Rekonstruiranje gibanja z zakoni mehanike

mag. Marko Rožič
Osnovna šola Drska

Izvleček

Pri poučevanju fizike so naloge, pri katerih so grafične odvisnosti ključne za rešitev naloge, dokaj redke. Čeprav takšne naloge zahtevajo od učencev dodatna znanja, so pri nekaterih učencih zaželene. Zato je predstavljen primer obravnave naloge, kjer je s pomočjo grafa časovne odvisnosti sil v podporah mostu natančno določen način vožnje tovornjaka. Naloga je nadgrajena s primerom določanja pospeška kroglice med kotaljenjem po klancu. Sprva teoretično izpeljane zakonitosti so na koncu eksperimentalno preverjene in potrjene z meritvami video analize.

Ključne besede: sila, gibanje, navor, graf, fizika

Reconstructing Motion Using the Laws of Mechanics

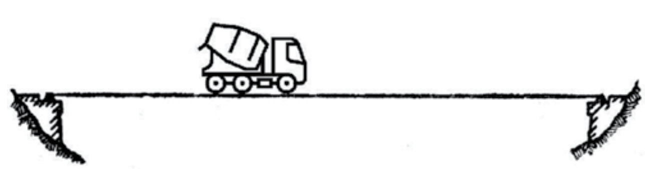
Abstract

Physics tasks in which graphical dependencies are crucial for finding a solution are quite rare. Although such tasks require additional knowledge from the pupils, some nevertheless ask for them. Because of that, this article presents a task in which the type of truck movement over a bridge is precisely determined by means of graphical dependencies of the forces acting on the bridge supports. The task is upgraded with an example of determining the acceleration of a ball while rolling down a slope. In the end, the theoretically derived equations are experimentally verified and confirmed by video analysis measurements.

Keywords: force, motion, torque, graph, Physics

Uvod

Motivacijska naloga je naloga iz učbenika za fiziko v gimnazijskih programih. Gre takole: »*Tovornjak z maso 20 t pelje čez most, ki je podprt na konceh. Za koliko se poveča navpična komponenta sile v vsaki podpori zaradi tovornjaka, ko je ta na začetku mostu, na četrtini, na sredini in na njegovem koncu?«* (Kladnik, 2015, str. 131). Naloga govori o statičnem primeru. Tovornjak pelje po mostu (slika 1) in izračunati je treba velikost spremembe sile na podpori zaradi teže tovornjaka, ko je ta določeni trenutek na izbranem mestu na mostu. Rešitev naloge za nekaj izbranih primerov pokaže, da sta sili v podporah mostu očitno odvisni od položaja tovornjaka na mostu. Nalogo lahko preoblikujmo: »Tovornjak se s stalno hitrostjo pelje po mostu, zato se velikost sil v podporah stalno spreminja. Iz grafa časovne odvisnosti velikosti sil v podporah mostu ocenite hitrost tovornjaka na mostu.«



Slika 1: Motivacijska naloga.

Pri pouku rešujemo precej statične naloge iz mehanike. Na primer večina nalog mehanike obravnava stanje sistema (kot navedena motivacijska naloga), manj je nalog, s katerimi ugotavljamo dinamične odvisnosti. Preoblikovana naloga zahteva večjo mero znanja in iznajdljivosti, zato prepustimo reševanje naloge dijakom v dvojicah ali manjših skupinah. Pred reševanjem naloge izvedemo demonstracijski eksperiment za dijake. Ti v skupinah opazujejo gibanje avtomobila po mostu in časovno odvisnost zajemanja sile. S tem pri dijakih ustvarimo jasno predstavo problema. Dijaki v nekaj minutah po skupinah z metodo nevihte možganov poiščejo ključne vsebine problema (npr. premo gibanje, navor, delo z grafi) in predvidijo potrebne pristope k reševanju problema (uporaba mehanskih zakonov, matematično modeliranje). V debati med reševanjem problema dijaki v skupinah ovrednotijo poiskane delne rešitve (npr. ali je način reševanja naloge dovolj splošen ali preveč specifičen, ali rešitev odraža možnost, da avtomobila na začetku ne postavimo na začetek mostu). Skupine pred eksperimentalnim zajemanjem podatkov in vrednotenjem meritev poročajo o poiskanem računskem modelu, ki po njihovem mnenju opisuje način gibanja avtomobila. V končni razpravi skupaj ovrednotimo ustreznost računskih modelov pri opisu gibanja avtomobila in časovni odvisnosti sil v podporah mostu. Skupaj odkrivamo, kje so dijaki med reševanjem naloge napredovali v znanju, česa niso uspeli predvideti in zato z računskim modelom ustrezno opisati. Na koncu skupaj poiščemo možnosti uporabe pridobljenega znanja na novih primerih (npr. če je most nagnjen, če je most oblike kot dvokapna streha in podobno). Glavni namen aktivnosti je opazovati izpostavljeni problem in zanj poiskati ustrezen računski model. Matematično modeliranje pojavov je temelj fizike. Fizika za pojave, ki jih raziskuje, išče čim boljše računske modele in skuša z njimi napovedati izid pojava v podobnih okoliščinah. To hočemo z izbrano aktivnostjo doseči pri dijakih, razvijamo sposobnost iskanja matematičnih modelov in njihovega eksperimentalnega potrjevanja.

