PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 1
Strani 26–28

Marijan Prosen:

# KJE VIDIMO VEČ, NA ZEMLJI ALI NA LUNI?

Ključne besede: geometrija, astronomija, krogla, krogelna kapica.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1430-Prosen.pdf

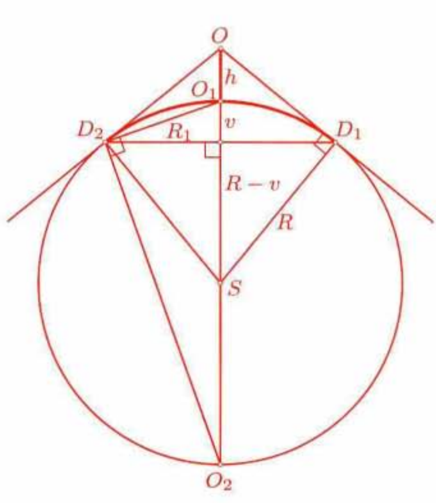
# KJE VIDIMO VEČ, NA ZEMLJI ALI NA LUNI?

Vprašanje v naslovu je zastavljeno nekoliko nenatančno. Da bi nanj lahko pravilno odgovorili, bi morali pravilneje vprašati, in sicer *Kje vidimo večjo površino?* oziroma *Kje vidimo večji del površine.*

Gre torej za dve vprašanji, v celoti pa za tale problem: Na Zemlji ali pa na Luni naj bo enako visoka gora. Smo na njenem vrhu in opazujemo površino Lune oziroma Zemlje. (Tu uporabljamo izraz površina (geometrijski pojem) namesto pravilnejšega izraza površje (fizikalno–geografski pojem) zato, ker Zemljo in Luno obravnavamo kot krogli (idealizacija), kar seveda ti telesi nista.)

Zdrava pamet takoj odgovori: večjo površino vidimo na Zemlji, večji del (kos) površine (glede na celoto) pa na Luni, če vemo, da je Luna manjša od Zemlje in če seveda v obeh primerih opazujemo površino z enake višine. Zdaj pa to dokažimo.

Vzemimo veliko kroglo s polmerom $R$, višino gore $h$ ($h$ naj bo v primerjavi z $R$ tako majhen, da je $h^2$ zanemarljiv) pa si predstavljajmo s kratko daljico v podaljšku polmera (slika 1). Gledamo iz opazovališča $O$. Naš pogled sega od $O$ do $D_1$ oziroma od $O$ do $D_2$, vidimo pa kapico krogle. Površina te kapice je $P_{\text{kapica}} = 2\pi Rv$, če je $v$ višina kapice ($v$ je tudi tako majhen glede na $R$, da je $v^2$ zanemarljiv).




Slika 1. K opazovanju krogle od blizu, to je z višine $h$ ($h$ dosti manjši od $R$) nad površino krogle.

Pri gornjih pogojih najprej iz $\triangle O_1D_2O_2$ (ob $D_2$ je pravi kot) izpeljemo $R_1^2 = v(2R - v) = 2vR$, nato pa iz $\triangle OD_2S$ (ob $D_2$ je spet pravi kot) še $R_1^2 = (v + h)(R - v) = vR + hR$. Iz enakosti $2vR = vR + hR$ sledi $v = h$. Pri majhnih vrednostih $h$ sta $h$ in $v$ približno enaka.

Zdaj lahko odgovorimo na prvo vprašanje. Pri konstantni višini $h$, s katere gledamo, je površina, ki jo vidimo, sorazmerna s polmerom krogle $R$.

Polmer Lune je $\frac{1}{4}$ polmera Zemlje. Zato z enake višine na Luni vidimo 4-krat manj površine kot na Zemlji.

