sirakuz. Napisal je še nekaj razprav iz naravoslovja, geografije in filozofije.

Pesnik Hajam se je v preobleki astronoma trdno zavedal, da pozna le majhen del skrivnosti vesolja. Tako piše:

Moji sovražniki me za filozofa imajo; vendar – bog vidi – napačna je njihova sodba. Zelo neznaten sem; veste, ničesar ne razumem, jasno mi ni niti to, kdo in čemu sem tu.

Leta 1092 so ubili pokrovitelja Hajamovega dela. Seldžukija je kmalu nato dobila nove vladarje, ki so padli pod močan vpliv duhovščine. Ta je znanstvenika in pesnika okrivila za brezboštvo. Hajam je padel v splošno nemilost. Ni imel več podpore velmož. Dolga leta preganjan zaradi svobodomiselnosti je postal revež, potepuh. Vendar ga beda ni naredila nesrečnega, ga ni potolkla, bil je veder do konca življenja. To zveni iz njegovih štirivrstičnic. Ponižan je umrl v rodnem mestu.

Nazadnjaška muslimanska duhovščina je tako zelo sovražila svobodomiselnost in pokončno držo velikega filozofa Hajama, da je njegovo ime za vedno želela izbrisati s sveta. Toda to ji ni uspelo. V 18. stoletju se Hajamova znanstvena dela pojavijo v evropskem kulturnem prostoru, v naslednjem stoletju pa Evropa navdušujoče spozna tudi njegovo pesem.

Hajam ostaja izjemna osebnost v zgodovini svetovne znanosti in literature.

Naloga. Na spletu si natančneje oglejte Hajamovo astronomsko in matematično delo. O tem lahko sestavite referat.

× × ×

Horspoolov algoritem

Tadej Žerak

Gotovo ste že kdaj na spletni strani ali v kakšnem besedilu iskali določeno besedo. Kako ste se tega lotili? Ena možnost je, da ste brali celotno besedilo in upali, da besedo sami čim hitreje najdete. Verjetneje pa je, da ste uporabili posebno funkcijo, vpisali iskano besedo in kaj hitro vam je računalnik pokazal, kje se iskana beseda nahaja. Ali ste se kdaj vprašali, kako to iskanje sploh deluje?

Načinov je več. Najenostavnejši je iskanje z naivno metodo, ki primerja vsak znak iz besedila z vsakim iz iskanega niza, vendar je ta metoda časovno potratna. V tem prispevku bomo predstavili Boyer-Moore-Horspool algoritem oz. krajše Horspoolov algoritem, ki ga je leta 1980 objavil ameriški profesor računalništva R. Nigel Horspool. Algoritem učinkoviteje in enostavno reši problem iskanja vzorca v besedilu.

Delovanje

Horspoolov algoritem razdeli iskanje na dva dela, in sicer na predprocesiranje in na samo iskanje. Recimo, da imamo besedilo, dolžine n ter dolžino iskanega vzorca m.

Predprocesiranje

Horspoolov algoritem poteka tako, da najprej izračuna, kolikšen zamik je potreben besedilu za vsak različen znak v besedilu, ta pa znaša toliko, da dosežemo ujemanje zadnjega znaka v vzorcu z besedilom. Naredimo tabelo, ki jo imenujemo tabela zamikov (ang. *Bad Match Table*, krajše *BMT*); za znak x jo izračunamo tako:

- $BMT[x] =$

$$= \begin{cases} \min(m-i-1); \\ \quad i = \text{indeks mesta, kjer se nahaja znak } x, \\ m; \quad \text{znaka ni v vzorcu, ali pa je zadnji.} \end{cases}$$

Poudarimo naj, da v primeru, da se znak x v vzorcu pojavi večkrat, hkrati pa tudi na zadnjem mestu, za ta znak uporabimo število, izračunano z enačbo $\min(m-i-1)$.

Algoritem bomo predstavili na primeru.
Besedilo, po katerem iščemo:
BONUMCOMMUNECOMMUNITATIS.
Vzorec: *ECOMMU*.

Za posamezni znak v vzorcu bomo izračunali zamik.

- $\mathrm{BMT}[znak] = m - i - 1, \qquad m = 6$

- $\mathrm{BMT}["E"] = 6 - 0 - 1 = 5$
  $\mathrm{BMT}["C"] = 6 - 1 - 1 = 4$
  $\mathrm{BMT}["O"] = 6 - 2 - 1 = 3$
  $\mathrm{BMT}["M"] = 6 - 3 - 1 = 2$
  $\mathrm{BMT}["M"] = 6 - 4 - 1 = 1$
  $\mathrm{BMT}["U"] = 6$ (ker je zadnji znak v nizu)

Imamo torej takšen rezultat, kot je prikazano v tabeli 1.