V prispevku najprej poiščemo matematični model, ki predvideva časovno spreminjanje velikosti sil v podporah mostu glede na hitrost tovornjaka za na novo zastavljeno nalogo. Na koncu matematični model eksperimentalno preverimo. Naloga je še posplošena na primer kotaljenja kroglice po klancu. Iz grafičnih meritev napovemo velikost pospeška in naklon klanca, kar z eksperimentom preverimo.

Izpeljava formule za izračun hitrosti tovornjaka

Pred teoretično izpeljavo formule skiciramo računski model mostu (slika 2). Most dolžine l ponazarja ravna črta, ki je podprta na koncih. Tovornjak ponazarja klada mase m, ki se pomika prek mostu s stalno hitrostjo v. Lastno težo mostu zanemarimo. Sicer tudi lastna teža mostu ne vpliva na spremembo velikosti sil v podporah. Teža mostu se s časom namreč ne spreminja. Klado začnemo spremljati na neki razdalji x_0, merjeno od leve podpore.

Velikosti sil v podporah F_1 in F_2 se spreminjata glede na to, kje med podporama se tovornjak trenutno nahaja. Vsak čas velja za most mehansko ravnovesje: ravnovesje sil in ravnovesje navorov. Ker obravnavamo sistem sil brez skupnega prijemališča, je smiselno začeti z ravnovesno enačbo navorov – izberemo vrtišče A v desni podpori:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_{i,(A)} = 0\ \mathrm{Nm}. \qquad (1)$$

S pomočjo slike 2 določimo ročice sil, ki na vrtišče A povzročajo od nič različen navor, in izpolnimo enačbo (1):

$$F_1 \cdot l = F_g\big(l - (x_0 + x)\big). \qquad (2)$$

Pomnožimo člene v enačbi (2) in razdaljo x izrazimo s hitrostjo tovornjaka, dobimo:

$$F_1 \cdot l = F_g \cdot l - F_g \cdot x_0 - F_g \cdot vt. \qquad (3)$$

Zgornjo enačbo delimo z l in dobimo končno odvisnost:

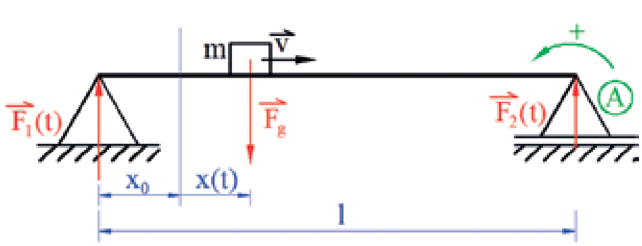
$$F_1 = -\frac{F_g \cdot v}{l} \cdot t + \left(F_g - F_g \cdot \frac{x_0}{l}\right). \qquad (4)$$

Smerni koeficient premice z enačbo $y = kx + n$ je po enačbi (4) enak:

$$k = -\frac{F_g \cdot v}{l}, \qquad (5)$$

od koder določimo iskano hitrost tovornjaka:

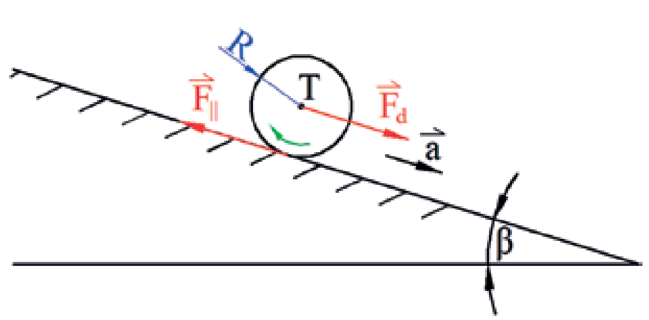
$$v = -\frac{k \cdot l}{F_g}. \qquad (6)$$



Slika 2: Shematični prikaz mostu z označenimi količinami.

