HOČEVAR.

GEOMETRIE

FÜR

UNTERGYMNASIEN

PER ASPERA AD ASTRA

Hočevar Franc

Lehr- und Übungsbuch

der

GEOMETRIE

für

UNTERGYMNASIEN.

Von

Dr. Franz Hočevar,

o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

Mit 184 Figuren.

Sechste, umgearbeitete Auflage.

Inhaltlich unveränderter, nach der neuen Rechtschreibung hergestellter Abdruck der mit dem Erlasse des k. k. Ministeriums für Kultus und Unterricht vom 24. Januar 1902, Z. 1582 approbierten 6. Auflage.

Preis geheftet 1 K 20 h, gebunden 1 K 70 h.

Wien.

Verlag von F. Tempsky.

1902.

Inhalt.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Einleitung.

§ 1. Geometrische Gebilde, Begriff der Geometrie. Jeder Körper hat verschiedene Eigenschaften oder Merkmale, die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen; er nimmt einen Raum ein, hat eine gewisse Gestalt und eine bestimmte Lage, er besteht aus einem Stoffe von gewisser Farbe, Härte, hat ein bestimmtes Gewicht, u. s. w. Von diesen verschiedenen Eigenschaften der wirklichen Körper betrachtet man in der Geometrie nur die Gestalt, die Größe und die Lage und sieht von allen übrigen Eigenschaften ab. Auf diesem Wege gelangt man zur Vorstellung der geometrischen Körper und sagt:

Ein geometrischer Körper ist ein vollständig begrenzter Raum.

Jeder Körper hat drei Ausdehnungen oder Dimensionen: Länge, Breite und Höhe (Dicke, Tiefe). Die Grenzen der Körper heißen Flächen; jede Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite. Die Grenzen der Flächen heißen Linien; jede Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge. Die Grenzen der Linien heißen Punkte; Punkte haben keine Ausdehnung.

Als Beispiel diene ein Würfel.

Punkte, Linien, Flächen und Körper heißen geometrische Gebilde und die Lehre von der Entstehung und den Eigenschaften der geometrischen Gebilde heißt Geometrie.

Die geometrischen Gebilde sind mit den Sinnen nicht wahrnehmbar; man kann sich jedoch dieselben durch wirkliche Körper, welche Modelle heißen, sowie durch Zeichnungen oder Figuren veranschaulichen. Ein geometrisches Gebilde nach bestimmten Angaben zeichnen heißt dasselbe konstruieren (Konstruktionsaufgaben).

§ 2. Entstehung der geometrischen Gebilde durch Bewegung. Wenn ein Punkt sich fortbewegt, so beschreibt er eine Linie. Man unterscheidet gerade und krumme Linien. Je nachdem der Punkt eine gerade oder krumme Linie beschreibt, sagt man, er behalte während der Bewegung seine Richtung bei oder er ändere sie fortwährend.

Wenn eine Linie sich fortbewegt, so beschreibt sie eine Fläche, vorausgesetzt, daß die Linie nicht in sich selbst fortgeschoben wird, was z. B. bei einer Geraden möglich ist. Man unterscheidet ebene und krumme Flächen. In jeder ebenen Fläche lassen sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen.

Wenn eine Fläche sich fortbewegt, so beschreibt sie einen Körper, vorausgesetzt, daß die Fläche nicht in sich selbst fortgeschoben wird, was z. B. bei einer Ebene möglich ist.

§ 3. Einteilung der Geometrie. Je nachdem die zu betrachtenden geometrischen Gebilde in einer Ebene liegen oder nicht, heißen sie ebene oder räumliche Gebilde.

Die Lehre von den ebenen Gebilden heißt ebene Geometrie oder Planimetrie; die Lehre von den räumlichen Gebilden heißt räumliche Geometrie oder Stereometrie.

Planimetrie.

Die Gerade.

§ 4. Grundeigenschaften der Geraden. Auf Grund der Vorstellung, welche wir von der geraden Linie besitzen, finden wir leicht die Antworten auf folgende Fragen: Wie viele Gerade lassen sich durch einen Punkt ziehen? Wie viele Gerade lassen sich durch zwei Punkte ziehen? Welche ist die kürzeste unter allen Linien, durch welche zwei Punkte verbunden werden können?

Grundsätze von der Geraden: 1. Durch zwei Punkte ist eine einzige Gerade möglich.

2. Die Gerade ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

Aufgaben. 1. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen. — Unbestimmte Aufgabe.

2. Durch zwei gegebene Punkte eine Gerade zu ziehen. — Bestimmte Aufgabe, weil sie eine einzige Lösung zuläßt.

Zum Zeichnen von geraden Linien dient das Lineal.

§ 5. Unbegrenzte Gerade oder Strahl, Halbstrahl, Strecke. Eine Gerade, welche man sich nach beiden Seiten ohne Ende verlängert zu denken hat, heißt eine unbegrenzte Gerade oder ein Strahl; sie wird durch einen oder zwei daran gesetzte Buchstaben bezeichnet und danach benannt, z. B. die Gerade AB, Fig. 1.

Eine unbegrenzte Gerade wird durch jeden ihrer Punkte in zwei halbbegrenzte Gerade oder Halbstrahlen geteilt; ein Halbstrahl wird durch zwei daran gesetzte Buchstaben bezeichnet, von denen der erste an seinem Grenzpunkte zu stehen hat, z. B. die Halbstrahlen CA und CB, Fig. 1. Die Richtung eines Halbstrahles, in welcher man sich denselben verlängert zu denken hat, wird durch eine Pfeilspitze angedeutet. Eine von zwei Punkten, also vollständig begrenzte Gerade heißt Strecke; die Grenzpunkte heißen auch Endpunkte. Man bezeichnet eine Strecke entweder durch zwei Buchstaben, welche an die Endpunkte gesetzt werden, oder durch einen an die Mitte der Strecke gestellten Buchstaben, z. B. die Strecken DE, FG, a, b, Fig. 1.

Eine Gerade, welche durch zwei gegebene Punkte geht, wird die Verbindungslinie dieser Punkte genannt; die von einem Punkte zum anderen gezogene Strecke heißt die Entfernung oder der Abstand derselben. So ist DE (Fig. 1) der Abstand der Punkte D und E.

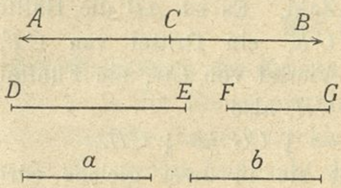

Fig. 1.

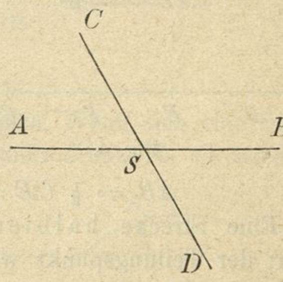

Fig. 2.

§ 6. Schnittpunkt zweier Geraden. Wenn zwei Gerade nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, so sagt man, sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt denselben den Durchschnittspunkt oder Schnittpunkt der Geraden. So schneiden sich die Geraden AB und CD (Fig. 2) im Punkte S.

§ 7. Vergleichung der Strecken. Zwei Strecken sind gleich, wenn sie so aufeinander gelegt werden können, daß ihre Endpunkte und daher auch alle dazwischen liegenden Punkte zusammenfallen, wie z. B. die Strecken a und b, Fig. 1; man schreibt $a = b$. Im anderen Falle sind die Strecken ungleich, wie z. B. DE und FG (Fig. 1); von diesen ist DE die größere, FG die kleinere und man schreibt entweder $DE > FG$ oder $FG < DE$.

Aufgabe. Eine gegebene Strecke zu übertragen, d. h. eine Strecke zu zeichnen, welche der gegebenen gleich ist.

Zur Vergleichung und zum Übertragen von Strecken dient der Zirkel.

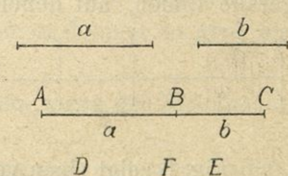

Fig. 3.

§ 8. Operationen mit Strecken. So wie mit Zahlen lassen sich auch mit Strecken gewisse Operationen ausführen:

1. Addition. Ist $AB = a$ und $BC = b$ (Fig. 3), so ist AC die Summe der Strecken a und b, also $AC = a + b$.

2. Subtraktion. Ist $DE = a$ und $DF = b$, so ist FE die Differenz der Strecken a und b, also $FE = a - b$.

3. Multiplikation einer Strecke mit einer ganzen Zahl. Es sei die Strecke $AB = a$ gegeben und man mache (Fig. 4) $AB = CD = DE = EF = FG = GH$; dann ist CE das Zweifache, CF das Dreifache, CG das Vierfache, CH das Fünffache von AB, also

$$CE = 2a, \quad CF = 3a, \quad CG = 4a, \quad CH = 5a.$$

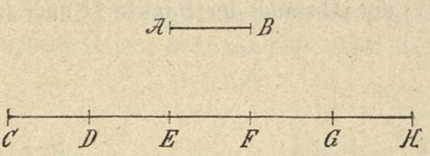

Fig. 4.

4. Teilung oder Division einer Strecke durch eine ganze Zahl. Es ist AB die Hälfte von CE, ein Drittel von CF, ein Viertel von CG, ein Fünftel von CH, also

$$AB = \tfrac{1}{2}\, CE = \tfrac{1}{3}\, CF = \tfrac{1}{4}\, CG = \tfrac{1}{5}\, CH.$$

Eine Strecke halbieren heißt sie in zwei gleiche Strecken teilen; der Teilungspunkt wird die Mitte oder der Halbierungspunkt der Strecke genannt.

5. Messung oder Division einer Strecke durch eine Strecke. Eine Strecke messen heißt untersuchen, wie oft eine als Längeneinheit angenommene Strecke in der gegebenen enthalten ist. Jene Zahl, welche angibt, wie oft die Längeneinheit in der gemessenen Strecke enthalten ist, wird die Maßzahl der letzteren genannt.

Unser Längenmaß hat das Meter (m) zur Grundeinheit; die Teile und Vielfachen desselben sind nach dem Dezimalsystem gebildet.

$0{\cdot}1\ m = 1\ dm$ (Dezimeter),	$10\ m = 1\ dkm$ (Dekameter),
$0{\cdot}01\ m = 1\ cm$ (Zentimeter),	$100\ m = 1\ hm$ (Hektometer),
$0{\cdot}001\ m = 1\ mm$ (Millimeter).	$1000\ m = 1\ km$ (Kilometer),
	$10000\ m = 1\ \mu m$ (Myriameter).

Zum Messen von Längen dienen Stäbe von Holz oder Metall sowie Bänder, Ketten u. dgl., auf denen eine oder mehrere Längeneinheiten aufgetragen und eingeteilt sind. Solche Vorrichtungen heißen Maßstäbe, Meßbänder, Meßketten u. s. w. Beim Zeichnen von Plänen, Landkarten u. dgl. benützt man in der Regel verjüngte Maßstäbe, d. h. gerade Linien, auf denen die Längeneinheit verkleinert aufgetragen ist.

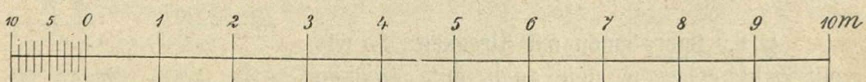

Fig. 5.

Fig. 5 zeigt einen verjüngten Maßstab, dessen Einheit 1 m bedeutet, während die wirkliche Länge derselben 1 cm ist; dieser Maßstab gibt also $\frac{1}{100}$ der Naturgröße an.

Übungsaufgaben. 1. Gegeben sind drei Strecken a, b, c u. zw. $a > b > c$; man konstruiere die folgenden Ausdrücke:

$$a + b,\ a + c,\ b + c,\ a - b,\ a - c,\ b - c,\ a + b + c.$$

2. Das 2-, 3-, 4-, 5-fache einer gegebenen Strecke zu konstruieren.

3. Eine gegebene Strecke durch Versuche mit dem Zirkel oder nach dem Augenmaße in 2, 3, 4, 5, 6 gleiche Teile zu teilen.

4. Gegeben ist eine Strecke a; man zeichne $\frac{3}{2}a$, $\frac{2}{3}a$, $1\frac{1}{3}a$, $\frac{3}{4}a$, $2{\cdot}4\ a$!

5. Mit Hilfe des Maßstabes in Fig. 5 eine gegebene Strecke zu messen.

6. Mit Hilfe dieses Maßstabes eine Strecke von gegebener Länge in $\frac{1}{100}$ der Naturgröße zu zeichnen, z. B. 7·3 *m*, 65 *dm*, 240 *cm*.

Der Kreis. A.

§ 9. Entstehung des Kreises, Erklärungen. Wenn sich eine Strecke (OA, Fig. 6) in der Ebene um einen Endpunkt dreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt der andere Endpunkt derselben eine krumme Linie, welche Kreislinie heißt, und die Strecke selbst beschreibt die von der Kreislinie begrenzte Fläche, welche Kreisfläche heißt. Unter Kreis hat man je nach dem Zusammenhange die Kreislinie oder die Kreisfläche zu verstehen. Die Kreislinie wird auch Umfang oder Peripherie der Kreisfläche (des Kreises) genannt.

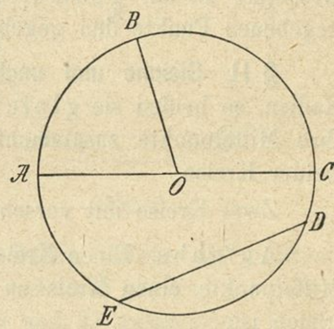

Fig. 6.

Die Kreislinie ist demnach eine geschlossene Linie, deren sämtliche Punkte von einem bestimmten Punkte gleich weit entfernt sind; dieser Punkt heißt Mittelpunkt oder Zentrum des Kreises (O, Fig. 6). Jede Strecke, welche den Mittelpunkt des Kreises mit einem Punkte des Umfanges verbindet, heißt ein Halbmesser oder Radius. Alle Halbmesser oder Radien eines Kreises sind gleich: $OA = OB = OC$. Warum?

Jede Strecke, welche zwei Punkte des Kreisumfanges verbindet heißt eine Sehne, wie DE. Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne heißt Durchmesser oder Diameter, wie AC. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich; denn jeder Durchmesser ist doppelt so groß als der Halbmesser.

Aufgaben. 1. Einen Kreis zu konstruieren, wenn der Mittelpunkt und ein Punkt des Umfanges gegeben sind.

2. Konstruiere einen Kreis, wenn das Zentrum und der Radius gegeben sind!

Zum Konstruieren von Kreislinien dient der Zirkel.

§ 10. Gegenseitige Lage eines Punktes und eines Kreises. Ein Punkt, welcher nicht auf dem Umfange eines Kreises liegt, kann entweder innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen. Der Punkt liegt innerhalb eines Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte (Zentralabstand) kleiner ist als der Halbmesser; und er liegt außerhalb des Kreises, wenn sein Zentralabstand größer ist als der Halbmesser.

Aufgabe. Einen Punkt zu bestimmen, der von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Diese Aufgabe ist unbestimmt, weil es unzählig viele Punkte gibt, welche der ausgesprochenen Forderung genügen. Alle diese Punkte liegen in der Kreislinie, welche den gegebenen Punkt zum Mittelpunkte und den gegebenen Abstand zum Halbmesser hat. Man sagt auch: Diese Kreislinie ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von dem gegebenen Punkte den gegebenen Abstand haben.

§ 11. Gleiche und ungleiche Kreise. Haben zwei Kreise gleiche Radien, so heißen sie gleich. Wenn man sie so aufeinander legt, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen, so decken sich auch die Umfänge beider Kreise.

Zwei Kreise mit verschiedenen Radien heißen ungleich.

Aufgabe. Einen Kreis zu übertragen, d. h. aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, der einem gegebenen Kreise gleich ist.

§ 12. Sekante und Tangente. Eine unbegrenzte Gerade, welche mit dem Kreise zwei Punkte gemein hat, wird eine Sekante genannt, wie FG (Fig. 7). Wodurch unterscheidet sich demnach die Sekante von der Sehne?

Eine Gerade, welche beliebig verlängert mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein hat, heißt eine Tangente. Man sagt, sie berühre den Kreis, z. B. HT; H ist der Berührungspunkt.

§ 13. Bogen, Sektor, Segment. Ein Teil des Kreisumfanges heißt ein Kreisbogen (NP, Fig. 7). Zwei Bogen, welche einem und demselben Kreise oder zwei gleichen Kreisen angehören, können hinsichtlich ihrer Größe wie zwei Strecken miteinander verglichen werden. Zwei Kreisbogen von gleichem Halbmesser werden gleich genannt, wenn man sie so aufeinander legen kann, daß sie sich ganz decken; sonst heißen sie ungleich. Zwei gleiche Bogen desselben Kreises, wie AB und CD (Fig. 8), können dadurch zur Deckung gebracht werden, daß man den einen Bogen an seinem Platze läßt und die Kreislinie mit dem anderen Bogen in sich selbst verschiebt.

Jeder Durchmesser teilt den Kreis in zwei gleiche Teile. Jede andere Sehne teilt den Kreis in zwei ungleiche Bogen, z. B. die Sehne *AB* (Fig. 8); der kleinere von beiden heißt der zur Sehne gehörige Bogen. Ein Teil der Kreisfläche, welcher von zwei Radien und einem Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sektor, wie *NOP* (Fig. 7). Ein Teil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne und einem Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment, wie *HJL* und *HJP*.

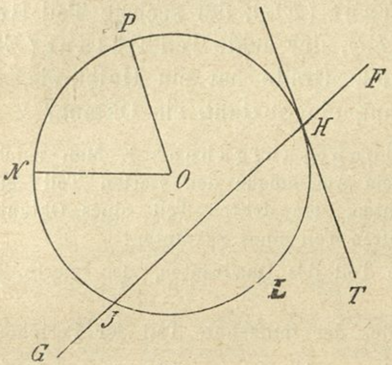

Fig. 7.

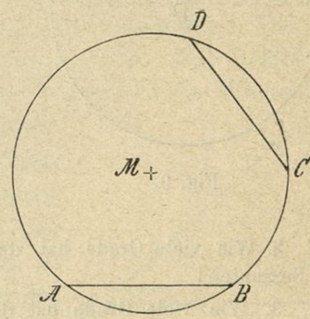

Fig. 8.

§ 14. Beziehung zwischen Bogen und Sehne. Wenn die gleichen Bogen *AB* und *CD* (Fig. 8) zur Deckung gebracht werden, so fallen die Punkte *A* und *C*, ferner die Punkte *B* und *D* zusammen. Daher decken sich auch die Sehnen *AB* und *CD* und sind also einander gleich d. h. in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen. Umgekehrt: Zu gleichen Sehnen gehören in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gleiche Bogen.

Auf Grund des letzten Satzes können Bogen in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen übertragen werden, indem man ihre Sehnen überträgt. Kreisbogen von gleichem Halbmesser können ebenso wie Strecken addiert und subtrahiert werden. Auch kann man einen Kreisbogen mit einer ganzen Zahl multiplizieren (vervielfachen) und durch eine ganze Zahl oder einen Kreisbogen von gleichem Halbmesser dividieren (teilen, messen).

Übungsaufgaben. 1. Einen Bogen zu übertragen.

2. Das 2-, 3-, 4-, 5fache eines gegebenen Bogens zu konstruieren.

3. Einen gegebenen Bogen durch Versuche mit dem Zirkel oder nach dem Augenmaße in 2, 3, 4, 5, 6 gleiche Teile zu teilen.

§ 15. Einteilung des Kreisumfanges. Die Peripherie eines jeden Kreises denkt man sich in 360 gleiche Bogen geteilt und nennt einen solchen Teil einen Grad (^{0}), genauer Bogengrad. Der 60. Teil eines Bogengrades heißt eine Bogenminute oder einfach Minute ($'$), der 60. Teil einer Bogenminute heißt eine Bogensekunde oder einfach Sekunde ($''$). Ein Grad hat also 60 Minuten ($'$), eine Minute 60 Sekunden ($''$).

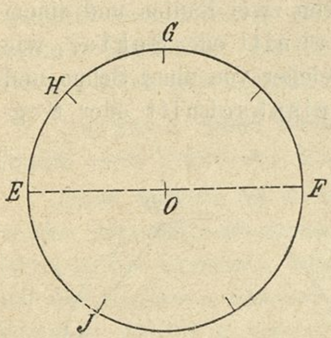

Fig. 9.

Die Hälfte eines Kreises heißt Halbkreis (*EGF*, Fig. 9), der vierte Teil Quadrant (*EG*), der sechste Teil Sextant (*EJ*), der achte Teil Oktant (*EH*). Wie viele Grade hat ein Halbkreis, ein Quadrant, ein Sextant, ein Oktant?

Übungsaufgaben. 1. Man zeichne nach dem Augenmaße den vierten Teil eines Quadranten, den dritten Teil eines Oktanten, den fünften Teil eines Sextanten!

2. Wie viele Grade hat der fünfte Teil des Quadranten, der vierte Teil des Sextanten!

3. Wie viele Grade hat der neunte, der fünfzehnte Teil der Peripherie?

§ 16. Aufgaben. 1. Einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten A, B (Fig. 10) einen gegebenen Abstand e hat. — Der gesuchte Punkt muß in dem Kreise mit dem Zentrum A und dem Radius e und zugleich in dem Kreise mit dem Zentrum B und dem Radius e liegen. Die Schnittpunkte X und Z der beiden Kreise entsprechen also der gestellten Aufgabe. Gibt es immer zwei solche Punkte?

Übungsaufgaben. 1. $AB = 3$ *cm*, $e = 2$ *cm*.
2. $AB = 4$ *cm*, $e = 4$ *cm*.
3. $AB = 36$ *mm*, $e = 18$ *mm*.

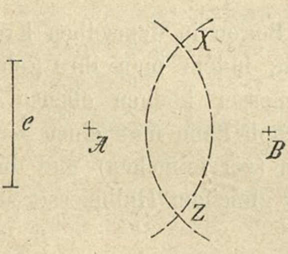

Fig. 10.

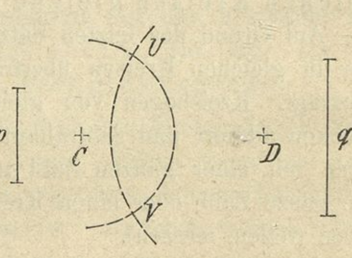

Fig. 11.

2. Einen Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen Punkten C, D verschiedene gegebene Abstände hat, u. zw. von C den Abstand p, von D den Abstand q. (Sieh Fig. 11.)

Übungsaufgaben. 1. $CD = 5\ cm$, $p = 3\ cm$, $q = 1\ cm$.
2. $CD = 3{\cdot}5\ cm$, $p = 2\ cm$, $q = 3\ cm$.
3. $CD = 36\ mm$, $p = 15\ mm$, $q = 21\ mm$.
4. In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, der von einem gegebenen außerhalb der Geraden liegenden Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Der Winkel.

§ 17. Entstehung des Winkels, Erklärungen. Ein Winkel entsteht, wenn eine halbbegrenzte Gerade (AB, Fig. 12) sich in der Ebene um ihren Grenzpunkt dreht. Man versteht unter dem Winkel jenen Teil der Ebene, welcher dabei von der Geraden beschrieben wird. Die erste und die letzte Lage der bewegten Geraden (AB, AC) heißen die Schenkel, ihr Grenzpunkt (A) heißt der Scheitel des Winkels.

Man bezeichnet den Winkel entweder durch einen Buchstaben, welcher in der Winkelfläche in der Nähe des Scheitels steht, oder durch einen Buchstaben am Scheitel und setzt das Winkelzeichen vor; also $\sphericalangle w$ oder $\sphericalangle A$. Häufig ist es notwendig, zur Bezeichnung der Winkel drei Buchstaben zu verwenden, von denen der erste und der letzte an den Schenkeln stehen, der mittlere aber am Scheitel, also $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle CAB$.

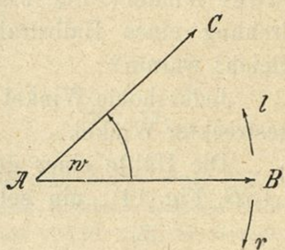

Fig. 12.

Die Größe eines Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig, d. h. es ist gleichgültig, ob man die Schenkel lang oder kurz zeichnet, immer kann man sich dieselben (über B und C hinaus) beliebig verlängert denken.

Zwei Winkel heißen gleich, wenn sie so aufeinander gelegt werden können, daß die Schenkel des einen auf die Schenkel des anderen fallen. Sonst heißen sie ungleich, wie z. B. die Winkel x und y in Fig. 20. — Wie erkennt man durch Aufeinanderlegen ungleicher Winkel, welcher der größere und welcher der kleinere ist?

§ 18. Links- und Rechtsdrehung. Jede halbbegrenzte Gerade kann sich in der Ebene um ihren Grenzpunkt nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen. Der Halbstrahl AB (Fig. 12) kann sich entweder gegen l oder gegen r hin drehen. Die Drehung von AB gegen l hin heißt Linksdrehung (positive Drehung), die andere heißt Rechtsdrehung (negative Drehung). Denn wenn man, eine horizontale Fläche vorausgesetzt, in A steht und gegen B hinsieht, so hat man l zur linken und r zur rechten Hand. — Was für eine Drehung machen die Zeiger einer Uhr?

§ 19. Einteilung der Winkel. Zwei Gerade, die von einem Punkte ausgehen, bilden zwei Winkel; der kleinere von diesen heißt hohl oder konkav, der größere erhaben oder konvex. In Fig. 12 ist der hohle Winkel w der Geraden AB und AC, welcher durch Linksdrehung von AB nach AC entsteht, durch den gekrümmten Pfeil näher bezeichnet; der durch Rechtsdrehung von AB nach AC beschriebene Winkel ist ein erhabener. Ohne besondere Hervorhebung ist immer, wenn man von dem Winkel zweier Geraden spricht, der kleinere oder hohle gemeint.

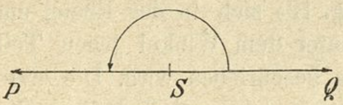

Fig. 13.

Ein Winkel, dessen Schenkel nach entgegengesetzten Seiten in einer Geraden liegen, heißt ein gestreckter oder gerader Winkel (PSQ, Fig. 13); derselbe entsteht durch eine halbe Umdrehung eines Halbstrahles. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich; warum?

Jeder hohle Winkel ist kleiner, jeder erhabene ist größer als ein gestreckter Winkel.

Die Hälfte eines gestreckten Winkels heißt ein rechter Winkel (ASB, Fig. 14); ein solcher entsteht durch eine Vierteldrehung einer Geraden. Alle rechten Winkel sind einander gleich; warum?

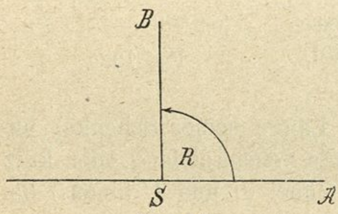

Fig. 14.

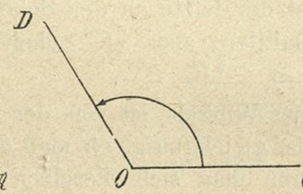

Fig. 15.

Jeder Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heißt spitz; jeder hohle Winkel, der größer ist als ein rechter, wird stumpf genannt (COD, Fig. 15).

Der Winkel, welchen eine halbbegrenzte Gerade bei einer ganzen Drehung beschreibt, heißt ein voller Winkel.

Der rechte Winkel wird häufig mit R bezeichnet; der gerade Winkel ist demnach gleich $2\,R$, der volle gleich $4\,R$.

Beim praktischen Zeichnen bedient man sich zur mechanischen Konstruktion von rechten Winkeln der sogenannten „Dreiecke“; eine geometrische Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) des rechten Winkels folgt später.

§ 20. Richtungsunterschied zweier Halbstrahlen. Normale und schiefe Lage. Die Größe eines Winkels ist ausschließlich von den Richtungen und nicht von der Größe seiner Schenkel abhängig. Zwei Halbstrahlen, die von einem Punkte ausgehen, haben verschiedene Richtungen; der hohle Winkel, den sie bilden, ist das Maß ihres Richtungsunterschiedes. Bilden sie einen gestreckten Winkel, so haben sie entgegengesetzte Richtungen, wie SP und SQ, Fig. 13.

Wenn zwei sich schneidende Gerade rechte Winkel bilden, so sagt man, sie durchschneiden sich rechtwinklig, sie haben eine normale (oder *senkrechte*) Lage gegeneinander. Man nennt die eine eine Normale der anderen. In der Figur 16 ist CD eine Normale von AB und AB eine Normale von CD. Man schreibt dies in folgender Weise an: $CD \perp AB$ (sprich: CD normal zu AB) oder $AB \perp CD$. In jedem Punkte einer Geraden ist zu ihr nur eine Normale möglich; warum?

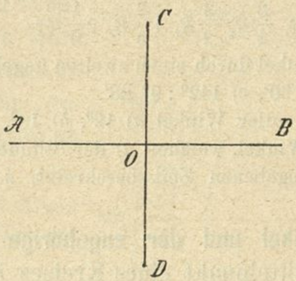

Fig. 16.

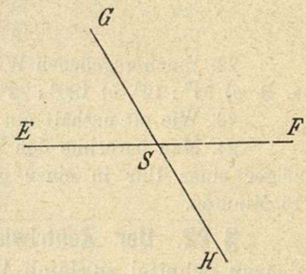

Fig. 17.

Man hüte sich, den Begriff „normal" (oder senkrecht) mit dem Begriffe „vertikal oder lotrecht" zu verwechseln. Die vertikale Richtung wird durch einen Faden angegeben, welcher an dem einen Ende befestigt und durch einen am anderen Ende frei hängenden Körper gespannt ist. Beispiele für normale und für vertikale Gerade.

Bilden zwei sich schneidende Gerade spitze und stumpfe Winkel, so sagt man, sie haben eine schiefe Lage gegeneinander, sie durchschneiden sich schiefwinklig; z. B. EF und GH, Fig. 17.

§ 21. Das Winkelmaß. Bei der Bestimmung des Winkelmaßes geht man vom rechten Winkel aus; man denkt sich denselben in 90 gleiche Teile geteilt und nennt einen solchen Teil einen Winkelgrad oder einfach Grad (^{0}). Der 60. Teil eines Winkelgrades heißt eine Winkelminute oder einfach Minute ($'$), der 60. Teil einer Winkelminute heißt eine Winkelsekunde oder einfach Sekunde ($''$).

Der rechte Winkel hat demnach 90 Grade, der gestreckte hat 180 Grade und der volle 360 Grade.

Übungsaufgaben. Drücke in Graden, Minuten und Sekunden aus:

1. $1000''$, 2. $58294''$, 3. $201600''$,
4. $2420'\,12''$, 5. $36{\cdot}45^0$, 6. $7{\cdot}36^0$,
7. $10\frac{2}{3}{}^0$, 8. $492\frac{5}{6}{}'$.

Drücke in Graden und Dezimalteilen eines Grades aus:

9. $12^0\,45'$, 10. $61^0\,52'\,30''$, 11. $48^0\,7'\,30''$,
12. $106^0\,13'\,12''$, 13. $28^0\,6'\,45''$.

Drücke in Sekunden aus:

14. 360^0, 15. $64^0\,49'$, 16. $57^0\,17'\,45''$.

17. Unter den folgenden Winkeln die spitzen, die stumpfen und die erhabenen anzugeben:

135^0, 75^0, 210^0, 36^0, 324^0, 160^0, 270^0, 100^0.

18. Gegeben sind drei Winkel x, y, z im Gradmaße u. zw. $x > y > z$; man berechne die folgenden Ausdrücke: $x + y$, $x + z$, $y + z$, $x - y$, $x - z$, $y - z$, $x + y + z$.

Z. B. $x = 78^0\ 5'\ 54''$, $y = 56^0\ 41'\ 19''$, $z = 45^0\ 12'\ 47''$.

19. Das 2-, 3-, 4-, 5-fache eines gegebenen Winkels zu berechnen; z. B. von $22^0\ 36'\ 48''$.

20. Die Hälfte, den dritten, vierten und fünften Teil eines gegebenen Winkels zu berechnen; z. B. von $44^0\ 15'$.

21. Wie viele Grade haben folgende Winkel:

$$\frac{2}{3}R,\ \frac{3}{4}R,\ \frac{3}{2}R,\ 1\frac{3}{5}R,\ 2\frac{1}{6}R?$$

22. Einen gegebenen Winkel durch einen zweiten gegebenen Winkel zu messen; z. B. *a*) $54^0 : 12^0$, *b*) $180^0 : 22^0\ 30'$, *c*) $142^0 : 9^0\ 28'$.

23. Wie oft enthält ein voller Winkel *a*) 12^0, *b*) 18^0, *c*) 25^0, *d*) 45^0?

24. Man berechne den Winkel, welchen *a*) der Stundenzeiger, *b*) der Minutenzeiger einer Uhr in einer gegebenen Zeit beschreibt, z. B. in 4 Stunden und 15 Minuten.

§ 22. Der Zentriwinkel und der zugehörige Bogen. Ein Winkel, dessen Scheitel zugleich Mittelpunkt eines Kreises ist, heißt ein Zentriwinkel (*AMB*, Fig. 18). Der in der Winkelfläche liegende Bogen wird der zum Winkel gehörige Bogen genannt.

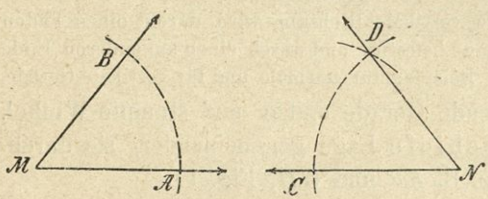

Fig. 18.

Zwei gleiche Winkel kann man so aufeinander legen, daß sie sich ganz decken; wenn dies geschieht, so decken sich auch die mit gleichen Halbmessern beschriebenen zugehörigen Bogen, d. h. in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Bogen. Umgekehrt: Zu gleichen Bogen gehören in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gleiche Zentriwinkel.

Mittels des letzten Satzes kann man das Übertragen und Teilen von Winkeln auf das Übertragen und Teilen von Bogen zurückführen.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel zu übertragen, d. h. einen Winkel zu konstruieren, der dem gegebenen gleich ist. — Wenn *AMB* (Fig. 18) der gegebene Winkel und *NC* ein Schenkel des zu konstruierenden Winkels ist, so beschreibe man aus den Scheiteln *M* und *N* mit demselben Halbmesser die Bogen *AB* und *CD*, denke sich die Sehne *AB* gezogen und in die Lage *CD* übertragen. Begründung?

Weil sowohl die Kreisperipherie als auch der volle Winkel in 360 Grade geteilt wird, so folgt weiter: Jeder Winkel hat ebensoviel Grade wie der zugehörige Bogen, oder genauer: Jeder Winkel hat ebensoviel Winkelgrade wie der zugehörige Bogen Bogengrade. Diese Beziehung wird auch in folgender Weise ausgedrückt: Der Winkel hat den zugehörigen Bogen zum Maße.

Unter einem Transporteur versteht man einen Halbkreis aus Karton, Messing u. dgl., auf welchem eine Einteilung in Grade angebracht ist. (In der Figur 19 beträgt der kleinste Teil des Halbkreises 5 Grade.) Der Transporteur dient zum Messen und Übertragen von gegebenen Winkeln und zum Zeichnen von Winkeln, welche eine gegebene Anzahl von Graden haben.

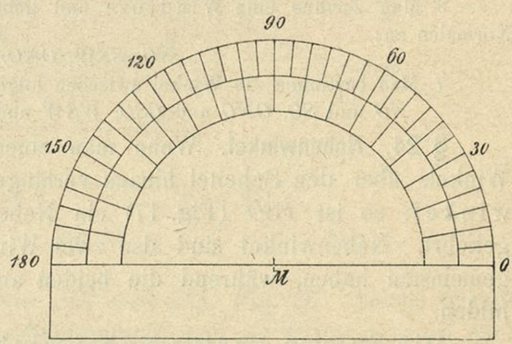

Fig. 19.

Übungsaufgaben. 1. Einen gegebenen Winkel mit Hilfe des Transporteurs zu messen.

2. Einen im Gradmaße gegebenen Winkel zu zeichnen, z. B. 54^0, 72^0, 130^0, 215^0.

3. Einen gegebenen Winkel mit Hilfe des Transporteurs zu übertragen.

4. Man zeichne drei Winkel, welche zusammen einen gestreckten Winkel ausmachen, und messe dieselben! Wie groß soll die Summe der drei Maßzahlen sein?

§ 23. Operationen mit Winkeln. Ist (Fig. 20) $AOB = x$ und $BOC = y$, so ist AOC die Summe der Winkel x und y, also $AOC = x + y$. Ist ferner $DSF = x$ und $ESF = y$, so ist DSE die Differenz der Winkel x und y, also $DSE = x - y$. Wie erhält man ein Vielfaches eines gegebenen Winkels?

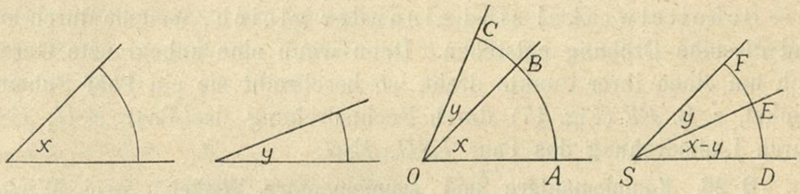

Fig. 20.

Ist ein gegebener Winkel in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu zerlegen, so teile man einen zugehörigen Bogen in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile und verbinde die Teilungspunkte mit dem Scheitel. — Halbieren eines Winkels, Halbierungslinie.

Übungsaufgaben. 1. Gegeben sind drei Winkel x, y, z u. zw. sei $x > y > z$; man konstruiere die folgenden Ausdrücke:

$$x + y,\ x + z,\ y + z,\ x - y,\ x - z,\ y - z,\ x + y + z.$$

2. Das 2-, 3-, 4-, 5-fache eines gegebenen Winkels zu konstruieren.

3. Einen gegebenen Winkel durch Versuche mit dem Zirkel oder nach dem Augenmaße in 2, 3, 4, 5, 6 gleiche Teile zu teilen.

4. Einen rechten Winkel nach dem Augenmaße (durch Halbieren des gestreckten) zu zeichnen.

5. Folgende Winkel zu zeichnen:

$$\frac{2}{3}R,\ \frac{3}{4}R,\ \frac{3}{2}R,\ 1\frac{3}{5}R.$$

6. Man zeichne eine Windrose und gebe zu folgenden Richtungen die Normalen an:

NO, *SSW*, *ONO*.

7. Man bestimme die Winkel zwischen folgenden Richtungen der Windrose: *NO* und *SO*, *ONO* und *OSO*, *WSW* und *O*, *ONO* und *WNW*.

§ 24. Nebenwinkel. Wenn man einen Schenkel eines gegebenen Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entsteht ein Nebenwinkel; so ist *FSG* (Fig. 17) ein Nebenwinkel von *ESG* und umgekehrt. Nebenwinkel sind also zwei Winkel, welche einen Schenkel gemeinsam haben, während die beiden anderen Schenkel eine Gerade bilden.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist ein gestreckter Winkel oder gleich 2 *R*. Von zwei ungleichen Nebenwinkeln ist der eine spitz, der andere stumpf (Fig. 17). Sind zwei Nebenwinkel gleich, so ist jeder ein Rechter (Fig. 16).

§ 25. Scheitelwinkel. Wenn man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so bilden die Verlängerungen den Scheitelwinkel des gegebenen; so ist *FSH* (Fig. 17) der Scheitelwinkel von *ESG* und umgekehrt. Scheitelwinkel sind also zwei Winkel, bei denen die Schenkel des einen Winkels die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

Scheitelwinkel sind einander gleich, weil sie durch eine und dieselbe Drehung entstehen. Denn wenn eine unbegrenzte Gerade sich um einen ihrer Punkte dreht, so beschreibt sie ein Paar Scheitelwinkel, z. B. *EF* (Fig. 17) durch Rechtsdrehung das Paar *ESG, FSH*, durch Linksdrehung das Paar *ESH, FSG*.