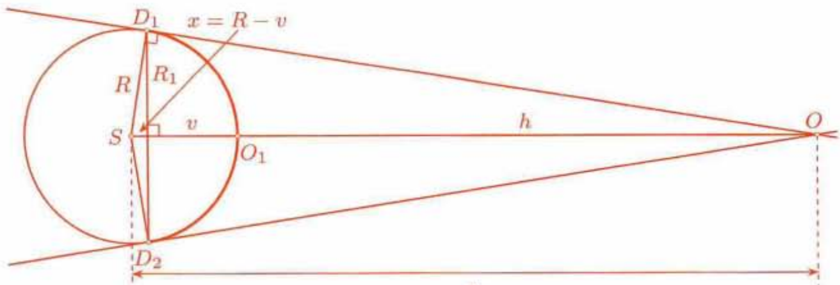
Odgovorimo še na drugo vprašanje. Vidimo tolikšen del krogle, kot pove kvocient $\frac{P_{\text{kapica}}}{P_{\text{krogla}}} = \frac{2\pi R v}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$. Pri konstantni višini $h$ je del površine, ki ga vidimo glede na celoto, obratno sorazmeren s polmerom krogle $R$.

Polmer Lune je $\frac{1}{4}$ polmera Zemlje. Zato z enake višine na Luni vidimo 4-krat večji del površine kot na Zemlji.

Zdaj pa drugo vprašanje še nekoliko razširimo. Naj se opazovališče oddaljuje od krogle. Prej smo kroglo opazovali od blizu, zdaj od daleč. Polmer $R$ krogle naj bo tako majhen glede na oddaljenost $r$, da $R^2$ lahko zanemarimo.

Vprašajmo se, kolikšen del krogle vidimo pri pogledu od daleč. Gre za primer, da je opazovališče na Zemlji, in se vprašamo, kolikšen del Lune vidimo z Zemlje (slika 2). Veliko ljudi pravi brez razmisleka, da pri opazovanju (posebno "očitno" naj bi to bilo ob polni luni ali ščipu) vidimo pol Lune. Zdrava pamet spet trmari, da to ni mogoče. Dokažimo, da ima zdrava pamet tudi tokrat prav.

Iz velike oddaljenosti, torej iz opazovališča $O$, vidimo tolikšen del krogle, kot pove kvocient $\frac{2\pi R v}{4\pi R^2} = \frac{v}{2R}$ (slika 2). S te slike razberemo, da je $v = R - x$, pri čemer $x$ izračunamo iz $\triangle OD_1S$ (ob $D_1$ je pravi kot). Izpeljemo $R^2 = x(r-x) = rx$ in $x = \frac{R^2}{r}$. Torej iz velike razdalje $r = |OS|$ vidimo $\frac{R-\frac{R^2}{r}}{2R} = \frac{r-R}{2r} = \frac{h}{2r}$-ti del krogle.




Slika 2. K opazovanju krogle od daleč, to je iz oddaljenosti $r$ ($R$ dosti manjši od $r$) oziroma z "višine" $h = r - R$ nad površino krogle.

Dobili smo zelo zanimiv rezultat. Če smo blizu, vidimo $\frac{h}{2R}$-ti del krogle, če smo daleč, pa vidimo $\frac{h}{2r}$-ti del krogle; $h = r - R$.

Zadnji rezultat uporabimo pri Luni. Oddaljenost Lune od Zemlje je 60 polmerov Zemlje. S površja Zemlje vidimo $\frac{59R_Z - \frac{1}{4}R_Z}{2\cdot 59R_Z} = 49{,}8\%$ površine Lune, kar očitno ni pol Lune. (Tudi če bi vzeli za $r = 60R_Z$, bi bil rezultat enak. Pojasni.) Tolikšni del Lune seveda vidimo trenutno. V daljšem razdobju pa je vidimo več. Kolikšen del in zakaj tolikšen pa lahko preberete v članku *Lunina kimanja*, Presek **26** (1998/99), str. 26.

Da bi bilo bolj zanimivo, ob zaključku predlagam še dve preprosti vaji.

Izračunaj, kolikšen del Lune in kolikšen del Zemlje vidiš iz:
- središča razdalje Zemlja–Luna,
- točke na zveznici Zemlja–Luna, iz katere obe telesi vidiš pod enakim zornim kotom.

Rešitvi bomo objavili v naslednji številki.

*Marijan Prosén*