E	C	O	M	U	Vsi ostali
5	4	3	1	6	6

TABELA 1.

Iskanje

Po končani izdelavi tabele zamikov lahko izvedemo iskanje vzorca v besedilu, ki ga bomo razložili na primeru.

Najprej poravnamo vzorec in besedilo na prvem znaku. Algoritem deluje tako, da primerjamo vzorec z besedilom od desne proti levi. Pri primerjavi zadnjega znaka vzorca z istoležnim znakom v besedilu sta dve možnosti: ali se zadnji znak ujema ali se pa ne.

V primeru, da se zadnji znak vzorca ne ujema z znakom v besedilu, sam vzorec prestavimo naprej za toliko mest, kolikor je v tabeli zamikov določeno, in sicer za tisti znak iz besedila, katerega smo primerjali. Če se znaki ujemajo, pa primerjamo znake posamično od desne proti levi tako dolgo, dokler ne najdemo neujemanja ali pridemo do začetka vzorca. V zadnjem primeru z iskanjem zaključimo, saj smo našli popolno ujemanje. V primeru, da najdemo neujemanja, pa se cel niz ponovno zamakne za toliko mest, kot je določeno v tabeli zamikov, in sicer za prvi primerjani znak v besedilu.

```
B O N U M C O M M U N E C O M M U N I T A T I S
          ↑
E C O M M U
        E C O M M U
```

SLIKA 1.
Primerjani znak U se ne ujema s C.

Kot vidimo na sliki 1, že pri prvem primerjanju pride do neujemanja, zato se vzorec zamakne za toliko mest, kolikor ima C vrednost v tabeli zamikov. Vzorec se torej zamakne za štiri mesta. Ko je zamaknjen, postopek ponovimo.

```
B O N U M C O M M U N E C O M M U N I T A T I S
        ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
        E C O M M U
                    E C O M M U
```

SLIKA 2.
Primerjani znaki se ujemajo, razen E z M.

Nadaljujemo z iskanjem; slika 2 kaže, da je prišlo do ujemanja zadnjega znaka. V tem primeru primerjamo znake posamično od desne proti levi.

Imamo ponovno ujemanje, tokrat znaka M, zato ponovimo postopek. Sledijo ujemanja znakov M, O ter C. Za tem sledi neujemanje znakov, in sicer znakov E in M. Zaradi neujemanja znaka se cel vzorec zamakne za toliko mest, kot je določeno v tabeli neujemanj, in sicer za prvi primerjani znak v besedilu, torej za BMT[U], ki je enako 6.

V naslednjem primerjanju po zamiku vzorca vidimo na sliki 3, da imamo neujemanje znakov U ter M, zato zamaknemo vzorec za BMT[M]= 1 mesto. V

```
B O N U M C O M M U N E C O M M U N I T A T I S
                              ↑
                    E C O M M U
                      E C O M M U
```

SLIKA 3.
Primerjani znak U se ne ujema z M.

primeru, da bi bil na mestu znaka M drug znak, ki ne bi imel posebnega mesta v tabeli zamikov, npr. znak A, bi se vzorec zamaknil za šest mest, kot je v tabeli zamikov zapisano pod *Vsi ostali*, torej za celotno dolžino vzorca. Razmislite, zakaj to naredimo?

V naslednjem koraku dobimo:

```
B O N U M C O M M U N E C O M M U N I T A T I S
                      ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
                      E C O M M U
```

SLIKA 4.
Primerjani znaki se ujemajo.

Po prvi primerjavi na sliki 4 opazimo, da imamo ujemanje znaka U, zato se premaknemo za en znak v levo in naredimo novo primerjavo. Sledi ujemanje znakov M, M, O, C ter E. Opazimo, da smo prišli do začetka vzorca, zato smo zaključili z iskanjem le-tega v danem besedilu.