§ 26. Komplementäre und supplementäre Winkel. Zwei Winkel, deren Summe 90° beträgt, heißen komplementäre Winkel und jeder von ihnen wird das Komplement des anderen genannt.

Zwei Winkel, deren Summe 180° beträgt, heißen supplementäre Winkel und jeder von ihnen wird das Supplement des anderen genannt.

Gleiche Winkel haben gleiche Komplemente und gleiche Supplemente und umgekehrt.

Übungsaufgaben. Von einem gegebenen Winkel *a*) das Komplement, *b*) das Supplement zu berechnen, z. B. von 60°, 44° 19′, 71° 32′ 13″.

Die Parallelen.

§ 27. Erklärungen. Zwei Gerade in derselben Ebene, welche beliebig verlängert sich nicht schneiden, heißen parallel. Sind AB und CD (Fig. 21) parallel, so schreibt man $AB \parallel CD$ (spr. AB parallel zu CD). Zwei parallele Gerade haben gleiche oder entgegengesetzte Richtungen; so sind die Richtungen AB und CD gleich, hingegen die Richtungen CD und EF entgegengesetzt.

Zwei Gerade in derselben Ebene, welche nicht parallel sind, treffen hinreichend verlängert in einem Punkte zusammen, wie NR und PQ, Fig. 22. Solche Gerade konvergieren gegen ihren Schnittpunkt, und sie divergieren nach der anderen Seite hin.

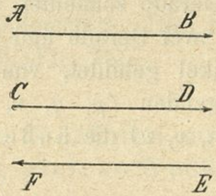

Fig. 21.

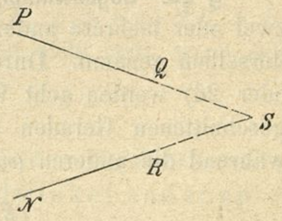

Fig. 22.

Man suche Beispiele für zwei parallele und zwei sich schneidende Gerade an den Begrenzungslinien einer Schultafel, einer Wand u. s. w.!

§ 28. Grundeigenschaften der Parallelen. Aus unserer Vorstellung von den Parallelen ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Durch einen gegebenen Punkt kann man zu einer gegebenen Geraden eine einzige Parallele ziehen (1. Grundsatz von den Parallelen).

Durch den Punkt A (Fig. 23) kann man nur eine Gerade ziehen, welche zur Geraden BC parallel ist, nämlich DE; jede andere durch den Punkt A gehende Gerade, z. B. FG, ist zu BC nicht parallel. Daraus folgt:

a) Zwei Gerade, die zu einer dritten parallel sind, sind auch untereinander parallel. Wenn $HJ \parallel MN$ und $KL \parallel MN$ (Fig. 24), so ist auch $HJ \parallel KL$; denn wäre HJ nicht parallel zu KL, so müßten diese Geraden hinreichend verlängert in einem Punkte S zusammentreffen und es gingen durch diesen Punkt zwei Parallele zur Geraden MN, was nicht möglich ist.

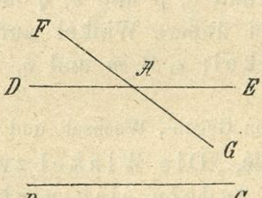

Fig. 23.

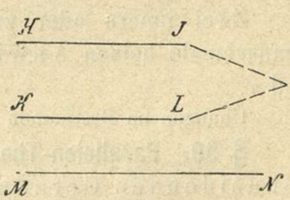

Fig. 24.

* wenn die andere unbegrenzt lang ist, bleibt gilt bis an dieselben stehen

b) Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so muß sie auch die andere schneiden.* Wenn $DE \parallel BC$ (Fig. 23) ist und FG die Gerade DE schneidet, so muß FG auch BC schneiden; sonst gingen durch den Schnittpunkt A zwei Parallele zur Geraden BC, was nicht möglich ist.

§ 29. Gegenwinkel, Wechselwinkel, Anwinkel. Eine Gerade, welche zwei oder mehrere andere Gerade schneidet, wird eine Transversale derselben genannt. Durch zwei Gerade und eine Transversale (Fig. 25 oder 26) werden acht Winkel gebildet, von denen die zwischen den geschnittenen Geraden liegenden (p, q, r, s) die inneren heißen, während die anderen (m, n, v, u) die äußeren genannt werden.

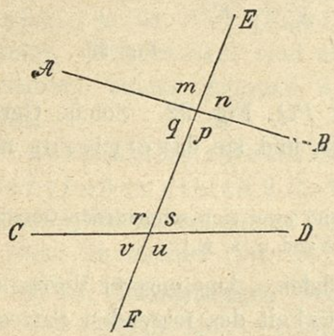

Fig. 25.

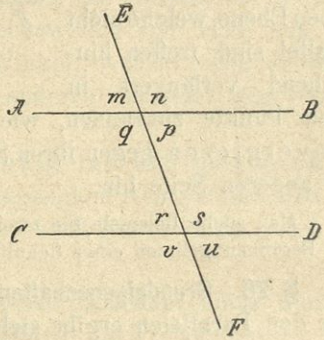

Fig. 26.

Ein äußerer und ein innerer Winkel an verschiedenen Scheiteln und auf derselben Seite der Transversale heißen Gegenwinkel; z. B. m und r, n und s, p und u, q und v.

Zwei innere oder zwei äußere Winkel an verschiedenen Scheiteln und auf entgegengesetzten Seiten der Transversale heißen Wechselwinkel; z. B. m und u, n und v, p und r, q und s.

Zwei innere oder zwei äußere Winkel auf derselben Seite der Transversale heißen Anwinkel; z. B. m und v, n und u, p und s, q und r.

Übungen im Bestimmen von Gegen-, Wechsel- und Anwinkeln.

§ 30. Parallelen-Theorie. Die Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden ändern sich nicht, wenn die eine Gerade parallel zu ihrer ursprünglichen Lage fortschreitet (2. Grundsatz von den Parallelen).

Gelangt AB (Fig. 26) durch Parallel-Verschiebung in die Lage CD, so ist $\sphericalangle\, m = r$, $n = s$, $p = u$, $q = v$, d. h. je zwei Gegenwinkel sind gleich. Die Gegenwinkel sind jedoch ungleich, wenn die Geraden AB und CD nicht parallel sind (Fig. 25).

Bei der in Fig. 26 angedeuteten Parallel-Verschiebung kommt $\sphericalangle\, m$ an die Stelle des $\sphericalangle\, r$, wird also Scheitelwinkel von u; daher ist $\sphericalangle\, m = u$. Ebenso ist $n = v$, $p = r$, $q = s$, d. h. je zwei Wechselwinkel sind gleich. In Fig. 25 gelten diese Gleichungen nicht.

Bei der Parallel-Verschiebung von AB in die Lage CD (Fig. 26) werden ferner die Winkel m und v zu Nebenwinkeln, daher ist $m + v = 2R$; ebenso ist $n + u = 2R$, $p + s = 2R$, $q + r = 2R$, d. h. je zwei Anwinkel sind supplementär. Dies findet nicht statt, wenn AB und CD nicht parallel sind (Fig. 25).

Hieraus folgt:

a) Parallele Gerade bilden mit jeder Transversale gleiche Gegenwinkel, gleiche Wechselwinkel und supplementäre Anwinkel.

b) Bilden zwei Gerade mit einer Transversale gleiche Gegenwinkel oder gleiche Wechselwinkel oder supplementäre Anwinkel, so sind sie parallel.

Aufgaben. 1. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu konstruieren. — Man ziehe durch den gegebenen Punkt A (Fig. 27) eine die gegebene Gerade BC schneidende Gerade AD und mache $\sphericalangle\, EAD = BDA$; dann ist $AE \parallel BC$. Wie konstruiert man die Parallele mit Hilfe der Gegenwinkel?

Zur mechanischen Konstruktion von Parallelen dienen die „Dreiecke".

2. Man konstruiere zwei sich schneidende Gerade, welche zu den Schenkeln eines gegebenen Winkels parallel sind, und gebe an, welche Beziehungen zwischen den vier dadurch entstehenden Winkeln und dem gegebenen stattfinden (Parallelwinkel).

Übungsaufgabe. Aus einem der Winkel in Fig. 26 die übrigen zu berechnen, z. B. *a)* $m = 75^0$, *b)* $n = 114^0\ 17'\ 38''$.

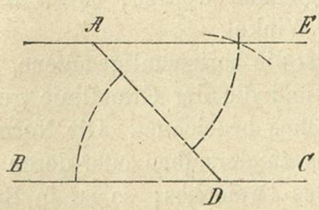

Fig. 27.

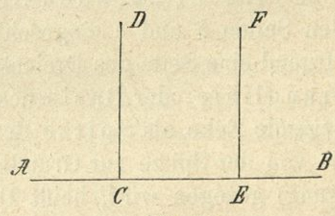

Fig. 28.

§ 31. Eigenschaften der Normalen. Durch Anwendung der Parallelen-Theorie auf die Normalen ergeben sich die folgenden zwei Sätze:

a) Alle Normalen einer Geraden sind zueinander parallel. Wenn $CD \perp AB$ und $EF \perp AB$ (Fig. 28), so sind die

Gegenwinkel ACD und CEF gleich (warum?). Daher sind die Geraden CD und EF parallel.

b) Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer dritten normal, so ist es auch die andere. Denn verschiebt man eine Normale CD der Geraden AB in eine parallele Lage EF, so ist nach dem zweiten Grundsatze von den Parallelen auch $EF \perp AB$.

Das Dreieck.

§ 32. Erklärungen. Wenn man drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, durch Strecken verbindet, so entsteht eine ebene Figur, welche Dreieck genannt wird (ABC, Fig. 29). Die begrenzenden Geraden AB, AC, BC heißen die Seiten, die Punkte A, B, C die Ecken oder Eckpunkte des Dreieckes; je zwei Seiten bilden einen Winkel des Dreieckes. Alle Seiten zusammen bilden den Umfang und die Größe der von ihnen begrenzten Fläche heißt der Flächeninhalt des Dreieckes.

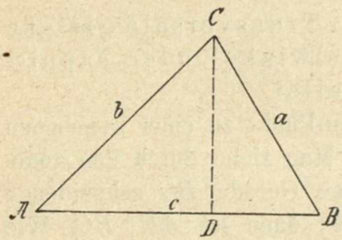

Fig. 29.

Jeder Seite des Dreieckes liegt ein Winkel gegenüber und jedem Winkel eine Seite (Gegenstücke), wie AB und $\sphericalangle C$. Man bezeichnet häufig die Seiten des Dreieckes ABC mit den Buchstaben a, b, c, so daß den Gegenstücken gleiche Buchstaben entsprechen. An jeder Seite des Dreieckes liegen zwei Winkel, welche in Bezug auf erstere die anliegenden Winkel heißen; so liegen an der Seite AB oder c die Winkel A und B. Jeder Winkel des Dreieckes wird von zwei Seiten gebildet und heißt in Bezug auf dieselben der eingeschlossene Winkel, während diese die einschließenden Seiten genannt werden; so ist A der von den Seiten b und c eingeschlossene Winkel.

Irgend eine Seite des Dreieckes, meist die horizontal gezogene, wird als Grundlinie oder Basis desselben und die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke als Spitze des Dreieckes bezeichnet. Die Normale, welche von der Spitze zur Grundlinie (bis zu derselben oder deren Verlängerung) gezogen wird, heißt Höhe des Dreieckes; so ist in Bezug auf AB als Grundlinie C die Spitze und CD die Höhe des Dreieckes ABC.

Verlängert man eine Dreiecksseite, so bildet die Verlängerung mit der anstoßenden Dreiecksseite einen Außenwinkel, wie z. B. d, e, f in Fig. 32. Im Gegensatze dazu heißen die Winkel des Dreieckes auch Innenwinkel. Jeder Außenwinkel ist ein Nebenwinkel zum anliegenden Innenwinkel.

§ 33. Beziehungen zwischen den Seiten. *a)* Aus dem Grundsatze, daß die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist, folgt, daß jede Seite des Dreieckes, selbst die größte, kleiner ist als die Summe der beiden anderen Seiten; z. B. $c < a + b$ (Fig. 29).

Jede Dreiecksseite ist also kleiner als die Summe der beiden anderen.

b) Ist im Dreiecke ABC (Fig. 29) weder a noch b größer als c, so ist sicher $c > b - a$. Dreht man ferner a um den Punkt B nach links und b um den Punkt A nach rechts so lange, bis diese zwei Seiten in die dritte fallen (Fig. 30), so erkennt man unmittelbar, daß $a > c - b$ und $b > c - a$ ist. Jede Dreiecksseite ist also größer als die Differenz der beiden anderen.

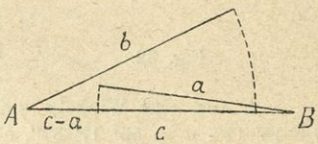

Fig. 30.

Übungsaufgaben. 1. Gegeben sind die drei Seiten eines Dreieckes; den Umfang zu berechnen. $a = 8{\cdot}7\ cm$, $b = 6{\cdot}5\ cm$, $c = 4{\cdot}8\ cm$.

2. Gegeben sind der Umfang und zwei Seiten eines Dreieckes; die dritte Seite zu berechnen. $u = 38{\cdot}0\ cm$, $a = 15{\cdot}6\ cm$, $b = 10{\cdot}4\ cm$.

3. Aus zwei gegebenen Seiten eines Dreieckes die Werte zu berechnen, zwischen denen die dritte liegen muß. *a)* $a = 16\ cm$, $b = 9\ cm$, *b)* $a = b = 1\ m$.

§ 34. Beziehungen zwischen den Winkeln. *a)* Verlängert man die Seite AB des Dreieckes ABC (Fig. 31) über den Eckpunkt B hinaus und zieht $BE \parallel AC$, so kann man nacheinander die Seiten AB und BC als Transversalen der Parallelen AC und BE betrachten; es ist also

$$\sphericalangle DBE = BAC = m, \quad \sphericalangle EBC = ACB = p.$$

Bezeichnet man noch $\sphericalangle ABC$ mit n und beachtet, daß die am Scheitel B liegenden Winkel m, n, p einen gestreckten Winkel bilden, so folgt:

$$m + n + p = 2R, \text{ d. h.}$$

Die Summe der Winkel eines Dreieckes beträgt zwei Rechte oder 180°.

b) Aus der Figur 31 ersieht man, dass $\sphericalangle CBD = m + p$ ist.

Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel. Daraus folgt, daß der Außenwinkel größer ist als jeder einzelne ihm nicht anliegende Innenwinkel.

c) Durch Verlängerung aller Seiten eines Dreieckes (Fig. 32) in gleichem Sinne erhält man die drei Außenwinkel desselben. Diese bilden mit den Innenwinkeln drei Paare

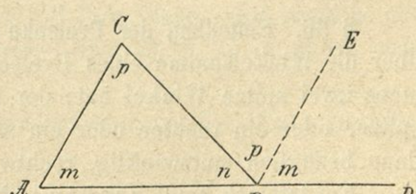

Fig. 31.

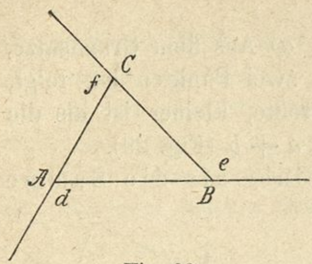

Fig. 32.

von Nebenwinkeln oder $6R$; davon entfallen auf die Innenwinkel $2R$, somit ist die Summe der Außenwinkel eines Dreieckes gleich vier Rechten:

$$d + e + f = 4R.$$

Übungsaufgaben. 1. Aus einem Winkel eines Dreieckes die Summe der beiden anderen zu berechnen: *a*) $m = 90^0$, *b*) $n = 124^0$, *c*) $p = 73^0\ 15'$, *d*) $m = 61^0\ 51'\ 25''$.

2. Aus zwei Winkeln eines Dreieckes den dritten zu berechnen: *a*) $m = 78^0\ 18'\ 11''$, $n = 53^0\ 17'\ 37''$, *b*) $m = n = 62^0\ 15'$.

3. Aus zwei Außenwinkeln die Innenwinkel zu berechnen: *a*) $d = 120^0$, $e = 135^0$ (Fig. 32), *b*) $e = 133^0\ 48'$, $f = 136^0\ 12'$.

§ 35. Einteilung der Dreiecke nach den Seiten. Mit Rücksicht auf die Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke. Ein Dreieck heißt ungleichseitig, wenn je zwei Seiten desselben ungleich sind (*ABC*, Fig. 29); gleichschenklig, wenn zwei Seiten desselben gleich sind (*DEF*, Fig. 33); gleichseitig, wenn alle Seiten einander gleich sind (*HJK*, Fig. 34). Beim gleichschenkligen Dreiecke nennt man die zwei gleichen Seiten (*DF*, *EF*) Schenkel und nimmt die dritte Seite (*DE*) in der Regel als Grundlinie an. Was hat man dann unter der Höhe und der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes zu verstehen?

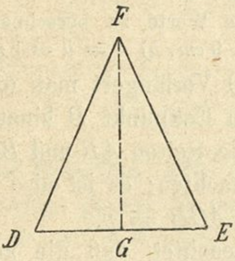

Fig. 33.

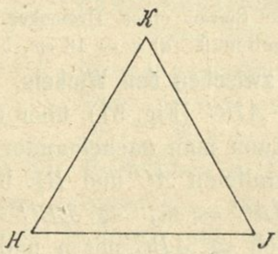

Fig. 34.

Aufgaben. 1. Über einer gegebenen Strecke als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren (§ 16, Aufg. 1).

Z. B. $DE = 3\ cm$, $DF = EF = 4\ cm$.

2. Über einer gegegenen Strecke (4 *cm*) ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren.

§ 36. Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln. Aus dem Satze über die Winkelsumme eines Dreieckes folgt, daß jedes Dreieck wenigstens zwei spitze Winkel hat; der dritte Winkel ist entweder auch ein spitzer oder ein rechter oder ein stumpfer Winkel. Das Dreieck heißt dann bezüglich spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig.

Ein Dreieck heißt rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat (*ABC*, Fig. 35). Die den rechten Winkel (*B*) einschließenden Seiten

(*AB*, *BC*) heißen Katheten; die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (*AC*) wird die Hypotenuse des Dreieckes genannt. Unter der Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes versteht man in der Regel jene, welcher die Hypotenuse als Grundlinie entspricht. — Wie groß ist die Summe der Winkel an der Hypotenuse?

Ein Dreieck, welches keinen rechten Winkel enthält, heißt schiefwinklig, und zwar spitzwinklig, wenn es lauter spitze Winkel, stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat.

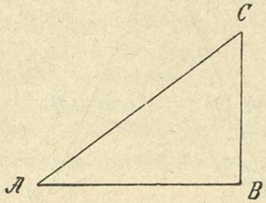
Fig. 35.

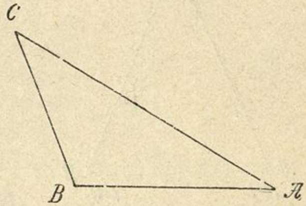
Fig. 36.

Welche Lage hat die Höhe des stumpfwinkligen Dreieckes *ABC* (Fig. 36) in Bezug auf die Grundlinie *AB* oder *BC*?

Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gleich ist der Summe der beiden anderen, so ist es rechtwinklig; warum?

Aufgaben. 1. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen.

2. Ein gleichschenkliges stumpfwinkliges Dreieck zu konstruieren.

Übungsaufgaben. 1. Aus dem Umfange ($u = 124$ *cm*) und der Grundlinie ($g = 54$ *cm*) eines gleichschenkligen Dreieckes einen Schenkel zu berechnen.

2. Wie groß ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Umfang 78 *cm* und dessen Schenkel 29 *cm* beträgt?

3. Gegeben ist ein spitzer Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes; man berechne den anderen spitzen Winkel und die Außenwinkel an der Hypotenuse! *a*) 36^0, *b*) $19^0\ 9'\ 30''$.

4. Im Dreiecke ABC sei $\sphericalangle A = 74^0$, $\sphericalangle B = 57^0$, ferner $CD \perp AB$; wie groß ist jeder der Winkel ACD und BCD?

5. Im Dreiecke ABC sei $\sphericalangle A = 90^0$, $\sphericalangle B = 47^0\ 18'$, ferner $AD \perp BC$; wie groß ist jeder der Winkel BAD und CAD?

§ 37. Beziehungen zwischen den Gegenstücken. *a*) Denkt man sich das gleichschenklige Dreieck *ABC* (Fig. 37) aufgehoben, umgewendet und so gelegt, daß der Winkel *C* wieder seinen früheren Platz einnimmt, so vertauschen die Schenkel *CA* und *CB* ihre Plätze, und es fällt *AB* auf *BA**); warum? Daraus ersieht man, dass $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ ist, und erhält also den Satz:

In jedem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

*) Benütze dabei ein Modell, d. i. in diesem Falle eine aus Karton ausgeschnittene Figur, welche abzuzeichnen und dann umzuwenden ist.

Im gleichschenkligen Dreiecke sind also die Winkel an der Grundlinie einander gleich; daraus folgt auch, daß sie spitze Winkel sein müssen. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich; wie groß ist jeder? Wie groß ist ein Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieckes?

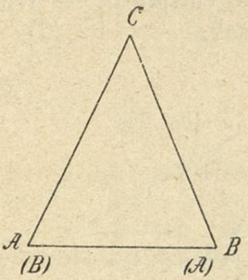

Fig. 37.

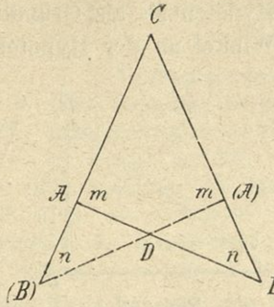

Fig. 38.

b) Denkt man sich das Dreieck ABC (Fig. 38), wo $BC > AC$ ist, umgewendet und so gelegt, daß der Winkel C wieder an seine frühere Stelle tritt, so sieht man, daß der Winkel m Außenwinkel des Dreieckes $(A)BD$ wird, also $m > n$ ist. Modell!

In jedem Dreiecke liegen also ungleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüber und zwar der größeren Seite der größere Winkel.

Die beiden angeführten Sätze über die Beziehungen zwischen den Gegenstücken des Dreieckes lassen folgende Umkehrungen zu:

c) In jedem Dreiecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; denn wären die Seiten ungleich, so könnten ihnen nicht gleiche Winkel gegenüberliegen. Man zeige die Richtigkeit dieses Satzes auch durch Umwenden des Dreieckes.

d) In jedem Dreiecke liegen ungleichen Winkeln ungleiche Seiten gegenüber und zwar dem größeren Winkel die größere Seite.

Folgesätze. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse die größte Seite. Im stumpfwinkligen Dreiecke liegt dem stumpfen Winkel die größte Seite gegenüber.

§ 38. Aufgaben. 1. Einen Winkel von 60^0 zu konstruieren. — Die Auflösung folgt aus der Konstruktion des gleichseitigen Dreieckes (Fig. 39).

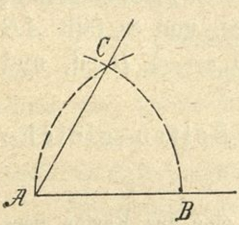

Fig. 39.

2. Einen Winkel von 120^0 zu konstruieren. — Man konstruiere den Nebenwinkel eines Winkels von 60^0.

3. Einen gestreckten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

4. Einen rechten Winkel zu konstruieren (1. Art). — Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 40), verlängere die Seite BC

um ihre eigene Länge, $CD = BC$, und verbinde A mit D. Dann ist $\sphericalangle x = 60°$, Außenwinkel $x = 2z$, also $z = 30°$ und $\sphericalangle BAD = x + z = 90°$.

5. In einem Endpunkte einer Geraden auf diese die Normale zu errichten (1. Art). — Diese Aufgabe ist mit der vorhergehenden gleichbedeutend.

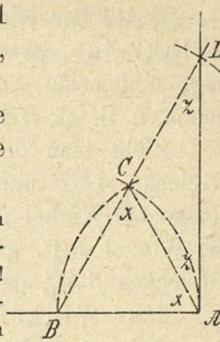

Fig. 40.

Übungsaufgaben. 1. Gegeben sei ein Winkel *a*) an der Grundlinie (z. B. $34° 18'$), *b*) an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes (z. B. $90°$); man berechne die übrigen!

2. Aus dem gegebenen Außenwinkel *a*) an der Grundlinie (z. B. $100°$), *b*) an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes (z. B. $105°$) die übrigen Außenwinkel und die Innenwinkel zu berechnen.

3. Im Dreiecke ABC sei $AC = BC$ und $\sphericalangle C = 38° 28'$, ferner $AD \perp BC$; wie groß ist jeder der Winkel BAD und CAD?

§ 39. Abstand eines Punktes von einer Geraden. Von einem Punkte A außerhalb einer Geraden MN (Fig. 41) lassen sich zu dieser unzählig viele Strecken ziehen; unter diesen gibt es eine einzige, welche zur Geraden MN normal steht. Denn ist $AB \perp MN$ und AC irgend eine andere Verbindungsstrecke, so ist in dem Dreiecke ABC der Winkel ABC ein rechter und der Winkel ACB ein spitzer. Also ist $AB < AC$ (§ 37, *d*).

Unter allen Strecken zwischen einem Punkte und einer Geraden ist die Normale die kürzeste; sie heißt daher der Abstand des Punktes von der Geraden.

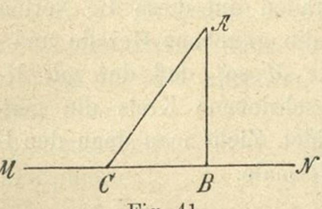

Fig. 41.

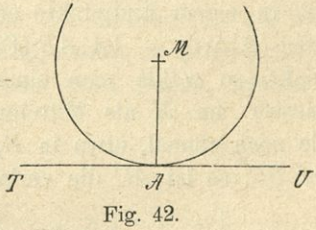

Fig. 42.

§ 40. Konstruktion der Tangente des Kreises. Errichtet man im Endpunkte A des Halbmessers MA eines Kreises (Fig. 42) die Normale TU, so ist MA die kürzeste Verbindungsstrecke des Mittelpunktes M mit der Geraden TU; daher liegt mit Ausnahme des Punktes A jeder andere Punkt der Geraden TU außerhalb des Kreises. Die Gerade TU hat also, wie weit sie auch verlängert werden mag, mit dem Kreise nur einen Punkt gemein, sie ist also eine Tangente des Kreises.

Die Normale im Endpunkte des Halbmessers ist Tangente des Kreises.

§ 41. Der Winkel im Halbkreise. Ein Winkel heißt Winkel im Halbkreise, wenn sein Scheitel auf dem Umfange eines Kreises liegt und seine Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, z. B. $\sphericalangle$ *BAC*, Fig. 43.

Zieht man den Radius *MA*, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke *AMB* und *AMC*, in denen die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Winkel gleich sind. Man entnimmt nun aus der Figur, daß der Winkel *BAC* gleich ist der Summe der beiden anderen Winkel des Dreieckes *ABC*, daher gleich einem rechten; d. h.:

Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Folgesatz. Der Durchmesser ist die größte Sehne im Kreise (§ 37, *d*).

Aufgaben. 1. Einen rechten Winkel zu konstruieren (2. Art). — Man konstruiere einen Winkel im Halbkreise.

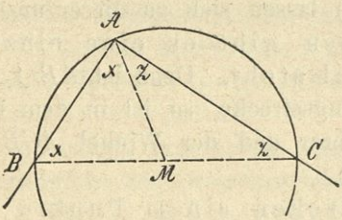

Fig. 43.

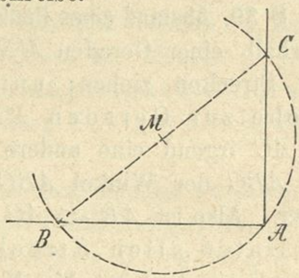

Fig. 44.

2. In einem Endpunkte einer Geraden auf diese die Normale zu errichten (2. Art). — Ist *AB* (Fig. 44) die gegebene Gerade und *A* der Endpunkt, so wähle man einen Punkt *M* so, daß der mit *MA* als Halbmesser um *M* als Mittelpunkt beschriebene Kreis die gegebene Gerade noch einmal, etwa in *B*, schneidet. Zieht man dann den Durchmesser *BC*, so ist *AC* die verlangte Normale.

Die Streckensymmetrale.

§ 42. Erklärung, Eigenschaften der Symmetrale. Haben zwei Punkte *A* und *B* gegen eine Gerade *PQ* (Fig. 45) eine solche Lage, daß die Strecke *AB* von der Geraden *PQ* halbiert wird und zu derselben normal ist, so sagt man, die Punkte *A* und *B* liegen symmetrisch in Bezug auf die Gerade *PQ*, und diese Gerade wird die Symmetrale der Strecke *AB* genannt. Dadurch soll ausgedrückt werden, daß die Punkte *A* und *B* aufeinander fallen, wenn die eine der beiden durch *PQ* begrenzten Halbebenen um *PQ* als Achse umgelegt wird.

a) Jeder Punkt der Symmetrale hat von den Endpunkten der Strecke gleiche Abstände. Denn ist C ein beliebiger Punkt der Geraden PQ, so kann man das Dreieck AMC durch Drehung um PQ mit dem Dreiecke BMC zur Deckung bringen, daher ist $AC = BC$. (Benütze dabei ein Modell!)

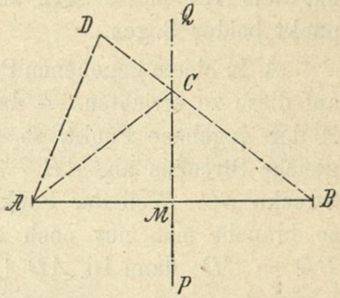

Fig. 45.

b) Jeder außerhalb der Symmetrale liegende Punkt hat von den Endpunkten der Strecke ungleiche Abstände; er liegt jenem Endpunkte näher, welcher sich mit ihm auf derselben Seite der Symmetrale befindet. Denn ist D ein beliebiger Punkt, welcher mit A auf derselben Seite von PQ liegt, und C der Schnittpunkt der Geraden BD und PQ, so hat man

$$BD = BC + CD = AC + CD > AD.$$

Umkehrungen: *c)* Jeder Punkt, welcher von den Endpunkten einer Strecke gleich weit entfernt ist, liegt in der Symmetrale dieser Strecke.

d) Jeder Punkt, der von den Endpunkten einer Strecke ungleiche Abstände hat, liegt außerhalb ihrer Symmetrale.

§ 43. Aufgaben. 1. Die Symmetrale einer gegebenen Strecke zu konstruieren. — Es genügt, zwei Punkte der Symmetrale zu finden; warum? Man beschreibe daher aus den Endpunkten A, B der gegebenen Strecke (Fig. 46) mit gleichem Halbmesser zwei Bogen, welche sich schneiden; dann ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte C und D die gesuchte Symmetrale (§ 16, 1).

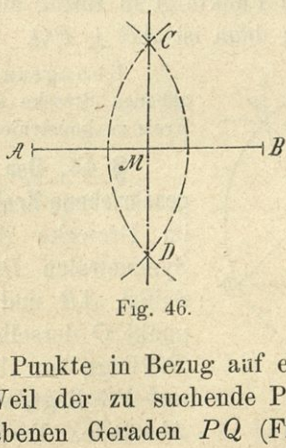

Fig. 46.

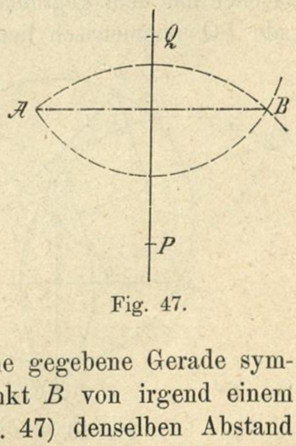

Fig. 47.

2. Eine gegebene Strecke zu halbieren. — S. Aufgabe 1.

3. Einen Punkt zu konstruieren, der zu einem gegebenen Punkte in Bezug auf eine gegebene Gerade symmetrisch liegt. — Weil der zu suchende Punkt B von irgend einem Punkte P der gegebenen Geraden PQ (Fig. 47) denselben Abstand

haben muß wie der gegebene Punkt A, so liegt B in dem Kreisbogen, der aus P mit dem Halbmesser PA beschrieben wird; ebenso liegt B in dem Bogen, der aus irgend einem anderen Punkte Q der Symmetrale mit dem Halbmesser QA beschrieben wird. Also ist B der Schnittpunkt beider Bogen.

4. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen Geraden die Normale auf diese zu errichten. — Ist MN die gegebene Gerade (Fig. 48) und A der gegebene Punkt, so schneide man von A nach beiden Seiten gleiche Strecken ab, $AB = AC$, und konstruiere die Symmetrale der Strecke BC. Weil der Punkt A dieser Symmetrale schon gegeben ist, so braucht man nur noch einen Punkt D derselben zu konstruieren, $BD = CD$; dann ist $AD \perp MN$.

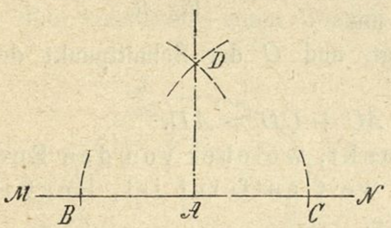

Fig. 48.

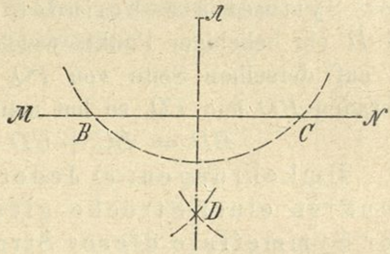

Fig. 49.

5. Die Normale von einem gegebenen Punkte zu einer gegebenen Geraden zu konstruieren. — Ist MN die gegebene Gerade (Fig. 49) und A der gegebene Punkt, so beschreibe man aus A einen Bogen, der MN in B und C schneidet, und konstruiere die Symmetrale AD der Strecke BC; dann ist $AD \perp MN$. Oder man konstruiere den Punkt B (Fig. 47), welcher mit dem gegebenen Punkte A in Bezug auf die gegebene Gerade PQ symmetrisch liegt; dann ist $AB \perp PQ$.

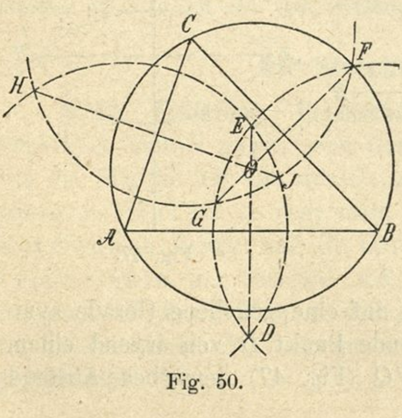

Fig. 50.

Übungsaufgabe. Über einer gegebenen Strecke als Durchmesser einen Kreis zu konstruieren.

§ 44. Der einem Dreiecke umgeschriebene Kreis. Man konstruiere im Dreiecke ABC (Fig. 50) die Symmetralen DE und FG zweier Seiten AB und BC. Der Schnittpunkt O derselben hat, weil er auf DE liegt, von A und B und, weil er auf FG liegt, von B und C gleiche Abstände. Er ist also auch von A

und C gleich weit entfernt und liegt somit in der Symmetrale HJ der dritten Seite AC; d. h.:

Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte, der von den drei Ecken gleiche Abstände hat. Dieser Punkt ist der *Mittelpunkt* eines Kreises, welcher durch die drei Ecken des gegebenen Dreieckes geht und der *umgeschriebene Kreis* desselben heißt.

Aufgabe. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis umzuschreiben u. zw. *a)* einem spitzwinkligen, *b)* einem rechtwinkligen, *c)* einem stumpfwinkligen Dreiecke.

Die Winkelsymmetrale.

§ 45. Erklärung, Eigenschaften der Symmetrale. Die Halbierungslinie eines Winkels wird auch *Symmetrale* desselben genannt. Dadurch soll ausgedrückt werden, daß die Schenkel SA und SB des Winkels ASB (Fig. 51) aufeinander fallen, wenn man den Winkel ASC um die Halbierungslinie SC als Achse umlegt.

a) Jeder Punkt der Symmetrale eines Winkels hat von den Schenkeln desselben gleiche Abstände. Denn ist (Fig. 51) $\sphericalangle ASC = BSC$, $CA \perp SA$ und $CB \perp SB$, so kann man die genannten Winkel durch Drehung um die Gerade SC zur Deckung bringen. Es fallen dann nicht nur die Schenkel SA und SB zusammen, sondern es decken sich auch die Normalen CA und CB, weil von einem Punkte zu einer Geraden eine einzige Normale möglich ist (§ 39). Es ist also $CA = CB$. (Benütze dabei ein Modell!)

b) Jeder Punkt, welcher außerhalb der Symmetrale des Winkels liegt, hat von den Schenkeln desselben ungleiche Abstände, und zwar liegt er jenem Schenkel näher, welcher sich mit ihm auf derselben Seite der Symmetrale befindet.

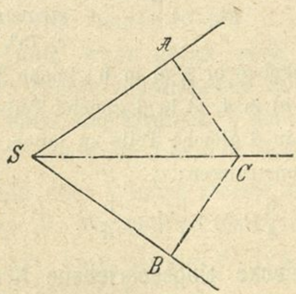

Fig. 51.

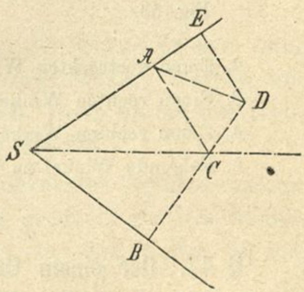

Fig. 52.

Um z. B. für den Punkt D (Fig. 52) zu zeigen, daß $BD > DE$ ist, zieht man vom Schnittpunkte C der Symmetrale mit BD die Normale CA auf SE; es ist dann

$$BD = BC + CD = AC + CD > AD > DE.$$

Umkehrungen: *c)* Jeder Punkt, welcher von den Schenkeln eines Winkels gleich weit entfernt ist, liegt in der Symmetrale desselben.

d) Jeder Punkt, welcher von den Schenkeln eines Winkels ungleiche Abstände hat, liegt außerhalb der Symmetrale desselben.

§ 46. Aufgaben. 1. Die Symmetrale eines gegebenen Winkels zu konstruieren. — Man beschreibe aus dem Scheitel S des gegebenen Winkels (Fig. 53) einen Bogen, der die Schenkel in den Punkten A und B schneidet, denke sich die Sehne AB gezogen und konstruiere die Symmetrale SC derselben; dann ist $\sphericalangle\ ASC = BSC$. Beweis durch Deckung.

2. Einen gegebenen Winkel zu halbieren. — Gleichbedeutend mit der vorigen Aufgabe.

3. Einen Winkel von 30° zu konstruieren. — Man konstruiere einen Winkel von 60° und halbiere denselben!

4. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. — Ist BAC (Fig. 54) der gegebene rechte Winkel, so beschreibe man aus A den Bogen BC, hierauf mit demselben Halbmesser aus B den Bogen AD und aus C den Bogen AE!

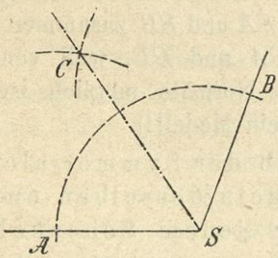

Fig. 53.

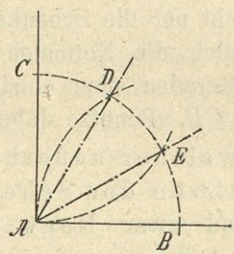

Fig. 54.

5. Einen Winkel von 15° zu konstruieren.

6. Einen Winkel von 45° zu konstruieren.

Übungsaufgaben.