Na klancu

Zahtevnost obravnavanega primera v prejšnjem poglavju lahko stopnjujemo z obravnavo gibanja po klancu. Zamislimo si klančino, po kateri se kotali kroglica brez spodrsavanja (slika 3). Kroglico pospešuje po klancu navzdol dinamična komponenta sile teže F_d, medtem ko drsenje po klancu preprečuje navzgor po klancu obrnjena sila $F_{||}$.



Slika 3: Kotaljenje kroglice po klancu brez spodrsavanja.

Nastavimo drugi Newtonov zakon za kotaljenje kroglice vzdolž klanca (Gruden, Kastelic, Mir, Ostruh, Rebec, n. d.):

$$F_d - F_{||} = ma_T, \tag{7}$$

pri čemer se indeks »T« nanaša na težišče kroglice, okoli katerega se kroglica vrti. Izrazimo dinamično komponento sile teže z naklonskim kotom klanca β. Enačbo (7) prepišemo:

$$F_g \sin\beta - F_{||} = ma_T. \tag{8}$$

Kroglica se med gibanjem po klancu navzdol vrti še okoli svojega težišča. To opisuje enačba o navorih (Kladnik, 2015):

$$M = F_{||}R = J_T\alpha, \tag{9}$$

pri čemer je R polmer kroglice, $J_T = \frac{2}{5}mR^2$ vztrajnostni moment kroglice za vrtenje kroglice okoli njenega težišča (Kraut, 2017) in $\alpha = a_T/R$ kotni pospešek vrtenja kroglice (Kladnik, 2015). Ko upoštevamo navedene zveze za vztrajnostni moment kroglice in njen kotni pospešek, dobimo formulo za velikost sile $F_{||}$, izražene iz enačbe (9):

$$F_{||} = \frac{J_T\alpha}{R} = \frac{1}{R}\cdot\frac{2mR^2}{5}\cdot\frac{a_T}{R} = \frac{2}{5}ma_T. \tag{10}$$

Rezultat (10) vstavimo v enačbo (8):

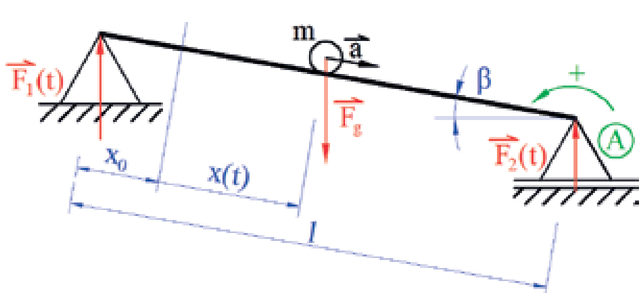
$$F_g \sin\beta - \frac{2}{5}ma_T = ma_T \tag{11}$$

in izpeljemo pospešek težišča kroglice na klancu:

$$a_T = \frac{F_g \sin\beta}{\frac{7}{5}m} = \frac{5g\sin\beta}{7}. \tag{12}$$

Enačba (12) povezuje pospešek in naklonski kot klanca. Rezultat velja za primer kotaljenja kroglice, sicer je treba v enačbo (10) za vztrajnostni moment vstaviti izraz za katero drugo geometrijsko telo (na primer, če se po klancu kotali valj).

Nadaljujmo iskanje zveze med silami v podporah klanca in pospeškom telesa na klancu. Klanec, ki ga v navpičnih smereh na vrhu in ob njegovem vznožju podpirata navpični sili, prikazuje slika 4. Na klanec položimo kroglico in jo iz mirovanja spustimo (brez začetne hitrosti), da se kotali po klancu navzdol.



Slika 4: Podprt klanec med kotaljenjem kroglice brez spodrsavanja.