Celotno iskanje torej razdelimo na dva dela: na predprocesiranje in iskanje. Predprocesiranje deluje po naslednjem algoritmu:

Algoritem 1 Predprocesiranje Horspoolovega algoritma

Input: vzorec
Output: tabela zamikov - BMT

for each znak v vzorcu **do**
  $i \leftarrow$ mesto znaka v vzorcu
  if znak ni zadnji v vzorcu **then**
    $BMT[znak] \leftarrow \min(BMT[znak], m-i-1)$
  else
    $BMT[znak] \leftarrow \min(BMT[znak], m)$
  end if
end for

Po končanem predprocesiranju nadaljujemo iskanje po naslednjem algoritmu:

Algoritem 2 Iskanje s Horspoolovim algoritmom

Input: vzorec, besedilo, tabela zamikov
Output: mesto prvega znaka ujemanja vzorca v besedilu

```
t ← m − 1                        ▷ t... prvi znak primerjanja
k ← m − 1    ▷ k... števec, ki primerja po besedilu
while k ≤ n do
    i ← m − 1 ▷ i... števec, ki primerja po vzorcu
    while vzorec[i] = besedilo[k] do
        i ← i − 1
        k ← k − 1
    end while
    if i = −1 then
        return k + 1
    else
        t ← t + BMT[besedilo[t]]
    end if
    k ← t
end while
return Ni ujemanja
```

Preizkus

V teoriji bi naj Horspoolov algoritem deloval hitreje kot Boyer-Moorov algoritem in naivna metoda. Ali to drži tudi v praksi? Kot vemo, je v algoritmu potrebno predprocesiranje, prav tako pa je potrebnih več operacij za ugotovitev, da se npr. zadnji znak v vzorcu ne ujema z istoležečim znakom v besedilu. Preskok vzorca je lahko večji.

Implementirali smo Horspoolov algoritem in naivno metodo ter prišli do naslednjih rezultatov: za najdbo vseh ponovitev besede *and* v približno 25.000 znakov dolgem besedilu je naivna metoda potrebovala povprečno 83 ms, Horspoolov algoritem pa le 64 ms. Za iskanje malo daljše besede *captain* je naivna metoda povprečno potrebovala 82 ms, medtem ko pa je Horspoolov algoritem potreboval 56 ms. Kot vidimo, Horspoolov algoritem pridobi na hitrosti z večjo dolžino vzorca.

Opazili smo tudi, če imamo majhno abecedo, torej majhen nabor različnih znakov v iskanem besedilu, Horspoolov algoritem pogosto ni hitrejši od enostavnejše naivne metode, kar je posledica predprocesiranja ter več potrebnih operacij za prvo primerjavo.

Oba algoritma smo preizkusili tudi na daljši datoteki, dolgi 692.945 znakov; vzorec je bil dolg 222 znakov. Naivni algoritem je ves dokument pregledal in našel vzorec s povprečnim časom 2302 ms, Horspoolov algoritem pa s povprečnim časom 1239 ms. Vsa iskanja so bila izvedena petkrat.

Kot vidimo, je implementacija Horspoolovega algoritma dobra odločitev, saj lahko tudi razpolovi potreben čas iskanja. To trditev potrjuje dejstvo, da ga programerji vpeljujejo v večje projekte, kot je iskanje po spletnih straneh v spletnih brskalnikih Google Chrome in Mozilla Firefox ali pa v Microsoft Office paketu, katerega del je tudi Microsoft Office Word.

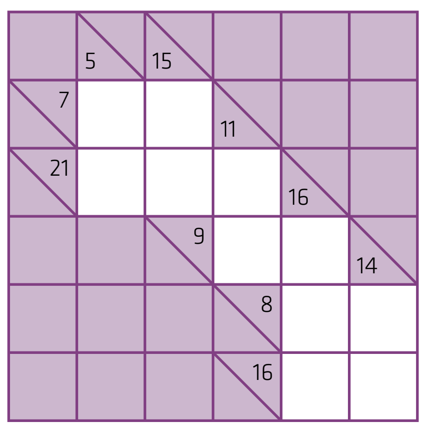
Literatura

[1] G. Navarro, M. Raffinot, *Flexible Pattern Matching in Strings: Practical On-line Search Algorithms for Texts and Biological Sequences*, Cambridge press, Cambridge, 2002.