1. Folgende Winkel zu konstruieren: *a)* 150°, *b)* 165°, *c)* 75°, *d)* 105°.

2. Einen gestreckten Winkel *a)* in 4, *b)* in 6 gleiche Teile zu teilen.

3. Einen rechten Winkel *a)* in 4, *b)* in 6 gleiche Teile zu teilen.

4. Einen rechten Winkel in 8 gleiche Teile zu teilen.

5. Folgende Winkel zu konstruieren:

$$a)\ \frac{3}{4}R,\ b)\ 1\frac{1}{8}R,\ c)\ \frac{5}{6}R.$$

§ 47. Der einem Dreiecke eingeschriebene Kreis. Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 55) die Symmetralen AM und BM zweier Winkel A und B konstruiert, so schneiden sich dieselben in einem Punkte M, welcher von den drei Seiten gleich weit entfernt ist. Er liegt also auch in der Symmetrale des dritten Winkels C; d. h.:

Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die drei Seiten des gegebenen Dreieckes berührt und der eingeschriebene Kreis desselben heißt.

Aufgabe. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis einzuschreiben.

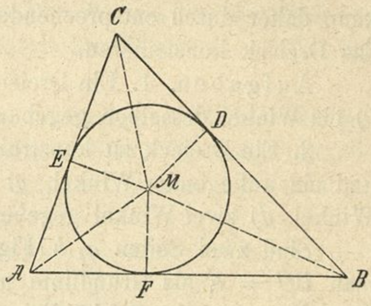

Fig. 55.

Die Kongruenz der Dreiecke.

§ 48. Erklärungen. Zwei Figuren können sowohl ihrer Gestalt wie ihrer Größe nach miteinander verglichen werden. Figuren, welche gleiche Gestalt, aber verschiedene Größe haben, heißen ähnlich (∾); Figuren, welche gleiche Größe, aber verschiedene Gestalt haben, heißen gleich (=); und Figuren, welche gleiche Gestalt und gleiche Größe haben, heißen kongruent (≌).

Zwei kongruente Figuren unterscheiden sich nur durch ihre Lage; sie können so aufeinander gelegt werden, daß sie sich vollkommen decken. Fig. 56 zeigt vier kongruente Dreiecke in verschiedenen Stellungen. Um zwei derselben zur Deckung zu bringen, muß man das eine von beiden parallel verschieben und, wenn nötig, noch in der Ebene drehen, oder man muß es aus der Ebene herausheben und umwenden. Welche einzelnen Bewegungen muss das Dreieck *I* machen, wenn es mit den Dreiecken *II, III, IV* zur Deckung kommen soll? Modell!

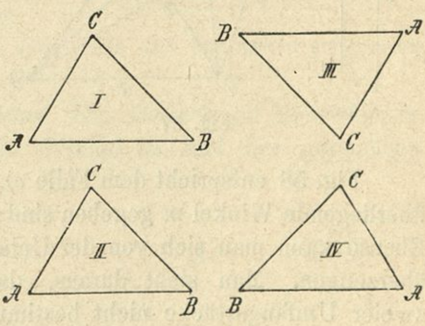

Fig. 56.

Diejenigen Seiten oder Winkel zweier kongruenter Figuren, welche zusammenfallen, wenn die Figuren zur Deckung gebracht werden, heißen entsprechende oder homologe Stücke; sie sind in Fig. 56 mit denselben Buchstaben bezeichnet.

§ 49. Unbestimmte Dreiecksaufgaben. Die Seiten und die Winkel (Umfangsstücke) eines Dreieckes hängen so voneinander ab, daß durch die Angabe gewisser Stücke auch die übrigen bestimmt sind. Man kann daher durch entsprechende Verbindung gewisser gegebener Stücke das Dreieck konstruieren.

Aufgaben. 1. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn *a)* eine Seite, *b)* ein Winkel desselben gegeben ist. — Unbestimmte Aufgaben.

2. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn *a)* zwei Seiten, *b)* eine Seite und ein anliegender Winkel, *c)* eine Seite und der gegenüberliegende Winkel, *d)* zwei Winkel gegeben sind.

Sind zwei Seiten a, b (Fig. 57) des Dreieckes gegeben, so nehme man $BC = a$ als Grundlinie und beschreibe aus C mit dem Radius b einen Bogen; jeder Punkt dieses Bogens kann als Spitze des Dreieckes betrachtet werden. Die Aufgabe ist unbestimmt, weil es unzählig viele Dreiecke gibt, welche ihr entsprechen; die Spitzen dieser Dreiecke liegen in einer Kreislinie (geometrischer Ort der Spitzen). Durch Angabe zweier Seiten ist also das Dreieck nicht bestimmt.

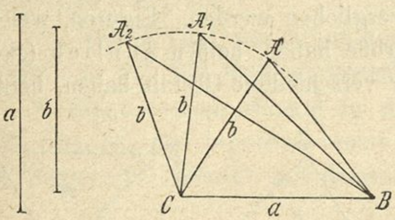

Fig. 57.

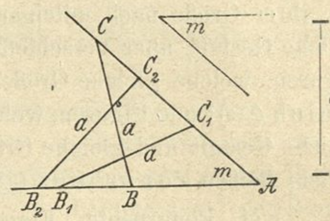

Fig. 58.

Fig. 58 entspricht dem Falle *c)*, wenn eine Seite a und der gegenüberliegende Winkel m gegeben sind; auch diese Aufgabe ist unbestimmt. Ebenso kann man sich von der Unbestimmtheit der Aufgaben *b)* und *d)* überzeugen. Man sieht daraus, daß ein Dreieck durch die Angabe zweier Umfangsstücke nicht bestimmt ist.

3. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die drei Winkel gegeben sind.

Aus dem Satze über die Winkelsumme des Dreieckes folgt, daß durch zwei Dreieckswinkel schon der dritte bestimmt ist. Die vorliegende Aufgabe ist also entweder überbestimmt, wenn die Summe der gegebenen Winkel von 180^0 verschieden ist, und die Konstruktion eines Dreieckes mit den gegebenen Winkeln ist unmöglich; oder die Aufgabe ist unbestimmt und fällt mit der schon betrachteten Aufgabe *d)* zusammen, wenn die Summe der gegebenen Winkel $= 180^0$ ist. An welche Bedingung sind zwei zur Konstruktion eines Dreieckes gegebene Winkel gebunden?

Aus dem Gesagten ist zu entnehmen, daß zur Konstruktion eines Dreieckes mehr als zwei Umfangsstücke und darunter mindestens eine Seite gegeben sein müssen, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll.

§ 50. Erste Dreieckskonstruktion. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel m, n (Fig. 59) gegeben sind.

Man mache die Seite $BC = a$ und übertrage an dieselbe die gegebenen Winkel m und n. Wie man sieht, ist durch die obige Angabe das Dreieck *eindeutig bestimmt*; d. h., wenn man mit denselben gegebenen Stücken ein zweites Dreieck konstruiert, so wird sich dieses vom ersten nur durch die Lage unterscheiden. Daraus folgt der

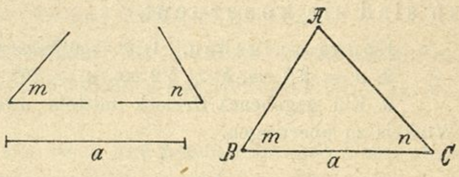

Fig. 59.

I. *Kongruenzsatz: Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent.*

„Zwei Dreiecke *stimmen* in einem Stücke *überein*“ heißt soviel als: „sie haben dieses Stück gleich.“

Übungsaufgaben. 1. $a = 6{\cdot}2\ cm$, $m = 72^\circ$, $n = 48^\circ$.

2. $a = 5{\cdot}1\ cm$, $m = 105^\circ$, $n = 32^\circ$.

3. Ein gegebenes Dreieck mittels einer Seite und der beiden anliegenden Winkel zu übertragen.

§ 51. Zweite Dreieckskonstruktion. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite a, ein anliegender Winkel m und der gegenüberliegende Winkel n (Fig. 60) gegeben sind.

Man mache $BC = a$, $\sphericalangle CBA = m$, $\sphericalangle ABD = n$ und ziehe $CA \parallel BD$. Das Dreieck ist durch obige Angabe eindeutig bestimmt; jedes andere, welches mit denselben Stücken konstruiert wird, kann sich vom ersten nur durch die Lage unterscheiden. Daraus folgt der

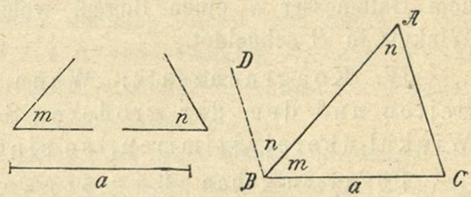

Fig. 60.

II. *Kongruenzsatz: Wenn zwei Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.*

Die beiden vorausgehenden Kongruenzsätze lassen sich in folgender Weise zusammenfassen: Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Übungsaufgaben. 1. $a = 4{\cdot}5\ cm$, $m = 68^\circ$, $n = 60^\circ$.

2. $a = 7{\cdot}0\ cm$, $m = 45^\circ$, $n = 100^\circ$.

§ 52. Dritte Dreieckskonstruktion. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel n (Fig. 61) gegeben sind.

Man mache $BC = a$, $\sphericalangle BCA = n$ und $CA = b$.

III. Kongruenzsatz: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Übungsaufgaben. 1. $a = 6{\cdot}7\ cm$, $b = 4{\cdot}3\ cm$, $n = 40^0$.
2. $a = 5{\cdot}8\ cm$, $b = 5{\cdot}2\ cm$, $n = 75^0$.
3. Ein gegebenes Dreieck mittels zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels zu übertragen.

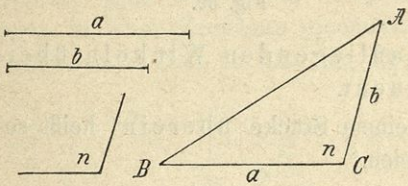

Fig. 61.

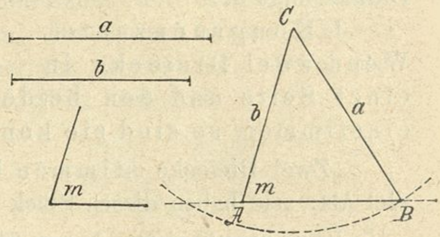

Fig. 62.

§ 53. Vierte Dreieckskonstruktion. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten a, b und der der größeren (a) gegenüberliegende Winkel m (Fig. 62) gegeben sind.

Man mache $\sphericalangle BAC = m$, $AC = b$ und beschreibe aus C mit dem Halbmesser a einen Bogen, welcher den andern Schenkel des Winkels in B schneidet.

IV. Kongruenzsatz: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Übungsaufgaben. 1. $a = 4{\cdot}7\ cm$, $b = 3{\cdot}2\ cm$, $m = 54^0$.
2. $a = 7{\cdot}3\ cm$, $b = 2{\cdot}9\ cm$, $m = 120^0$.

§ 54. Fünfte Dreieckskonstruktion. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die drei Seiten a, b, c (Fig. 63) gegeben sind.

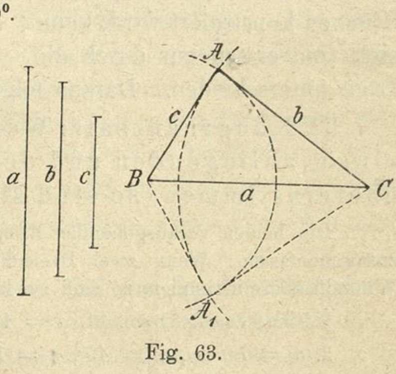

Fig. 63.

Man mache $BC = a$, beschreibe aus C mit dem Radius b und aus B mit dem Radius c einen Bogen. Welche Bedingung müssen die drei Seiten erfüllen, damit sich die beiden Bogen schneiden? Die beiden Dreiecke ABC und A_1BC, welche sich hier ergeben, sind kongruent; man erhält also nur **ein** bestimmtes Dreieck. Daraus folgt der

V. **Kongruenzsatz: Wenn zwei Dreiecke in allen drei Seiten übereinstimmen, so sind sie kongruent.**

Übungsaufgaben. 1. $a = 6{\cdot}8\ cm$, $b = 5{\cdot}7\ cm$, $c = 4{\cdot}6\ cm$.
2. $a = 2{\cdot}7\ cm$, $b = 6{\cdot}4\ cm$, $c = 5{\cdot}5\ cm$.
3. Ein gegebenes Dreieck mittels der drei Seiten zu übertragen.

§ 55. Sechste Dreieckskonstruktion. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten a, b und der Gegenwinkel n der kleineren (b) (Fig. 64) gegeben sind.

Man mache $\sphericalangle ABC = n$, $BC = a$ und beschreibe aus C mit dem Halbmesser b einen Bogen. Nun können drei verschiedene Fälle eintreten, je nachdem die Seite b kleiner, ebenso groß oder größer ist als die Normale CA, welche von C zum anderen Schenkel des Winkels B gezogen wird.

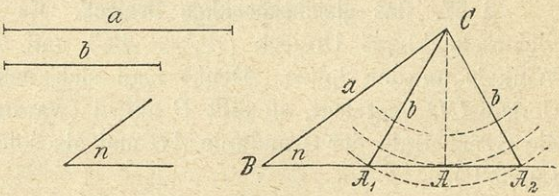

Fig. 64.

1. Ist $b < AC$, so hat der erwähnte Bogen mit dem Schenkel BA keinen Punkt gemein, und es läßt sich aus den gegebenen Stücken kein Dreieck konstruieren.

2. Ist $b = AC$, so berührt der Bogen den Schenkel BA, und die Aufgabe liefert das rechtwinklige Dreieck ABC.

3. Ist $b > AC$, so schneidet der aus C mit dem Radius b beschriebene Bogen den Schenkel BA in zwei Punkten A_1, A_2; es gibt also zwei verschiedene Dreiecke A_1BC und A_2BC, welche der Aufgabe genügen, weil sie die gegebenen Stücke enthalten.

Je nachdem eine Aufgabe eine, zwei oder mehr Auflösungen zuläßt, wird sie **eindeutig**, **zweideutig** oder **mehrdeutig** genannt. Die ersten fünf Dreieckskonstruktionen (§§ 50 bis 54) sind demnach eindeutige Aufgaben und die sechste ist entweder unmöglich, eindeutig oder zweideutig.

Übungsaufgaben. 1. $a = 5{\cdot}6\ cm$, $b = 3{\cdot}6\ cm$, $n = 36^0$.
2. $a = 5{\cdot}8\ cm$, $b = 5{\cdot}4\ cm$, $n = 65^0$.

§ 56. Änderungen der Gegenstücke des Dreieckes. *a)* **Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten unverändert bleiben, so wächst mit dem eingeschlossenen Winkel auch dessen Gegenseite.**

Wächst in dem Dreiecke ABC (Fig. 65) der Winkel A, so daß AC nach AC_1 kommt, so denke man sich die Strecke CC_1 gezogen und konstruiere deren Symmetrale AD. Weil nun B außerhalb der Symmetrale und mit C auf der gleichen Seite derselben liegt, so ist also $BC_1 > BC$ (§ 42, *b*). Umgekehrt:

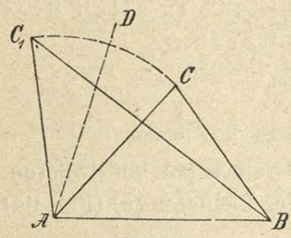

Fig. 65.

b) Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten unverändert bleiben, so nimmt mit der dritten Seite auch deren Gegenwinkel zu. Denn einem abnehmenden Winkel müßte nach dem obigen Satze eine abnehmende Gegenseite entsprechen; und einem gleichbleibenden Winkel?

Die besonderen Dreiecke.

§ 57. Das gleichschenklige Dreieck. Es sei ABC (Fig. 66) ein gleichschenkliges Dreieck $(AC = BC)$ und CD die Symmetrale des Winkels an der Spitze. Denkt man sich das Dreieck BCD um die Gerade CD umgelegt, so fällt B auf A (warum?); daher ist CD auch die Symmetrale der Grundlinie AB und als solche normal zu derselben. (Modell!)

Im gleichschenkligen Dreiecke fallen also die Symmetrale des Winkels an der Spitze, die Symmetrale der Grundlinie und die Höhe in eine Gerade zusammen.

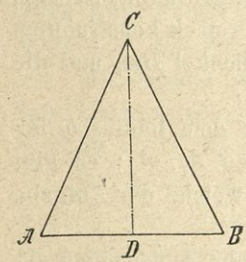

Fig. 66.

Zwei Figuren, welche so wie die Dreiecke ACD und BCD durch Umwenden um eine Gerade zur Deckung gebracht werden können, heißen symmetrisch in Bezug auf diese Gerade. Jede Figur, welche durch eine Gerade in zwei symmetrische Teile geteilt wird, heißt eine symmetrische Figur, und die Teilungsgerade wird Achse der Symmetrie oder kurzweg Achse genannt. Das gleichschenklige Dreieck ist also eine symmetrische Figur.

Übungsaufgaben. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

1. die Grundlinie und ein anliegender Winkel, $AB = 3$ *cm*, $A = 70^\circ$;
2. die Grundlinie und der Winkel an der Spitze, $AB = 5$ *cm*, $C = 90^\circ$;
3. der Schenkel und der Winkel an der Grundlinie, $AC = 6$ *cm*, $A = 72^\circ$;
4. der Schenkel und der Winkel an der Spitze, $BC = 62$ *mm*, $C = 36^\circ$;
5. die Grundlinie und der Schenkel, $AB = 4$ *cm*, $AC = 3$ *cm*.

§ 58. Das rechtwinklige Dreieck. *a)* Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse ein Durchmesser des umgeschriebenen Kreises. Denn wenn man vom rechten Winkel A (Fig. 43) den einen spitzen Winkel x wegnimmt, so bleibt als Rest der andere spitze Winkel z übrig (warum?); daraus folgt, daß die Dreiecke ABM und ACM gleichschenklig sind, also $MA = MB = MC$.

b) Von allen rechtwinkligen Dreiecken mit gemeinsamer Hypotenuse liegen die Scheitel der rechten Winkel in der Kreislinie, welche die Hypotenuse zum Durchmesser hat (geometrischer Ort der Scheitel).

c) Bleibt die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes unverändert und wächst die eine Kathete, so nimmt die andere ab. Denn konstruiert man die Symmetrale MN der Strecke CC_1 (Fig. 67), so ist $BC_1 > BC$, hingegen $AC_1 < AC$.

d) Ist im rechtwinkligen Dreiecke ein Winkel $= 30^0$, so ist die kleinere Kathete die Hälfte der Hypotenuse. Zum Beweise wende man das Dreieck ABC (Fig. 68) um AC in die Lage ACD um und betrachte die Figur $ABCD$. — Umgekehrt?

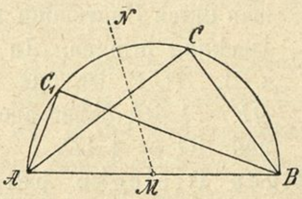

Fig. 67.

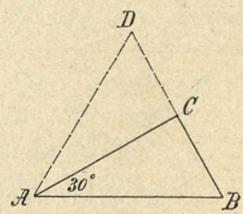

Fig. 68.

Übungsaufgaben. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu konstruieren, wenn gegeben sind:

1. eine Kathete und der anliegende spitze Winkel, $AC = 2\ cm$, $A = 60^0$;
2. eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel, $BC = 4\ cm$, $A = 40^0$;
3. die Hypotenuse und ein anliegender Winkel, $AB = 5\ cm$, $B = 35^0$;
4. die Katheten, $AC = 3\ cm$, $BC = 4\ cm$;
5. die Hypotenuse und eine Kathete, $AB = 6\ cm$, $BC = 4\ cm$.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

6. die Höhe (4 *cm*) und ein Winkel an der Grundlinie (76^0);
7. die Höhe (5 *cm*) und der Winkel an der Spitze (48^0);
8. die Höhe (3 *cm*) und die Grundlinie (4 *cm*);
9. ein Schenkel (5·5 *cm*) und die Höhe (4 *cm*).

Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

10. einer Kathete (36 *mm*);
11. der Hypotenuse (5 *cm*);
12. der Höhe (3 *cm*).

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus:

13. der Höhe (3·4 *cm*) und einem spitzen Winkel (36^0);
14. der Höhe (3 *cm*) und einer Kathete (4 *cm*).

Schreibe einem Kreise ($r = 3\ cm$) ein rechtwinkliges Dreieck ein,

15. in welchem ein spitzer Winkel 56^0 beträgt;
16. in welchem die Höhe 2 *cm* beträgt!

§ 59. Das gleichseitige Dreieck. Aus dem Satze über das gleichschenklige Dreieck (§ 57) folgt:

a) Im gleichseitigen Dreiecke fallen die drei Winkelsymmetralen mit den drei Seitensymmetralen und den drei Höhen zusammen; sie gehen durch denselben Punkt, welcher der Mittelpunkt sowohl des eingeschriebenen als auch des umgeschriebenen Kreises ist und daher Mittelpunkt des gleichseitigen Dreieckes heißt.

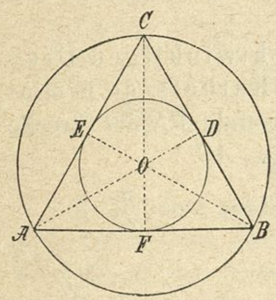

Fig. 69.

b) Die drei Höhen teilen das gleichseitige Dreieck ABC (Fig. 69) in sechs kongruente rechtwinklige Dreiecke; denn je zwei nebeneinander liegende von diesen Dreiecken kann man durch Umwenden um eine Symmetrale zur Deckung bringen. In einem dieser Dreiecke, z. B. AOF, ist nun $\sphericalangle\ FAO = 30^0$, also $OF = \frac{1}{2} AO$, daher auch $OD = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{3} AD$ und $AO = \frac{2}{3} AD$. Im gleichseitigen Dreiecke beträgt demnach der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ein Drittel, der des umschriebenen Kreises zwei Drittel der Höhe.

c) Die Höhen des gleichseitigen Dreieckes sind einander gleich.

Übungsaufgaben. 1. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, wenn die Höhe (3 *cm*) gegeben ist.

2. Wie läßt sich zeigen, daß zwei Höhen des gleichschenkligen Dreieckes einander gleich sind?

3. Was kann bezüglich der Mittelpunkte des einem gleichschenkligen Dreiecke eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises ausgesagt werden?

Der Kreis. B.

§ 60. Gerade und Kreis. Die gegenseitige Lage einer Geraden und eines Kreises kann dreierlei sein, je nachdem der Zentralabstand der Geraden, d. i. ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises, kleiner, eben so groß oder größer ist als der Halbmesser (Fig. 70). Im ersten Falle ist die Gerade Sekante des Kreises und hat mit dem Umfange zwei Punkte gemein. Im zweiten Falle ist sie Tangente des Kreises und hat nur einen Punkt mit ihm gemein. Im dritten

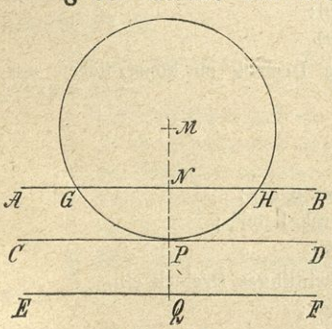

Fig. 70.

Falle ist sie vom Kreise ausgeschlossen, d. h. sie hat keinen Punkt mit ihm gemein.

§ 61. Eigenschaften der Sehnen. *a)* Der Mittelpunkt des Kreises hat von den Endpunkten einer Sehne gleiche Abstände; daraus folgt:

Die Symmetrale jeder Sehne des Kreises geht durch den Mittelpunkt desselben. Auf diesem Satze beruht die Konstruktion des Mittelpunktes einer Kreislinie, welche durch gegebene Punkte gehen soll.

Aufgaben. 1. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch zwei gegebene Punkte geht. — Unbestimmt.

2. Einen Kreis zu konstruieren, der durch drei gegebene Punkte geht. — Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit jener, einem gegebenen Dreiecke einen Kreis umzuschreiben (§ 44, Fig. 50). Dürfen die drei Punkte in einer Geraden liegen?

3. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises oder Kreisbogens zu finden. — Man wähle auf dem gegebenen Kreise oder Bogen drei Punkte und konstruiere wie in der vorhergehenden Aufgabe.

b) Wenn der zu einer Sehne gehörige Bogen 60^0 beträgt, wie CD (Fig. 72), so ist das Dreieck CDM gleichseitig (warum?); daraus folgt:

Die Sehne des Sextanten ist dem Halbmesser gleich.

Übungsaufgaben. 1. Konstruiere einen Kreis, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Radius (3 *cm*) hat!

2. Ziehe in einem Kreise mit gegebenem Radius (4 *cm*) eine Sehne von gegebener Länge (5 *cm*)!

3. Ist etwa die zum dritten Teile des Kreises gehörige Sehne gleich dem Durchmesser?

4. Wie viele aneinander stoßende Sehnen von der Länge des Radius können in einem Kreise gezogen werden?

§ 62. Beziehungen zwischen Sehnen und ihren Zentralabständen. *a)* Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Zentralabstände. Denn sind die Sehnen AB und CD (Fig. 71) gleich, so können die Dreiecke ABM und CDM zur Deckung gebracht werden, indem man das eine von beiden um den Punkt M dreht (V. Kongruenzsatz). Dabei werden sich auch die Zentralabstände ME und MF decken, weil von einem Punkte zu einer Geraden nur eine Normale möglich ist; also ist $ME = MF$.

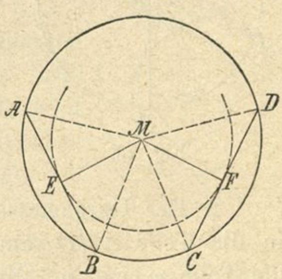

Fig. 71.

b) Zu ungleichen Sehnen eines Kreises gehören ungleiche Zentralabstände u. zw. gehört zur größeren Sehne der kleinere Abstand. Denn die recht-

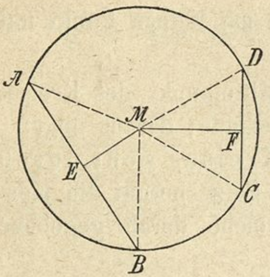

Fig. 72.

winkligen Dreiecke BEM und CFM (Fig. 72) haben gleiche Hypotenusen; weil nun $BE > CF$, so ist $ME < MF$ (§ 58, *c*).

Umkehrungen: *c)* Sehnen mit gleichen Zentralabständen sind gleich.

d) Bei Sehnen mit ungleichen Zentralabständen gehört zum größeren Abstande die kleinere Sehne. — Vergleiche den Folgesatz in § 41!

§ 63. Peripheriewinkel. Ein Winkel, dessen Scheitel im Umfange eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt ein Peripheriewinkel; der in der Winkelfläche liegende Teil des Kreisumfanges heißt der zugehörige Bogen oder der Bogen, auf welchem der Peripheriewinkel steht. Der Winkel im Halbkreise ist auch ein Peripheriewinkel. Wie groß ist der zugehörige Bogen?

Zwischen einem Peripheriewinkel und dem Zentriwinkel über demselben Bogen besteht eine einfache Beziehung, bei deren Ableitung man zu unterscheiden hat, ob der Mittelpunkt des Kreises auf einem Schenkel des Peripheriewinkels oder innerhalb oder außerhalb desselben liegt.

1. Im Dreiecke AMB (Fig. 73) sind die mit m bezeichneten Winkel einander gleich (warum?), daher ist der Zentriwinkel AMC doppelt so groß als der zu demselben Bogen AC gehörende Peripherie winkel ABC (§ 34, *b*).

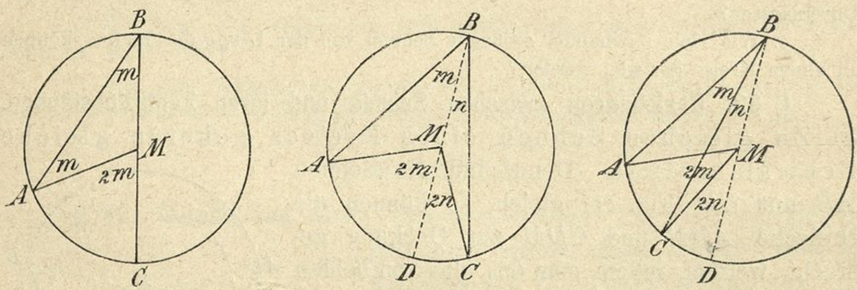

Fig. 73. Fig. 74. Fig. 75.

2. Der Durchmesser BD (Fig. 74) zerlegt den Zentriwinkel AMC in die Teile AMD und DMC, ferner den Peripheriewinkel ABC in die Teile m und n. Nun ist AMD das Doppelte von m, DMC das Doppelte von n, also auch AMC das Doppelte von ABC.

3. Zieht man den Durchmesser BD (Fig. 75), so ist der Zentriwinkel AMD das Doppelte des Peripheriewinkels ABD oder $m + n$.

Nun ist CMD das Doppelte von n, also muß auch AMC das Doppelte von m sein. Daraus folgt allgemein:

a) Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß als der Zentriwinkel, welcher zu demselben Bogen gehört.

b) Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen oder über gleichen Bogen sind einander gleich.

Übungsaufgaben. 1. Den Peripheriewinkel zu berechnen, der zu einem gegebenen Bogen gehört, z. B. zu $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ des Umfanges.

2. Wie beweist man mittelst des Satzes *a*), daß der Winkel im Halbkreise ein rechter ist?

3. Konstruiere in einem gegebenen Kreise mehrere Peripheriewinkel von 30^0 *a*) über demselben Bogen, *b*) nicht über demselben Bogen!

§ 64. Tangenten-Konstruktionen. 1. Die Tangente des Kreises zu konstruieren, wenn der Berührungspunkt gegeben ist. — Sieh § 40.

2. Von einem Punkte außerhalb des Kreises an denselben die Tangenten zu ziehen. — Man verbinde den gegebenen Punkt A (Fig. 76) mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises und beschreibe über AO als Durchmesser eine Kreislinie. Dieselbe schneidet die gegebene in zwei Punkten D und E. AD und AE sind die gesuchten Tangenten; warum? — Die gestellte Aufgabe läßt also zwei Lösungen zu.

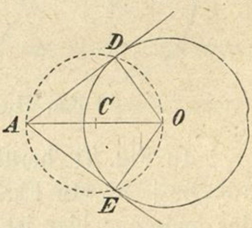

Fig. 76.

Übungsaufgabe. Gegeben sind ein Kreis mit dem Radius $r = 2·1$ *cm* und ein Punkt mit dem Zentralabstande *a*) $\frac{3}{2}r$, *b*) $2r$; man konstruiere die Tangenten von diesem Punkte an den Kreis!

§ 65. Gegenseitige Lage zweier Kreise. Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen konzentrisch (Fig. 77); die von zwei konzentrischen Kreislinien eingeschlossene Fläche wird Kreisring genannt.

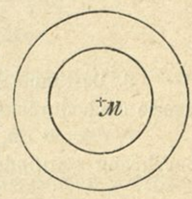

Fig. 77.

Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, heißen exzentrisch (Fig. 78 bis 82). Die durch die beiden Mittelpunkte bestimmte Gerade wird Zentrale und der Abstand der beiden Mittelpunkte Zentralabstand genannt. Wir wollen im Folgenden den Zentralabstand mit c, die Halbmesser der beiden Kreise mit r und r_1 bezeichnen und $r > r_1$ annehmen.

Denkt man sich den kleineren der beiden Kreise in Fig. 77 fortbewegt, so wird er gegen den größeren der Reihe nach fünf wesentlich verschiedene Lagen einnehmen, die in den Fig. 78 bis 82 dargestellt sind. Modell!

In Fig. 78 liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größeren. In Fig. 79 berühren sich die Kreise von innen; hier ist $c = r - r_1$, also in Fig. 78 $c < r - r_1$. In Worten?

In Fig. 80 schneiden sich die beiden Kreise, und man ersieht aus dem Dreiecke MNC, daß $r + r_1 > c > r - r_1$ (§ 33). In Worten?

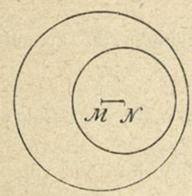

Fig. 78.

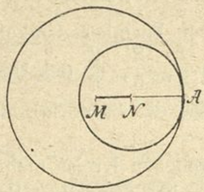

Fig. 79.

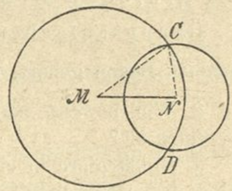

Fig. 80.

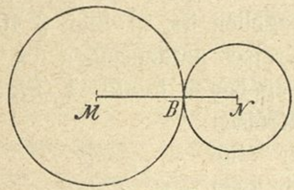

Fig. 81.

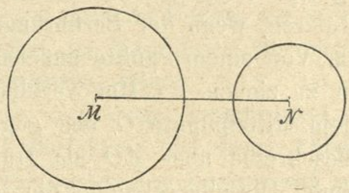

Fig. 82.

In Fig. 81 berühren sich die beiden Kreise von außen; hier ist $c = r + r_1$. In Fig. 82 liegt jeder der beiden Kreise ganz außerhalb des anderen; hier ist $c > r + r_1$. In Worten?

Übungsaufgaben. Zwei Kreise zu konstruieren, wenn der Zentralabstand und die Radien (in Zentimetern) gegeben sind:

1. $c = 4{\cdot}1$, $r = 2{\cdot}1$, $r_1 = 1{\cdot}4$;
2. $c = 0{\cdot}7$, $r = 2{\cdot}2$, $r_1 = 1{\cdot}2$;
3. $c = 3{\cdot}4$, $r = 2{\cdot}0$, $r_1 = 1{\cdot}4$;
4. $c = 0{\cdot}8$, $r = 2{\cdot}1$, $r_1 = 1{\cdot}3$;
5. $c = 0$, $r = 1{\cdot}9$, $r_1 = 1{\cdot}2$;
6. $c = 1{\cdot}5$, $r = 2{\cdot}0$, $r_1 = 1{\cdot}5$;
7. $c = 2{\cdot}5$, $r = 1{\cdot}7$, $r_1 = 1{\cdot}7$.

8. Bestimme in den vorausgehenden Fällen die gegenseitige Lage der beiden Kreise auch durch Rechnung!

9. $r = 5$ *cm*, $r_1 = 4$ *cm*; wie groß ist c, wenn *a*) eine äußere, *b*) eine innere Berührung stattfindet?

Das Viereck.

§ 66. Erklärungen. Wenn man vier Punkte, von denen je drei nicht in einer Geraden liegen, in bestimmter Reihenfolge durch Strecken verbindet, so entsteht ein Viereck ($ABCD$, Fig. 83).

Jedes Viereck hat vier Eckpunkte, vier Seiten und vier Winkel. Jeder Seite liegt eine andere Seite, jeder Ecke und jedem Winkel eine andere Ecke und ein anderer Winkel gegenüber; z. B. AB und CD, A und C. Eine Strecke, welche zwei gegenüberliegende Ecken verbindet, heißt Diagonale, wie AC. Das Viereck hat zwei Diagonalen.

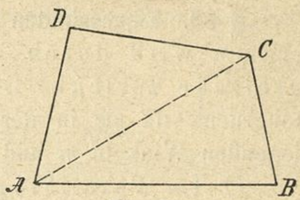

Fig. 83.

§ 67. Der Winkelsatz. Eine Diagonale teilt das Viereck in zwei Dreiecke, deren Winkel zusammen die Winkel des Viereckes ausmachen; daraus folgt:

Die Summe der Winkel eines Viereckes beträgt vier Rechte oder 360°.

Warum kann man nicht in folgender Weise schließen: Da die beiden Diagonalen das Viereck in vier Dreiecke zerlegen, so beträgt die Winkelsumme des Viereckes viermal $2R$, also $8R$?

In einem Vierecke kann höchsten ein erhabener Winkel vorkommen; warum? — Im Folgenden werden nur Vierecke mit lauter hohlen Winkeln betrachtet.

Übungsaufgaben. 1. Man zeichne ein Viereck mit einem erhabenen Winkel.

2. Wie viele spitze und wie viele stumpfe Winkel kann ein Viereck haben? Zeichne die möglichen Fälle.

Ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn gegeben sind:

3. alle vier Seiten und ein Winkel, $AB = 3$ *cm*, $BC = 4$ *cm*, $CD = 4$ *cm*, $DA = 5$ *cm*, $A = 90°$;

4. alle vier Seiten und eine Diagonale, $AB = 5$ *cm*, $BC = 4·5$ *cm*, $CD = 3$ *cm*, $DA = 6$ *cm*, $AC = 4$ *cm*;

5. drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel, $AB = 35$ *mm*, $BC = CD = 3$ *cm*, $B = 90°$, $C = 120°$;

6. drei Seiten und die beiden Diagonalen, $AB = 4$ *cm*, $BC = 5·5$ *cm*, $BD = 5$ *cm*, $AC = 5$ *cm*, $AD = 3$ *cm*.

7. Aus drei Winkeln eines Viereckes den vierten zu berechnen: *a*) 67°, 54°, 136°, *b*) 64° 37′, 84° 12′, 113° 48′, *c*) 61° 19′ 13″, 72° 38′ 45″, 111° 2′ 2″.

8. Die Summe der Außenwinkel eines Viereckes zu bestimmen.

§ 68. Einteilung der Vierecke. Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm, wie $ABCD$ (Fig. 84); $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Trapez, wie $ABCD$ (Fig. 89); $AB \parallel DC$.

Ein Viereck, in welchem keine Seite zu einer anderen parallel ist, wird ein Trapezoid genannt (Fig. 83). Hat ein Viereck zwei Nachbarseiten gleich und ebenso die beiden anderen Seiten gleich, jedoch von den ersteren verschieden, so heißt es Deltoid, wie $ABCD$ (Fig. 92); hier ist $AB = BC$ und $AD = CD$.

§ 69. Eigenschaften des Parallelogrammes. *a)* Das Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Die Dreiecke ABD und BCD (Fig. 84) sind kongruent, da sie in der gemeinschaftlichen Seite BD und den anliegenden Winkeln m und n übereinstimmen.

b) Im Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich; $AB = DC$, $AD = BC$. Folgt aus *a)*.

Umgekehrt: Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist es ein Parallelogramm. (V. Kongruenzsatz.)

c) Im Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich; $\sphericalangle A = C$, $\sphericalangle B = D$. Folgt aus *a)*.

Umgekehrt: Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist es ein Parallelogramm. Aus $A = C$ und $B = D$ folgt nämlich $A + B = 2R$, somit $AD \parallel BC$ (§ 30, *b*) u. s. f.

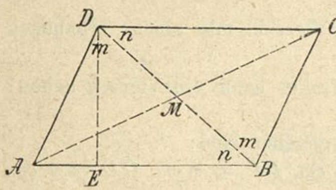

Fig. 84.

d) Die Diagonalen des Parallelogrammes halbieren einander. Denn ist M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen, so können die Dreiecke ABM und CDM dadurch zur Deckung gebracht werden, daß man durch Drehen in der Ebene AB mit CD zusammenfallen lässt (I. Kongruenzsatz, $AB = CD$, $\sphericalangle ABM = CDM$, $\sphericalangle BAM = DCM$); dann fällt AM auf CM und BM auf DM, also ist $AM = CM$ und $BM = DM$. Modell!

Umgekehrt: Wenn die Diagonalen eines Viereckes einander halbieren, so ist es ein Parallelogramm. (V. Congruenzsatz.)

e) Sind in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm. Ist z. B. $AB = DC$ und $AB \parallel DC$, so ist $\triangle ABD \cong CDB$ (III. Kongruenzsatz), also $\sphericalangle ADB = CBD$ und $AD \parallel BC$.

Übungsaufgaben. Ein Parallelogramm $ABCD$ zu konstruieren aus:

1. zwei anstoßenden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, $AB = 4$ *cm*, $BC = 3$ *cm*, $B = 110^0$;

2. zwei anstoßenden Seiten und einer Diagonale, $AB = 4{\cdot}5$ *cm*, $BC = 3{\cdot}6$ *cm*, $BD = 5$ *cm*;

3. den beiden Diagonalen und einer Seite, $AC = 6$ *cm*, $BD = 5$ *cm*, $BC = 3$ *cm*;

4. den beiden Diagonalen und einem der von ihnen eingeschlossenen Winkel $AC = 5{\cdot}2\ cm$, $BD = 6{\cdot}2\ cm$, $AMB = 115^0$.