Po enačbi (1) enačimo navora sil F_1 v levi podpori in teže F_g kroglice:

$$F_1 l\cos\beta = F_g\big(l - (x_0 + x)\big)\cos\beta. \tag{13}$$

Kotno funkcijo na obeh straneh enačbe (13) krajšamo in za lego kroglice uporabimo zvezo premega neenakomernega gibanja $x = a_T t^2/2$:

$$F_1 l = F_g l - F_g x_0 - F_g\frac{a_T t^2}{2}. \tag{14}$$

Enačbo (14) delimo z dolžino klanca l, da dobimo časovno odvisnost spreminjanja sile v podpori na vrhu klanca. Enačbo še uredimo:

$$F_1 = -\frac{F_g\cdot a_T}{2l}\cdot t^2 + \left(F_g - F_g\cdot\frac{x_0}{l}\right). \tag{15}$$

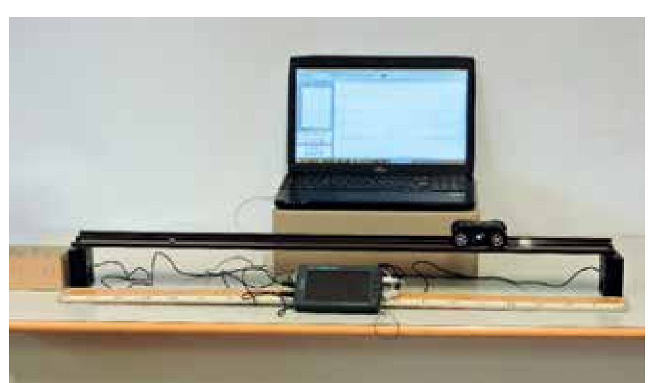
Po enačbi (15) vidimo, da je časovna odvisnost spreminjanja velikosti sile v podpori kvadratična. Ko primerjamo enačbo (15) s splošnim predpisom kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$, opazimo, da je pospešek kroglice a_T po absolutni vrednosti odvisen od vodilnega koeficienta a kvadratne funkcije, kot določa zveza:

$$a = \frac{F_g\cdot a_T}{2l}. \tag{16}$$

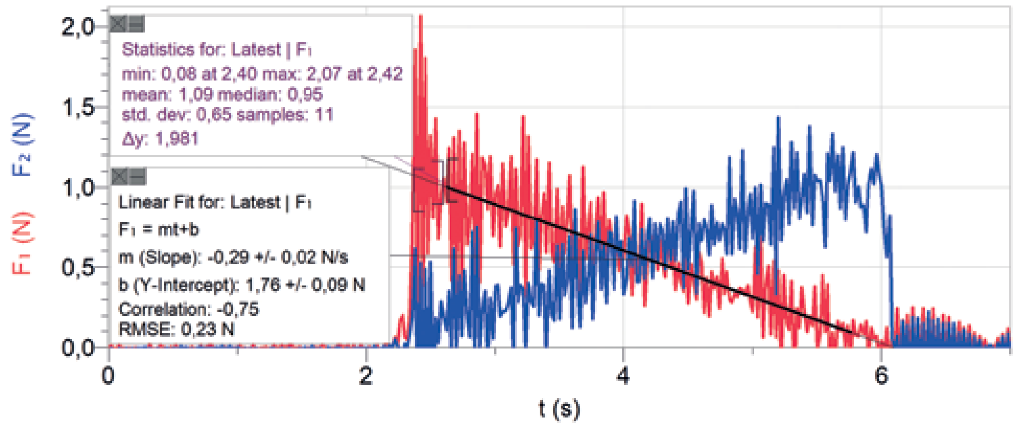
Eksperimentalno lahko izmerimo časovno spreminjanje velikosti sil v podporah klanca $F_1(t)$ in $F_2(t)$ ter s prilagajanjem parabole skozi zbrane meritve po enačbi (16) določimo pospešek krog lice na klancu. Za tem lahko še po enačbi (12) določimo naklon klanca.

Eksperimentalni rezultati

Za prvi del naloge postavimo eksperiment, kot ga prikazuje slika 5. Vodoraven most predstavlja kovinski kanal ali kakšna deščica, ki je na obeh koncih podprta s silomeroma Vernier. Meritve zbiramo z računalnikom prek vmesnika LabQuest. Med zajemanjem meritev se po mostu pelje avtomobil na baterije. S tem imamo zagotovljeno enakomerno hitrost premikanja telesa po mostu. Avtomobil lahko za vzporedno analizo označimo z belo nalepko. Pri video analizi nam ta nalepka služi kot stalna točka, katere gibanje spremljamo.



