

Quotients of skew morphisms of cyclic groups

Martin Bachratý * 

Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia

Received 25 August 2022, accepted 19 April 2023, published online 4 October 2023

Abstract

A skew morphism of a finite group B is a permutation φ of B that preserves the identity element of B and has the property that for every $a \in B$ there exists a positive integer i_a such that $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi^{i_a}(b)$ for all $b \in B$. The problem of classifying skew morphisms for all finite cyclic groups is notoriously hard, with no such classification available up to date. Each skew morphism φ of $\mathbb{Z}_n$ is closely related to a specific skew morphism of $\mathbb{Z}_{\langle\langle\varphi\rangle\rangle}$, called the quotient of φ . In this paper, we use this relationship and other observations to prove new theorems about skew morphisms of finite cyclic groups. In particular, we classify skew morphisms for all cyclic groups of order $2^e m$ with $e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ and m odd and square-free. We also develop an algorithm for finding skew morphisms of cyclic groups, and implement this algorithm in MAGMA to obtain a census of all skew morphisms for cyclic groups of order up to 161.

During the preparation of this paper we noticed a few flaws in Section 5 of the paper Cyclic complements and skew morphisms of groups from 2016. We propose and prove weaker versions of the problematic original assertions (namely Lemma 5.3(b), Theorem 5.6 and Corollary 5.7), and show that our modifications can be used to fix all consequent proofs (in the aforementioned paper) that use at least one of those problematic assertions.

Keywords: Skew morphism, cyclic group, coset-preserving, quotient, square-free.

Math. Subj. Class. (2020): 20B25, 05C25, 05E18

*The author acknowledges the use of the MAGMA system [7] to find examples of skew morphisms relevant to this paper. The author also acknowledges support from the APVV Research Grants 17-0428 and 19-0308, and the VEGA Research Grants 1/0206/20 and 1/0567/22.

E-mail address: martin.bachraty@stuba.sk (Martin Bachratý)

Kvocienti poševnih morfizmov cikličnih grup

Martin Bachratý * 

Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia

Prejeto 25. avgusta 2022, sprejeto 19. aprila 2023, objavljeno na spletu 4. oktobra 2023

Povzetek

Poševni morfizem končne grupe B je permutacija φ grupe B , ki ohranja enoto grupe B in ima lastnost, da za vsak $a \in B$ obstaja pozitivno celo število i_a , da je $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi^{i_a}(b)$ za vse $b \in B$. Problem klasifikacije poševnih morfizmov vseh končnih cikličnih grup je razvpito težak, in do danes ni na voljo nobene takšne klasifikacije. Vsak poševni morfizem φ grupe $\mathbb{Z}_n$ je tesno povezan s specifičnim poševnim morfizmom grupe $\mathbb{Z}_{\langle\langle\varphi\rangle\rangle}$, ki se imenuje kvocient poševnega morfizma φ . V tem članku uporabimo to zvezo in druga opažanja pri dokazovanju novih izrekov v zvezi s poševnimi morfizmi končnih cikličnih grup. Še posebej se osredotočamo na poševne morfizme vseh cikličnih grup reda $2^e m$, kjer je $e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ in m lih in brez kvadratnih faktorjev. Razvijemo tudi algoritem za iskanje poševnih morfizmov cikličnih grup, in implementiramo ta algoritem v MAGMI, da dobimo popis vseh poševnih morfizmov za ciklične grupe reda do 161.

Med pripravo tega članka smo opazili nekaj pomanjkljivosti v 5. razdelku članka *Cyclic complements and skew morphisms of groups* iz leta 2016. Predlagamo in dokažemo šibkejšje različice problematičnih izvirnih trditev (Lema 5.3(b), Izrek 5.6 in Korolar 5.7), in pokažemo, da se da s temi modifikacijami popraviti vse posledične dokaze (v prej omenjenem članku), ki uporabljajo vsaj eno od teh problematičnih trditev.

Ključne besede: Poševni morfizem, ciklična grupa, ohranjajoč odseke, kvocient, brez kvadratnih faktorjev.

Math. Subj. Class. (2020): 20B25, 05C25, 05E18

*Avtor priznava uporabo sistema MAGMA [7] za iskanje primerov poševnih morfizmov, relevantnih za ta članek. Avtor priznava tudi podporo raziskovalnih štipendij 17-0428 in 19-0308, in raziskovalnih štipendij VEGA 1/0206/20 in 1/0567/22.

E-poštni naslov: martin.bachraty@stuba.sk (Martin Bachratý)