5. Aus einem Winkel eines Parallelogrammes die übrigen zu berechnen: *a)* 72^0, *b)* $118^0\ 39'$, *c)* $98^0\ 12'\ 34''$.

§ 70. Abstand zweier Parallelen. Aus § 69, *b)* folgt:

a) Parallele Verbindungsstrecken paralleler Geraden sind einander gleich.

Ist $AB \parallel CD$ (Fig. 85), und zieht man von zwei beliebigen Punkten B und E der einen Geraden Normale zur anderen, so sind diese gleich, $BD = EF$; warum? — Also haben alle Punkte einer Geraden von einer Parallelen gleiche Abstände.

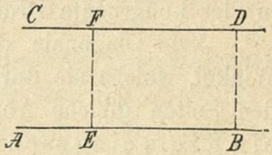

Fig. 85.

Irgend eine solche Normale heißt Abstand der Parallelen. Umgekehrt:

b) Alle Punkte, welche von einer Geraden nach derselben Seite hin gleiche Abstände haben, liegen in einer Parallelen zur gegebenen Geraden (geometrischer Ort jener Punkte).

Im Parallelogramme kann man jede Seite als Grundlinie betrachten. Der Abstand der Grundlinie von der parallelen Seite heißt die Höhe; so ist DE die Höhe in Bezug auf AB als Grundlinie (Fig. 84).

Übungsaufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse (5 *cm*) und die zugehörige Höhe (2 *cm*) gegeben sind.

§ 71. Einteilung der Parallelogramme. Ist ein Winkel des Parallelogrammes ein rechter, so ist jeder Winkel ein rechter und das Parallelogramm heißt rechtwinklig. Sind zwei aneinander stoßende Seiten gleich, so sind alle vier Seiten gleich und das Parallelogramm heißt gleichseitig.

Das rechtwinklige Parallelogramm heißt auch Rechteck, das gleichseitige Rhombus. Ist ein Parallelogramm rechtwinklig und gleichseitig, so heißt es Quadrat; ist es schiefwinklig und ungleichseitig, so heißt es Rhomboid.

§ 72. Das Rechteck. Im Rechtecke sind die Diagonalen einander gleich. Denn die Dreiecke ABC und ABD (Fig. 86) sind kongruent; warum? Daher sind auch die Hälften der Diagonalen einander gleich und der Schnittpunkt M der Diagonalen hat von den Ecken gleiche Abstände. Jedem Rechtecke kann also ein Kreis umgeschrieben werden. Ist das Rechteck symmetrisch?

Übungsaufgaben. Ein Rechteck $ABCD$ zu konstruieren aus:

1. zwei anstoßenden Seiten, $AB = 4{\cdot}7\ cm$, $BC = 0{\cdot}32\ dm$;
2. einer Seite und der Diagonale, $AD = 4\ cm$, $AC = 5\ cm$;

3. der Diagonale und einem von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel, $AC = 5{\cdot}4$ *cm*, $BMC = 60^\circ$.

§ 73. Der Rhombus. Im Rhombus ist jede Diagonale die Symmetrale der anderen; denn A und C (Fig. 87) sind sowohl von B als auch von D gleich weit entfernt. (Modell!) Daraus folgt, daß die Diagonalen zueinander normal sind und den Rhombus in vier kongruente Dreiecke teilen.

Jede Diagonale des Rhombus ist auch Symmetrale der beiden Winkel, welche sie durchschneidet; warum? Also hat der Punkt M von den Seiten gleiche Abstände und jedem Rhombus kann daher ein Kreis eingeschrieben werden. Ist der Rhombus symmetrisch?

Übungsaufgaben. Einen Rhombus $ABCD$ zu konstruieren aus:
1. der Seite und einem Winkel, $AB = 3$ *cm*, $B = 120^\circ$;
2. der Seite und einer Diagonale, $AD = 4$ *cm*, $BD = 3$ *cm*;
3. den beiden Diagonalen, $AC = 6$ *cm*, $BD = 4{\cdot}8$ *cm*;
4. einem Winkel und dem Radius des eingeschriebenen Kreises, $A = 50^\circ$, Radius $= 2$ *cm*.

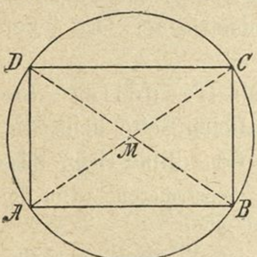

Fig. 86.

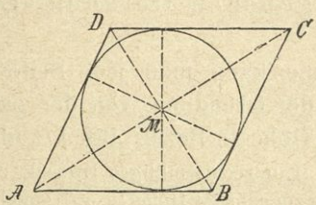

Fig. 87.

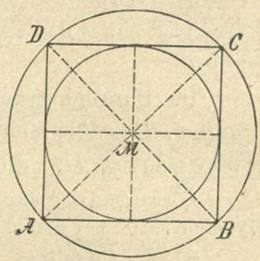

Fig. 88.

§ 74. Das Quadrat. Im Quadrate (Fig. 88) sind die Diagonalen einander gleich und zueinander normal. Dem Quadrate kann ein Kreis umgeschrieben und ein Kreis eingeschrieben werden. Mittelpunkt des Quadrates. Ist das Quadrat symmetrisch?

Übungsaufgaben. 1. Ein Quadrat zu konstruieren, wenn *a)* die Seite, *b)* die Diagonale gegeben ist.

2. In welchen Parallelogrammen sind die Diagonalen gleich, in welchen stehen sie zueinander normal?

§ 75. Eigenschaften des Trapezes. Im Trapeze kann man jede der beiden Parallelseiten als Grundlinie betrachten; der Abstand derselben ist die Höhe des Trapezes. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten oder Schenkel wird Mittellinie genannt (EF, Fig. 89).

a) Die Mittellinie des Trapezes ist zu den Parallelseiten desselben parallel.

Ist nämlich $AE = ED$ und $GH \perp AB$, so kann das Dreieck AEG durch Drehung um den Punkt E mit dem Dreiecke DEH zur Deckung gebracht werden. Daraus folgt $GE = EH$; also ist GE die halbe Höhe des Trapezes. Ebenso zeigt man, daß JF gleich der halben Höhe des Trapezes, also gleich GE ist. Man hat demnach $EF \parallel AB \parallel CD$ (§ 70, *b*).

b) Die Mittellinie ist gleich der halben Summe der Parallelseiten.

Aus der Kongruenz der Dreiecke AEG und DEH folgt nämlich $AG = HD = x$, ebenso $JB = CK = z$. Denkt man sich nun x und z von AB weggenommen und zu CD hinzugefügt, so sieht man, daß die Summe von AB und CD zweimal so viel beträgt als EF, d. h. $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

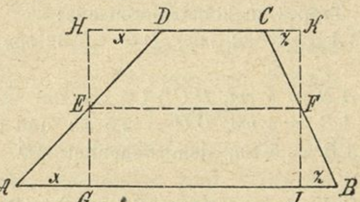

Fig. 89.

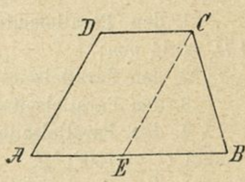

Fig. 90.

Übungsaufgaben.*) 1. Ein Trapez $ABCD$ zu konstruieren, wenn alle vier Seiten gegeben sind, $AB = 6$ *cm*, $BC = 5$ *cm*, $CD = 2$ *cm*, $DA = 3$ *cm*. Anleitung. Man konstruiere zunächst das Dreieck BCE (Fig. 90) aus der Differenz der Parallelseiten und den beiden Schenkeln!

2. Ein Trapez zu konstruieren, wenn drei Seiten und ein Winkel gegeben sind:
a) $AB = 5{\cdot}2$ *cm*, $BC = 3{\cdot}5$ *cm*, $CD = 4$ *cm*, $B = 70^0$;
b) $BC = 4$ *cm*, $CD = 4$ *cm*, $DA = 3$ *cm*, $D = 120^0$.

3. Ein Trapez ist zu construieren, wenn drei Seiten und eine Diagonale gegeben sind:
$AB = 5$ *cm*, $BC = 4{\cdot}4$ *cm*, $CD = 4$ *cm*, $AC = 6$ *cm*.

4. Ein Trapez zu konstruieren, wenn drei Seiten und die Höhe h gegeben sind:
a) $AB = 4$ *cm*, $CD = 3{\cdot}6$ *cm*, $DA = 4{\cdot}2$ *cm*, $h = 3$ *cm*;
b) $BC = 3$ *cm*, $CD = 2$ *cm*, $DA = 3{\cdot}6$ *cm*, $h = 2{\cdot}5$ *cm*.

5. Aus zwei gegebenen Winkeln eines Trapezes (die nicht an einem Schenkel liegen) die übrigen zu berechnen: *a)* $A = 63^0$, $B = 96^0$; *b)* $C = 125^0\ 12'\ 40''$ $D = 87^0\ 34'\ 28''$; *c)* $A = 76^0\ 26'\ 34''$, $C = 85^0\ 23'\ 17''$.

§ 76. Das gleichschenklige Trapez. *a)* Sind in einem Trapeze die beiden nicht parallelen Seiten oder Schenkel gleich, so heißt es gleichschenklig. Im gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder Parallelseite einander gleich. Ist nämlich $CE \parallel DA$ (wie in Fig. 90) und $BC = AD$, so ist auch $BC = EC$, also $\sphericalangle B = E = A$. Da die Winkel C und D des Trapezes zu den Winkeln A und B supplementär sind, so sind sie ebenfalls einander gleich.

*) In den folgenden Aufgaben über das Trapez $ABCD$ wird stets $AB \parallel DC$ vorausgesetzt.

b) Das gleichschenklige Trapez ist eine symmetrische Figur und zwar ist die Symmetrale einer Parallelseite zugleich Symmetrale des Trapezes. Beweis durch Umwenden um die Symmetrale von AB (Fig. 91). Modell!

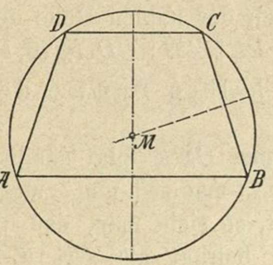

Fig. 91.

c) Dem gleichschenkligen Trapeze läßt sich ein Kreis umschreiben. Ist nämlich M der Schnittpunkt der Symmetralen von AB und BC (Fig. 91), so ist $AM = BM = CM$ und auch $= DM$, weil die Symmetrale von AB zugleich die Symmetrale von CD ist.

Übungsaufgaben. Ein gleichschenkliges Trapez zu konstruieren aus:

1. den Parallelseiten $AB = 62$ *mm*, $DC = 32$ *mm* und dem Schenkel $AD = 44$ *mm*;
2. den Parallelseiten $AB = 5$ *cm*, $DC = 4$ *cm* und $\sphericalangle D = 100^0$;
3. den Parallelseiten $AB = 4$ *cm*, $DC = 2{\cdot}5$ *cm* und der Höhe $h = 3$ *cm*;
4. der Parallelseite $AB = 5$ *cm*, dem Schenkel $AD = 3{\cdot}6$ *cm* und dem Winkel $C = 120^0$;
5. der Parallelseite $DC = 3$ *cm*, dem Schenkel $AD = 3{\cdot}6$ *cm* und der Höhe $h = 2{\cdot}8$ *cm*.
6. Aus einem gegebenen Winkel des gleichschenkligen Trapezes die übrigen zu berechnen: *a)* $57^0\ 17'\ 45''$, *b)* $142^0\ 16'\ 35''$.

§ 77. Eigenschaften des Deltoides. Das Deltoid $ABCD$ (Fig. 92) wird durch die Diagonale BD in zwei kongruente Dreiecke geteilt, welche durch Umwenden um BD zur Deckung gebracht werden können. Das Deltoid ist also symmetrisch und eine Diagonale (BD) die Symmetrale desselben; sie halbiert die andere Diagonale AC rechtwinklig und halbiert die Winkel B und D. Beweis durch Umwenden um die Symmetrieachse. Modell!

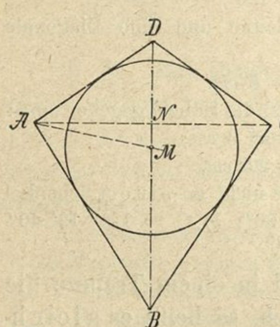

Fig. 92.

Konstruiert man die Symmetrale des Winkels A, so erhält man einen Punkt M in BD, der von allen Seiten des Deltoides gleiche Abstände hat. Daraus folgt: Jedem Deltoide läßt sich ein Kreis einschreiben.

Übungsaufgaben.*) Ein Deltoid zu konstruieren aus:

1. zwei ungleichen Seiten und einer Diagonale:

a) $AB = 5$ *cm*, $AD = 3$ *cm*, $BD = 7$ *cm*;

b) $AB = 4$ *cm*, $AD = 5{\cdot}2$ *cm*, $AC = 6$ *cm*;

*) In den folgenden Aufgaben über das Deltoid $ABCD$ ist stets BD als die Symmetrale desselben angenommen.

2. einer Seite und den beiden Diagonalen:
$AB = 4\ cm$, $AC = 3\ cm$, $BD = 5\ cm$;
3. den beiden Diagonalen und einem Winkel:
$AC = 3\ cm$, $BD = 5\ cm$, $\sphericalangle D = 75^0$.
4. Aus zwei (ungleichen) Winkeln eines Deltoides die übrigen zu berechnen:
a) $A = 90^0$, $B = 60^0$; *b)* $B = 42^0\ 15'\ 12''$, $D = 170^0\ 28'\ 30''$.
5. Einem gegebenen Deltoide einen Kreis einzuschreiben.

Das Vieleck.

§ 78. Erklärungen. Wenn man mehr als vier Punkte in einer gewissen Reihenfolge durch Strecken verbindet, so erhält man ein Vieleck oder Polygon (*ABCDEF*, Fig. 93). In jedem Vielecke ist die Anzahl der Ecken gleich jener der Seiten und gleich jener der Winkel. Je nachdem die Anzahl der Seiten 5, 6, ... *n* ist, wird das Polygon ein Fünfeck, Sechseck, ... *n*-Eck genannt.

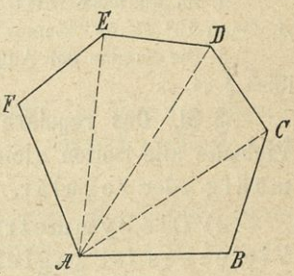

Fig. 93.

Im weiteren Sinne rechnet man zu den Vielecken auch die Dreiecke und Vierecke. Im Nachfolgenden werden nur Vielecke mit lauter hohlen Winkeln betrachtet.

§ 79. Diagonalen. Eine Gerade im Vielecke, welche zwei nicht nebeneinander liegende Ecken verbindet, heißt Diagonale.

Wenn man aus einem Eckpunkte des Polygones alle möglichen Diagonalen zieht, so gibt es drei Eckpunkte, nach denen man keine ziehen kann, nämlich den angenommenen Punkt selbst und die beiden benachbarten Eckpunkte. Demnach ist die Anzahl der Diagonalen aus einem Eckpunkte um drei kleiner als die Seitenanzahl des Polygones (im *n*-Ecke *n*—3).

Aufgabe. Die Anzahl aller Diagonalen eines *n*-Eckes zu berechnen. — Man kann z. B. im Achtecke aus einem Eckpunkte 5, daher aus allen Eckpunkten zusammen $5 \cdot 8 = 40$ Diagonalen ziehen. Dabei wird jedoch jede Diagonale zweimal gezogen, nämlich von jedem ihrer beiden Endpunkte aus; somit ist die Anzahl aller möglichen Diagonalen eines Achteckes $= 20$. (Im *n*-Ecke $\frac{n(n-3)}{2}$.)

Übungsaufgabe. Die Anzahl aller Diagonalon im 5-, 6-, 7-, 10-, 12-Ecke zu berechnen.

§ 80. Der Winkelsatz. Verbindet man einen Punkt *O* im Innern eines Polygones (Fig. 94) durch Strecken mit allen Eckpunkten, so zerfällt das Polygon in ebenso viele Dreiecke, als es Seiten hat. Weil nun alle Dreieckswinkel mit Ausnahme jener, welche um den Punkt *O*

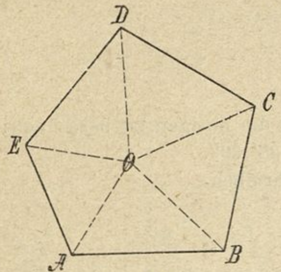

Fig. 94.

liegen, Teile der Polygonswinkel sind, so beträgt die Summe der Winkel aller Dreiecke um vier Rechte mehr als jene der Winkel des Polygones; daraus folgt:

Die Summe der Winkel eines Polygones beträgt doppelt so viel Rechte, als das Polygon Seiten hat, weniger vier Rechte (im n-Ecke $2nR - 4R$).

Übungsaufgaben. 1. Die Summe der Winkel eines 5-, 6-, 7-, 8-, 9-, 10-, 12-, 16-, 24-Eckes zu berechnen.

2. Im Fünfecke $ABCDE$ ist $A = 36^0\ 42'\ 58''$, B ist $2^1/_2$mal so groß wie A, C um $13^0\ 44'\ 51''$ kleiner als B und $D = E$. Berechne die Winkel B, C, D, E.

3. Die Summe der Außenwinkel eines Vieleckes beträgt vier Rechte; warum? (Sieh § 34, *c*).

§ 81. Das reguläre Vieleck, Symmetrie desselben. Sind in einem Vielecke alle Seiten gleich und alle Winkel gleich, so heißt es regelmäßig oder regulär.

a) Die Symmetrale einer jeden Seite des regelmäßigen Vieleckes ist zugleich Symmetrale des Vieleckes.

Denn ist FM (Fig. 95) die Symmetrale der Seite AB, so kann man $FAED$ um FM so umwenden, daß A und B aufeinander fallen; dann decken sich auch AE und BC, weil die Winkel A und B gleich sind; die Punkte C und E fallen aufeinander, weil die Seiten gleich sind u. s. w.

Als Modell benütze ein regelmäßiges Sechseck, welches sich um eine Seiten- und um eine Winkelsymmetrale umklappen läßt.

b) Die Symmetrale eines jeden Winkels im regulären Vielecke ist zugleich Symmetrale des Vieleckes.

Denn ist AM (Fig. 95) die Symmetrale des Winkels A, so kann man $AEDH$ um AM so umwenden, daß AB und AE aufeinander fallen; dann fallen auch die Punkte B und E zusammen, weil die Seiten gleich sind, ebenso BC und ED, weil die Winkel B und E gleich sind, u. s. w.

Ist das Vieleck von ungerader Seitenzahl, dann ist die Symmetrale jeder Seite zugleich die Symmetrale des gegenüberliegenden Winkels (Fig. 95). Ist das Vieleck von gerader Seitenzahl, so ist jede Winkelsymmetrale auch Symmetrale des gegenüberliegenden Winkels und jede Seitensymmetrale auch Symmetrale der gegenüberliegenden Seite (Fig. 96).

Das regelmäßige Vieleck hat somit ebenso viele Symmetralen als Seiten.

Übungsaufgaben. Wie groß ist *a)* ein Innenwinkel, *b)* ein Außenwinkel im regulären 5-, 6-, 7-, 8-, 9-, 10-, 12-, 16-, 24-Ecke?

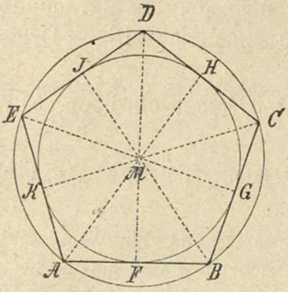

Fig. 95.

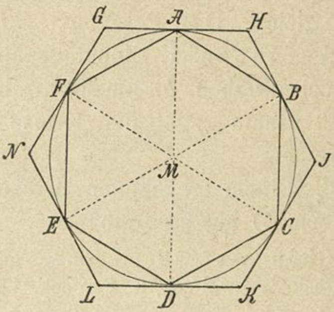

Fig. 96.

§ 82. Das regelmäßige Vieleck und der Kreis. *a)* Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis umschreiben und ein Kreis einschreiben.

Denn die Symmetrale *FM* der Seite *AB* (Fig. 95) und die Symmetrale *GM* der Seite *BC* schneiden sich in einem Punkte *M*, der von den drei Ecken *A*, *B*, *C* gleiche Abstände hat. Weil nun *C* und *E* in Bezug auf *FM* symmetrisch liegen, so ist $CM = EM$; weil ferner *A* und *D* in Bezug auf *GM* symmetrisch liegen, so ist $AM = DM$. Also ist *M* der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch alle Ecken des Polygones geht.

Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Zentralabstände, somit ist $FM = GM = HM = \ldots$, d. h. *M* ist auch Mittelpunkt eines anderen Kreises, welcher alle Seiten des Polygones berührt. Der Punkt *M* wird daher der Mittelpunkt des regulären Vieleckes genannt.

b) Wird die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Teile geteilt, so sind die Teilungspunkte zugleich Ecken eines regulären eingeschriebenen und Berührungspunkte der Seiten eines regulären umgeschriebenen Vieleckes.

Sind nämlich die Bogen *AB, BC, CD*, . . . (Fig. 96) gleich, so entsprechen ihnen gleiche Sehnen; $AB = BC = CD = \ldots$ Man kann nun das Polygon *ABCD* . . um den Punkt *M* so drehen, daß der Eckpunkt *A* auf irgend einen anderen Eckpunkt fällt, z. B. auf *B*; dann fällt *B* auf *C*, *C* auf *D*, u. s. f. Daraus folgt, daß auch alle Winkel gleich sind; also ist das Polygon *ABCD* . . regelmäßig. Modell!

Bei der erwähnten Drehung wird die Tangente *GH* auf eine andere fallen, z. B. auf *HJ*, *HJ* auf *JK* u. s. w. Die zweite Lage des

Polygones *GHJK*. . wird sich genau mit der ersten Lage desselben decken; daher sind die Seiten und Winkel dieses Polygones beziehungsweise gleich. Das Polygon *GHJK* . . . ist also regelmäßig. Modell!

Aufgaben. 1. Einem gegebenen Kreise ein gleichseitiges Dreieck *a)* einzuschreiben, *b)* umzuschreiben.

2. Einem gegebenen Kreise ein Quadrat *a)* einzuschreiben, *b)* umzuschreiben.

3. Einem gegebenen Kreise ein reguläres Sechseck *a)* einzuschreiben, *b)* umzuschreiben.

Übungsaufgaben. Einem gegebenen Kreise ist je ein regelmäßiges 1. Achteck, 2. Zwölfeck, 3. Fünfeck, 4. Zehneck einzuschreiben und umzuschreiben. — Im 3. und 4. Falle soll die Teilung durch Versuche ausgeführt werden.

§ 83. Übertragung eines Vieleckes. Aufgabe. Ein Vieleck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Vielecke kongruent ist (Übertragen des Vieleckes).

a) Durch Bestimmung der Ecken durch die fünfte Dreieckskonstruktion. Man mache (Fig. 97) $A_1B_1 = AB$, beschreibe von A_1 mit dem Radius AC und von B_1 mit dem Radius BC Bogen, welche sich im Punkte C_1 schneiden. Ebenso bestimmt man D_1, E_1 u. s. w. — Nachweis durch Deckung.

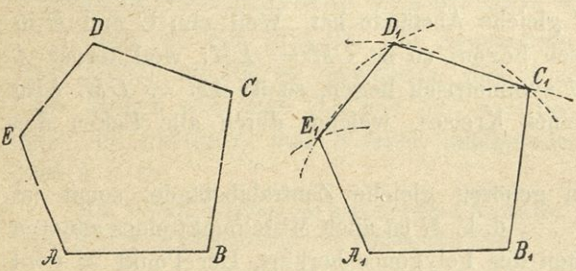

Fig. 97.

b) Durch die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte. Man fälle von den Eckpunkten des gegebenen Vieleckes (Fig. 98) Normalen auf eine beliebige Gerade OX und konstruiere auf einer anderen Geraden O_1X_1 die Strecken $O_1M_1 = OM$, $O_1N_1 = ON$, u. s. w.; hierauf errichte man in den Punkten $M_1, N_1, \ldots$ die Normalen zu O_1X_1, mache $M_1A_1 = MA$, $N_1B_1 = NB$, u. s. w. — Nachweis durch Deckung.

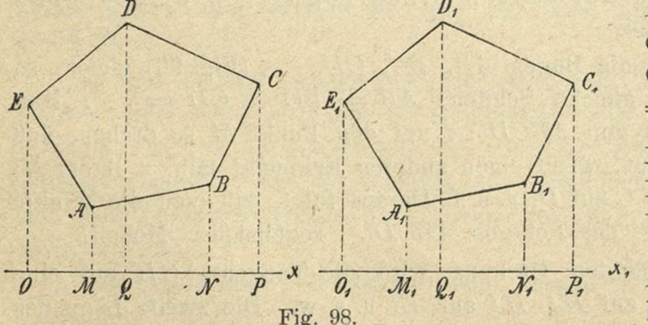

Fig. 98.

Die Normalen MA, NB, . . . heißen Ordinaten und die Strecken $OM, ON, \ldots$ Abszissen; die Abszisse OM und die Ordinate MA zusammen heißen rechtwinklige Koordinaten des Punktes A in Bezug auf O als Anfangspunkt und OX als Abszissenachse. — Vergleiche damit die sphärischen Koordinaten bei der geographischen Ortsbestimmung.

Übungsaufgaben. Ein Viereck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Vierecke 1. durch Parallelverschiebung, 2. durch Umwenden um eine gegebene Gerade, z. B. um eine Seite, 3. durch halbe Umdrehung um einen gegebenen Punkt, z. B. um einen Eckpunkt, zur Deckung gebracht werden kann.

4. Übertrage ein gegebenes *a*) Parallelogramm, *b*) Fünfeck, *c*) Sechseck!

5. Ein Viereck zu konstruieren, wenn die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben sind.

	A	B	C	D
Abszissen:	1,	4,	5,	3 *cm*
Ordinaten:	1,	0,	4,	5 *cm*.

6. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben sind.

	A	B	C	D	E
Abszissen:	0,	1·4,	4·6,	6·0,	3·0 *cm*
Ordinaten:	2·9,	5·6,	5·0,	4·3,	0·9 *cm*.

Flächenvergleichung.

§ 84. Erklärungen. Jener Teil der Ebene, welcher von den Grenzlinien einer (ebenen) Figur eingeschlossen wird, heißt die Fläche der Figur. (Die Dreiecks-, die Kreisfläche u. s. f.) Die Größe der Fläche heißt der Flächeninhalt der Figur. Haben zwei Figuren gleichen Flächeninhalt, so heißen sie flächengleich oder einfach gleich ($=$); im entgegengesetzten Falle heißen sie ungleich ($>$ oder $<$).

Die Vergleichung der Flächen beruht auf folgenden Sätzen:

1. Zwei kongruente Figuren sind auch gleich. Daraus folgt z. B., daß ein Parallelogramm durch eine Diagonale und daß ein regelmäßiges Polygon durch eine Seiten- oder eine Winkelsymmetrale in zwei gleiche Teile zerlegt wird.

2. Durch Addition (Aneinanderlegen) zweier gegebener Figuren kann man auf verschiedene Arten neue Figuren bilden, welche gleich, jedoch im allgemeinen nicht kongruent sind. Wie viele Figuren von verschiedener Form und gleicher Größe kann man z. B. dadurch erhalten, daß man zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit zwei gleichen Seiten aneinanderlegt?

3. Durch Subtraktion (Abschneiden) einer gegebenen Figur von einer anderen gegebenen Figur kann man auf verschiedene Arten gleiche, jedoch im allgemeinen nicht kongruente Figuren erhalten. S. z. B. § 85.

Unter dem *Rechtecke zweier Strecken* versteht man jenes Rechteck, in welchem die beiden Strecken als Seiten vorkommen. Das über einer Strecke als Seite konstruierte Quadrat heißt *das Quadrat dieser Strecke.*

§ 85. Das Parallelogramm. Haben zwei Parallelogramme gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, so lassen sie sich derart aufeinander legen, daß die Grundlinien zusammenfallen und die gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden liegen (Fig. 99). Hier ist $\triangle AFD \cong BEC$ (warum?). Wenn man nun vom Trapeze $ABED$ das Dreieck AFD subtrahiert, so bleibt das Parallelogramm $ABEF$ übrig; subtrahiert man von demselben Trapeze das Dreieck BEC, d. i. also das Dreieck AFD in einer anderen Lage, so erhält man das Parallelogramm $ABCD$. Daher ist $ABCD = ABEF$. Modell!

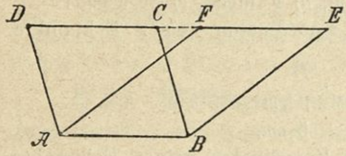

Fig. 99.

Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich. Daraus folgt:

Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke mit derselben Grundlinie und derselben Höhe gleich.

Übungsaufgaben. 1. Man wiederhole die vorausgehende Betrachtung unter der Annahme, daß die Punkte C und F zusammenfallen oder daß F zwischen C und D liegt!

Man begründe die Sätze:

2. Verschiebt man eine Seite eines Parallelogrammes in der durch sie gelegten Geraden, so bleibt der Flächeninhalt des Parallelogrammes ungeändert.

3. Von zwei Parallelogrammen mit gleichen Grundlinien und ungleichen Höhen ist dasjenige größer, welches die größere Höhe hat.

4. Von zwei Parallelogrammen mit gleichen Höhen und ungleichen Grundlinien ist dasjenige größer, welches die größere Grundlinie hat.

§ 86. Das Dreieck. Das Dreieck ABC (Fig. 100) ist die Hälfte des Parallelogrammes $ABDC$, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat.

Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes mit derselben Grundlinie und derselben Höhe. Daraus folgt:

Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich.

Übungsaufgaben. Man begründe die folgenden Sätze:

1. Verschiebt man die Spitze eines Dreieckes in einer zur Grundlinie parallelen Geraden, so ändert sich der Flächeninhalt des Dreieckes nicht (Fig. 101).

2. Von zwei Dreiecken mit gleichen Grundlinien (Höhen) und ungleichen Höhen (Grundlinien) ist dasjenige größer, welches die größere Höhe (Grundlinie) hat. (Fig. 102.)

3. Ein Parallelogramm wird durch die beiden Diagonalen in vier gleiche Dreiecke zerlegt.

4. Zieht man in einem Parallelogramme eine Diagonale und durch einen Punkt derselben Parallele zu den Seiten, so zerfällt das Parallelogramm in zwei Paare kongruenter Dreiecke und zwei gleiche Parallelogramme.

5. Von den vier Dreiecken, in welche ein Trapez durch die Diagonalen zerlegt wird, sind jene zwei gleich, welche an den Schenkeln liegen.

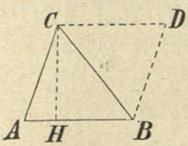

Fig. 100.

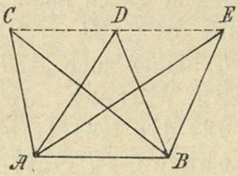

Fig. 101.

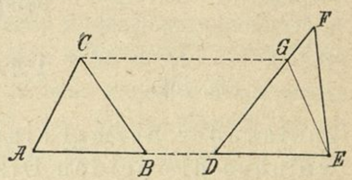

Fig. 102.

§ **87. Das Quadrat einer Streckensumme.** Sind a und b zwei gegebene Strecken und macht man $AB = a$, $BC = b$, so ist $AC = a + b$. Das Quadrat $ACDE$ über der Seite AC (Fig. 103) läßt sich durch die Geraden BH und FG in zwei Quadrate mit den Seiten a, bezw. b und zwei Rechtecke mit den Seiten a und b zerlegen. Daraus folgt:

Das Quadrat einer Streckensumme besteht aus dem Quadrate der ersten Strecke, aus zwei Rechtecken beider Strecken und dem Quadrate der zweiten Strecke.

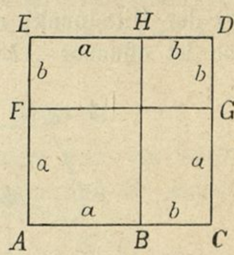

Fig. 103.

§ **88. Das Trapez.** Halbiert man die Seite BC des Trapezes $ABCD$ (Fig. 104) und legt durch den Halbierungspunkt E und den Punkt D eine Gerade, welche die verlängerte Seite AB in F trifft, so erhält man die kongruenten Dreiecke EBF und ECD. Dreht man nun das Dreieck ECD um den Punkt E in die Lage EBF, so verwandelt sich das Trapez $ABCD$ in das Dreieck AFD, dessen Höhe zugleich die Höhe des Trapezes ist und dessen Grundlinie gleich ist der Summe der Parallelseiten des Trapezes. $AF = AB + BF = AB + DC$. (Modell!)

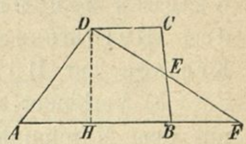

Fig. 104.

Das Trapez ist einem Dreiecke mit derselben Höhe gleich, welches die Summe der Parallelseiten zur Grundlinie hat.

Übungsaufgabe. Man zeige mit Hilfe der Fig. 89, daß das Trapez einem Rechtecke mit derselben Höhe gleich ist, welches die Mittellinie des Trapezes zur Grundlinie hat!

§ 89. Das Viereck, dessen Diagonalen zueinander normal sind. Ist $ABCD$ (Fig. 105) das gegebene Viereck und $AC \perp BD$, so ziehe man durch die Eckpunkte Parallele zu den Diagonalen. Dadurch wird dem Vierecke ein Rechteck $EFGH$ umgeschrieben, dessen Seiten den parallelen Diagonalen des Viereckes $ABCD$ entsprechend gleich sind.

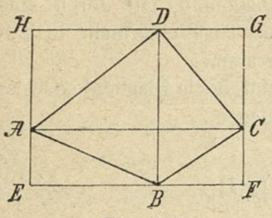

Fig. 105.

Nun ist $ACD = \frac{1}{2} ACGH$ und $ABC = \frac{1}{2} AEFC$, daher auch $ABCD = \frac{1}{2} EFGH$.

Ein Viereck, dessen Diagonalen zueinander normal sind, ist die Hälfte eines Rechteckes, welches die beiden Diagonalen zu Seiten hat.

Übungsaufgaben. 1. Für welche Arten von Vierecken gilt der voranstehende Satz?

2. Wie lautet dieser Satz speciell für das Quadrat?

3. Man beweise, daß ein jedes Viereck die Hälfte des umgeschriebenen Parallelogrammes ist, dessen Seiten zu den Diagonalen des Viereckes parallel sind.

§ 90. Das regelmäßige Vieleck und ein Sektor desselben. *a)* Ist O der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechseckes $ABCDEF$ (Fig. 106), so ist offenbar $ABCDEF = 6 . ABO$. Trägt man nun auf der Verlängerung von AB die übrigen Seiten des Vieleckes auf, so daß HL dem Umfange desselben gleich ist, so ist $HGO = GAO = ABO = \ldots$, also $HLO = 6 . ABO$. Daraus folgt $ABCDEF = HLO$.

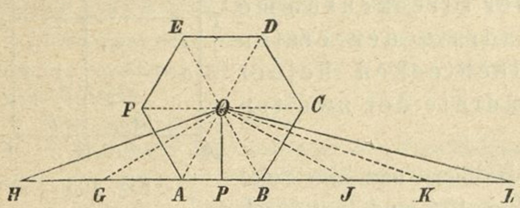

Fig. 106.

Das regelmäßige Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie und den Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises zur Höhe hat.

b) Verbindet man zwei Eckpunkte eines regelmäßigen Vieleckes mit dem Mittelpunkte, so erhält man zwei Ausschnitte oder Sektoren des regelmäßigen Vieleckes. Z. B. $ABCO$ und $CDEFAO$. ABC heißt die Grundlinie des ersten und $CDEFA$ die Grundlinie des zweiten Sektors.

Jeder Sektor eines regelmäßigen Vieleckes ist einem Dreiecke gleich, welches die Grundlinie des Sektors zur Grundlinie und den Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises zur Höhe hat.

Übungsaufgaben. 1. Jedes Dreieck ist einem zweiten Dreiecke gleich, welches den Umfang des ersten zur Grundlinie und den Halbmesser des dem ersten Dreiecke eingeschriebenen Kreises zur Höhe hat. (Warum?)

2. Wie lautet der entsprechende Satz für irgend ein einem Kreise umgeschriebenes Vieleck (Tangentenvieleck)?

§ 91. Der Kreis und der Kreissektor. Der Umfang und die Fläche eines regelmäßigen Vieleckes unterscheiden sich von dem Umfange, beziehungsweise der Fläche des eingeschriebenen Kreises umsoweniger, je größer die Seitenanzahl des Vieleckes ist. Man kann diese Zahl stets so groß wählen, daß jener Unterschied selbst in sehr genauen Zeichnungen oder Rechnungen nicht mehr bemerkt wird. Aus diesem Grunde lassen sich die beiden vorausgehenden Sätze, welche für ein beliebiges regelmäßiges Vieleck und einen Sektor desselben abgeleitet wurden, auf den Kreis und den Kreissektor übertragen:

a) Die Kreisfläche ist einem Dreiecke gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

b) Der Kreissektor ist einem Dreiecke gleich, welches den Bogen zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Flächensätze für das rechtwinklige Dreieck.

§ 92. Der Pythagoreische Lehrsatz. Konstruiert man ein rechtwinkliges Dreieck, in dem eine Kathete das Dreifache und die andere das Vierfache einer Strecke beträgt, so ist die Hypotenuse das Fünffache derselben Strecke. Nun errichte man über den Seiten dieses Dreieckes Quadrate und zerlege dieselben entsprechend der Fig. 107 in kleinere Quadrate. Von den letzteren, welche alle kongruent sind, entfallen 25 auf das Quadrat der Hypotenuse, 9 auf das Quadrat der einen und 16 auf das Quadrat der anderen Kathete. In diesem Falle besteht also der Satz:

Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

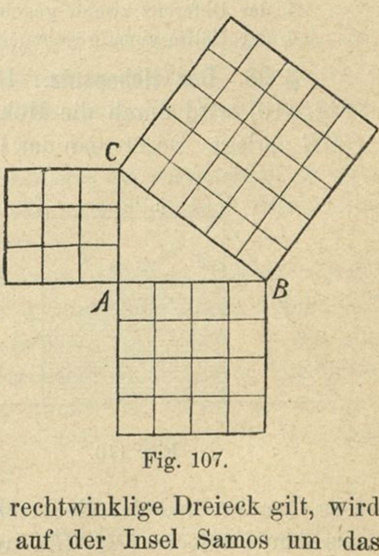

Fig. 107.

Dieser Lehrsatz, welcher für jedes rechtwinklige Dreieck gilt, wird dem Philosophen Pythagoras (geb. auf der Insel Samos um das Jahr 580 v. Chr.) zugeschrieben und nach ihm benannt. Für beliebige rechtwinklige Dreiecke ergibt sich die Richtigkeit des Pythagoreischen Lehrsatzes aus der folgenden Betrachtung:

Sind a und b die Katheten und c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, so errichte man zweimal das Quadrat über der Streckensumme $a + b$ und zerlege es einmal entsprechend der Fig. 108 und das anderemal entsprechend der Fig. 109. Nimmt man nun vom Quadrate der Streckensumme vier mit dem gegebenen kongruente Dreiecke weg, so bleiben im ersten Falle die Quadrate der Katheten und im zweiten das Quadrat der Hypotenuse übrig. (Modell!)

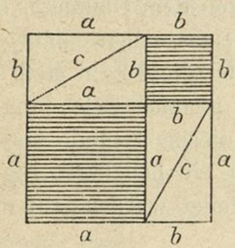

Fig. 108.