Slika 5: Postavitev eksperimenta pri izvedbi meritev za vodoraven most.



Slika 6: Meritve pri eksperimentu z vodoravnim mostom.

Zajete meritve eksperimenta prikazuje slika 6. Ko pelje avtomobil po mostu, sila v eni od podpor s časom pada in v drugi podpori s časom narašča. Zaradi stalne hitrosti avtomobila je ta odvisnost linearna (kot napoveduje enačba 4). Vsota obeh sil v podporah je enaka teži avtomobila.

Po enačbi (6) izračunamo hitrost avtomobila. Pred tem še izmerimo potrebne podatke: teža avtomobila je $F_g = (1{,}16 \pm 0{,}01)$ N, dolžina mostu je $l = (0{,}94 \pm 0{,}01)\ m$, in s slike 6 odčitamo strmino premice spreminjanja sile v podpori mostu $k = -(0{,}29 \pm 0{,}02)$ N/s. Ko vstavimo podatke v enačbo (6), dobimo:

$$v = -\frac{-0{,}29\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}94\ \mathrm{m}}{1{,}16\ \mathrm{N}}\left(1 \pm \left(\frac{0{,}02}{0{,}29} + \frac{0{,}01}{0{,}94} + \frac{0{,}01}{1{,}16}\right)\right) = \\ = (0{,}24 \pm 0{,}02)\mathrm{m/s}\,. \tag{17}$$

Rezultat lahko preverimo z video analizo (slika 7). Točko, ki jo spremljamo na avtomobilu za video analizo, označuje bela nalepka. Na grafu lege v odvisnosti od časa je strmina premice enaka hitrosti avtomobila. Ta znaša $v_{video} = 0{,}25\ \mathrm{m/s}$, kar se v okviru napake z rezultatom (17) ujema.

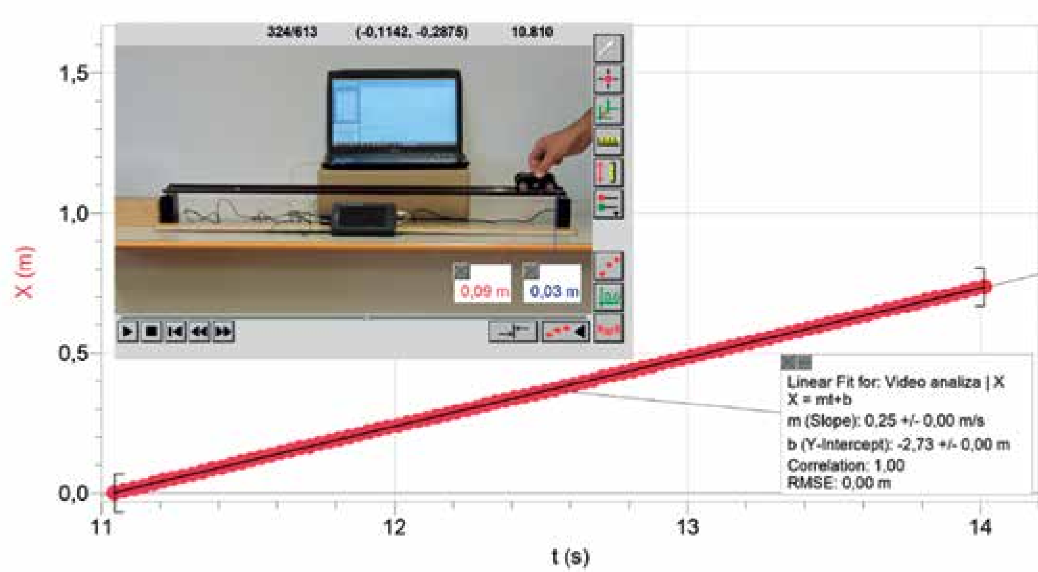
S pomočjo zadnjega člena enačbe (4) in z oceno velikosti sile v eni od podpor, ko avtomobil začne vožnjo, lahko določimo mesto na mostu x_0, kjer je avtomobil začel svojo vožnjo (označeno na sliki 2). S slike 6 ocenimo, da je začetna vrednost sile v podpori $F_0 = 1{,}09$ N. Zadnji člen v enačbi (4) enačimo s to silo:

$$F_0 = F_g\left(1 - \frac{x_0}{l}\right) \tag{18}$$

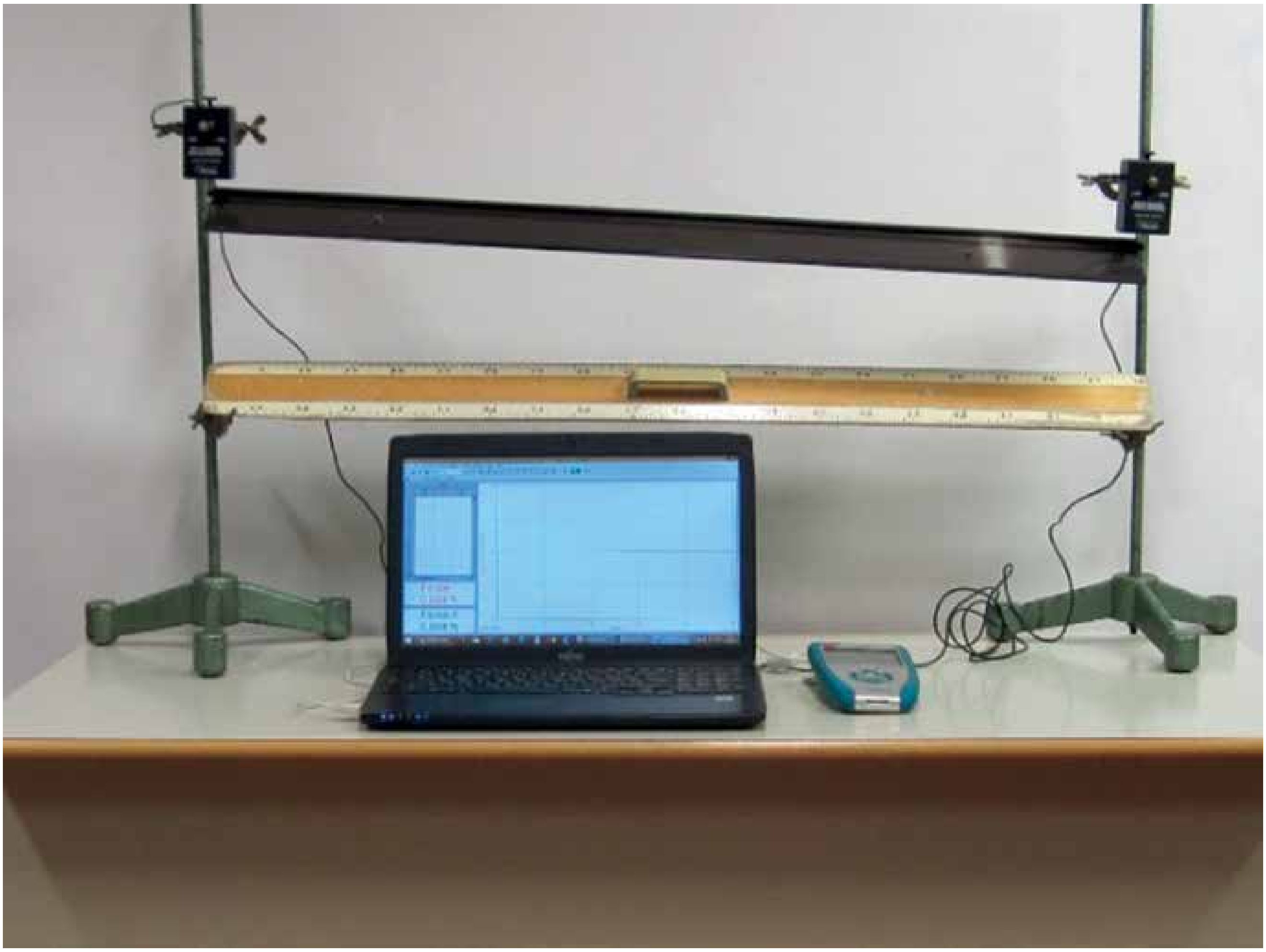
in izpeljemo začetno lego x_0 ter vstavimo podatke:

$$x_0 = l\left(1 - \frac{F_0}{F_g}\right) = 0{,}94\ \mathrm{m}\left(1 - \frac{1{,}09\ \mathrm{N}}{1{,}16\ \mathrm{N}}\right) = 0{,}06\ \mathrm{m}. \tag{19}$$