× × ×

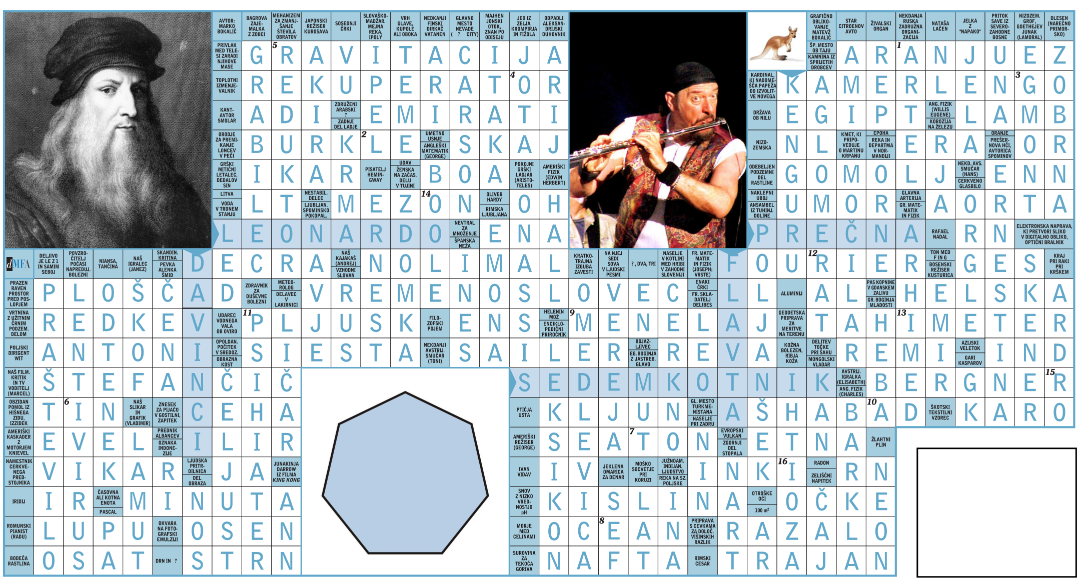
Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

→ Slika 1: List praproti



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 43/2

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke 43. letnika Preseka je **Algoritem apriori.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Polona Avguštin iz Dolenjskih Toplic, Andreja Cvetko iz Ruš in Dejan Širaj iz Rakeka, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Praprot

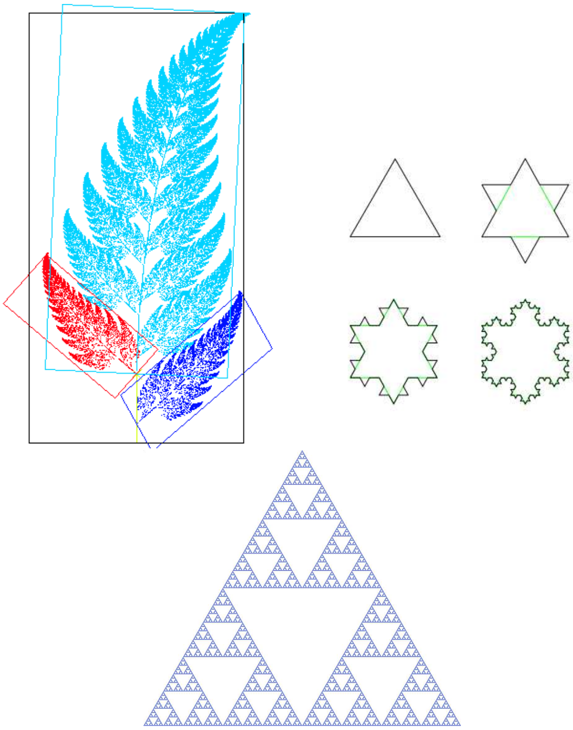
Aleš Mohorič

Praprot ima razmeroma velike liste, dolge od 40 do 150 centimetrov. Listi so zanimivi tudi z matematičnega vidika. List ima približno obliko deltoida z zavihanim vrhom.

Ko list (slika 1) pogledamo podrobneje, opazimo, da ga sestavljajo vejice, ki so na las podobne listu (slika 2). Tudi listki na vejicah imajo resice, ki spominjajo na osnovni list. Tako samo sebi podobno strukturo opazimo tudi pri nekaterih drugih rastlinah, kakor je npr. križanec med brokolijem in cvetačo (slika 3). V naravi se tako drobljenje seveda hitro zaključi, v matematiki pa drobljenje samopodobnega lika lahko nadaljujemo v poljubno majhnem merilu. To je značilnost fraktalov. Poleg praproti omenimo še Kochovo snežinko in trikotnik Sierpinskega (slika 4).

SLIKA 2.
Vejica praproti

SLIKA 3.
Križanec brokolija in cvetače, brokoli romanesko



SLIKA 4.
Fraktalni liki: praprot, Kochova snežinka in trikotnik Sierpinskega

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot 6 milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR

18,74 EUR

14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že 4 knjige Matematičnega kenguruja.

- *Evropski matematični kenguru 1996–2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.