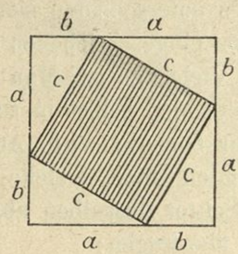

Fig. 109.

Aus dem Pythagoreischen Lehrsatze folgt:

Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Quadrate der Hypotenuse weniger dem Quadrate der anderen Kathete.

Übungsaufgaben. Konstruiere ein Quadrat, welches gleich ist:

1. der Summe zweier gegebener Quadrate,
2. der Summe dreier gegebener Quadrate,
3. dem 2-, 3-, 4-fachen eines gegebenen Quadrates,
4. der Differenz zweier gegebener Quadrate,
5. der Hälfte eines gegebenen Quadrates.

§ 93. Der Höhensatz. Das bei C rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 110) wird durch die Höhe CD in die Dreiecke ADC oder I und CDB zerlegt. Dreht man das Dreieck I um C, bis es in die Lage CEF gelangt, und verlängert EF bis G, so erhält man das Quadrat der Höhe, nämlich $CDGE$. Verschiebt man hierauf das Dreieck I längs der Kathete CB, bis es in die Lage HJB gelangt, und verlängert JH bis K, so erhält man das Rechteck der beiden Abschnitte der Hypotenuse, nämlich $DBJK$. (Es ist nämlich $AD = FE = BJ = DK$.)

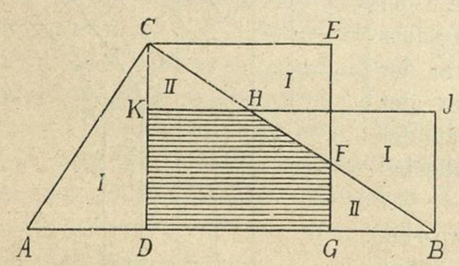

Fig. 110.

Das Quadrat und das Rechteck sind flächengleich, da jedes derselben aus dem Fünfecke $DGFHK$ und den Dreiecken I und II besteht. (Die mit II bezeichneten Dreiecke stimmen nämlich in den Winkeln und den

Hypotenusen überein, weil $HC = BC - AC$ und $BF = BC - AC$ ist.) Daraus folgt:

Das Quadrat der Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes ist dem Rechtecke gleich, welches die beiden Abschnitte der Hypotenuse zu Seiten hat.

Verwandlung und Teilung der Figuren.

§ 94. Verwandlung der Figuren. Eine gegebene Figur in eine andere verwandeln heißt eine neue Figur konstruieren, welche mit der gegebenen flächengleich ist.

1. Aufgabe. Ein schiefes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe von den Endpunkten einer Seite die Normalen zur gegenüberliegenden Seite! (§ 85.)

2. Aufgabe. Ein Dreieck in ein Parallelogramm *a)* mit derselben Grundlinie, *b)* mit derselben Höhe zu verwandeln.

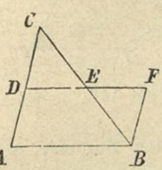

Fig. 111.

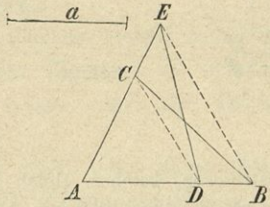

Fig. 112.

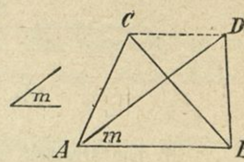

Fig. 113.

Auflösung. *a)* Man halbiere die Seite BC des gegebenen Dreieckes ABC (Fig. 111), ziehe durch den Halbierungspunkt E die Gerade $DF \parallel AB$, ferner $BF \parallel AD$! $ABFD$ ist das gesuchte Parallelogramm. *b)* Analog wie *a)*.

3. Aufgabe. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so dass der Winkel ungeändert bleibt und eine der einschließenden Seiten eine gegebene Länge erhält.

Auflösung. Es sei (Fig. 112) ABC das gegebene Dreieck, BAC der beizubehaltende Winkel und $AD = a$ jene Seite, durch welche AB ersetzt werden soll. Man ziehe CD, ferner vom Punkte B aus die Parallele zu CD und verbinde den Schnittpunkt E dieser Parallelen und der Verlängerung von AC mit dem Punkte D. ADE ist das gesuchte Dreieck. Es ist nämlich $CDB = CDE$, also $ACD + CDB = ACD + CDE$ oder $ABC = ADE$.

Übungsaufgaben. 1. *a)* Ein Parallelogramm, *b)* ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches dieselbe Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Grundlinie hat (Fig. 113).

2. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches dieselbe Grundlinie hat und *a)* gleichschenklig, *b)* an der Grundlinie rechtwinklig, *c)* an der Spitze rechtwinklig ist. Wann ist die letzte Aufgabe nur lösbar?

3. Ein Dreieck in ein Rechteck mit derselben Grundlinie zu verwandeln.

4. Ein Parallelogramm in ein Dreieck *a)* mit derselben Grundlinie, *b)* mit derselben Höhe zu verwandeln.

5. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel ungeändert bleibt und eine der einschließenden Seiten durch eine längere ersetzt wird. Ist in Fig. 112 ADE das gegebene Dreieck und AB die gegebene neue Grundlinie, so ziehe man $DC \parallel BE$ und verbinde B mit C. $ABC = ADE$.

6. Ein Parallelogramm zu konstruieren, welches gleich ist *a)* der Summe, *b)* der Differenz zweier gegebener Parallelogramme von gleicher Höhe. Sind (Fig. 114) $ABCD$ und $BEFG$ die gegebenen Parallelogramme von gleicher Höhe, so ist $AEHD$ die Summe und $AJKD$ die Differenz derselben. $BJ = BE$, $EH \parallel AD$, $JK \parallel AD$.

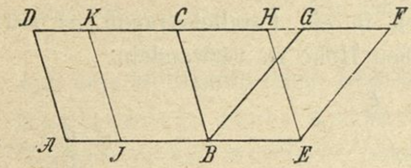

Fig. 114.

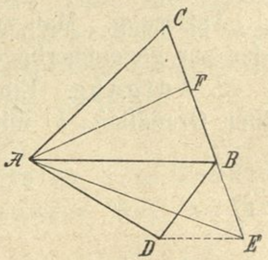

Fig. 115.

7. Ein Dreieck zu konstruieren, welches gleich ist *a)* der Summe, *b)* der Differenz zweier gegebener Dreiecke von gleicher Grundlinie. Sind (Fig. 115) ABC und ABD die gegebenen Dreiecke mit gleicher Grundlinie, so ist ACE die Summe und ACF die Differenz derselben. $DE \parallel AB$, $BF = BE$.

8. Man verwandle ein Trapez *a)* in ein Dreieck (Fig. 104), *b)* in ein Rechteck (Fig. 89), *c)* in ein schiefes Parallelogramm von gleicher Höhe!

9. Verwandle ein Deltoid *a)* in ein Rechteck, *b)* in einen Rhombus!

10. Verwandle *a)* ein Rechteck, *b)* einen Rhombus in ein Deltoid, dessen ungleiche Seiten rechte Winkel einschließen!

4. **Aufgabe.** Ein gegebenes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

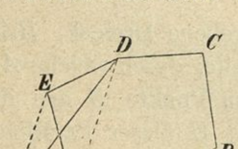

Fig. 116.

Auflösung. Ist $ABCDEF$ (Fig. 116) das gegebene Vieleck, so ziehe man die Diagonale DF, ferner $EG \parallel DF$ und verbinde D mit G. Dadurch erhält man das verlangte Vieleck $ABCDG$, welches eine Seite weniger hat und gleich $ABCDEF$ ist. Denn die Dreiecke DEF und DGF sind flächengleich und bilden daher, einzeln zum Vielecke $ABCDF$ addiert, zwei gleiche Figuren.

5. **Aufgabe.** Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere die Seite AB (Fig. 117) des gegebenen Rechteckes $ABCD$, mache $BE = BC$ und beschreibe über AE als Durchmesser einen Halbkreis! Ist F der Durchschnittspunkt des Halbkreises mit der Seite BC, so entspricht das Quadrat $BHGF$ der Strecke BF der gestellten Aufgabe. Denn es ist das Quadrat der Höhe in dem rechtwinkligen Dreiecke AEF, also gleich dem Rechtecke $ABCD$, welches die Abschnitte AB und BE der Hypotenuse zu Seiten hat.

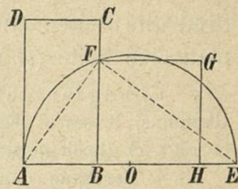

Fig. 117.

6. Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle das gegebene Vieleck in ein Dreieck, dieses in ein Rechteck und das Rechteck in ein Quadrat!

Übungsaufgaben. 11. Verwandle ein Viereck auf zwei verschiedene Arten in ein Dreieck!

12. Verwandle *a*) ein Fünfeck, *b*) ein Sechseck in ein Dreieck!

13. Verwandle *a*) ein gleichseitiges, *b*) ein ungleichseitiges Dreieck in ein Quadrat!

14. Verwandle ein beliebiges Viereck in ein Quadrat!

§ 95. Teilung der Figuren. 1. Aufgabe. Ein Dreieck in n gleiche Teile so zu teilen, daß die Teilungslinien von einer Ecke ausgehen.

Auflösung. Man teile eine Seite des Dreieckes in n gleiche Teile und verbinde die Teilungspunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte! Z. B. $n = 4$.

2. Aufgabe. Ein Parallelogramm in n gleiche Teile so zu teilen, daß die Teilungslinien zu einer Seite parallel sind.

Auflösung. Man teile eine Seite in n gleiche Teile und ziehe durch die Teilungspunkte Parallele zu den anstoßenden Seiten! Z. B. $n = 8$.

Übungsaufgaben. 1. Ein Dreieck (nach dem Augenmaße oder durch Versuche mit dem Zirkel) in *a*) drei, *b*) fünf gleiche Teile so zu teilen, daß die Teilungslinien von einer Ecke ausgehen.

2. Ein Parallelogramm in *a*) zwei, *b*) sechs gleiche Teile so zu zerlegen, daß die Teilungslinien zu einer Seite parallel sind.

3. Ein Parallelogramm in *a*) zwei, *b*) vier, *c*) sechs gleiche Teile so zu zerlegen, daß die Teilungslinien von einer Ecke ausgehen.

4. Ein Parallelogramm in drei gleiche Teile so zu zerlegen, daß die Teilungslinien von einer Ecke ausgehen. Man zerlege zunächst in sechs gleiche Teile.

5. Ein Trapez in vier gleiche Teile so zu zerlegen, daß die Teilungslinien durch die parallelen Seiten gehen.

6. Ein beliebiges Viereck in zwei gleiche Teile zu zerlegen. Man teile eine Diagonale in zwei gleiche Teile und verbinde den Teilungspunkt mit den der Diagonale gegenüberliegenden Eckpunkten.

Längenmessung.

§ 96. Der Umfang eines Vieleckes. Man berechnet den Umfang eines Vieleckes, indem man die (Maßzahlen aller) Seiten desselben addiert. Sind alle Seiten einander gleich, so findet man den Umfang (u), indem man eine Seite (s) mit der Anzahl (n) der Seiten multipliziert; $u = ns$.

Übungsaufgaben. Wie groß ist der Umfang 1. eines Quadrates, 2. eines Rhombus, 3. eines regelmäßigen Zehneckes, wenn eine Seite *a)* 2 *cm*, *b)* 3·15 *m* beträgt, *c)* gleich a ist?

4. Berechne den Umfang eines Rechteckes aus der Grundlinie g und der Höhe h *a)* allgemein, *b)* für $g = 2·5$ *m*, $h = 1·5$ *m*!

5. Berechne die Grundlinie eines Rechteckes aus dem Umfange u und der Höhe h *a)* allgemein, *b)* für $u = 18$ *cm*, $g = 6$ *cm*!

6. Berechne die Höhe eines Rechteckes aus dem Umfange u und der Grundlinie g *a)* allgemein, *b)* für $u = 236$ *m*, $g = 86$ *m*!

§ 97. Messung der Kreislinie. Da sich eine gerade Linie auf einer krummen nicht auftragen läßt, so kann man die Länge der Kreislinie nicht durch directe Messung, sondern nur auf Umwegen bestimmen.

Mechanisch wird die Messung der Kreislinie ausgeführt, indem man aus einem Faden eine Kreislinie bildet, hierauf den Faden in eine gerade Linie ausspannt und ihn mit dem Durchmesser oder mit einer anderen als Längeneinheit angenommenen Strecke mißt. Um genauer vorzugehen, legt man einen dünnen Faden in mehreren Windungen um einen Cylinder mit kreisförmigem Querschnitte, berechnet aus der gemessenen Länge des Fadens und der Anzahl der Windungen die Länge einer Windung. (Zur Übung führe man einen solchen Versuch aus.) Auch dieses Verfahren ist nur einer beschränkten Genauigkeit fähig und hat für die Geometrie keine Bedeutung.

Die geometrische Messung der Kreislinie wird dadurch ausgeführt, daß man die Kreislinie mit den Umfängen der ein- und der umgeschriebenen Vielecke vergleicht.

Wird einem Kreise ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben, so ist jede Seite desselben kleiner als der zugehörige Bogen, sein ganzer Umfang also kleiner als jener des Kreises. Die Peripherie ist also größer als das Dreifache des Durchmessers; $p > 3d$.

Wird hingegen einem Kreise ein Quadrat umgeschrieben, so ist die Summe der aneinander stoßenden Teile der Quadratseiten, welche von zwei aufeinander folgenden Berührungspunkten begrenzt werden, größer als der von ihnen eingeschlossene Bogen. Daher ist auch der Umfang des Quadrates größer als jener des Kreises. Die Peripherie ist also kleiner als das Vierfache des Durchmessers; $p < 4d$.

Je mehr Seiten nun das ein- und das umgeschriebene regelmäßige Vieleck haben, umsoweniger unterscheiden sich ihre Umfänge voneinander; desto näher liegen also die Werte, zwischen welchen die Peripherie enthalten ist. Beträgt z. B. die Anzahl der Seiten 3072, so findet man durch Rechnungen, welche erst später begründet werden, $p > 3 \cdot 141591\, d$ und $p < 3 \cdot 141593\, d$. Der erste Koeffizient von d ist also kleiner und der zweite ist größer als jene Zahl, mit welcher d multipliziert genau gleich p wird. Daher ist diese Zahl gleich $3 \cdot 14159..$, wenn nur fünf Dezimalstellen beibehalten werden, und $p = 3 \cdot 14159.. \times d$.

Die Zahl 3·14159.., welche das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser angibt, heißt die Ludolphische Zahl (nach Ludolph van Ceulen, welcher sie um das Jahr 1600 auf 35 Stellen berechnet hat) und wird zur Abkürzung allgemein mit π bezeichnet. In manchen Fällen genügt es für π den Näherungswert $3\frac{1}{7}$ (das Archimedische Verhältnis) zu setzen, während man in genauen Rechnungen die erforderliche Anzahl von Dezimalen aus der Gleichung $\pi = 3 \cdot 1415926536..$ zu nehmen hat. Die Ludolphische Zahl läßt sich ebensowenig wie z. B. $\sqrt{2}$ durch einen gemeinen Bruch oder einen endlichen Dezimalbruch vollkommen genau ausdrücken.

Hieraus folgt:

a) Die Peripherie ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser (dem doppelten Halbmesser) und der Ludolphischen Zahl. $p = d\pi$, $p = 2r\pi$.

b) Der Durchmesser ist gleich der Peripherie geteilt durch die Ludolphische Zahl. $d = p : \pi$, $r = p : 2\pi$.

c) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie die Durchmesser oder wie die Halbmesser. $p : p_1 = d : d_1 = r : r_1$.

Anmerkungen. 1. In den vorausgehenden Lehrsätzen können unter „Peripherie, Durchmesser und Halbmesser" entweder die genannten Linien oder auch deren Maßzahlen verstanden werden.

2. Bei numerischen Berechnungen der Peripherie aus dem Durchmesser, des Halbmessers aus der Peripherie u. s. f. sollen die Multiplikationen und Divisionen mit der Ludolphischen Zahl in der Regel auf abgekürztem Wege ausgeführt werden. Die erforderliche Anzahl von Dezimalstellen ergibt sich aus der Natur der Aufgabe oder auch aus der Überlegung, daß alle Ziffern des Resultates, abgesehen höchstens von der letzten, verläßlich sein sollen. Findet man z. B. den Durchmesser eines Kreises gleich 42 *mm* und sind bei der Messung Bruchteile von *mm* nicht mehr berücksichtigt worden, so kann auch die Länge der Peripherie durch Bruchtheile von *mm* nicht ausgedrückt werden. Denn hat man den Durchmesser etwa um $\frac{1}{3}$ *mm* zu klein erhalten, so findet man die Peripherie um mehr als 1 *mm* zu klein. In solchen Fällen ist das Resultat mit erreichbarer Genauigkeit zu ermitteln.

Übungsaufgaben. 1. Aus einer der drei Größen r, d, p (Radius, Durchmesser und Peripherie eines Kreises) die anderen zu berechnen.

a) $r = 1{\cdot}344\ m$; *b)* $d = 122\ m$; *c)* $p = 42{\cdot}33\ m$; *d)* $p = 478{\cdot}192\ km$.

2. Wieviel *km* mißt der Durchmesser eines Erdmeridians, wenn dieser als ein Kreis von 40.000 *km* Länge angenommen wird?

3. Berechne den Durchmesser eines Baumstammes mit kreisförmigem Querschnitte aus dem Umfang! Z. B. $p = 4{\cdot}32\ m$.

4. Wie groß muß der Durchmesser eines Kreises genommen werden, dessen Peripherie viermal so groß sein soll als jene, welche einem Durchmesser von 12 *cm* entspricht?

5. Wie viele Umdrehungen macht ein Wagenrad von 64 *cm* Durchmesser auf einer 1 *km* langen Strecke?

6. Welchen Weg legt die Spitze eines 20 *mm* langen Minutenzeigers einer Uhr in einem Jahre zurück?

7. Konstruiere einen Kreis, dessen Umfang gleich ist *a)* der Summe, *b)* der Differenz aus den Umfängen zweier gegebener Kreise!

§ 98. Bogenmessung. *a)* Aufgabe. Die Länge eines Bogengrades, einer Bogenminute und einer Bogensekunde zu berechnen.

Ein Bogengrad ist der 360. Teil der Peripherie. Daraus folgt:

$$1 \text{ Bogengrad} = \frac{p}{360} = \frac{d\pi}{360} = \frac{r\pi}{180};$$

$$1 \text{ Bogenminute} = \frac{p}{21600} = \frac{d\pi}{21600} = \frac{r\pi}{10800};$$

$$1 \text{ Bogensekunde} = \frac{p}{1296000} = \frac{d\pi}{1296000} = \frac{r\pi}{648000}.$$

b) Zu gleichen Zentriwinkeln gehören in demselben Kreise oder n gleichen Kreisen gleiche Bogen. Daher entspricht auch dem 2, 3, ... $n$fachen Zentriwinkel der 2, 3, ... $n$fache Bogen. Daraus folgt:

Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich wie die zugehörigen Zentriwinkel.

$$b : b_1 = \alpha : \alpha_1.$$

c) Aufgabe. Aus dem Halbmesser r und dem Zentriwinkel α (Gradmaß des Bogens) die Bogenlänge b zu berechnen.

Vergleicht man den Bogen mit der halben Peripherie, so findet man nach dem vorausgehenden Lehrsatze

$$b : r\pi = \alpha : 180 \text{ und daraus } b = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$

Der Winkel α muß in dieser Formel in Graden (eventuell in Bruchteilen eines Grades) ausgedrückt werden.

d) Aufgabe. Aus dem Halbmesser r und der Bogenlänge b den Zentriwinkel α zu berechnen.

Aus der letzten Proportion findet man $\alpha = \dfrac{180b}{r\pi}$.

e) Aufgabe. Aus der Bogenlänge b und dem Zentriwinkel α den Halbmesser r zu berechnen.

Es ist $r\pi = \frac{180b}{\alpha}$ und $r = \frac{180b}{\alpha\pi}$.

Wie man sieht, kann man mit Hilfe der Proportion $b : r\pi = \alpha : 180$ aus zweien der drei Größen b, α, r die dritte berechnen.

Übungsaufgaben. 1. Ein Grad des Äquators beträgt 15 geographische Meilen. Wie groß ist der Durchmesser des Äquators?

2. Man berechne die Länge *a)* eines Bogengrades, *b)* einer Bogenminute, *c)* einer Bogensekunde für einen Kreis, dessen Halbmesser = 1 *m* ist! (7 Dezimalen.)

3. Nimmt man die Erdbahn als einen Kreis mit dem Radius von 148·6 Millionen *km* und die Umlaufszeit der Erde um die Sonne = 365·25 Tagen an, so ist der Weg zu berechnen, welchen die Erde bei gleichförmiger Bewegung *a)* in einem Tage, *b)* in einer Minute, *c)* in einer Sekunde beschreibt. Man benütze die oben gewählte Längeneinheit und führe alle Operationen mit erreichbarer Genauigkeit aus! Die Resultate sind nicht vollständig richtig, da die gemachten Annahmen nur annähernd gelten.

4. Wenn der Umfang eines Kreises 32 *m* beträgt, so ist die Länge eines Bogens zu berechnen, welcher nach dem Gradmaße *a)* 45^0, *b)* $122^0\ 12'$, *c)* $42^0\ 13'\ 24'$, beträgt.

5. Wie groß ist der Radius jenes Kreises, in welchem der zum Zentriwinkel $\alpha = 36^0\ 42'$ gehörige Bogen 1·421 *m* mißt?

6. Man berechne den zum Bogen $b = 44$ *cm* gehörigen Zentriwinkel, wenn der Halbmesser des Kreises 12 *cm* beträgt!

7. Man berechne das Gradmaß des Bogens, welcher mit dem Halbmesser gleiche Länge hat!

Flächenmessung.

§ 99. Erklärungen. Als Flächeneinheit wird ein Quadrat angenommen, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Je nachdem 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, .. als Längeneinheit gewählt wird, heißt die Fläche des entsprechenden Quadrates ein Quadratmeter, ein Quadratdezimeter, ein Quadratzentimeter, . . .

Eine gegebene Fläche messen heißt untersuchen, wie oft die Flächeneinheit in ihr enthalten ist. Die Zahl, welche dies anzeigt, heißt die Maßzahl der gegebenen Fläche. Muß man z. B. 3 Quadratmeter und $\frac{1}{4}$ eines Quadratmeters summieren, um eine einem gewissen Dreiecke flächengleiche Figur zu erhalten, so ist 3·25 die Maßzahl des Dreieckes in Bezug auf das Quadratmeter, oder einfacher ausgedrückt: der Flächeninhalt des Dreieckes beträgt 3·25 Quadratmeter.

Mechanisch kann man den Flächeninhalt einer gegebenen Figur messen, indem man diese und die Flächeneinheit aus (überall gleich starkem) Blech oder Carton ausschneidet und durch Abwägen bestimmt, wie oft das Gewicht der Flächeneinheit in jenem der gegebenen Figur enthalten ist.

In der Geometrie wird der Inhalt einer Fläche aus den Maßzahlen solcher Strecken, Winkel u. s. w. berechnet, von denen er abhängt. Das unmittelbare Auftragen der Flächeneinheit auf die gegebene Fläche, so daß dieselbe gerade erschöpft wird, ist in der Regel nicht ausführbar.

§ 100. Das Quadrat. Teilt man jede Seite des Quadrates $ABCD$ (Fig. 118) in drei gleiche Teile und verbindet die gegenüberliegenden Teilungspunkte durch Strecken, so zerfällt das Quadrat in $3 \times 3 = 9$ kongruente Quadrate. Wird überhaupt eine Seite des Quadrates in a gleiche Teile geteilt, so kann dasselbe in $a \, . \, a = a^2$ kongruente Quadrate zerlegt werden.

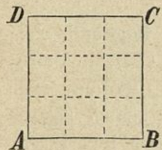

Fig. 118.

Läßt sich nun die Längeneinheit a mal auf einer Seite des Quadrates auftragen, ist also a die Maßzahl einer Quadratseite, so besteht das gegebene Quadrat aus $a \, . \, a = a^2$ Quadraten, von denen jedes der Flächeneinheit gleich ist. Also ist a^2 die Maßzahl für den Inhalt des Quadrates. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert; oder kürzer ausgedrückt: Der Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, indem man eine Seite zur zweiten Potenz erhebt.

$$f = a^2; \; a = \sqrt{f}.$$

Anmerkungen. 1. Der Ausdruck der Arithmetik „eine Zahl zum Quadrat erheben“ rührt davon her, daß durch das Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst der Flächeninhalt eines Quadrates berechnet wird, dessen Seite jene Zahl als Maßzahl hat.

2. Aus der Formel $f = a^2$ lassen sich die Bezeichnungen: 1 Quadratmeter = 1 m^2, 1 Quadratdezimeter = 1 dm^2, 1 Quadratzentimeter = 1 cm^2 u. s. f. erklären.

3. Es ist 1 cm^2 = 100 mm^2; 1 dm^2 = 100 cm^2 = 10.000 mm^2; 1 m^2 = 100 dm^2 = 10.000 cm^2 = 1,000.000 mm^2, u. s. f. (Warum?) Beim Messen von größeren Flächen, z. B. von Grundstücken, werden 100 m^2 ein Ar und 100 Ar ein Hektar genannt und man schreibt: 1 a = 100 m^2, 1 ha = 100 a.

4. Ist die Seite eines Quadrates = 4·23 m = 423 cm, so ist der Flächeninhalt f = (423 $\times$ 423) cm^2 = 178929 cm^2 = 17·8929 m^2. Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Rechnung: f = (4·23 $\times$ 4·23) m^2 = 17·8929 m^2. Man erhält also den Flächeninhalt eines Quadrates durch direkte Benützung der Formel $f = a^2$, auch wenn a keine ganze Zahl ist.

Übungsaufgaben. 1. Man berechne den Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite *a)* 16 cm, *b)* 3·6 m, *c)* 10·24 m beträgt! Ist z. B. 10·24 als unvollständige Dezimalzahl anzusehen, so führe man die Multiplikation 10·24 $\times$ 10·24 abgekürzt mit erreichbarer Genauigkeit aus!

2. Der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt *a)* 3·61 m^2, *b)* 18·49 ha *c)* 16·6284 m^2; wie groß ist eine Seite?

3. Aus dem Umfange u eines Quadrates ist der Flächeninhalt f zu berechnen. $a)\ u = 32\ cm$; $b)\ u = 2{\cdot}78\ m$.

4. Aus dem Flächeninhalte f eines Quadrates ist der Umfang u zu berechnen. $a)\ f = 169\ a$, $b)\ f = 2{\cdot}89\ m^2$.

5. Der Rahmen eines Bildes, welches die Form eines Quadrates mit der Seite $a = 62\ cm$ hat, ist 12 cm breit. Man berechne den Flächeninhalt und den äußeren Umfang des Rahmens!

§ 101. Das Rechteck. Beträgt die Grundlinie des Rechteckes $ABCD$ (Fig. 119) 6 cm und die Höhe 4 cm, so läßt sich dasselbe in vier Streifen von je sechs Quadraten zerlegen, von denen jedes 1 cm^2 ist. Der Flächeninhalt des Rechteckes beträgt also $(6 \times 4)\ cm^2 = 24\ cm^2$. Läßt sich überhaupt eine gewisse Längeneinheit auf der Grundlinie g mal und auf der Höhe h mal auftragen, d. h. sind g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe, so zerfällt das Rechteck in h Streifen von je g Quadraten, also im ganzen in gh Quadrate, von denen jedes gleich der Flächeneinheit ist. Daraus folgt:

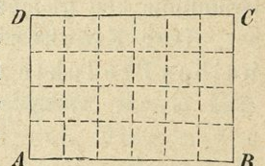

Fig. 119.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe; $f = gh$.

Man überzeuge sich, daß diese Formel auch dann noch Geltung hat, wenn g und h keine ganzen Zahlen sind.

Übungsaufgaben. 1. Man bestimme den Flächeninhalt einer Schultafel, einer Glasscheibe, eines Papierbogens u. s. f. durch Abmessen der Seiten!

2. Wie viele quadratische Steinplatten von je 22 cm Seitenlänge braucht man, um einen 25·3 m langen und 9·9 m breiten rechteckigen Platz zu belegen?

3. Ein 52·2 m langer und 36·4 m breiter rechteckiger Bauplatz kostet 14250·6 K. Wieviel kostet 1 m^2?

4. In einem rechteckigen Garten von 70 m Länge und 45·5 m Breite ist längs des Umfanges ein Weg von 1 m Breite angelegt. Außerdem sind die Mitten der längeren Seiten durch einen 0·6 m breiten Weg verbunden. Wie viele Ar mißt der bebaute Teil des Gartens?

5. Aus einem Quadrate mit der Seite $a = 15\ cm$ bilde man mehrere Rechtecke von gleichem Umfange, indem man wiederholt die Grundlinie um 1 cm vergrößert und zugleich die Höhe um 1 cm verkleinert. Man vergleiche die Flächen der erhaltenen Figuren in Bezug auf ihren Inhalt!

6. Wie berechnet man aus dem Flächeninhalte f und der Grundlinie g eines Rechteckes die Höhe h? $f = 12\ a$, $g = 1\ km$.

7. Man berechne aus dem Flächeninhalte f und der Höhe h eines Rechteckes die Grundlinie g! $f = 33\ dm^2$, $h = 2\ m$.

8. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$, wenn a, b, c gegebene Strecken bedeuten?

9. Ebenso die Gleichung $(a - b)\,c = a\,c - b\,c$?

10. Ebenso die Gleichung $(a + b)\,(c + d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$?

§ 102. Das schiefwinklige Parallelogramm und das Dreieck. *a)* Jedes schiefwinklige Parallelogramm läßt sich in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe verwandeln (§ 85). Sind also g und h die Maßzahlen der Grundlinien und der Höhen im Parallelogramme und im flächengleichen Rechtecke, so ist in beiden Fällen die Maßzahl des Flächeninhaltes $f = gh$.

Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

b) Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe (§ 86). Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

$$f = \frac{gh}{2},\ f = \frac{g}{2} . h,\ f = g . \frac{h}{2}.$$

Man drücke auch die letzten zwei Formeln in Worten aus!

Übungsaufgaben. 1. Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogrammes aus der Grundlinie g und der Höhe h!

$a)$ $g = 4\ m$, $h = 0{\cdot}5\ m$, $b)$ $g = 524\ cm$, $h = 16\ dm$.

2. Berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes aus der Grundlinie g und der Höhe h!

$a)$ $g = 235\ mm$, $h = 172\ mm$, $b)$ $g = 5\frac{1}{3}\ m$, $h = 4\frac{1}{2}\ m$.

3. Berechne die Grundlinie g eines Dreieckes aus dem Flächeninhalte f und der Höhe h!

$a)$ $f = 9424\ cm^2$, $h = 1{\cdot}52\ m$, $b)$ $f = 4{\cdot}3\ m^2$, $h = 1{\cdot}72\ m$.

4. Wie groß ist die Höhe eines Dreieckes mit dem Inhalte f und der Grundlinie g?

$a)$ $f = 0{\cdot}7\ a$, $g = 14\ m$, $b)$ $f = 4{\cdot}08\ dm^2$, $g = 34\ cm$.

5. Aus den Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreieckes den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

$a)$ $a = 12\ cm$, $b = 1\ dm$, $b)$ $a = 2{\cdot}04\ m$, $b = 1{\cdot}73\ m$.

§ 103. Das Trapez. *a)* Aus § 88 folgt:

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe der Parallelseiten und der Höhe.

Bezeichnet man also mit a und b die Parallelseiten und mit h die Höhe, so ist

$$f = \frac{(a+b)\,h}{2},\ f = \frac{a+b}{2} . h,\ f = (a+b) . \frac{h}{2}.$$

b) Da die halbe Summe der Parallelseiten gleich ist der Mittellinie m des Trapezes (§ 75), so kann man auch sagen:

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der Mittellinie und der Höhe. (§ 88, Übungsaufgabe.)

$$f = mh.$$

Übungsaufgaben. 1. Aus den Parallelseiten a, b und der Höhe h eines Trapezes den Flächeninhalt f zu berechnen.

$a)$ $a = 3\ m$, $b = 2\ m$, $h = 2\ m$, $b)$ $a = 6{\cdot}2\ m$, $b = 4{\cdot}5\ m$, $h = 2{\cdot}2\ m$.

2. Aus den Parallelseiten a, b und dem Flächeninhalte f eines Trapezes die Höhe h zu berechnen. $a = 6{\cdot}247\ m$, $b = 3{\cdot}948\ m$, $f = 275265\ cm^2$.

3. Aus der Höhe h und dem Flächeninhalte f eines Trapezes die Mittellinie m zu berechnen. $h = 8\ cm$, $f = 0{\cdot}76\ dm^2$.

4. Aus der Höhe h, einer Parallelseite a und dem Flächeninhalte f eines Trapezes die zweite Parallelseite b zu berechnen. $h = 4\ dm$, $a = 3{\cdot}5\ m$, $f = 1\ m^2$.

5. Man kennt die Parallelseiten eines gleichschenkligen Trapezes ($a = 8\ cm$, $b = 6\ cm$) und einen Winkel ($\alpha = 45^0$). Der Flächeninhalt des Trapezes ist zu berechnen.

6. Bestimme mit Hilfe eines Maßstabes den Flächeninhalt der Trapeze in den Fig. 89 und 91!

§ 104. Das Viereck, dessen Diagonalen zueinander normal sind.

Der Flächeninhalt eines Viereckes, dessen Diagonalen zueinander normal sind, ist gleich dem halben Produkte der beiden Diagonalen (§ 89).

$$f = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Übungsaufgaben. 1. Aus der Diagonale d eines Quadrates den Flächeninhalt f zu berechnen. $a)$ $d = 5\ cm$, $b)$ $d = 0{\cdot}24\ m$.

2. Aus dem Flächeninhalte f eines Quadrates die Diagonale d zu berechnen.

$a)$ $f = 1\ m^2$, $b)$ $f = 2{\cdot}89\ m^2$.

3. Aus den beiden Diagonalen d_1 und d_2 eines Rhombus den Inhalt desselben zu berechnen. Z. B. $d_1 = 16\ cm$, $d_2 = 24\ cm$.

4. Wenn der Flächeninhalt eines Deltoides $42\ cm^2$ und eine Diagonale $7\ cm$ beträgt, wie lang ist die zweite Diagonale?

§ 105. Das regelmäßige Vieleck und ein Sektor desselben.

$a)$ Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange desselben und dem Radius des eingeschriebenen Kreises (§ 90, a).

$$f = \frac{ur}{2}.$$

$b)$ Der Flächeninhalt eines Sektors eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie des Sektors und dem Radius des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises (§ 90, b).

$$f = \frac{gr}{2}.$$

Übungsaufgaben. Wird einem Kreise mit dem Radius r ein regelmäßiges Zehneck umgeschrieben, so beträgt eine Seite desselben $0{\cdot}64984\ r$. Wie groß ist $a)$ die Fläche des Zehneckes, $b)$ die Fläche eines Sektors, dessen Grundlinie aus drei Seiten des Zehneckes besteht?

§ 106. Das unregelmäßige Vieleck. *a)* Um den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes zu berechnen, zerlegt man dasselbe in Dreiecke und bestimmt den Flächeninhalt derselben. Die Summe der erhaltenen Maßzahlen gibt den Flächeninhalt des Vieleckes an.

Es sei z. B. der Flächeninhalt des Viereckes $ABCD$ in Fig. 120 zu berechnen, wenn $AC = 4$, $BE = 3$ und $DF = 1$ ist.

Man findet: $ABC = \frac{4 \times 3}{2} = 6$, $ACD = \frac{4 \times 1}{2} = 2$, somit $ABCD = 8$, und zwar $8\ cm^2$, wenn $DF = 1\ cm$ ist.

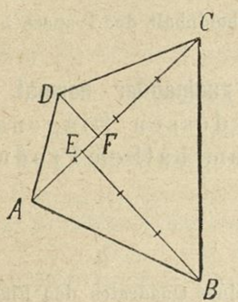

Fig. 120.

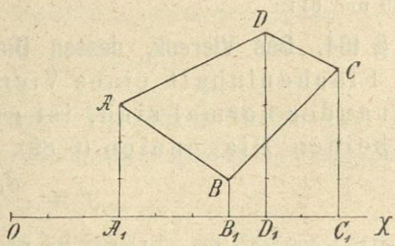

Fig. 121.

b) Sind die Koordinaten der Eckpunkte des Vieleckes gegeben, so verfährt man wie im folgenden Falle.

Es seien $OA_1 = 3$, $OB_1 = 6$, $OC_1 = 9$, $OD_1 = 7$ die Abszissen und $A_1A = 3$, $B_1B = 1$, $C_1C = 4$, $D_1D = 5$ die Ordinaten der Eckpunkte des Viereckes $ABCD$ (Fig. 121) in Bezug auf die Achse OX.

Aus der Betrachtung der Figur folgt

$$ABCD = AA_1D_1D + DD_1C_1C - AA_1B_1B - BB_1C_1C$$

$$= \frac{(3+5) \cdot 4}{2} + \frac{(5+4) \cdot 2}{2} - \frac{(3+1) \cdot 3}{2} - \frac{(1+4) \cdot 3}{2} = 11 \cdot 5.$$

Der Flächeninhalt des Viereckes $ABCD$ beträgt also $11 \cdot 5$ Flächeneinheiten, z. B. $11 \cdot 5\ cm^2$, wenn $B_1B = 1\ cm$ ist.

Übungsaufgaben. 1. Man berechne den Flächeninhalt eines Fünfeckes $ABCDE$, indem man die Länge der Seiten BC, CD, DE und deren Entfernungen vom Punkte A durch Abmessen bestimmt!

2. Der Flächeninhalt eines Dreieckes soll *a)* durch Abmessung der Grundlinie und der Höhe, *b)* durch Abmessung der Koordinaten der Eckpunkte in Bezug auf eine außerhalb des Dreieckes liegende Achse bestimmt werden.

3. Wähle vier wichtige Punkte einer Wandkarte als Eckpunkte eines Viereckes und bestimme dessen Flächeninhalt nach der zweiten Methode!

§ 107. Der Kreis. *a)* Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie und dem Halbmesser. (§ 91, *a.*)

$$f = \frac{pr}{2}.$$

b) Da $p = 2r\pi$ ist, so folgt daraus $f = \frac{2r\pi \, . \, r}{2} = r^2\pi$.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers multipliziert mit der Ludolphischen Zahl.

c) Bedeutet d den Durchmesser des Kreises, so ist

$$r = \frac{d}{2},\ r^2 = \frac{d^2}{4} \text{ und } f = \frac{d^2\pi}{4}. \text{ (In Worten?)}$$

d) Für einen zweiten Kreis bestehen die Formeln

$$f_1 = r_1{}^2\pi = \frac{d_1{}^2\pi}{4}. \text{ Daraus folgt}$$

$$f : f_1 = r^2\pi : r_1{}^2\pi = r^2 : r_1{}^2,$$

$$f : f_1 = \frac{d^2\pi}{4} : \frac{d_1{}^2\pi}{4} = d^2 : d_1{}^2.$$

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder wie die Quadrate der Durchmesser.

e) Aus $r^2\pi = f$ folgt $r^2 = \frac{f}{\pi}$ und $r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$. (In Worten?)

Übungsaufgaben. 1. Wie groß ist die Fläche eines Kreises, dessen Radius *a)* 12 m, *b)* 1·3 cm, *c)* 0·236 m beträgt? Die Multiplikation mit π ist abgekürzt auf zwei Dezimalen auszuführen!