Rezultat (19) primerjamo z izmerjeno vrednostjo pri video analizi. Na sliki 7 je z rdečo barvo izmerjena razdalja od začetka mostu do prvega kolesa in z modro barvo razdalja od začetka mostu do zadnjega kolesa. Če predpostavimo, da je težišče avtomobila na sredini med kolesi, se aritmetična sredina omenjenih izmerjenih razdalj ujema z rezultatom (19). Ustreznost enačbe (4) smo v obeh členih eksperimentalno potrdili. Preverimo še eksperimentalno kotaljenje kroglice po nagnjenem klancu. Postavitev eksperimenta kaže slika 8. Postavitev je po-



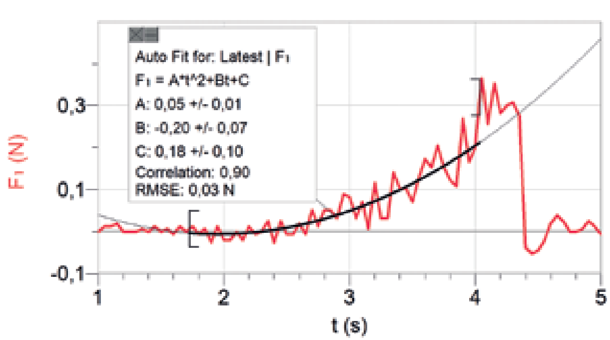
Slika 7: Rezultati video analize.



Slika 8: Postavitev eksperimenta za proučevanje kotaljenja kroglice po klancu.

dobna postavitvi prvotnega eksperimenta, le da je sedaj napravljena klančina.

Rezultat meritve kaže slika 9. Kroglica med kotaljenjem po klancu pospešuje, zato se sila parabolično s časom spreminja, kot napoveduje enačba (15).



Slika 9: Meritve kotaljenja kroglice po klancu.

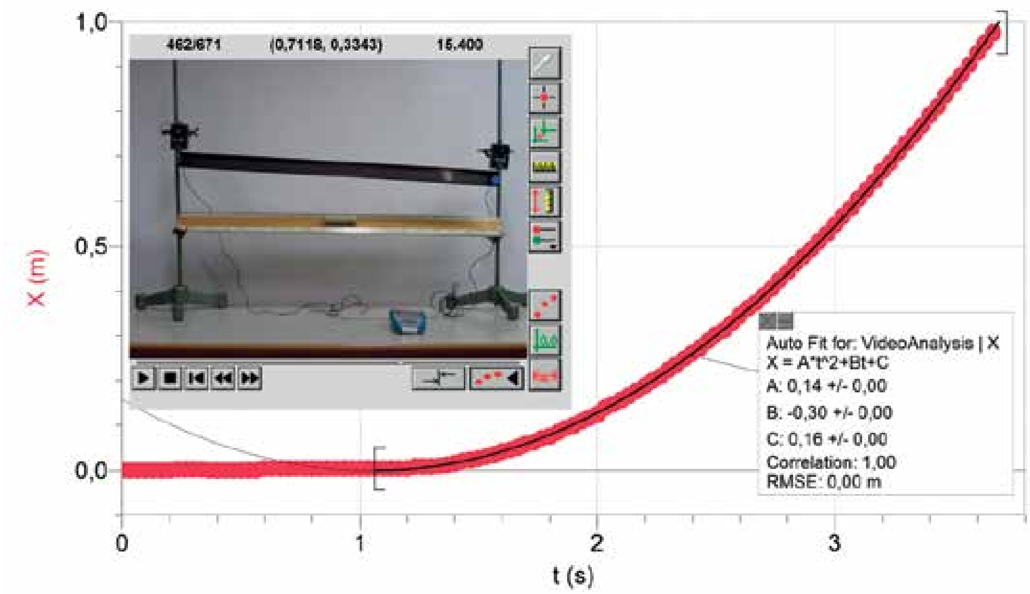
Vodilni koeficient parabole je enak vodilnemu koeficientu v enačbi (15). Iz koeficienta izločimo pospešek kroglice:

$$a_T = \frac{2Al}{F_g} = \frac{2 \cdot 0{,}05 \frac{N}{s^2} \cdot 0{,}94\ \mathrm{m}}{0{,}031\ kg \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{s^2}} \left(1 \pm \left(\frac{0{,}01}{0{,}05} + \frac{0{,}01}{0{,}94} + \frac{0{,}001}{0{,}031}\right)\right) =$$
$$= (0{,}31 \pm 0{,}08)\ \frac{\mathrm{m}}{s^2}. \tag{20}$$

