PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 5
Stran 290

Milan Ambrožič:

NEWTONOVA METODA IN LEPI FRAKTALI

Ključne besede: zanimivosti, razvedrilo, matematika, kompleksna analiza, iteracije, fraktali.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1268-Ambrozic.pdf

NEWTONOVA METODA IN LEPI FRAKTALI

Enačba $z^n = 1$, kjer je n naravno število, ima n kompleksnih rešitev. Za vsak n je ena od rešitev $z = 1$. Vse rešitve leže na enotski krožnici v kompleksni ravnini in so razporejene tako, da dele krožnico na enake dele.

Rešitve torej poznamo, zanimivo pa je vprašanje, h kateri izmed n rešitev nas pripelje kakšna iteracijska metoda, če začnemo iteracijo s poljubnim kompleksnim začetnim približkom.

Izbrali smo si Newtonovo metodo, ki jo na kratko opišimo. Če iščemo rešitve enačbe $f(z) = 0$ in je z_0 začetni približek, dobimo naslednje približke s formulo:

$$z_{r+1} = z_r - \frac{f(z_r)}{f'(z_r)},$$

kjer je f' odvod funkcije f po spremenljivki z. V našem primeru je $f(z) = z^n - 1$, od koder dobimo:

$$z_{r+1} = z_r - \frac{z_r^n - 1}{n z_r^{n-1}}.$$

Če je začetni približek dovolj blizu kakšni od rešitev, potem se naslednji približki k njej hitro bližajo. V splošnem pa ne moremo vnaprej vedeti, h kateri od rešitev se bodo stekali.

Lahko pa začetne približke sortiramo glede na to, h kateri od rešitev nas je pripeljala Newtonova metoda. Če v kompleksni ravnini z enako barvo pobarvamo točke, ki kot začetni približki vodijo k isti rešitvi, in z različnimi barvami tiste, ki vodijo k različnim rešitvam, dobimo čudovit vzorec. Ta ima fraktalno strukturo, kar pomeni, da se njegova razvejanost ne neha pri še tako majhnih merilih. Če vzamemo pod drobnogled del vzorca z veliko barvno raznolikostjo in ga povečamo, se raznolikost ohrani pri poljubni povečavi.

Na zadnji strani ovitka so prikazani vzorci za $n = 3, 4, 5$ in 6. Sami jih lahko dobite tako, da napišete program in ga poženete na svojem računalniku. Še podatek o približni zahtevnosti: Na računalniku PC 386 (40 MHz) z matematičnim koprocesorjem nariše program v turbopascalu celotno sliko v približno petnajstih minutah.

Milan Ambrožič