2. Durch Abmessen findet man die Länge eines Kreishalbmessers gleich 5·623 m und soll den Flächeninhalt des Kreises berechnen. Da 5·623 als eine unvollständige Dezimalzahl anzusehen ist, so sollen die Multiplikationen $5{\cdot}623 \times 5{\cdot}623 \times \pi$ abgekürzt mit erreichbarer Genauigkeit durchgeführt werden.

3. Aus der Peripherie eines Kreises ist der Flächeninhalt desselben zu berechnen. *a)* $p = 1$ m, *b)* $p = 17$ cm, *c)* $p = 60{\cdot}378$ m.

4. Wie groß ist die Peripherie eines Kreises, dessen Flächeninhalt *a)* $= 1$ m^2, *b)* $= 3{\cdot}26$ m^2, *c)* $= f$ ist?

5. Man suche den Radius jenes Kreises, dessen Inhalt gleich ist der Summe der Inhalte dreier Kreise mit den Radien $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 7$ cm, $r_3 = 8$ cm! Die Operationen mit π können hier vermieden werden.

6. Aus dem Radius eines Kreises ($r = 1$ m) berechne man die Seite des flächengleichen Quadrates!

Konstruiere einen Kreis, welcher gleich ist:

7. der Summe zweier gegebener Kreise,

8. der Summe dreier gegebener Kreise,

9. dem 2-, 3-, 4-fachen eines gegebenen Kreises,
10. der Differenz zweier gegebener Kreise,
11. der Hälfte eines gegebenen Kreises.

§ 108. Der Kreisring. Man findet

$$f = r^2\pi - r_1{}^2\pi = (r^2 - r_1{}^2)\pi,$$

oder auch $f = (r + r_1)(r - r_1)\pi$. (In Worten?)

Übungsaufgaben. 1. Wie groß ist die Fläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien $r = 57{\cdot}236$ *m* und $r_1 = 32{\cdot}147$ *m*?

2. Aus dem Flächeninhalte des inneren Kreises ($f_1 = 42{\cdot}18\ cm^2$) und der Breite des Kreisringes ($b = 4$ *cm*) den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

3. Aus der Peripherie des äußeren Kreises ($p = 162{\cdot}7834$ *m*) und der Breite des Kreisringes ($b = 2{\cdot}56$ *m*) den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

4. Aus dem Radius des inneren Kreises ($r_1 = 3$ *cm*) und dem Flächeninhalte des Kreisringes ($f = 10\ cm^2$) den Radius des äußeren Kreises zu berechnen.

5. Ein Kreisring ($r = 1$ *dm*, $r_1 = 6$ *cm*) ist flächengleich mit einem Kreise Wie groß ist der Halbmesser des letzteren?

6. Verwandle einen gegebenen Kreisring in einen Kreis!

§ 109. Der Kreissektor. *a)* Der Flächeninhalt des Kreissektors ist gleich dem halben Produkte aus der Bogenlänge (*b*) und dem Radius (*r*). (§ 91, *b*.)

$$f = \frac{br}{2}.$$

b) Zu gleichen Bogen gehören in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gleiche Sektoren. Daher entspricht auch dem 2, 3, . . . *n*fachen Bogen der 2, 3, . . . *n*fache Sektor. Daraus folgt:

Sektoren desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich wie die zugehörigen Bogen.

$$f : f_1 = b : b_1.$$

c) Zu gleichen Zentriwinkeln gehören in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen auch gleiche Sektoren. Daher entspricht dem 2, 3, . . . *n*fachen Zentriwinkel der 2, 3, . . . *n*fache Sektor. Daraus folgt:

Sektoren desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich wie die zugehörigen Zentriwinkel.

$$f : f_1 = a : a_1.$$

d) Da man die Kreisfläche als den zum Zentriwinkel von 360° gehörigen Sektor betrachten kann, so folgt aus dem letzten Lehrsatze:

$$f : r^2\pi = a : 360.$$

Wie man sieht, kann man aus zwei der vier Größen: Kreissektor, Halbmesser, Länge und Gradmaß des Bogens (f, r, b, a) die beiden anderen berechnen.

Übungsaufgaben. 1. Aus dem Halbmesser $r = 2{\cdot}71$ *m* und dem Zentriwinkel $a = 63^0$ den zugehörigen Bogen und den zugehörigen Sektor zu berechnen.

2. Aus dem Halbmesser $r = 0{\cdot}944\ m$ und dem Bogen $b = 1{\cdot}237\ m$ den zugehörigen Zentriwinkel und den zugehörigen Sektor zu berechnen.

3. Aus dem Zentriwinkel $\alpha = 45^0\ 25'$ und dem Bogen $b = 1\ dm$ den Halbmesser und den Sektor zu berechnen.

4. Aus dem Zentriwinkel $\alpha = 40^0$ und dem Sektor $f = 25\ dm^2$ den Halbmesser und den Bogen zu berechnen.

Anmerkung. Man benütze in den letzten vier Aufgaben von den Formeln $f = \frac{br}{2}$, $f : r^2\pi = \alpha : 360$, $b : r\pi = \alpha : 180$ zunächst jene, welche von den Größen r, α, b, f die zwei gegebenen enthält, und hierauf eine der beiden anderen Formeln!

5. Welchen Radius muß ein Kreis haben, wenn er einem Sektor gleich sein soll, welcher dem Radius $r = 5\ dm$ und dem Zentriwinkel $\alpha = 42^0$ entspricht? Man vermeide die Ausführung der Operationen mit π.

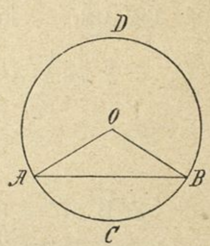

Fig. 122.

§ 110. Das Kreissegment. Das Kreissegment ist gleich der Summe oder der Differenz des zugehörigen Sektors und eines gewissen Dreieckes, je nachdem es größer oder kleiner ist als der Halbkreis.

Aus der Figur 122 erhält man:

Segment ACB = Sektor $AOBC$ — Dreieck AOB,
Segment ADB = Sektor $AOBD$ + Dreieck AOB.

Übungsaufgabe. Wie groß ist eines der Segmente, welche von der Peripherie eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 5\ cm$ und von den Seiten des eingeschriebenen Quadrates begrenzt werden (§ 104, Übungsaufgabe 1)?

§ 111. Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes. 1. Eine Seite eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen, wenn die beiden anderen gegeben sind.

Bezeichnet man mit a, b, c die Maßzahlen der beiden Katheten und der Hypotenuse, so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ und daraus}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c + b)(c - b)}.$$

Die Hypotenuse ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate beider Katheten.

Eine Kathete ist gleich der Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate der Hypotenuse und der anderen Kathete.

In diesen beiden Sätzen stehen die Ausdrücke: „Hypotenuse, Kathete“ zur Abkürzung anstatt der weitläufigeren: „Maßzahl der Hypotenuse, Maßzahl der Kathete.“

Z. B. $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{9 + 16} = 5$.
$b = 5$, $c = 13$, $a = \sqrt{(13 + 5)(13 - 5)} = \sqrt{144} = 12$.

2. Die Diagonale eines Quadrates aus der Seite zu berechnen.

Bezeichnet man die (Maßzahl der) Diagonale mit d und die (Maßzahl der) Seite mit a, so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Z. B. $a = 3$, $d = 3 \,.\, 1{\cdot}414.. = 4{\cdot}242..$

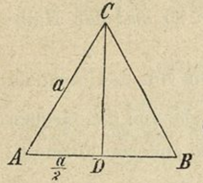

Fig. 123.

3. Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreieckes die Höhe h und den Flächeninhalt f zu berechnen.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACD (Fig. 123) findet man mittelst des Pythagoreischen Lehrsatzes

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

$$f = \frac{a}{2} \,.\, h = \frac{a}{2} \,.\, \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Z. B. $a = 6\,m$, $h = 3 \,.\, 1{\cdot}732\,m = 5{\cdot}196\,m$.

$f = 9 \,.\, 1{\cdot}732\,m^2 = 15{\cdot}588\,m^2$.

Übungsaufgaben. 1. Gegeben sind die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreieckes; man suche die Hypotenuse. α) $a = 15\,m$, $b = 8\,m$; β) $a = 21\,dm$, $b = 20\,dm$; γ) $a = 64{\cdot}327\,m$, $b = 46{\cdot}526\,m$.

2. Aus der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreieckes und einer Kathete die andere zu berechnen. α) $c = 25\,cm$, $a = 24\,cm$; β) $c = 5{\cdot}89\,m$, $b = 3{\cdot}12\,m$.

3. Eine 8 m lange Leiter ist an einer Mauer angelehnt und steht am Boden um 3·6 m von der Mauer ab. Bis zu welcher Höhe reicht die Leiter?

4. Aus der Diagonale d eines Quadrates die Seite a zu berechnen.

α) $d = 4\,cm$, β) $d = 13\,m$.

5. Wie groß ist eine Seite des Quadrates, welches einem Kreise mit dem Halbmesser 1 eingeschrieben ist?

6. Aus den Dimensionen a und b eines Rechteckes α) die Diagonale, β) den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

$a = 4\,dm$, $b = 9\,cm$.

7. Man berechne die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Grundline g und dem Schenkel s!

α) $g = 8\,cm$, $s = 5\,cm$, β) $g = 2{\cdot}66\,m$, $s = 2{\cdot}05\,m$.

8. Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreieckes dessen Höhe und Flächeninhalt zu berechnen. α) $a = 12\,cm$, β) $a = 4{\cdot}12\,m$.

9. Bedeuten r, s und c beziehungsweise den Halbmesser eines Kreises, eine Sehne und den Zentralabstand derselben, so ist aus je zweien dieser Größen die dritte zu berechnen.

α) $r = 5\,cm$, $s = 5\,cm$; β) $r = 3{\cdot}24\,m$, $c = 2{\cdot}18\,m$; γ) $s = 3\,dm$, $c = 3\,dm$.

10. Eine Diagonale eines Rechteckes hat die Länge d; der von beiden Diagonalen eingeschlossene spitze Winkel beträgt 60°. Man berechne den Umfang und die Fläche dieses Rechteckes. $d = 12\,cm$.

11. Aus den Parallelseiten a und b eines gleichschenkligen Trapezes und einem Schenkel c den Flächeninhalt des Trapezes zu berechnen.

$a = 1{\cdot}8\,dm$, $b = 1{\cdot}2\,dm$, $c = 5\,cm$.

12. Aus den Diagonalen d_1 und d_2 eines Rhombus den Umfang desselben zu berechnen. $d_1 = 1\cdot5\ m$, $d_2 = 1\ m$.

13. Wie groß ist die Fläche des regelmäßigen Sechseckes, welches einem Kreise mit dem Halbmesser r eingeschrieben ist?

14. Eine Seite des regelmäßigen Zwölfeckes zu berechnen, wenn der Radius r des umgeschriebenen Kreises gegeben ist. Z. B. $r = 1\ dm$. Sind AB und AC (Fig. 124) die Seiten des regelmäßigen Sechseckes beziehungsweise Zwölfeckes, so berechne man zunächst OD, hieraus CD und aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACD die Seite AC! Man findet $AC = 0\cdot51764\ r$.

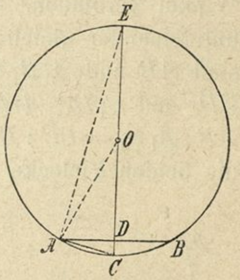

Fig. 124.

15. Man berechne eine Seite des einem Kreise mit dem Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen 24-Eckes! Sieh die vorausgehende Aufgabe.

16. Aus dem Radius r eines Kreises den Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes zu berechnen. Z. B. $r = 1\ dm$.

17. Aus dem Radius r eines Kreises und einer Sehne s die zu dem halben Bogen gehörige Sehne zu suchen. $r = 6\ cm$, $s = 4\ cm$.

18. Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreieckes den Radius α) des eingeschriebenen, β) des umgeschriebenen Kreises zu berechnen. (S. § 59.) $a = 1\cdot2\ dm$.

19. Wie groß ist die Seite a eines gleichseitigen Dreieckes mit der Höhe h?
Aus $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ folgt $2h = a\sqrt{3}$, $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{3}\sqrt{3}$. Z. B. $h = 5\ cm$.

20. Man berechne die Seite a eines gleichseitigen Dreieckes, wenn α) der Radius r des eingeschriebenen, β) der Radius R des umgeschriebenen Kreises gegeben ist! S. § 59 und die vorausgehende Aufgabe! α) $r = 1\ m$, β) $R = 5\ cm$.

21. Wie groß ist der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Grundlinie g und dem Flächeninhalte f? $g = 12\ mm$, $f = 6\cdot5\ cm^2$.

22. Aus dem Flächeninhalte f eines gleichseitigen Dreieckes α) die Seite, β) die Höhe zu berechnen. $f = 75\ cm^2$.

23. Um wieviel ist der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 1\ dm$ größer als jener des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes und kleiner als jener des umgeschriebenen Quadrates?

24. Aus dem Flächeninhalte f eines Quadrates jenen α) des eingeschriebenen, β) des umgeschriebenen Kreises zu berechnen. $f = 10\ cm^2$.

Ähnlichkeit.

§ 112. Erklärungen. Zwei Figuren heißen ähnlich ($\sim$), wenn sie in der Form oder Gestalt übereinstimmen. Sind sie außerdem gleich ($=$), stimmen sie also in der Form und der Größe überein, so heißen sie kongruent ($\cong$). (Sieh § 48.)

Das Zeichen $\sim$ rührt vom Anfangsbuchstaben des Wortes „similis" her. Eine genauere Erklärung für die Ähnlichkeit zweier Vielecke (Dreiecke und Vierecke inbegriffen) ist die folgende:

Zwei Vielecke heißen ähnlich, wenn die Winkel des einen der Reihe nach gleich sind den Winkeln des anderen (kürzer: wenn die Vielecke in den Winkeln übereinstimmen) und wenn die Verhältnisse je zweier entsprechender Seiten einander gleich sind.

Entsprechend (einander entsprechend) oder homolog heißen jene Seiten, welche die Scheitel der einander entsprechenden gleichen Winkel verbinden. Es seien z. B. in der Figur 125 folgende Winkel untereinander gleich: $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, $D = D_1$. Dann sind AB und A_1B_1 entsprechende Seiten, ferner BC und B_1C_1, ebenso CD und C_1D_1, DA und D_1A_1. Wenn also auch die Bedingungen $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DA : D_1A_1$ erfüllt sind, so sind die beiden Vielecke ähnlich und man schreibt:

$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1.$$

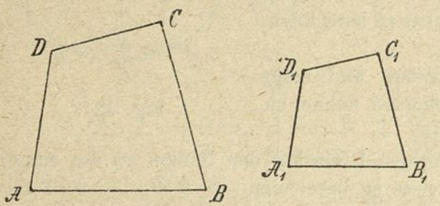

Fig. 125.

Man kann die Bedingung, daß die Verhältnisse je zweier entsprechender Seiten gleich sind, auch in anderer Form aussprechen und mathematisch ausdrücken. Bezeichnet man nämlich die Zahl, welcher das Verhältnis $AB : A_1B_1$ gleich ist, d. i. also den Wert oder Quotienten dieses Verhältnisses, mit m, so ist

$$AB : A_1B_1 = m,\ BC : B_1C_1 = m,\ CD : C_1D_1 = m, \ldots,\ \text{also}$$
$$AB = m \,.\, A_1B_1,\quad BC = m \,.\, B_1C_1,\quad CD = m \,.\, C_1D_1, \ldots$$

Man sagt daher, die Seiten des einen Vieleckes sind gleiche Vielfache der entsprechenden Seiten des zweiten Vieleckes, oder sie sind denselben proportional.

Aus dem Vorausgehenden ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der beiden Sätze:

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn jedes derselben einem dritten ähnlich ist.

Zwei ähnliche Vielecke sind auch kongruent, wenn sie zwei entsprechende Seiten gleich haben.

§ 113. Streckenteilung. Trägt man auf dem einen Schenkel eines Winkels mehrere aneinander stoßende gleiche Strecken auf und zieht durch die Teilungspunkte parallele Gerade nach dem anderen Schenkel, so entstehen auf diesem ebenso viele untereinander gleiche Strecken.

Es sei (Fig. 126) $AB = BC = CD = DE = \ldots$, ferner $BF \parallel CG \parallel DH \parallel EJ \parallel \ldots$ Um zu beweisen, daß z. B. $GH = AF$ ist, ziehe man $CK \parallel GH$. Es ist dann $CK = GH$, weil $CKHG$ ein Parallelogramm ist, und $CK = AF$, weil die Dreiecke ABF und CDK kongruent sind. Daher ist $GH = AF$.

1. Aufgabe. Eine gegebene Strecke in n gleiche Teile zu teilen.

1. Auflösung. Man ziehe durch einen Endpunkt A der gegebenen Strecke AE (Fig. 126) eine neue Gerade, trage auf derselben von A aus n gleiche Strecken auf, verbinde den Endpunkt J der letzten Strecke mit E und ziehe hierauf durch die übrigen Teilungspunkte Parallele zu EJ! Es genügt übrigens, nur durch den J vorausgehenden Punkt H die Parallele zu ziehen. (Warum?)

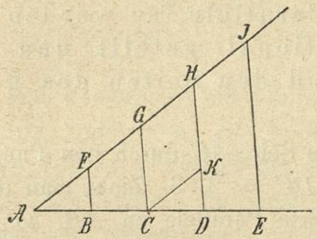

Fig. 126.

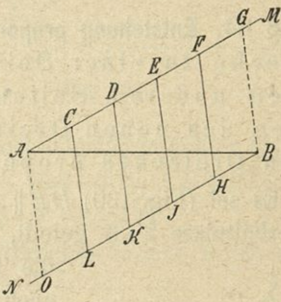

Fig. 127.

2. Auflösung. Um die Strecke AB (Fig. 127) in n (hier fünf) gleiche Teile zu teilen, zieht man durch die Endpunkte A und B nach entgegengesetzten Richtungen parallele Gerade und trägt auf der ersten von A aus und auf der zweiten von B aus dieselbe Strecke je $n$mal auf. Die Verbindungslinien von C mit L, D mit K u. s. f. teilen AB in n gleiche Teile. (§ 69, e.)

2. Aufgabe. Eine gegebene Strecke in einem gegebenen Zahlenverhältnisse zu teilen.

Auflösung. Um die Strecke AB (Fig. 128) im Verhältnisse $3:4$ zu teilen, zerlege man sie in $3+4=7$ gleiche Teile. Der Endpunkt C des dritten Teiles ist der gesuchte Punkt, denn es ist $AC = 3\,AE$, $CB = 4\,AE$, daher $AC : CB = 3 : 4$. — Die einfachste Ausführung der Konstruktion ist aus der Fig. 129 ersichtlich.

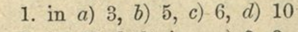

Fig. 128.

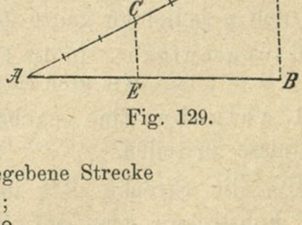

Fig. 129.

Übungsaufgaben. Man teile eine gegebene Strecke

1. in $a)$ 3, $b)$ 5, $c)$ 6, $d)$ 10 gleiche Teile;
2. im Verhältnisse $a)$ $2:3$, $b)$ $1:4$, $c)$ $5:2$;

3. im Verhältnisse *a)* $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$, *b)* $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{5}$, *c)* $0 \cdot 6 : 1 \cdot 5$;

4. in 3 Teile, welche sich verhalten wie $2 : 3 : 4$.

5. Ein Parallelogramm zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Parallelogramme gleiche Grundlinie hat und sich zu demselben verhält wie $3 : 4$. Man beachte, daß zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien sich verhalten wie die Höhen. $f : f_1 = gh : gh_1 = h : h_1$.

6. Ein Dreieck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke gleiche Grundlinie hat und sich zu demselben verhält wie $5 : 2$.

7. Ein Dreieck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke gleiche Höhe hat und sich zu demselben verhält wie $2 : 3$.

§ 114. Entstehung proportionaler Strecken. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so werden die beiden anderen Seiten proportional geteilt und die Seiten des neuen Dreieckes sind den Seiten des gegebenen Dreieckes proportional.

Es sei (Fig. 130) $DE \parallel AB$ und die Seite AC durch den Punkt D im Verhältnisse $2 : 3$ geteilt, also $AD : DC = 2 : 3$. Zieht man durch die Teilungspunkte Parallele zu AB, so wird auch BC in fünf gleiche Teile geteilt, von denen zwei auf BE und drei auf EC entfallen. Es ist also $BE : EC = 2 : 3$, daher auch $AD : DC = BE : EC$, d. h. die Abschnitte der Seite AC verhalten sich so wie jene der Seite BC oder, mit anderen Worten, die Seiten AC und BC werden durch DE proportional geteilt.

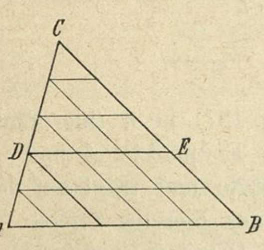

Fig. 130.

Wenn ferner durch die Teilungspunkte der Seite AC Parallele zur Seite BC gezogen werden, so ergibt sich aus der Betrachtung der Figur:

$$AB : DE = 5 : 3, \quad BC : EC = 5 : 3, \quad CA : CD = 5 : 3, \text{ somit}$$
$$AB : DE = BC : EC = CA : CD,$$

d. h. die Seiten des neuen Dreieckes sind jenen des gegebenen Dreieckes proportional. Zu denselben Resultaten gelangt man auch, wenn die Seite AC durch den Punkt D im Verhältnisse $m : n$ geteilt wird, wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Übungsaufgabe. In der Fig. 130 sei $AB = 12$ *cm*, $BC = 15$ *cm*, $AC = 11$ *cm*, $AD = 3$ *cm*. Wie groß sind die Seiten des Dreieckes CDE?

1. Aufgabe. Eine gegebene Strecke in einem gegebenen Streckenverhältnisse zu teilen.

Um die Strecke AB im Verhältnisse $CD : DE$ (Fig. 131) zu teilen, konstruiere man auf den Schenkeln eines beliebigen hohlen

Winkels GAB die Strecken $AF = CD$, $FG = DE$ und ziehe $FH \parallel GB$. Durch den Punkt H wird die Strecke AB im Verhältnisse $CD : DE$ geteilt.

2. Aufgabe. Zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte geometrische Proportionale zu finden.

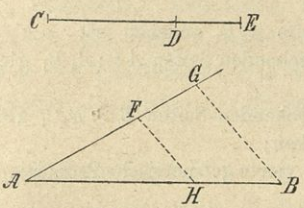

Fig. 131.

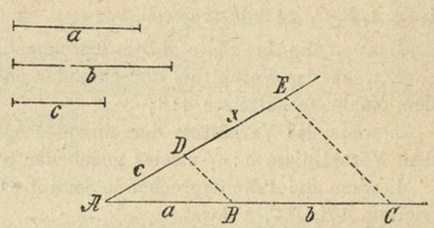

Fig. 132.

Man konstruiere auf den Schenkeln eines beliebigen hohlen Winkels (Fig. 132) $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$ und ziehe $CE \parallel BD$. Die Strecke $DE = x$ genügt der Bedingung $a : b = c : x$.

3. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte geometrische Proportionale zu finden. $a : b = b : x$.

Diese Aufgabe kann als ein spezieller Fall der vorausgehenden betrachtet werden.

4. Aufgabe. Die mittlere geometrische Proportionale zweier gegebener Strecken a, b zu konstruieren.

Da die gesuchte Strecke x der Bedingung $a : x = x : b$ oder $x^2 = ab$ genügen soll, so hat man also die Seite x jenes Quadrates zu bestimmen, welches mit dem Rechtecke aus den Strecken a und b flächengleich ist. (Sieh § 94, Aufgabe 5.)

§ 115. Ähnlichkeit der Dreiecke. *a)* Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so ist das abgeschnittene Dreieck dem gegebenen ähnlich.

Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 133) $DE \parallel AB$. Dann stimmen die Dreiecke ABC und DEC in den Winkeln überein und haben die entsprechenden Seiten proportional (§ 114). Daraus folgt $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

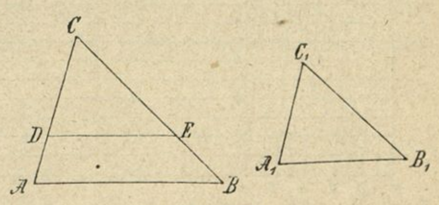

Fig. 133.

b) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen.

Stimmen nämlich die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 133) in den Winkeln überein, so daß $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$ ist, so können die beiden Dreiecke so übereinander gelegt werden, daß die Schenkel der gleichen Winkel C und C_1 zusammenfallen und die Seite A_1B_1 in die zu AB parallele Lage DE kommt. Daraus schließt man nach dem vorausgehenden Lehrsatze, daß die beiden Dreiecke ähnlich sind.

Übungsaufgaben. Zu einem gegebenen Dreiecke ABC ein ähnliches Dreieck $A_1B_1C_1$ zu konstruieren,

1. wenn die der Seite AB entsprechende Seite A_1B_1 gegeben ist;

2. wenn das Verhältnis der einander entsprechenden Seiten $AB:A_1B_1$ gleich ist dem Zahlenverhältnisse 4:3;

3. wenn das Verhältnis der einander entsprechenden Seiten $BC:B_1C_1$ gleich ist dem Verhältnisse $a:a_1$ zweier gegebener Strecken;

4. wenn die AB entsprechende Seite A_1B_1 die vierte geometrische Proportionale der Seiten AB, BC, CA ist.

5. In einem Dreiecke ABC ist $AB = 6$ *cm*, $BC = 4{\cdot}5$ *cm*, $CA = 5$ *cm* und man soll ein ähnliches Dreieck konstruieren, in welchem eine Seite 4 *cm* lang ist. Wie viele Auflösungen läßt diese Aufgabe zu? Wie groß sind in jedem Falle die übrigen Seiten des neuen Dreieckes?

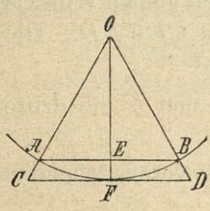

Fig. 134.

6. Warum sind je zwei gleichseitige Dreiecke ähnlich? Warum je zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke?

7. Einem Kreise mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Sechseck umgeschrieben. Wie groß ist eine Seite desselben? (Fig. 134.) Es ist $\triangle COF \sim \triangle AOE$, daher $CF:AE = OF:OE$, woraus CF, somit auch CD berechnet wird.

8. Einem Kreise mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck umgeschrieben. Wie groß ist eine Seite desselben? (§ 111, Übungsaufgabe 14.)

9. Die Länge der Strecke ab (Fig. 135) anzugeben, wenn die Strecke von 0 bis 1 gleich 1 *m* angenommen wird. — Erklärung. Aus der Fig. 130 ist ersichtlich, daß die im Dreiecke ABC parallel zu AB gezogenen Strecken der Reihe nach $= \frac{1}{5} AB$, $\frac{2}{5} AB$ u. s. f. sind. Durch eine ähnliche Überlegung erklärt man den Gebrauch des Transversal-Maßstabes (Fig. 135), dessen Einrichtung aus der Figur ersichtlich ist.

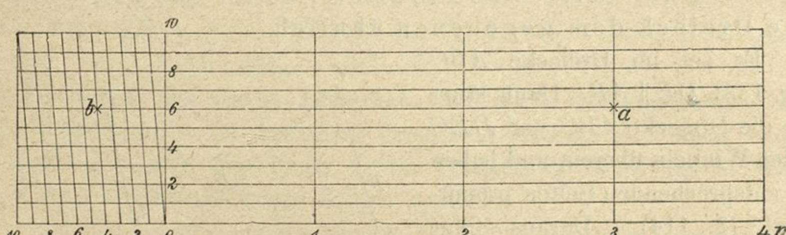

Fig. 135.

c) Die Höhe teilt das rechtwinklige Dreieck in zwei Dreiecke, welche einander und dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

Die Dreiecke ACD und ABC (Fig. 136) sind rechtwinklig und haben den Winkel $DAC = \alpha$ gemeinsam. Daher sind auch die Winkel ABC und ACD gleich und können beide mit β bezeichnet werden. Ebenso kann gezeigt werden, daß das Dreieck CBD die Winkel α, β, R enthält, woraus sich die Richtigkeit des Lehrsatzes ergibt.

Folgesatz. Die Höhe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse. Denn die Seiten p und h des Dreieckes CBD sind den entsprechenden Seiten h und q des ähnlichen Dreieckes ACD proportional, d. h.

$$p : h = h : q.$$

Daraus folgt $h^2 = pq$ (Vgl. § 93.)

Übungsaufgabe. 10. Berechne und konstruiere die mittlere geometrische Proportionale der Strecken

a) 3 *cm*, 12 *cm*, b) 2·5 *cm*, 1 *dm*.

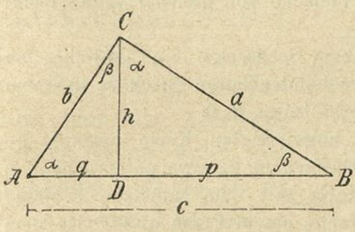

Fig. 136.

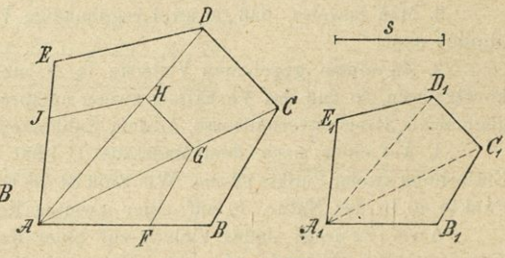

Fig. 137.

§ 116. Ähnlichkeit der Vielecke.

Aufgabe. Zu einem gegebenen Vielecke ein ähnliches zu konstruieren, wenn eine Seite des neuen Vieleckes gegeben ist.

Auflösung. Es sei $ABCDE$ (Fig. 137) das gegebene Vieleck und s die gegebene, AB entsprechende Seite des neuen Vieleckes.

Man ziehe die Diagonalen AC und AD, mache $AF = s$ und ziehe $FG \parallel BC$, $GH \parallel CD$, $HJ \parallel DE$!

Die beiden Vielecke $ABCDE$ und $AFGHJ$ stimmen in den Winkeln überein (warum?) und haben die entsprechenden Seiten proportional. Denn es ist

$$\triangle ABC \sim AFG, \text{ also } AB : AF = BC : FG = AC : AG,$$
$$\triangle ACD \sim AGH, \quad „ \quad AC : AG = CD : GH = AD : AH,$$
$$\triangle ADE \sim AHJ, \quad „ \quad AD : AH = DE : HJ = AE : AJ.$$

Daraus folgt $ABCDE \sim AFGHJ$. Wird ferner das Vieleck $AFGHJ$ in die Lage $A_1B_1C_1D_1E_1$ übertragen (§ 83), so ist auch $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$.

Lehrsatz. Zerlegt man zwei ähnliche Vielecke durch entsprechende Diagonalen in Dreiecke, so sind die Dreiecke des einen Vieleckes der Reihe nach ähnlich den Dreiecken des anderen Vieleckes.

In den ähnlichen Vielecken $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. 137) sind AC und A_1C_1, ferner AD und A_1D_1 entsprechende Diagonalen, d. h. solche, welche die Scheitel der einander entsprechenden gleichen Winkel verbinden. Macht man nun $AF = A_1B_1$ und konstruiert wie oben das Polygon $AFGHJ$, so ist dieses dem Polygone $ABCDE$, also auch dem Polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ ähnlich. Es ist aber auch $AFGHJ \cong A_1B_1C_1D_1E_1$, da die entsprechenden Seiten AF und A_1B_1 gleich sind (§ 112). Hieraus folgt

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong AFG \sim ABC,$$
$$\triangle A_1C_1D_1 \cong AGH \sim ACD, \text{ u. s. w.}$$

Übungsaufgaben. 1. Zu dem Vielecke $ABCDE$ (Fig. 137) ein ähnliches zu konstruieren, worin die BC entsprechende Seite einer gegebenen Strecke s gleich ist.

2. Man beweise, daß je zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenanzahl ähnlich sind!

3. Zu einem gegebenen Vielecke (z. B. einem Sechsecke) ein ähnliches zu konstruieren, so daß das Verhältnis zweier entsprechender Seiten gleich ist *a)* einem gegebenen Streckenverhältnisse, *b)* dem Zahlenverhältnisse 2 : 3.

4. Auf einer nach dem Maßstabe 1 : 1200 angefertigten Karte beträgt die Entfernung zweier Punkte 82 *mm*. Wie groß ist die Entfernung der zwei entsprechenden Punkte *a)* in der Natur, *b)* auf einer zweiten Karte mit dem Maßstabe 1 : 5000?

Anmerkung. Jedes Vieleck auf einer Karte, einem Plane u. s. f. ist dem entsprechenden Vielecke in der Natur ähnlich. Das Verhältnis zweier entsprechender Seiten wird durch den „Maßstab" angegeben.

5. Wie groß erscheint eine Strecke von 1 *km* Länge auf einer nach dem Maßstabe 1 : 150.000 gezeichneten Karte?

6. Vergrößere das Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Fig. 137) im Verhältnisse 2 : 3.

7. Zeichne ein beliebiges Viereck und verkleinere dasselbe im Verhältnisse 5 : 3.

§ 117. Umfangsverhältnisse ähnlicher Figuren. In zwei ähnlichen Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ sei das Verhältnis zweier entsprechender Seiten $= m$, also $AB = m \,.\, A_1B_1$, $BC = m \,.\, B_1C_1$, $CA = m \,.\, C_1A_1$. Dann ist $AB + BC + CA = m\ (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$ oder, wenn die Umfänge mit u und u_1 bezeichnet werden, $u = m u_1$. Daraus folgt $u : u_1 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$.

Ebenso verfährt man bei Vielecken und findet also den Lehrsatz:

Die Umfänge ähnlicher Dreiecke oder ähnlicher Vielecke verhalten sich wie je zwei entsprechende Seiten.

Übungsaufgabe. Von zwei ähnlichen Dreiecken hat das eine die Seiten $a = 12$ *cm*, $b = 9$ *cm*, $c = 14$ *cm*, das andere den Umfang $u_1 = 56$ *cm*. Wie groß sind die Seiten des zweiten Dreieckes?

§ 118. Flächenverhältnisse ähnlicher Figuren. *a)* In den ähnlichen Parallelogrammen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ (Fig. 138) sei das Verhältnis zweier entsprechender Seiten $= 5 : 3$. Dann läßt sich $ABCD$ in

$5 \times 5 = 25$ und $A_1B_1C_1D_1$ in $3 \times 3 = 9$ kleinere Parallelogramme zerlegen, welche alle untereinander kongruent sind. Bezeichnet man nun mit d die Fläche eines der Dreiecke, in welche die kleinen Parallelogramme durch die zu BD und B_1D_1 parallelen Diagonalen zerfallen, so findet man $ABCD = 50d$, $A_1B_1C_1D_1 = 18d$, also $ABD = 25d$, $A_1B_1D_1 = 9d$.

Daraus folgt $ABD : A_1B_1D_1 = 25 : 9$. Für die über den entsprechenden Seiten AB und A_1B_1 errichteten Quadrate erhält man ferner die Proportion $ABEF : A_1B_1E_1F_1 = 25 : 9$. Daraus schließt man

$$ABD : A_1B_1D_1 = ABEF : A_1B_1E_1F_1 \text{ oder } f : f_1 = a^2 : a_1{}^2.$$

Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Seiten.

Zur Übung wiederhole man die Ableitung dieses Satzes unter der Annahme $AB : A_1B_1 = m : n$, worin m und n irgend welche ganze Zahlen bedeuten.

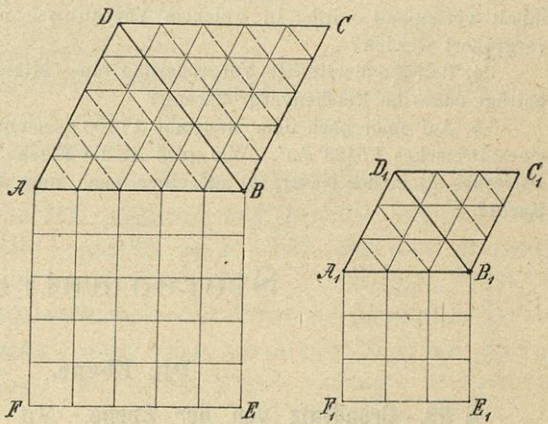

Fig. 138.

Ist die Seite a eines Dreieckes $2, 3, 4, \ldots m$ mal so groß als die entsprechende Seite a_1 eines ähnlichen Dreieckes, so ist also der Flächeninhalt f des ersten Dreieckes $4, 9, 16, \ldots m^2$ mal so groß als der Flächeninhalt f_1 des zweiten Dreieckes. Aus $a = m a_1$ folgt daher $f = m^2 f_1$. Dies gilt auch, wenn m keine ganze Zahl ist. So z. B. ist in der Figur 138

$$AB = 5 . \frac{A_1B_1}{3} = \frac{5}{3} . A_1B_1 \text{ und } ABD = 25 . \frac{A_1B_1D_1}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 . A_1B_1D_1.$$

b) Um die Flächeninhalte ähnlicher Polygone zu vergleichen, zerlegt man dieselben durch entsprechende Diagonalen in Dreiecke.

Nimmt man in der Fig. 137 $AB = m . A_1B_1$ an, so ist

$$\begin{aligned} ABC &= m^2 . A_1B_1C_1 \\ ACD &= m^2 . A_1C_1D_1 \\ ADE &= m^2 . A_1D_1E_1 \\ \hline ABCDE &= m^2 . A_1B_1C_1D_1E_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $ABCDE : A_1B_1C_1D_1E_1 = ABC : A_1B_1C_1 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2$.

Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate zweier entsprechender Seiten.

Übungsaufgaben. 1. Zwei entsprechende Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken (Polygonen) sind $a = 15\ cm$, $a_1 = 12\ cm$. Wie groß ist die Fläche des zweiten Dreieckes (Polygones), wenn jene des ersten $1\ dm^2$ beträgt?

2. Nimmt man die Länge einer Seite gleich $1\ cm$ an, so ist
die Fläche eines regelmäßigen Fünfeckes = $1{\cdot}7205\ cm^2$,
„ „ „ „ Sechseckes = $2{\cdot}5981\ cm^2$,
„ „ „ „ Achteckes = $4{\cdot}8285\ cm^2$.
Wie groß ist in jedem dieser drei Fälle der Flächeninhalt, wenn eine Seite *a)* $1\ m$, *b)* $23\ cm$, *c)* $2{\cdot}15\ m$ beträgt?

3. Man will ein Polygon in größerem Maßstabe so zeichnen, daß der Flächeninhalt verdoppelt wird. In welchem Verhältnisse muß eine Seite des Polygons vergrößert werden?

4. Beträgt die lineare Vergrößerung eines Mikroskopes das 80fache, wieviel beträgt dann die Flächenvergrößerung?

5. Auf einer nach dem Maßstabe 1 : 100 gezeichneten Karte beträgt die Fläche eines Dreieckes $1{\cdot}5423\ dm^2$. Wie groß ist die Fläche des entsprechenden ähnlichen Dreieckes *a)* in der Natur, *b)* auf einer nach dem Maßstabe 1 : 150 gezeichneten Karte?

Stereometrie.

Die Ebene.

§ 119. Grundsatz von der Ebene. Mit Hilfe der Vorstellungen, welche wir von der Geraden und der Ebene besitzen, erkennen wir sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein, so liegt sie ganz in der Ebene. (Grundsatz von der Ebene.)

Hier sowie in allen weiteren Betrachtungen muß man sich nicht nur die Gerade, sondern auch die Ebene als unbegrenzt vorstellen, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich vorausgesetzt wird. Selbstverständlich kann man in Modellen und in Zeichnungen auch zur Versinnlichung von unbegrenzten Ebenen nur begrenzte Teile derselben verwenden.

Auf dem angeführten Grundsatze beruht das Verfahren, mit Hilfe eines geradlinigen Lineals eine Ebene zu prüfen.

