

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **19** (1991/1992)

Številka 1

Strani 18-20

Marija Vencelj:

KOMBINATORNO PRAVILNA TELESA

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/19/1075-Vencelj-telo.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

MATEMATIKA

KOMBINATORNO PRAVILNA TELESA

Pravilno telo je konveksen polieder, katerega *stranske ploskve* so sami *skladni pravilni večkratniki*, ki v ogliščih oblikujejo *skladne prostorske kote*. Mednje očitno sodita pravilni *tetraeder* in *kocka*, pa tudi pravilni *oktaeder*, *dodekaeder* in *ikozaeder*, katerih skice si lahko ogledate na začetku članka V. Domanjka *Platonovi poliedri* v tej številki Preseka. V omenjenem članku boste v zvezi z njimi našli tudi marsikatero zgodovinsko zanimivost.

Že stari Grki so vedeli, da poleg navedenih petih poliedrov drugih *pravilnih teles* ni. Oglejmo si dokaz te trditve!

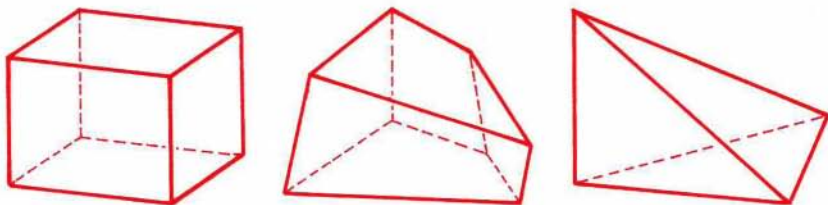
S konveksnimi poliedri smo se srečali že v članku *Eulerjeva poliedrska formula* v tej številki Preseka. Tam smo pokazali, da za vsak konveksen polieder velja zveza

$$V - R + S = 2 \quad (1)$$

kjer je V število oglišč, R število robov in S število stranskih ploskev poliedra.

Iz posameznega oglišča poliedra izhaja končno mnogo robov. Njihovo število imenujemo *red oglišča* poliedra.

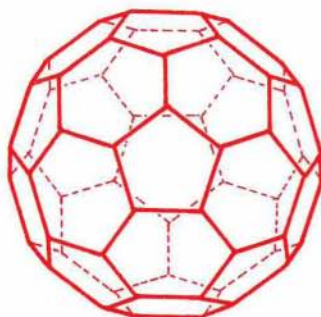
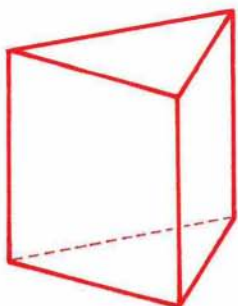
Definicija. *Kombinatorno pravilno telo tipa (m, n) je konveksen polieder, katerega stranske ploskve so sami m -kotniki, vsa oglišča pa imajo red n .*



Slika 1.

Na sliki 1 je nekaj kombinatorno *pravilnih teles*, pokončna tristrana prizma in nogometni žogi podoben polieder na sliki 2 pa nista kombinatorno *pravilni telesi*. Med kombinatorno *pravilna telesa* sodijo očitno tudi vsi *pravilni poliedri*.

Števili m in n sta seveda enaki najmanj 3, vendar to ni edina omejitev. Različnih tipov kombinatorno *pravilnih teles* je namerč presenetljivo malo. Velja:



Slika 2.

Izrek. *Obstaja natanko pet različnih tipov kombinatorno pravih teles. To so tipi $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$ in $(3, 5)$.*

Dokaz. Naj bo X poljuben kombinatorno pravih polieder tipa (m, n) . Kot običajno označimo z V , R in S število njegovih oglišč, robov in stranskih ploskev.

Ker iz vsakega oglišča izhaja n robov in ima vsak rob dve oglišči, velja

$$2R = nV$$

Nadalje ima vsaka stranska ploskev m robov in posamezen rob pripada dvema stranskima ploskvama. Zato velja

$$2R = mS$$

Vstavimo

$$V = 2R/n \quad \text{in} \quad S = 2R/m$$

v Eulerjevo poliedrsko formulo (1). Dobimo

$$(2/n - 1 + 2/m)R = 2$$

od koder sledi

$$R = 2mn / (2m + 2n - mn)$$

Število robov R je seveda pozitivno število. Torej mora biti

$$2m + 2n - mn > 0$$

Z razstavljanjem dobimo

$$(m-2)(n-2) < 4 \quad (2)$$

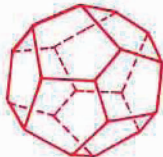
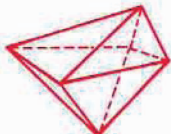
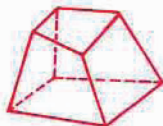
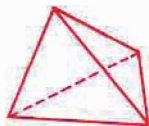
Ker sta m in n naravni števili, enaki najmanj 3, sledi iz (2), da tudi nista večji od 5. Stranske ploskve kombinatorno pravih teles so torej lahko le trikotniki, štirikotniki ali petkotniki in v posameznem oglišču se lahko stika največ pet robov. Natančnejši pogled pove, da pridejo v poštev le pari

$(3, 3)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$, $(3, 5)$

Posamezne tipe kombinatorno pravih teles podrobneje predstavlja sosednja tabela:

Očitno *vsakemu tipu kombinatorno pravih teles ustreza natanko eno pravilno telo*. Torej je pravih teles res pet: tetraeder, heksaeder (kocka), oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. Njihova imena so grška in pomenijo število stranskih ploskev poliedra: tetraeder ima 4, heksaeder 6, oktaeder 8, dodekaeder in ikozaeder pa 12 oziroma 20 stranskih ploskev.

m	n	V	R	S
3	3	4	6	4
4	3	8	12	6
3	4	6	12	8
5	3	20	30	12
3	5	12	30	20



Marija Vencelj