Rezultat (20) primerjamo z rezultatom video analize (slika 10). Vodilni koeficient parabole je po enačbah premega gibanja enak polovični vrednosti pospeška. Torej če izračunamo dvakratnik vodilnega koeficienta ($A = 0{,}14\ \mathrm{m/s^2}$), kar ustreza velikosti pospeška kroglice, in rezultat primerjamo z rezultatom (20), opazimo ujemanje znotraj napake rezultata (20). Po enačbi (12) izračunamo še naklon klanca:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{7a_T}{5g}\right) = \arcsin\left(\frac{7 \cdot 0{,}31\ \mathrm{m/s^2}}{5 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}\right) \cong 2{,}5°. \tag{21}$$

S kotomerom izmerjen naklon je 3°. Tudi izračunani naklon klanca je blizu izmerjenemu naklonu. Primerjava potrjuje, da je pristop obravnave kotaljenja kroglice ustrezen.



Slika 10: Rezultat video analize kotaljenja kroglice.

Zaključek

V šoli pri poučevanju učitelji vse pogosteje zaznavamo, da učenci ne povezujejo znanj predmetov med seboj v tolikšni meri, kot bi si želeli. Zato so vsebinsko obogatene naloge lahko primerna rešitev za združevanje znanj. Obravnavani primer združuje vrline matematike, fizike in eksperimentiranja. Mogoče je prikazani način reševanja nalog neprimeren za vse učence v šoli, lahko pa je uporabljen pri problemskem raziskovanju učno boljših učencev. Pri tem učenci razvijajo ali utrjujejo dodatna matematična znanja in se ukvarjajo z zajemanjem meritev, analiziranjem meritev ter napovedovanjem zakonitosti, ki sledijo iz analize meritev. Metoda je v šoli uporabna pri skupinskem delu učencev, saj obstaja velika verjetnost, da povprečen učenec še nima vseh potrebnih vrlin. Reševanje takšnih problemov je lahko tudi odbijajoče, zato je primerneje, če damo takšne naloge učencem na izbiro. Paziti je treba tudi na zahtevnost naloge. Obravnava kroglice na klancu je veliko zahtevnejša kot obravnava vožnje po vodoravni podlagi. Obravnavana naloga vsebuje tudi izbirna znanja (na primer kotaljenje), kar širi znanje učencev prek učnega načrta. Seveda lahko raziskujemo še, kako določiti hitrost tovornjaka na vodoravnem mostu, če je most podprt na treh ali več mestih. Napovedujemo lahko časovne odvisnosti sil v podporah mostu, če so te neenakomerno oddaljene med seboj in je hitrost tovornjaka stalna. Obravnavamo lahko tudi primere voženj po mostu dveh ali več vozil, ki vozijo v istih ali nasprotnih smereh.

Kratka predstavitev avtorja

Magister znanosti fizike Marko Rožič, profesor matematike in fizike, je zaposlen v Srednji šoli Črnomelj. Vrsto let se udeležuje mednarodnih konferenc s področij računalništva, matematike, fizike, ekologije in didaktike, kjer z drugimi udeleženci izmenjuje primere dobrih praks.

Viri in literatura

[1] Gruden, D., Kastelic, P., Mir, M., Ostruh, P. in Rebec, E. (n. d.). *Lov na izgube*. Pridobljeno 7. 10. 2018 s http://projlab.fmf.uni-lj.si/arhiv/2013_14/naloge/izdelki/lov_na_izgube_2/teorija.html.

[2] Kladnik, R., Kodba, S. (2015). *Gibanje in sila*. Učbenik za fiziko za gimnazije in srednje šole 1. Ljubljana: DZS.

[3] Kraut, B. (2017). *Krautov strojniški priročnik*. 16. slovenska popravljena izdaja. Ljubljana: Buča.

[4] Vernier. (2018). Downloads. PRIDOBLJENO 7. 10. 2018 S HTTPS://WWW.VERNIER.COM/DOWNLOADS/.