§ 120. Bestimmung der Lage einer Ebene. Aufgaben. 1. Durch einen Punkt, 2. durch zwei Punkte, 3. durch eine Gerade, 4. durch mehrere in einer Geraden liegende Punkte eine Ebene zu legen. — Unbestimmte Aufgaben.

Die verlangten Konstruktionen kann man sich durch Anlegen eines ebenen Brettchens oder Kartons an eine Tischecke oder eine Tischkante versinnlichen.

5. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eine Ebene zu legen. Sind A, B, C jene Punkte, so lege man irgend eine Ebene durch A und B und drehe sie um die Gerade AB so lange, bis auch der Punkt C in die Ebene fällt.

6. Durch eine Gerade (AB) und einen Punkt (C) außerhalb derselben eine Ebene zu legen. (Sieh Aufgabe 5.)

7. Durch zwei sich schneidende Gerade AB und BC eine Ebene zu legen. Die durch die Punkte A, B und C gelegte Ebene enthält beide Gerade. Warum?

8. Durch zwei parallele Gerade eine Ebene zu legen. Man denke sich eine Ebene MN durch zwei sich schneidende Gerade a und b gelegt (Fig. 139) und die Gerade b um einen Punkt A so gedreht, daß der Schnittpunkt D längs der Geraden a immer weiterrückt. Dabei bleibt die Gerade b fortwährend in der Ebene MN (warum?) und dies ist auch dann noch der Fall, wenn schließlich b parallel zu a wird. Hat man also eine Ebene durch eine von zwei parallelen Geraden (a) und einen Punkt (A) der zweiten gelegt, so fällt auch die zweite Gerade (c) in dieselbe Ebene.

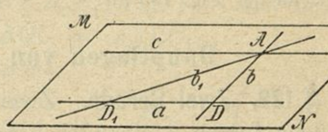

Fig. 139.

Daraus ist ersichtlich, daß man auch im Raume durch einen Punkt zu einer Geraden eine einzige Parallele ziehen kann.

Die letzten vier Aufgaben sind eindeutig bestimmt, denn eine jede derselben liefert eine einzige Lösung. Daraus folgt:

Eine Ebene ist eindeutig bestimmt

a) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen;

b) durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt;

c) durch zwei sich schneidende Gerade;

d) durch zwei parallele Gerade.

Übungsaufgaben. 1. Was kann von zwei Ebenen ausgesagt werden, welchen drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemeinsam sind?

2. Welchen Vorteil gewährt ein dreibeiniger Stuhl gegenüber einem vierbeinigen?

§ 121. Entstehung der Ebene. Eine Ebene kann man sich entstanden denken:

1. indem eine Gerade längs zweier sich schneidender Geraden hingleitet;

2. indem eine Gerade sich um einen ihrer Punkte dreht und dabei längs einer Geraden hingleitet;

3. indem eine Gerade längs einer zweiten Geraden parallel zu ihrer ersten Lage hingleitet;

4. indem eine Gerade längs zweier paralleler Geraden hingleitet.

Die Gerade, durch deren Bewegung die Ebene entsteht, heißt die erzeugende Gerade; und die Geraden, längs welcher die erzeugende Gerade hingleitet, heißen Leitlinien oder spezieller Leitgerade.

Übungsaufgabe. Gib für die vier Entstehungsarten einer Ebene je ein Beispiel an der Fig. 139 an!

Hauptlagen von Geraden und Ebenen.

§ 122. Zwei Gerade. Zwei Gerade können drei wesentlich verschiedene Lagen zueinander haben: 1. sie schneiden sich; 2. sie sind zu einander parallel; oder 3. sie schneiden sich nicht und sind auch nicht zu einander parallel. Im letzten Falle sagt man, die beiden Geraden kreuzen einander oder sie sind windschief.

In den ersten zwei Fällen liegen die Geraden in einer Ebene, im dritten Falle jedoch nicht. Man erhält z. B. zwei windschiefe Gerade, wenn man durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben eine Ebene legt und von diesem Punkte zu einem anderen außerhalb der Ebene eine zweite Gerade zieht.

Suche Beispiele für die drei wesentlich verschiedenen Lagen zweier Geraden an den Kanten eines Kastens, des Schulzimmers u. s. w.!

§ 123. Zwei Ebenen. Haben zwei Ebenen in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemein, so heißen sie parallel. Haben sie gemeinschaftliche Punkte, so sind dies die Punkte einer Geraden, welche die Durchschnittslinie der beiden Ebenen heißt, und man sagt in diesem Falle, die Ebenen schneiden einander. Legt man nämlich durch zwei gemeinschaftliche Punkte zweier Ebenen eine Gerade, so fällt diese in jede der beiden Ebenen, ist also die Durchschnittslinie. Außerhalb dieser Geraden können die Ebenen keinen Punkt gemein haben, denn durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben läßt sich nur eine Ebene legen.

Man suche Beispiele für zwei parallele und für zwei sich schneidende Ebenen an den Wänden eines Kastens, eines Zimmers u. s. f.!

§ 124. Gerade und Ebene. Wenn eine Gerade und eine Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemein haben, so heißen sie parallel. Sind die Gerade und die Ebene nicht parallel und haben sie nur einen Punkt gemein, so heißt dieser der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene oder der Fußpunkt der Geraden in der

Ebene und man sagt, die Gerade trifft die Ebene oder die Ebene schneidet die Gerade. Hat endlich die Gerade mehr als einen Punkt mit der Ebene gemein, so fällt sie ganz in dieselbe (§ 119).

Man suche Beispiele für die angeführten drei Lagen einer Geraden zu einer Ebene an den Kanten und Wänden eines Kastens u. s. w.!

Parallele Lage von Geraden und Ebenen.

§ 125. Zwei Gerade. Verschiebt man zwei sich schneidende Gerade parallel zu ihrer ursprünglichen Lage, so bleiben die Winkel zwischen ihnen ungeändert. Ist also $AB \parallel A_1B_1$ (Fig. 140) und in einer anderen Ebene $CD \parallel C_1D_1$, so ist $\sphericalangle AOC = A_1O_1C_1$.

Daraus folgt, daß auch im Raume Winkel mit parallelen (und gleichgerichteten) Schenkeln einander gleich sind.

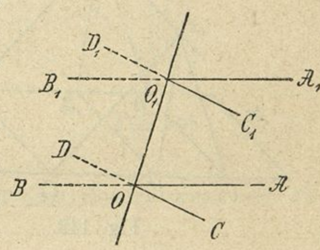

Fig. 140.

Unter dem Winkel zweier windschiefer Geraden versteht man jenen Winkel, welchen man erhält, wenn man durch einen Punkt der einen Geraden die Parallele zur anderen zieht. In diesem Sinne ist z. B. unter dem Winkel der windschiefen Geraden AB und C_1D_1 (Fig. 140) der Winkel AOC zu verstehen.

§ 126. Gerade und Ebene. *a)* Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Ebene eine parallele Gerade zu ziehen.

Man ziehe in der gegebenen Ebene MN (Fig. 141) irgend eine Gerade BC, lege durch BC und den gegebenen Punkt A eine Ebene und ziehe in dieser durch den Punkt A die Gerade $DE \parallel BC$. Es ist $DE \parallel MN$. Denn würde die Gerade DE hinreichend verlängert die Ebene MN treffen, so müßte ihr Fußpunkt sowohl in MN als auch in der durch die Parallelen BC und DE bestimmten Ebene liegen. Er wäre also ein Punkt der Durchschnittslinie BC der beiden Ebenen und die Geraden BC und DE wären nicht parallel. Daraus ergibt sich der Lehrsatz:

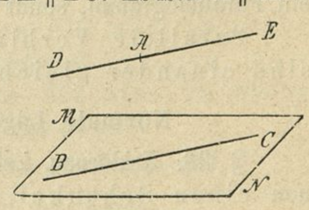

Fig. 141.

Ist eine Gerade zu einer Geraden einer Ebene parallel, so ist sie auch zur Ebene selbst parallel.

Wie viele Auflösungen läßt die obige Aufgabe zu?

b) Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so ist sie auch zu jeder Geraden der Ebene parallel, welche mit ihr in derselben Ebene liegt.

Ist nämlich die Gerade AB parallel zur Ebene MN (Fig. 142) und dreht man eine andere Ebene um AB als Achse, so bleibt die Durchschnittslinie der beiden Ebenen in allen Lagen CD, C_1D_1, C_2D_2, . . . zu AB parallel. Denn hätten z. B. AB und CD einen gemeinsamen Punkt, so müßte dieser auch der Ebene MN angehören; also wäre AB zu MN nicht parallel.

Man suche Beispiele zu diesen Sätzen an den Kanten und Wänden des Schulzimmers u. s. w.!

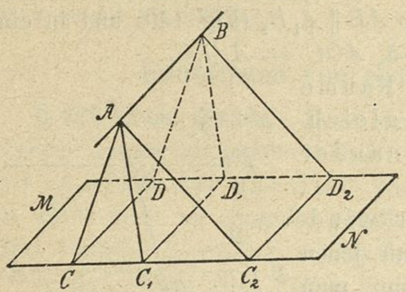

Fig. 142.

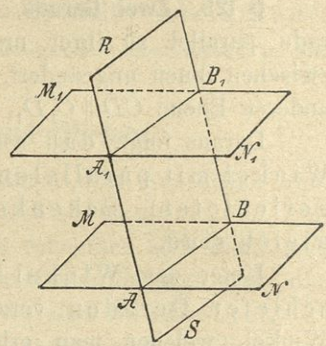

Fig. 143.

§ 127. Zwei Ebenen. *a)* Sind AB und A_1B_1 die Schnittlinien einer Ebene RS mit den parallelen Ebenen MN und M_1N_1 (Fig. 143), so sind sie ebenfalls parallel. Sie liegen nämlich in einer Ebene (RS) und schneiden einander nicht.

Die Schnittlinien zweier paralleler Ebenen mit einer dritten Ebene sind zueinander parallel.

b) Ist in der Figur 143 $AA_1 \parallel BB_1$, so ist das Viereck AA_1B_1B ein Parallelogramm, somit $AA_1 = BB_1$.

Parallele Verbindungsstrecken paralleler Ebenen sind einander gleich.

Normale Lage von Geraden gegen Ebenen.

§ 128. Erklärung, Lehrsätze. *a)* Wird ein rechter Winkel um einen Schenkel gedreht, so beschreibt der andere eine Ebene.

Dreht man nämlich den rechten Winkel BAC (Fig. 144) in die Lage BAE und legt durch AC und AE eine Ebene MN, so ist jede in dieser Ebene durch A gezogene Gerade AD zu AB normal, somit eine besondere Lage des Schenkels AC. Zum Beweise dieser Behauptung ziehe man eine Gerade CE so, daß sie die Geraden AC, AD, AE schneidet, mache $AB = AB_1$ und verbinde die Schnittpunkte C, D, E mit B und B_1. Da AC und AE Symmetralen der Strecke BB_1 sind, so ist $BC =$

B_1C, $BE = B_1E$, also $\triangle\, BCE \cong B_1CE$. Diese beiden Dreiecke gelangen zur Deckung, wenn man das eine so lange um CE als Achse dreht, bis B auf B_1 fällt. Dann decken sich auch die Strecken BD und B_1D und sind daher gleich. Daraus folgt, daß AD eine Symmetrale von BB_1, somit $AD \perp BB_1$ ist.

b) Wenn eine Gerade zu allen Geraden einer Ebene, welche durch ihren Fußpunkt gehen, normal ist, so heißt sie eine Normale der Ebene und diese eine Normalebene der Geraden oder man sagt, die Gerade und die Ebene sind zueinander normal. Aus dem Beweise des Lehrsatzes *a)* folgt, daß jede Gerade, die zu zwei durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Geraden normal ist, eine Normale der Ebene ist. Ist also (Fig. 144) $AB \perp AC$ und $AB \perp AD$, so ist $AB \perp MN$.

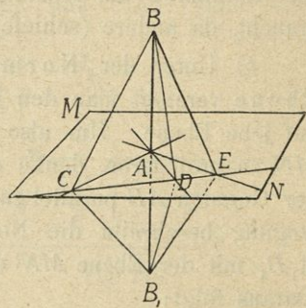

Fig. 144.

Eine Gerade heißt schief in Bezug auf eine Ebene, wenn sie zu derselben weder parallel noch normal ist.

c) Durch einen gegebenen Punkt kann zu einer gegebenen Ebene eine einzige Normale gezogen werden. Wären z. B. (Fig. 144) BA und BC normal zu MN, so müßten sie auch zu AC normal sein, was nicht möglich ist. Zwei Normalen derselben Ebene können auch den Fußpunkt nicht gemeinsam haben. Warum nicht?

d) Ist eine Gerade zu einer Ebene normal und verschiebt man die Gerade oder die Ebene parallel zu ihrer ursprünglichen Lage, so bleiben die Gerade und die Ebene stets zueinander normal. Daraus folgt:

Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer Ebene normal, so ist es auch die andere.

Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer Geraden normal, so ist es auch die andere.

Diese beiden Lehrsätze lassen folgende Umkehrungen zu:

Normalen derselben Ebene sind parallel.

Normalebenen derselben Geraden sind parallel.

Wird nämlich die eine Normale parallel zu sich selbst verschoben, bis sie mit der anderen Normale einen Punkt gemeinsam hat, so fällt sie mit derselben vollständig zusammen.

Übungsaufgaben. 1. Wie heißt eine Normalebene einer vertikalen Linie?

2. Wie überzeugt sich der Maurer, daß eine Ebene horizontal ist?

3. Ist eine Gerade zu einer Ebene normal, wenn sie nur auf einer durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden normal ist?

Projektionen, Abstände, Neigungswinkel.

§ 129. Normalprojektionen. *a)* Unter der Normalprojektion eines Punktes auf eine Ebene versteht man den Fußpunkt der Normalen von dem Punkte auf die Ebene. Im Folgenden wird häufig zur Abkürzung der Ausdruck „Projektion“ für „Normalprojektion“ gebraucht, da andere (schiefe) Projektionen hier nicht betrachtet werden.

b) Unter der Normalprojektion einer Linie auf eine Ebene versteht man den Inbegriff der Projektionen aller ihrer Punkte auf jene Ebene. Um also eine Gerade AB (Fig. 145) auf die Ebene MN zu projizieren, denke man sich eine Normale CC_1 der Ebene längs der Geraden AB parallel zu ihrer ersten Lage fortbewegt. Bei dieser Bewegung beschreibt die Normale eine Ebene, deren Durchschnittslinie A_1B_1 mit der Ebene MN die verlangte Projektion der Geraden AB ist. Daraus folgt:

Die Normalprojektion einer Geraden ist im allgemeinen wieder eine Gerade. Ist jedoch die Gerade zur Ebene normal, so ist ihre Projektion ein Punkt.

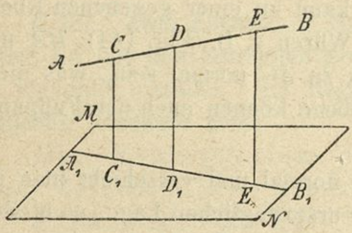

Fig. 145.

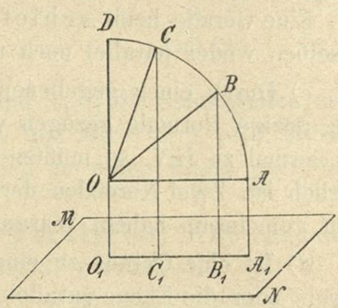

Fig. 146.

c) Die Projektion einer Strecke auf eine Ebene ist durch die Projektionen ihrer Endpunkte bestimmt. Vergleicht man eine Strecke in den Lagen OA, OB, OC, OD (Fig. 146) mit ihren Projektionen, so ergeben sich die folgenden Sätze:

Je nachdem eine Strecke zu einer Ebene parallel, schief oder normal ist, ist ihre Projektion von gleicher Länge, kürzer als die Strecke oder sie ist ein Punkt.

Übungsaufgaben. 1. Was ist die Projektion eines Dreieckes, überhaupt eines Vieleckes auf eine Ebene?

2. Wann ist die Projektion einer Figur mit dieser kongruent?

3. Sind die Verbindungsstrecken AC, AC_1, $AC_2, \ldots$ eines Punktes A mit einer Ebene MN (Fig. 147) einander gleich, so sind auch ihre Projektionen gleich. Warum? Was ist also der geometrische Ort der Fußpunkte C, C_1, $C_2, \ldots$ jener Strecken?

d) Aufgabe. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu derselben die Normale zu ziehen.

Man ziehe von dem gegebenen Punkte A (Fig. 148) die Normale AD zu einer beliebigen in der Ebene MN gelegenen Geraden und schneide auf derselben die gleichen Strecken C_1D und C_2D ab! Es ist dann $AC_1 = AC_2$ (warum?); daraus folgt, daß C_1C_2 Sehne eines

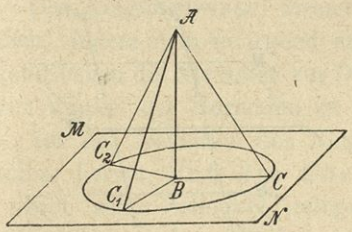

Fig. 147.

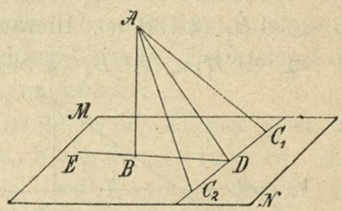

Fig. 148.

Kreises ist, welcher die Projektion B des Punktes A zum Mittelpunkte hat. Die in der Ebene MN gezogene Symmetrale DE der Strecke C_1C_2 geht somit durch den Fußpunkt der verlangten Normalen. Man konstruiert daher $AB \perp DE$.

§ 130. Abstände. *a)* Es sei AB (Fig. 147) eine Normale der Ebene MN und C ein beliebiger Punkt derselben Ebene. Da $AB < AC$ ist, so folgt:

Die Normale von einem Punkte auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke zwischen der Ebene und dem Punkte; sie heißt der Abstand des Punktes von der Ebene.

b) Alle Punkte einer Geraden haben gleichen Abstand von einer parallelen Ebene. Derselbe heißt der Abstand der Geraden von der parallelen Ebene.

c) Alle Punkte einer Ebene haben gleichen Abstand von einer parallelen Ebene; derselbe heißt der Abstand der parallelen Ebenen (Fig. 149).

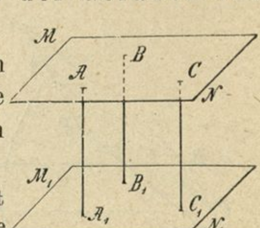

Fig. 149.

Übungsaufgabe. Was ist der geometrische Ort aller Punkte, welche *a)* von einer Ebene gleiche Abstände haben, *b)* von zwei parallelen Ebenen gleiche Abstände haben?

§ 131. Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene. *a)* Unter dem Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene versteht man den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projektion auf diese Ebene bildet. So z. B. hat die Gerade AC (Fig. 150) den Neigungswinkel ACB zur Ebene MN, wenn $AB \perp MN$ ist.

b) *Der Neigungswinkel einer Geraden ist der kleinste unter allen Winkeln, welche sie mit Geraden bildet, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt gehen.*

Denn projiziert man (Fig. 150) die Strecke AC auf die Ebene MN und wird die Projektion BC um den Punkt C gedreht, bis sie irgend eine andere Lage B_1C in der Ebene MN einnimmt, so ist offenbar $AC = AC$, $BC = B_1C$, hingegen $AB < AB_1$ (§ 130, *a*). Hieraus folgt $\sphericalangle\ ACB < ACB_1$ (§ 56).

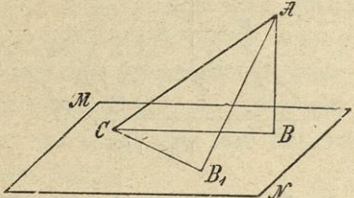

Fig. 150.

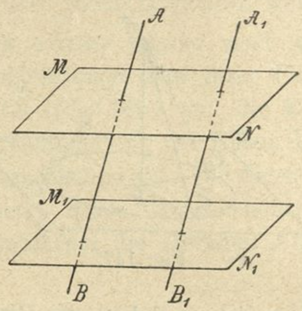

Fig. 151.

c) Wird eine Gerade von einer Ebene geschnitten und verschiebt man die Gerade oder die Ebene parallel zu ihrer ursprünglichen Lage, so wird dadurch der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene nicht geändert (Fig. 151). Hieraus folgt:

Parallele Gerade bilden mit jeder sie schneidenden Ebene gleiche Neigungswinkel.

Parallele Ebenen bilden mit jeder von ihnen geschnittenen Geraden gleiche Neigungswinkel.

§ 132. Flächenwinkel oder Keil. Die unbegrenzte Ebene wird durch eine Gerade in zwei Halbebenen geteilt. Dreht man nun eine Halbebene um ihre Grenzlinie, so heißt der von ihr beschriebene Teil des Raumes ein *Flächenwinkel* oder *Keil*.

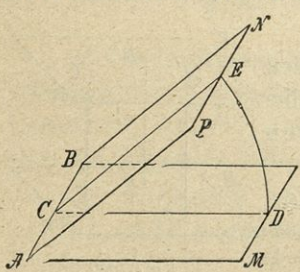

Fig. 152.

Die Durchschnittslinie AB (Fig. 152) heißt die *Kante* oder *Scheitellinie*; die Halbebenen BM und AN werden die *Schenkelflächen* des Keils genannt. Man bezeichnet den Flächenwinkel in Fig. 152 mit $M(AB)N$ und analog jeden anderen.

Übungsaufgaben. 1. Wie läßt sich die Entstehung eines Keiles mittels eines Buches oder einer Tür veranschaulichen?

2. Wie viele Keile werden von zwei sich schneidenden Ebenen gebildet?

§ 133. Neigungswinkel zweier Ebenen. *a)* Zieht man $CD \perp AB$ (Fig. 152), so beschreibt die Gerade CD bei der Drehung der Halbebene

BM in die Lage BP den Winkel DCE. Die Größe dieses Winkels ist unabhängig davon, an welcher Stelle der Kante AB der Scheitel C angenommen wird. Ist z. B. $AM \perp AB$, also auch $AP \perp AB$, so ist $\sphericalangle MAP = DCE$ (warum?). Man benützt daher diesen Winkel als Maß des Keiles und nennt ihn den Neigungswinkel der beiden Ebenen. Modell!

Der Neigungswinkel zweier unbegrenzter Ebenen wird also konstruiert, indem man in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie in beiden Ebenen die Normalen zur Durchschnittslinie zieht. Der kleinere der beiden Winkel der Normalen ist der Neigungswinkel.

Aus der Definition des Neigungswinkels zweier Ebenen geht unmittelbar hervor, daß die Ebene des Neigungswinkels, d. i. die durch seine Schenkel gelegte Ebene, zur Kante normal ist (§ 128). Umgekehrt: Wird ein Keil durch eine zur Kante normale Ebene geschnitten, so erhält man den Neigungswinkel der beiden Schenkelflächen als Schnittfigur.

b) Verschiebt man die Ebene MN (Fig. 143) in die parallele Lage M_1N_1, so wird ihr Neigungswinkel zur Ebene RS nicht geändert.

Parallele Ebenen bilden mit jeder sie schneidenden Ebene gleiche Neigungswinkel.

Normale Lage von Ebenen gegen Ebenen.

§ 134. Erklärung, Lehrsätze. *a)* Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so heißt jede derselben eine Normalebene der anderen oder man sagt, die Ebenen sind zueinander normal. Ist z. B. (Fig. 153) DCE der Neigungswinkel der Ebenen MN und RS, ist ferner $\sphericalangle DCE = 90^0$, so ist $RS \perp MN$ und $MN \perp RS$.

b) Ist RS eine Normalebene zu MN (Fig. 153), so wird durch jede Drehung von RS um die Schnittlinie AB der Neigungswinkel DCE vergrößert oder verkleinert. Hieraus folgt:

Über einer Geraden einer Ebene kann man zu dieser nur eine normale Ebene errichten.

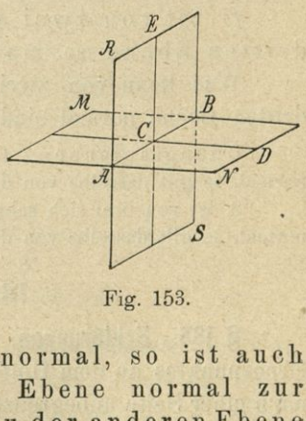

Fig. 153.

c) Weil $CE \perp AB$ und $CE \perp CD$, so ist $CE \perp MN$ (§ 128). Man zeige, daß auch $CD \perp RS$ ist.

Sind zwei Ebenen zueinander normal, so ist auch jede Gerade, welche in der einen Ebene normal zur Durchschnittslinie errichtet wird, zu der anderen Ebene normal.

d) Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene normal zu einer gegebenen Ebene zu legen.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt A (Fig. 154) die Normale AB zur gegebenen Ebene MN! Jede durch AB gelegte Ebene wie PQ, RS u. s. f. entspricht der Aufgabe, welche also unbestimmt ist.

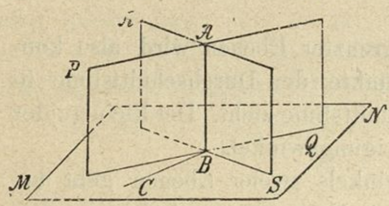

Fig. 154.

Um z. B. zu zeigen, daß $RS \perp MN$ ist, konstruiert man den Neigungswinkel der beiden Ebenen. Nun ist $AB \perp BS$ in der Ebene RS; zieht man noch $BC \perp BS$ in der Ebene MN, so ist ABC der gesuchte Neigungswinkel, und zwar $= 90^0$, weil $AB \perp MN$ angenommen wurde.

Ist eine Gerade zu einer Ebene normal, so ist auch jede durch die Gerade gelegte Ebene zur ersten Ebene normal. Umgekehrt:

e) Sind zwei einander schneidende Ebenen zu einer dritten Ebene normal, so ist auch ihre Durchschnittslinie zu dieser Ebene normal.

Denn sind PQ und RS die beiden Ebenen, welche normal zu MN angenommen werden, so muß die im Fußpunkte B ihrer Durchschnittslinie errichtete Normale AB der Ebene MN mit jener Durchschnittslinie zusammenfallen. Legt man nämlich durch AB und BQ eine Ebene, so ist sie normal zu MN, muß also die Ebene PQ selbst sein. Ebenso zeigt man, daß die durch AB und BS gelegte Ebene mit RS zusammenfällt. Daher ist die Normale AB beiden Ebenen gemeinschaftlich oder sie ist ihre Durchschnittslinie.

f) Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer dritten Ebene normal, so ist es auch die andere. (§ 133, *b.*)

Was kann von zwei Ebenen ausgesagt werden, welche zu einer dritten Ebene normal sind?

Übungsaufgaben. 1. Ist von drei Ebenen eine jede zu den beiden anderen normal, so gilt dasselbe von den drei Durchschnittslinien. Warum?

2. Ist von drei sich schneidenden Geraden eine jede zu den beiden anderen normal, so gilt dasselbe von den durch sie bestimmten Ebenen. Warum?

Die körperliche Ecke.

§ 135. Erklärungen. Gleitet ein Halbstrahl bei fester Lage seines Grenzpunktes an dem Umfange eines Polygones hin, so entsteht ein nur nach einer Seite unbegrenzter Raum, welcher eine körperliche Ecke oder Ecke schlechtweg genannt wird.

Der bewegte Halbstrahl ist die erzeugende Gerade und das Polygon, an welchem der Halbstrahl hingleitet, das Leitpolygon. Der feste Punkt O (Fig. 155) heißt der Scheitel; derselbe darf nicht in der Ebene des Leitpolygones liegen. Die einzelnen vom bewegten Halbstrahle erzeugten Ebenen sind die Seitenflächen; die Durchschnittslinien OA, OB, ... derselben heißen die Kanten der Ecke. Die Winkel zweier aufeinander folgender Kanten, z. B. AOB, BOC, ... heißen die Kantenwinkel oder Seiten; die Winkel zweier aufeinander folgender Seitenflächen werden die Flächenwinkel oder Winkel der körperlichen Ecke genannt.

Eine körperliche Ecke hat ebensoviel Seiten als Kanten u. zw. stimmt die Anzahl derselben mit der Anzahl der Seiten oder Eckpunkte des Leitpolygones überein. Man teilt die körperlichen Ecken nach der Anzahl der Seiten oder Kanten ein in dreiseitige, vierseitige, ...n-seitige Ecken oder Dreikante, Vierkante, ... Vielkante oder n-Kante.

Sind alle Kantenwinkel oder Seiten einer körperlichen Ecke gleich, so heißt sie gleichseitig; sind alle Flächenwinkel gleich, so heißt sie gleichwinklig. Ist eine körperliche Ecke sowohl gleichseitig als auch gleichwinklig, so heißt sie regelmäßig.

Zur Anfertigung von stereometrischen Modellen aus Karton bedient man sich der Netze. Ein Netz ist eine ebene Figur, welche sich ausschneiden und so zusammenlegen läßt, daß man das verlangte Modell erhält.

Übungsaufgaben. Man konstruiere: *a*) das Netz eines Dreikantes mit gegebenen Kantenwinkeln; *b*) das Netz eines gleichseitigen Dreikantes; *c*) das Netz eines gleichseitigen Vierkantes. — In welchem dieser Fälle ist die körperliche Ecke durch ihr Netz bestimmt? Sind die Ecken in *b*) und *c*) regelmäßig?

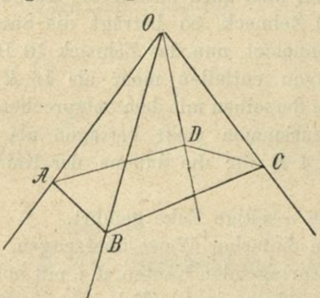

Fig. 155.

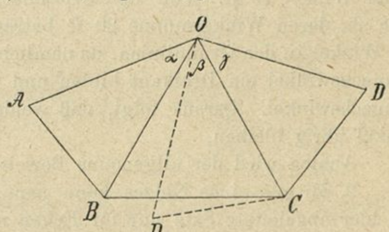

Fig. 156.

§ 136. Beziehungen zwischen den Seiten des Dreikantes. *a*) Um ein Dreikant aus seinem Netze (Fig. 156) zu bilden, dreht man die Seitenflächen AOB und COD um die Kanten OB und OC so gegeneinander, daß die Kanten OA und OD (außerhalb der Ebene BOC)

zusammenfallen. Damit dies geschehen kann, muß $\beta < \alpha + \gamma$ sein, selbst wenn β der größte von den drei Kantenwinkeln α, β, γ ist. Auf gleiche Weise findet man $\alpha < \beta + \gamma$ und $\gamma < \alpha + \beta$.

Jeder Kantenwinkel eines Dreikantes ist kleiner als die Summe der beiden anderen.

Man versuche ein Dreikant zu konstruieren, wenn $\beta = \alpha + \gamma$ ist.

b) Ist β der größte unter den Kantenwinkeln des Dreikantes und denkt man sich die Seitenfläche COD um die Kante OC so umgelegt, daß sie in die Ebene BOC fällt, so ist $\sphericalangle\, BOD_1 = \beta - \gamma$. Legt man auf analoge Weise die Seitenfläche AOB um, so muß die Kante OA über OD_1 hinausfallen; also ist $\alpha > \beta - \gamma$. (Diese Ungleichung läßt sich übrigens auch auf arithmetischem Wege aus der Ungleichung $\alpha + \gamma > \beta$ ableiten.) Ebenso findet man $\gamma > \beta - \alpha$ und ohne weiteres $\beta > \alpha - \gamma$ oder $\beta > \gamma - \alpha$.

Jeder Kantenwinkel eines Dreikantes ist größer als die Differenz der beiden anderen.

Wie lauten die analogen Sätze der Planimetrie?

Ist z. B. $\alpha = 60^0$, $\beta = 70^0$, so muß $\gamma < 60^0 + 70^0$ und $\gamma > 70^0 - 60^0$ sein, d. h. $10^0 < \gamma < 130^0$.

Zwischen welchen Grenzen liegt α, wenn $\beta = 96^0$, $\gamma = 114^0$ ist?

§ 137. Summe der Kantenwinkel. Läßt man die Kantenwinkel einer Ecke immer größer werden, so wird die Ecke immer stumpfer. Wenn schließlich die Seitenflächen in eine Ebene fallen, so beträgt die Summe aller Kantenwinkel vier Rechte. Hieraus folgt:

In jeder Ecke ist die Summe der Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Anmerkungen. 1. Zu diesem Satze kann man auch mittels der Rechnung gelangen. Ist z. B. das Leitpolygon ein (ebenes) Zehneck, so beträgt die Summe seiner Winkel 16 *R*. Von den Seitenflächen schneidet nun das Zehneck 10 Dreiecke ab, deren Winkelsumme 20 *R* beträgt. Davon entfallen mehr als 16 *R* auf die Winkel an den Grundlinien, da nämlich je zwei derselben mit dem entsprechenden Zehneckswinkel ein Dreikant bilden und daher zusammen mehr betragen als der Zehneckswinkel. Daraus folgt, daß weniger als 4 *R* für die Summe der Kantenwinkel übrig bleiben.

Analog wird der allgemeine Beweis für die n-seitige Ecke geführt.

2. Mittels eines Netzes kann man sich in einfacher Weise überzeugen, daß der hier abgeleitete Satz nur für Ecken mit vorspringenden Kanten, d. i. mit hohlen Flächenwinkeln allgemein gültig ist. Doch werden hier niemals Ecken besprochen, welche, von innen betrachtet, auch erhabene Flächenwinkel besitzen; daher wird der obige Satz in allen Fällen Geltung haben.

Übungsaufgaben. 1. Welchen Wert kann ein Kantenwinkel in einem regelmäßigen *a)* Dreikante, *b)* Vierkante, *c)* n-Kante nicht überschreiten?

2. Wie viele regelmäßige Ecken gibt es, in welchen ein Kantenwinkel gleich ist einem Winkel eines regulären *a)* Dreieckes, *b)* Viereckes, *c)* Fünfeckes, *d)* Sechseckes?

§ 138. Kongruenz und Symmetrie der körperlichen Ecken. Man nennt zwei körperliche Ecken kongruent, wenn man sich dieselben so ineinander gelegt denken kann, daß ihre Kanten und daher auch die Seitenflächen zusammenfallen. Daraus folgt, daß die Kanten- und die Flächenwinkel der einen Ecke in derselben Reihenfolge gleich sind den Kanten-, beziehungsweise den Flächenwinkeln der anderen Ecke.

Zwei Ecken heissen symmetrisch gleich oder einfach symmetrisch, wenn die Kanten- und die Flächenwinkel der einen in der entgegengesetzten Reihenfolge gleich sind den Kanten-, beziehungsweise den Flächenwinkeln der anderen. Zwei symmetrische Ecken sind im allgemeinen nicht kongruent.

Das Prisma.

§ 139. Entstehungsarten. *a)* Gleitet eine Gerade längs des Umfanges eines Polygones parallel zu ihrer ersten Lage fort, so entsteht ein nach zwei Seiten unbegrenzter Raum, welcher ein prismatischer Raum genannt wird. Man bezeichne in Fig. 157 die erzeugende Gerade und das Leitpolygon.

Der Teil eines prismatischen Raumes zwischen zwei parallelen Schnittebenen heißt ein Prisma.

b) Ein Prisma entsteht auch, wenn ein Polygon so fortschreitet, daß alle Ecken desselben parallele Gerade beschreiben. Man bezeichne in den Fig. 157 bis 159 das erzeugende Polygon und die Leitlinien.

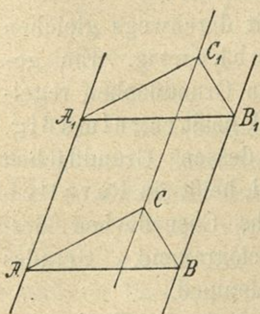

Fig. 157.

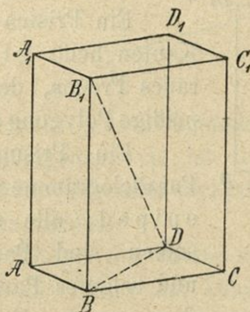

Fig. 158.

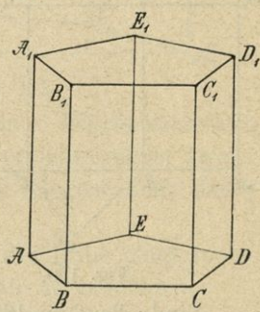

Fig. 159.

§ 140. Beschreibung. Jedes Prisma ist ein Polyeder oder Vielflach, d. i. ein von lauter ebenen Flächen begrenzter Körper. Die Summe aller Grenzflächen heißt die Oberfläche desselben.

Die beiden Polygone, welche *a)* durch die parallelen Schnitte des prismatischen Raumes entstehen, *b)* die Anfangs- und die Endlage des erzeugenden Polygones bilden, heißen die Grundflächen des Prismas; dieselben sind kongruente Polygone in parallelen Ebenen. Alle übrigen

Grenzflächen heißen Seitenflächen und ihre Summe wird der Mantel des Prismas genannt. Die Seitenflächen sind Parallelogramme. (Warum?)

Die Durchschnittslinien der Seitenflächen mit den Grundflächen oder die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten. Je zwei Grundkanten in derselben Seitenfläche sind gleich und parallel. (Warum?) — Die Durchschnittslinien je zweier aufeinander folgender Seitenflächen heißen Seitenkanten. In jedem Prisma sind alle Seitenkanten gleich und parallel. (Warum?)

Jede Grundfläche bildet mit je zwei aufeinander folgenden Seitenflächen eine Ecke des Prismas. Alle Ecken eines Prismas sind dreiseitig.

Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

Man bezeichne in den Figuren 157 bis 159 die Grundflächen, die Seitenflächen, die Grundkanten, die Seitenkanten, die Scheitel der Ecken und gebe die Konstruktion der Höhe an!

§ 141. Einteilungen und Benennungen. Nach der Anzahl der Seitenflächen teilt man die Prismen ein in dreiseitige, vierseitige, . . .n- oder mehrseitige.

Nach der Stellung der Seitenkanten gegen die Grundflächen werden die Prismen in gerade und schiefe eingeteilt. Ein Prisma heißt gerade oder schief, je nachdem die Seitenkanten zu den Grundflächen normal oder schief stehen. In jedem geraden Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke und zu den Grundflächen normal; die Seitenkanten sind gleich der Höhe. (Warum?)

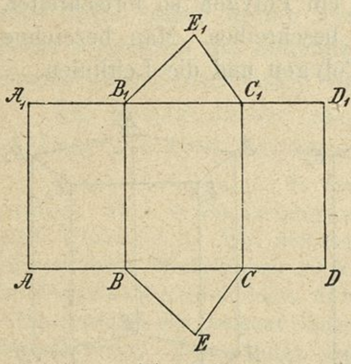

Fig. 160.

Ein Prisma mit durchwegs gleichen Kanten heißt gleichkantig. Ein gerades Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Polygone sind, heißt regelmäßig.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped; alle sechs Grenzflächen desselben sind Parallelogramme. Gerades und schiefes Parallelepiped.

Sind die Grundflächen eines geraden Parallelepipedes Rechtecke, so heißt es ein rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 158); alle sechs Grenzflächen desselben sind Rechtecke.

Ein Parallelepiped, dessen Grenzflächen kongruente Rhomben sind, heißt Rhomboeder. Ein Parallelepiped, dessen Grenzflächen Quadrate sind, heißt Würfel, Kubus oder Hexaeder.

Übungsaufgaben. 1. Man gebe *a)* von einem gleichkantigen dreiseitigen Prisma, *b)* von einem geraden Parallelepipede, *c)* von einem regelmäßigen fünfseitigen Prisma, *d)* von einem n-seitigen Prisma die Anzahl und Art der Grenzflächen und Ecken sowie die Anzahl der Kanten an! — Nach einigen Vorübungen an Modellen und Zeichnungen können solche Beschreibungen ohne direkte Anschauung ausgeführt werden.

2. Man konstruiere das Netz *a*) eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas; *b*) eines rechtwinkligen Parallelepipedes; *c*) eines Würfels; *d*) eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas! — Fig. 160 ist das Netz eines geraden dreiseitigen Prismas; $AB = BE$, $CD = CE$. Fig. 162 ist das Netz zum Mantel des schiefen dreiseitigen Prismas Fig. 161.

§ 142. Ebene Schnitte. Jeder zu den Grundflächen des Prismas parallele Schnitt ist mit denselben kongruent. (Warum?)

Ein zu einer Seitenkante normaler Schnitt steht zu allen Seitenkanten normal und heißt ein Normalschnitt oder Querschnitt des Prismas (DEF, Fig. 161). Bei welchen Prismen ist der Normalschnitt zu den Grundflächen parallel?

Eine Ebene, welche durch zwei nicht aufeinander folgende Seitenkanten eines Prismas gelegt wird, liefert einen Diagonalschnitt, welcher stets ein Parallelogramm ist. Es gibt ebenso viele Diagonalschnitte, als eine Grundfläche Diagonalen hat.

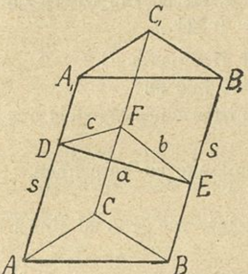

Fig. 161.

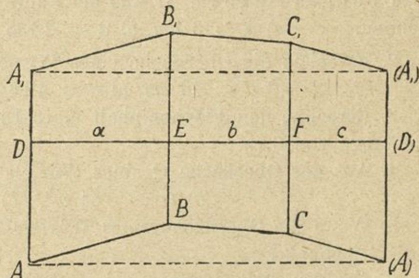

Fig. 162.

Im Parallelepipede heißt jede Diagonale eines Diagonalschnittes Diagonale des Parallelepipedes; sie ist die Verbindungslinie zweier nicht in derselben Grenzfläche liegender Eckpunkte (Gegenecken). Jedes Parallelepiped hat vier Diagonalen.

Aufgabe. Aus der Länge, der Breite und der Höhe eines rechtwinkligen Parallelepipedes die Länge der Diagonale zu berechnen.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke BCD (Fig. 158) findet man zunächst $\overline{BD}^2$ und hierauf aus dem rechtwinkligen Dreiecke B_1BD die gesuchte Diagonale B_1D. Die Rechnung ist für spezielle Werte der bezeichneten Dimensionen und auch allgemein durchzuführen. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Übungsaufgaben. 1. $a = 1\ cm$, $b = 1{\cdot}4\ cm$, $c = 3{\cdot}5\ cm$, $d = ?$

2. Berechne die Diagonale eines Würfels aus der Kante a!

a) $a = 3\ cm$, *b*) $a = 1\ m$.

3. Berechne die Kante eines Würfels aus der Diagonale d!

a) $d = 12\ cm$, *b*) $d = 2\ m$.

§ 143. Oberflächenbestimmung. Bedeutet O die Oberfläche, G eine Grundfläche und M den Mantel des Prismas, so ist

$$O = 2G + M.$$

Der Mantel eines geraden Prismas ist einem Rechtecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Prismas zur Höhe hat, $M = uh$ (Fig. 160).

Bezeichnet man im schiefen Prisma (Fig. 161) mit s eine Seitenkante, mit a, b, c, . . . die Seiten eines Normalschnittes, so ist

$$M = as + bs + cs + \ldots = (a + b + c + \ldots) s.$$

Der Mantel eines schiefen Prismas ist einem Rechtecke gleich, welches den Umfang eines Normalschnittes zur Grundlinie und eine Seitenkante zur Höhe hat.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich auch durch die Betrachtung des Netzes, welches dem Mantel des schiefen drei- oder mehrseitigen Prismas entspricht (Fig. 162).

Übungsaufgaben. 1. Aus der Kante a eines Würfels ist die Oberfläche zu berechnen. a) $a = 3$ dm, b) $a = 2·135$ m, c) $a = 0·324$ m.

2. Berechne die Oberfläche eines Würfels aus der Diagonale d!
a) $d = 16$ cm, b) $d = 12·64$ m, c) $d = 4·23$ m.

3. Berechne den Flächeninhalt eines Diagonalschnittes eines Würfels aus der Kantenlänge von 6 cm!

4. Aus der Oberfläche O eines Würfels die Kantenlänge zu berechnen.
a) $O = 8·64$ m^2, b) $O = 1$ m^2.

5. Wenn die Oberfläche eines Würfels 3 dm^2 beträgt, wie groß ist eine Kante und die Diagonale?

6. Aus den Dimensionen a, b, c (Länge, Breite, Höhe) eines rechtwinkligen Parallelepipedes α) die Diagonale, β) die Oberfläche zu berechnen.
$a = 1·6$ m, $b = 0·9$ m, $c = 0·4$ m.

7. Um ein oben offenes Gefäß von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipedes herzustellen, soll man genau 0·6 m^2 Blech verwenden. Wie hoch wird das Gefäß sein, wenn seine Länge 0·5 m und seine Breite 0·35 m betragen soll?

8. Man suche die Oberfläche eines regelmäßigen α) dreiseitigen, β) vierseitigen, γ) sechsseitigen Prismas, wenn die Grundkante a und die Seitenkannte b bekannt sind!
a) $a = 4$ dm, $b = 6$ dm; b) $a = b = 1$ m.

§ 144. Volumsbestimmung, Erklärungen. Die Größe des Raumes, welchen ein Körper einnimmt, heißt sein Rauminhalt oder Volumen. Als Einheit des Volumens nimmt man einen Würfel an, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Je nachdem 1 m, 1 dm, 1 cm u. s. f. als Längeneinheit gewählt wird, heißt das Volumen des entsprechenden Würfels 1 Kubikmeter, 1 Kubikdezimeter, 1 Kubikzentimeter u. s. f. Den Rauminhalt eines Körpers bestimmen oder sein Volumen messen heißt jene Zahl suchen, welche angibt, wie oft die Volumseinheit in dem gegebenen Volumen enthalten ist. Diese Zahl heißt die Maßzahl des gegebenen Volumens.

§ 145. Empirische Volumsbestimmung. *a)* Bei Hohlräumen geschieht die Bestimmung des Volumens durch Eingießen einer Flüssigkeit, welche man hierauf in ein mit einer Volumenskala versehenes Gefäß übergießt.

b) Um das Volumen eines festen Körpers zu bestimmen, füllt man ein Gefäß, welches etwa die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedes hat, teilweise mit einer Flüssigkeit und taucht den gegebenen Körper ganz in dieselbe. Das Volumen des Körpers ist dann gleich dem Volumen der durch ihn verdrängten Flüssigkeit, d. i. gleich dem Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Grundfläche der innere Querschnitt des Gefäßes und dessen Höhe der Abstand der beiden Niveaus vor und nach dem Eintauchen ist.

c) Hat der Körper durchaus gleiche Dichte, so ist die Zahl, welche angibt, wie oft das spezifische Gewicht (das Gewicht der Volumseinheit) des Körpers in seinem absoluten Gewichte enthalten ist, zugleich die Maßzahl des Volumens. $V = \frac{P}{s}$.

Z. B. 1 cm^3 Gußeisen wiegt $7 \cdot 2$ g. Man erhält somit das Volumen von 1 $kg = 1000$ g Gußeisen, und zwar in Kubikzentimetern, indem man 1000 durch $7 \cdot 2$ dividiert, also $V = 138 \cdot 9$ cm^3. Berechne ebenso das Volumen von 1 kg Quecksilber ($s = 13 \cdot 59$)!

Aufgabe der Geometrie ist es zu zeigen, wie das Volumen eines Körpers aus den Maßzahlen jener Strecken, Flächen u. dgl. berechnet wird, von denen es abhängt. Das unmittelbare Aneinanderlegen von Volumseinheiten in dem gegebenen Raume, bis derselbe gerade erschöpft wird, ist in der Regel nicht ausführbar.

§ 146. Das Prinzip von Cavalieri. Wenn ein gerades und ein schiefes Parallelepiped mit kongruenten Grundflächen und gleichen Höhen auf eine Ebene MN (Fig. 163) aufgestellt werden, so liegen die beiden oberen Grundflächen in einer zu MN parallelen Ebene und jede dazwischenliegende zu MN parallele Ebene wie PQ schneidet die beiden Parallelepipede in kongruenten Parallelogrammen. (Warum?)

Die beiden Parallelepipede haben gleiches Volumen, wovon man sich auf folgende Weise überzeugen kann. Man denke sich aus dünnem Blech mit $ABCD$ kongruente Figuren ausgeschnitten und in gehöriger Anzahl so übereinander gelegt, daß das erste Parallelepiped gebildet wird. Verschiebt man nun die Blechplatten derart, daß $ABCD$ auf $EFGH$ fällt und zwei Reihen von Ecken sich längs der Geraden EE_1 und FF_1 anordnen, so erhält man das zweite Parallelepiped. (Von den geringen treppenartigen Unebenheiten der geneigten Seitenflächen kann abgesehen werden, da dieselben um so kleiner ausfallen, je dünner das Blech genommen wird.) Hieraus folgt, daß die beiden Parallelepipede gleiches Volumen besitzen und zwar das Volumen des benützten Blechmaterials. Eine ähnliche Betrachtung läßt sich anstellen, wenn zwei andere Körper verglichen werden, welche nicht kongruente, sondern nur inhaltsgleiche Grundflächen besitzen, und wenn sich bei einer parallelen Verschiebung der Schnittebene beliebig geformte, jedoch inhaltsgleiche Schnitte in beiden Körpern ergeben. Nur muß dann jede Platte des ersten Körpers durch eine gleich große, jedoch anders geformte ersetzt werden. Modell!

Lassen sich zwei Körper in eine solche Lage zu einer Ebene bringen, daß sie durch jede zu derselben parallele Ebene in gleichen Flächen geschnitten werden, so haben sie gleiches Volumen. (Prinzip von Cavalieri.)

Hieraus folgt unmittelbar: Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

Man findet daher das Volumen eines beliebigen Prismas, wenn man das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe berechnet.

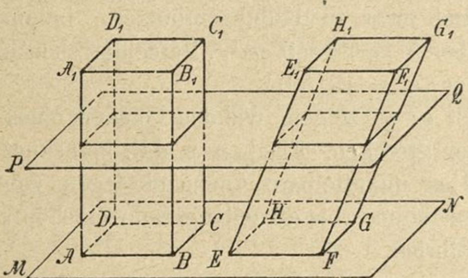

Fig. 163.

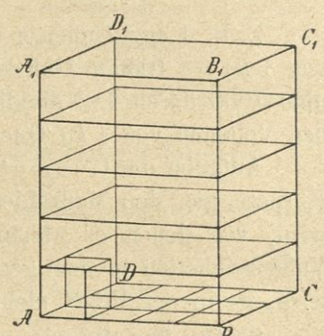

Fig. 164.

§ 147. Volumen des rechtwinkligen Parallelepipedes. Die Länge eines rechtwinkligen Parallelepipedes betrage a, die Breite b und die Höhe c Längeneinheiten. Durch Schnitte parallel zu den Grundflächen läßt sich das Parallelepiped in c Platten zerlegen, deren Höhen gleich der Längeneinheit sind. Durch Schnitte parallel zu den Seitenflächen kann man nun jede Platte in ebenso viele Volumseinheiten zerlegen, als Flächeneinheiten auf die Grundfläche entfallen. Die Anzahl derselben ist ab, daher das Volumen $V = abc$. Modell!

Das Volumen eines rechtwinkligen Parallepipedes wird gefunden, indem man (die Maßzahlen der) Länge, Breite und Höhe miteinander multipliziert.

In Fig. 164 ist $a = 4\ cm$, $b = 3\ cm$, $c = 5\ cm$, daher $V = 60\ cm^3$.

Bezeichnet man die Grundfläche mit G, die Höhe mit h, so ist $G = ab$, $h = c$, daher $V = Gh$.

Da der Würfel ein gleichkantiges rechtwinkliges Parallelepiped ist, so erhält man $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

Das Volumen eines Würfels oder Kubus wird gefunden, indem man die Maßzahl der Kante zur dritten Potenz erhebt (kürzer: indem man eine Kante zum Kubus erhebt).

Anmerkungen. 1. Wie lassen sich nun die Bezeichnung „der Kubus einer Zahl" und die Zeichen 1 m^3, 1 dm^3, 1 cm^3 u. s. f. für ein Kubikmeter, ein Kubikdezimeter, ein Kubikzentimeter u. s. f. erklären?

2. Mittels des letzten Satzes findet man

$$1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1{,}000.000\,cm^3 = 1.000{,}000.000\,mm^3,$$
$$1\,dm^3 = 1000\,cm^3 = 1{,}000.000\,mm^3, \text{ u. s. f.}$$

Als Hohlmaß ist 1 dm^3 = 1 l (Liter), 100 l = 1 hl (Hektoliter).

3. Aus $V = a^3$ folgt $a = \sqrt[3]{V}$; in Worten? Dritte Wurzel = Kubikwurzel!

Übungsaufgaben. 1. Berechne das Volumen eines Würfels aus der Kante a!

$a)$ $a = 12\ cm$, $b)$ $a = 0·34\ m$, $c)$ $a = 1·74\ldots\ m$.

2. Berechne das Volumen eines Würfels aus der Diagonale d!

Anleitung. $a^2 = \frac{d^2}{3}$, $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $V = a^2 . a = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$.

$a)$ $d = 6\ cm$, $b)$ $d = 1·26\ m$, $c)$ $d = 0·369..\ m$.

3. Berechne das Volumen eines Würfels aus der Oberfläche O!

Anleitung. $a^2 = \frac{O}{6}$, $a = \frac{\sqrt{6\,O}}{6}$, $V = \frac{O\sqrt{6\,O}}{36}$.

$a)$ $O = 54\ cm^2$, $b)$ $O = 1\ m^2$, $c)$ $O = 0·3246\ m^2$.

4. Welches Gewicht hat ein marmorner Würfel, wenn die Kante desselben 62 cm beträgt? (Spez. Gew. = 2·84.)

5. Wie groß ist eine Kante eines Würfels, dessen Volumen = V ist?

$a)$ $V = 1728\ cm^3$, $b)$ $V = 5·237\ m^3$.

6. Berechne die Oberfläche eines Würfels aus dem Volumen V!

$a)$ $V = 9·261\ dm^3$, $b)$ $V = 1\ hl$, $c)$ $V = 0·379\ m^3$.

7. Aus der Kante a eines Würfels jene eines doppelt so großen Würfels zu berechnen. $a)$ $a = 1\ dm$, $b)$ $a = 0·214\ m$.

8. Ein Würfel aus Blei ist 1 kg schwer; wie groß ist eine Kante des Würfels? (Spez. Gew. = 11·35.)

9. Man bestimme durch Messung oder Schätzung die Dimensionen eines Körpers oder Raumes, welcher die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedes hat, (z. B. eines Zimmers, eines Kastens, einer Schultafel u. s. f.) und berechne hieraus das Volumen!

10. Wie viele Hektoliter faßt ein Getreidekasten von 3 m Länge, 2 m Breite und 1·2 m Höhe?

11. Das aus Holz gefertigte Modell eines rechtwinkligen Parallelepipedes hat das Gewicht P und die Dimensionen a, b, c; wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes? Z. B. $P = 79·04\,g$, $a = 52\,mm$, $b = 38\,mm$, $c = 80\,mm$.

12. In ein 64 cm langes und 25 cm breites Gefäß, welches die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedes hat und nur zum Teile mit Wasser gefüllt ist, wird ein

unregelmäßig geformter Stein gelegt, worauf das Wasser um 35 *cm* steigt und den Stein bedeckt. Welches Volumen hat der Stein?

§ 148. Volumen des Prismas überhaupt. Hat das Prisma die Grundfläche G und die Höhe h, so ist sein Volumen $V = Gh$, da es nach § 146 ebenso groß ist wie das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes mit der Grundfläche G und der Höhe h.

Das Volumen eines Prismas wird gefunden, indem man die (Maßzahl der) Grundfläche mit der (Maßzahl der) Höhe multipliziert.

Für ein zweites Prisma findet man $V_1 = G_1 h_1$. Daraus folgt

$$\text{für } G = G_1 \quad V : V_1 = h : h_1,$$
$$\text{für } h = h_1 \quad V : V_1 = G : G_1.$$

Man drücke diese Proportionen in Lehrsätzen aus!

Für ein Prisma sei $G = 2{\cdot}14\,m^2 = 214\,dm^2$, $h = 0{\cdot}7\,m = 7\,dm$; dann ist $V = (214 \times 7)\,dm^3 = 1498\,dm^3 = 1{\cdot}498\,m^3$. Zu demselben Resultate gelangt man durch folgende Rechnung: $V = (2{\cdot}14 \times 0{\cdot}7)\,m^3 = 1{\cdot}498\,m^3$. Man überzeugt sich auf diesem Wege, daß man die Formel $V = Gh$ für jedes Prisma direkt benützen kann, auch wenn G und h nicht ganze Zahlen sind.

Übungsaufgaben. 1. Aus der Grundfläche und der Höhe eines Prismas das Volumen zu berechnen. *a)* $G = 1\,m^2$, $h = 4\,dm$, *b)* $G = 0{\cdot}2\,m^2$, $h = 1{\cdot}3\,m$.

2. Welche Höhe hat ein Prisma, dessen Grundfläche 45 cm^2 und dessen Volumen 1 dm^3 beträgt?

3. Wie groß ist die Grundfläche eines Prismas von der Höhe $h = 35\,cm$ und dem Volumen $V = 45{\cdot}5\,dm^3$?

4. Man berechne das Volumen eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas, dessen Grundkante a und dessen Höhe h ist. *a)* $a = 1\,dm$, $h = 2{\cdot}4\,dm$, *b)* $a = h = 8\,cm$.

5. In einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma beträgt die Höhe 12 *cm* und das Volumen 124·7 cm^3. Wie groß ist eine Grundkante?

6. Welchen Inhalt hat ein Dachraum von der Form eines liegenden dreiseitigen Prismas, dessen Boden ein Rechteck von 8·4 *m* Länge und 5·2 *m* Breite ist und vom Dachfirst (der gegenüberliegenden Seitenkante des Prismas) 3 *m* Abstand hat?

7. Eine 42 *m* lange und 3·5 *m* hohe Mauer hat als Querschnitt ein Trapez mit den Parallelseiten $a = 1\,m$, $b = 0{\cdot}64\,m$. Welches Volumen hat die Mauer und wie groß sind die Herstellungskosten für 1 m^3 Mauerwerk, wenn die Gesamtkosten 1024·59 K betragen?

8. Ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma mit der Grundkante a und der Höhe h wird durch einen Diagonalschnitt in ein dreiseitiges und ein fünfseitiges Prisma zerlegt. Man berechne die Oberflächen und Volumina dieser beiden Prismen!

Der Zylinder.

§ 149. Entstehungsarten. *a)* Ein zylindrischer Raum entsteht, wenn eine Gerade parallel zu ihrer ersten Lage längs eines Kreises gleitet (Fig. 165). Erzeugende Gerade, Leitkreis.

Die von der erzeugenden Geraden beschriebene Fläche heißt eine Zylinderfläche; die Gerade OO_1, welche durch den Mittelpunkt des Leitkreises parallel zur erzeugenden Geraden gelegt wird, heißt die Achse der Zylinderfläche.

Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet den zylindrischen Raum in einem Kreise, dessen Mittelpunkt (O_1) zugleich der Durchschnittspunkt der Achse mit der Schnittebene ist. Denn sind AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ die zwischen den beiden parallelen Ebenen enthaltenen Strecken der erzeugenden Geraden in speziellen Lagen, so sind die Vierecke AOO_1A_1, BOO_1B_1 $COO_1C_1, \ldots$ Parallelogramme (warum?); daraus folgt $A_1O_1 = AO$, $B_1O_1 = BO$, $C_1O_1 = CO, \ldots$ also auch $A_1O_1 = B_1O_1 = C_1O_1 = \ldots$

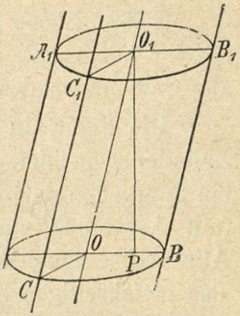

Fig. 165.

Der Teil des zylindrischen Raumes, welcher zwischen zwei zur Ebene des Leitkreises parallelen Schnittebenen enthalten ist, heißt ein Zylinder (genauer ein Kreiszylinder).

b) Ein Zylinder entsteht auch, indem eine Kreisfläche parallel zu ihrer ersten Lage so fortschreitet, daß ihr Mittelpunkt eine Gerade beschreibt. Erzeugender Kreis, Leitgerade oder Achse.

c) Einen Zylinder kann man sich auch aus einem regelmäßigen n-seitigen Prisma dadurch entstanden denken, daß die Seitenzahl n unendlich groß geworden ist.

§ 150. Beschreibung. Die Oberfläche des Zylinders besteht aus den beiden Grundflächen, welche kongruente Kreise in parallelen Ebenen sind, und der krummen Seitenfläche, welche der Mantel genannt wird. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Grundflächen heißt die Achse, der Abstand der beiden Grundflächen (O_1P) die Höhe des Zylinders.

Der zwischen den beiden Grundflächen enthaltene Teil der erzeugenden Geraden heißt eine Seitenlinie des Zylinders. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet den Mantel in zwei Seitenlinien. Alle Seitenlinien des Zylinders sind einander und der Achse gleich und parallel.

§ 151. Einteilung und Benennung. Je nachdem die Achse zur Grundfläche normal oder schief steht, heißt der Zylinder gerade oder schief.

Im geraden Zylinder (Fig. 166) ist die Achse zugleich die Höhe. Man kann sich den geraden Zylinder auch durch Rotation eines Rechteckes um eine Seite entstanden denken und zählt ihn daher zu den Rotationskörpern.

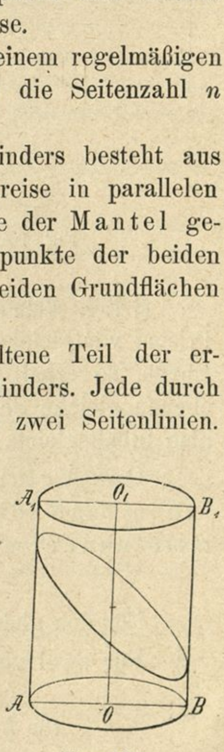

Fig. 166.

Ein gerader Zylinder, in welchem der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe ist, heißt gleichseitig.

§ 152. Ebene Schnitte. Jeder zur Grundfläche parallele Schnitt ist mit ihr kongruent, also auch ein Kreis. Jeder andere Schnitt, welcher alle Seitenlinien des Zylinders trifft, liefert eine Ellipse (Fig. 166).

Die Figur, in welcher eine durch die Achse gelegte Ebene den Zylinder schneidet, heißt ein Achsenschnitt desselben und ist stets ein Parallelogramm. (Warum?) Alle Achsenschnitte des schiefen Zylinders (mit Ausnahme eines einzigen) sind schiefwinklige Parallelogramme. Alle Achsenschnitte des geraden Zylinders sind Rechtecke und jene des gleichseitigen Zylinders Quadrate.

§ 153. Oberflächenbestimmung. $O = 2G + M.$

Denkt man sich den Mantel eines geraden Zylinders längs einer Seitenlinie aufgeschnitten und in eine Ebene aufgerollt, so erhält man ein Rechteck, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Zylinders zur Höhe hat (Fig. 167). Daher ist

$M = 2r\pi h$, also

$O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r + h).$

Beim gleichseitigen Zylinder ist $h = 2r$, daher $O = 6r^2\pi.$

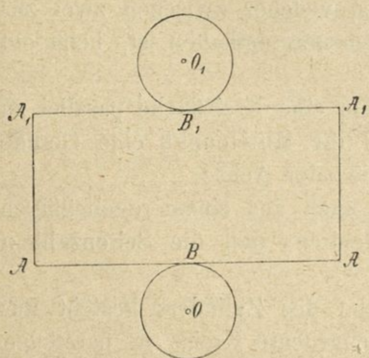

Fig. 167.

Die Mantelfläche des schiefen Zylinders läßt sich auf dieser Unterrichtsstufe nicht berechnen.

§ 154. Volumsbestimmung. Stellt man einen Zylinder und ein Prisma von gleicher Grundfläche (G) und gleicher Höhe (h) auf dieselbe Ebene, so erhält man durch alle zu dieser Ebene parallelen Schnittebenen gleiche Schnitte (von der Größe G). Die beiden Körper sind also inhaltsgleich.

Das Volumen eines Zylinders wird also gefunden, indem man (die Maßzahlen der) Grundfläche und Höhe miteinander multipliziert.

$$V = Gh = r^2\pi h.$$

Für den gleichseitigen Zylinder ist $V = 2r^3\pi.$

Für zwei verschiedene Zylinder hat man

$V = r^2\pi h$ und $V_1 = r_1^2\pi h_1$. Daraus folgt

für $h = h_1$ $\quad V : V_1 = r^2 : r_1^2$

und für $r = r_1$ $\quad V : V_1 = h : h_1$. In Worten?

Übungsaufgaben. 1. Berechne die Oberfläche und das Volumen eines geraden Zylinders für *a)* $r = 46\,mm$, $h = 76\,mm$, *b)* $r = 13\,cm$, $h = 25{\cdot}7\,cm$, *c)* $r = 0{\cdot}23\,m$, $h = 4{\cdot}25\,m$.

2. Berechne die Oberfläche und das Volumen eines gleichseitigen Zylinders aus dem Radius der Grundfläche!

a) $r = 3\,cm$, *b)* $r = 1{\cdot}2\,dm$, *c)* $r = 0{\cdot}253\ldots m$.

3. Man kennt die Grundfläche und das Volumen eines geraden Zylinders. Wie groß ist die Höhe?

a) $V = 78\,cm^3$, $G = 26\,cm^2$, *b)* $V = 1\,m^3$, $G = 1{\cdot}25\,m^2$.

4. Aus der Grundfläche und der Höhe eines geraden Zylinders die Oberfläche und das Volumen zu berechnen. $G = 24\,cm^2$, $h = 5\,cm$.

5. Aus der Oberfläche eines gleichseitigen Zylinders die Höhe zu berechnen.

a) $O = 10\,m^2$, *b)* $O = 0{\cdot}188496\,m^2$.

6. Aus der Oberfläche eines gleichseitigen Zylinders das Volumen zu berechnen.

a) $O = 1\,m^2$, *b)* $O = 15{\cdot}26\,m^2$.

7. Aus dem Volumen eines gleichseitigen Zylinders ist der Radius der Grundfläche zu berechnen. *a)* $V = 1\,m^3$, *b)* $V = 235\,cm^3$.

8. Berechne die Oberfläche eines gleichseitigen Zylinders aus dem Volumen!

a) $V = 2{\cdot}4\,dm^3$, *b)* $V = 3478\,cm^3$.

9. Einem Würfel ist ein Zylinder eingeschrieben, d. h. die Grundflächen des Zylinders sind zwei gegenüberliegenden Flächen des Würfels eingeschrieben. Wie verhalten sich *α)* die Oberflächen, *β)* die Volumina der beiden Körper?

10. Man bringt einen Körper von unregelmäßiger Gestalt in einem zylindrischen Glasgefäße unter Wasser und soll aus dem inneren Durchmesser (14 *cm*) des Gefäßes und dem Abstande der Niveaus vor und nach dem Eintauchen (12 *mm*) das Volumen des Körpers berechnen.

11. Berechne den Bodendruck einer vertikalen zylindrischen Quecksilbersäule von 76 *cm* Höhe und 1 cm^2 Querschnitt! (Spez. Gew. 13·59.)

12. Ein Rechteck mit der Grundlinie a und der Höhe b rotiert einmal um a und ein anderesmal um b. Wie verhalten sich *α)* die Oberflächen, *β)* die Volumina der beiden Rotationskörper?

13. Ein zylindrisches Gefäß ist 18 *cm* hoch und soll 1 *l* fassen. Wie groß muß der innere Durchmesser genommen werden?

14. In einer engen zylindrischen Glasröhre befindet sich ein 47 *mm* langer Quecksilberfaden, dessen Gewicht 585·5 *mg* beträgt. Wie groß ist der innere Durchmesser der Röhre, wenn das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13·59 ist?

15. Ein Zylinder ist einem Würfel umgeschrieben, d. h. die Grundflächen des Zylinders sind zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels umgeschrieben. Wie verhalten sich *α)* die Oberflächen, *β)* die Volumina der beiden Körper?

16. Einem regelmäßigen dreiseitigen Prisma mit der Grundkante a und der Höhe h wird ein Zylinder umgeschrieben. Wie groß ist das Volumen des letzteren? $a = 42\,cm$, $h = 55\,cm$.

17. Man berechne die Oberfläche und das Volumen einer geraden zylindrischen Röhre, wenn die Radien des äußeren und des inneren Umfanges und die Länge der Röhre gegeben sind. Anleitung:

$$O = 2\,(R^2 - r^2)\,\pi + 2\,R\,\pi\,h + 2\,r\,\pi\,h = 2\,\pi.\,[(R^2 - r^2) + Rh + r\,h] =$$
$$2\pi\,[(R + r)\,(R - r) + (R + r)\,h] = 2\pi\,(R + r)\,.\,(R - r + h).$$
$$R = 12\,cm,\ r = 9\,cm,\ h = 5\,m.$$

18. Ein 6 *m* tiefer Brunnen von zylindrischer Form wurde ringsherum mit einer 4 *dm* starken Mauer versehen und hatte dann noch einen inneren Durchmesser von 2·2 *m*. Wie groß waren die Herstellungskosten, wenn das Herausheben von 1 m^3 Erdreich im Durchschnitte 6·4 K kostet und wenn 1 m^3 Mauerwerk mit 13 K berechnet wird?

Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

§ 155. Entstehung, Beschreibung. Legt man durch eine körperliche Ecke eine Schnittebene, welche alle Kanten durchschneidet, so begrenzen die Seitenflächen und die Schnittebene ein Polyeder, welches eine Pyramide heißt (Fig. 168). Aus diesem Grunde wird die körperliche Ecke auch ein pyramidaler Raum genannt.

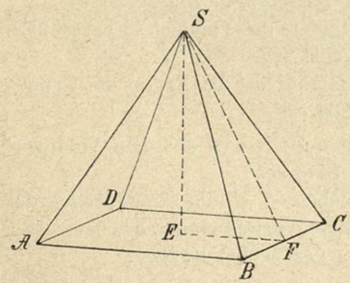

Fig. 168.

Aus der Beschreibung des Prismas erklärt sich ohne weiteres die Bedeutung der Ausdrücke:

Grundfläche, Seitenflächen, Mantel, Grundkanten, Seitenkanten der Pyramide.

Die Seitenflächen sind stets Dreiecke und die Ecken an der Grundfläche stets dreiseitig. Der Schnittpunkt aller Seitenkanten heißt die Spitze und die Normale von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe der Pyramide.

§ 156. Einteilung und Benennung. Nach der Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man dreiseitige, vierseitige, ... *n*- oder mehrseitige Pyramiden.

Nach der Größe der Seitenkanten unterscheidet man Pyramiden mit gleichen Seitenkanten (auch gerade oder gleichschenklige Pyramiden genannt) und solche mit ungleichen Seitenkanten (schiefe, ungleichschenklige Pyramiden). Sind alle Seitenkanten einer Pyramide gleich, so sind die Eckpunkte der Grundfläche von dem Fußpunkte der Höhe gleich weit entfernt. Die Grundfläche einer Pyramide mit gleichen Seitenkanten ist also ein Sehnenvieleck, in welchem der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises der Fußpunkt der Höhe ist Die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke.

Eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten heißt regelmäßig, wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist. Die Seitenflächen der regelmäßigen Pyramide sind kongruente gleichschenklige Dreiecke. Die Ecke an der Spitze ist regelmäßig.

Sind alle Kanten einer Pyramide gleich, so heißt sie gleichkantig. Da die Seitenkanten gleich sind, so ist die Grundfläche ein

Sehnenvieleck; und da die Grundfläche auch gleichseitig ist, so ist sie ein regelmäßiges Polygon. Jede gleichkantige Pyramide ist also regelmäßig. Die Seitenflächen sind kongruente gleichseitige Dreiecke. Daraus folgt, daß es nur drei-, vier- und fünfseitige gleichkantige Pyramiden gibt. (Warum?)

Die dreiseitige gleichkantige Pyramide heißt auch Tetraeder (Fig. 169); das Oktaeder (Fig. 182) besteht aus zwei vierseitigen gleichkantigen Pyramiden.

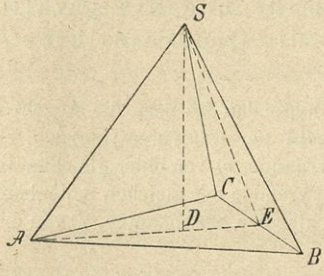

Fig. 169.

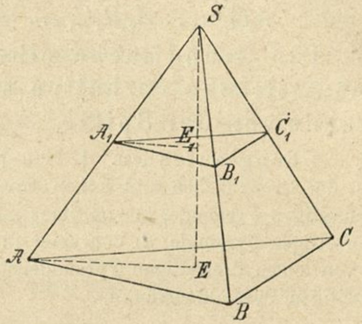

Fig. 170.

§ 157. Ebene Schnitte; der Pyramidenstumpf. *a)* Wird eine Ebene durch zwei nicht aufeinander folgende Seitenkanten einer Pyramide gelegt, so erhält man einen Diagonalschnitt u. zw. stets ein Dreieck. Jede vier- oder mehrseitige Pyramide läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe zerlegen.

b) Jeder zur Grundfläche parallele Schnitt ist ihr ähnlich. Denn die Grundfläche $ABC\ldots$ (Fig. 170) und das durch einen parallelen Schnitt erhaltene Polygon $A_1B_1C_1\ldots$ haben je zwei Winkel, deren Scheitel in derselben Seitenkante liegen, gleich und die entsprechenden Seiten proportional.

$\sphericalangle\, ABC = A_1B_1C_1$, $\sphericalangle\, BCA = B_1C_1A_1, \ldots$ (warum?).

Da ferner $\triangle\, ABS \sim \triangle\, A_1B_1S$, $\triangle\, BCS \sim \triangle\, B_1C_1S, \ldots$, so folgt $SA : SA_1 = AB : A_1B_1 = SB : SB_1 = BC : B_1C_1 = \ldots$, also $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1 = \ldots$

Durch den zur Grundfläche parallelen Schnitt zerfällt die Pyramide in zwei Polyeder, den Pyramidenstumpf und die Ergänzungspyramide. Der Pyramidenstumpf ist der zwischen der Grundebene und der parallelen Schnittebene enthaltene Teil der ganzen Pyramide. Die beiden in parallelen Ebenen liegenden Polygone heißen die Grundflächen und ihr Abstand (EE_1) die Höhe des Pyramidenstumpfes. Die Grundflächen sind ähnliche Polygone, die Seitenflächen Trapeze.

Hat die ganze Pyramide gleiche Seitenkanten, so gilt dasselbe von der Ergänzungspyramide und dem Pyramidenstumpfe. Ist die ganze Pyramide regelmäßig, so heißt auch der zugehörige Pyramidenstumpf r e g e l m ä ß i g.

c) Zieht man $SE \perp ABC$ (Fig. 170), so ist $\triangle AES \sim \triangle A_1E_1S$, also $SE : SE_1 = SA : SA_1 = AB : A_1B_1$, also auch $\overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = \overline{SE}^2 : \overline{SE_1}^2$. Da nun die Polygone $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ ähnlich sind, so folgt nach § 118

$$ABC\ldots : A_1B_1C_1\ldots = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = \overline{SE}^2 : \overline{SE_1}^2.$$

D i e G r u n d f l ä c h e e i n e r P y r a m i d e u n d d i e p a r a l l e l e S c h n i t t f l ä c h e v e r h a l t e n s i c h w i e d i e Q u a d r a t e i h r e r A b - s t ä n d e v o n d e r S p i t z e.

Ü b u n g s a u f g a b e n. 1. Man gebe von folgenden Körpern die Anzahl und Art der Grenzflächen und Ecken sowie die Anzahl der Kanten an: a) von einer dreiseitigen Pyramide, b) von einer n-seitigen Pyramide, c) von einer gleichkantigen vierseitigen Pyramide, d) von einer fünfseitigen Pyramide mit gleichen Seitenkanten, e) von einem dreiseitigen Pyramidenstumpfe mit gleichen Seitenkanten, f) von einem n-seitigen Pyramidenstumpfe.

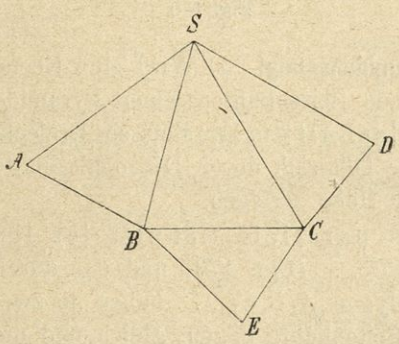

Fig. 171.

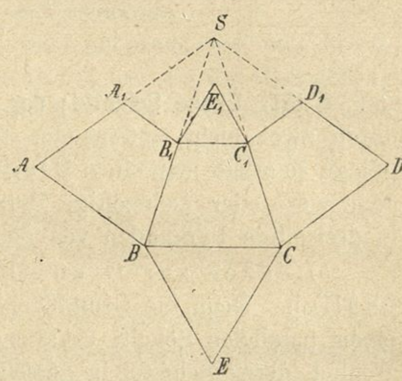

Fig. 172.

2. Man konstruiere das Netz a) eines Tetraeders, b) einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, c) eines dreiseitigen Pyramidenstumpfes, d) eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes. Fig. 171 ist das Netz einer dreiseitigen Pyramide; Fig. 172 ist das Netz eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes.

3. Man teilt die Höhe h einer Pyramide mit der Grundfläche G in drei gleiche Teile und legt durch die Teilungspunkte zur Grundfläche parallele Schnittebenen. Wie groß sind die beiden Schnitte? $G = 9\,cm^2$.

4. In einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h ist ein zur Grundfläche paralleler Schnitt $a) = \frac{1}{2}G$, $b) = \frac{1}{10}G$. Welche Entfernung vom Scheitel hat die Schnittebene?

§ 158. Oberflächenbestimmung. Für die Oberfläche einer Pyramide gilt die Formel $O = G + M$.

Bei der n-seitigen regelmäßigen Pyramide ist $M = n \cdot \frac{ah_1}{2}$, worin a die Grundkante und h_1 die Höhe eines Seitendreieckes (Seitenhöhe) bedeutet. Ist nun u der Umfang der Grundfläche, so hat man $u = na$, also ist $M = \frac{uh_1}{2}$. (In Worten?)

§ 159. Volumsbestimmung. *a)* Haben zwei Pyramiden gleiche Grundflächen (G) und gleiche Höhen (h) und stellt man dieselben mit ihren Grundflächen auf eine Ebene MN, so werden sie durch jede zu MN parallele Ebene in gleichen Flächen geschnitten. Denn die Schnittebene hat von den Spitzen beider Pyramiden gleiche Abstände (x); man erhält also für die Schnitte G_1 und G_2 aus den Proportionen $G : G_1 = h^2 : x^2$, $G : G_2 = h^2 : x^2$ gleiche Werte.

Daraus schließt man nach dem Satze von Cavalieri:

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

b) Jedes dreiseitige Prisma kann in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt werden. Durch den Schnitt A_1B_1C zerfällt nämlich das dreiseitige Prisma $ABCA_1B_1C_1$ (Fig. 173) in die dreiseitige Pyramide $A_1C_1CB_1$ (I) und die vierseitige Pyramide ABB_1A_1C. Die letztere wird nun durch den Diagonalschnitt AB_1C in die dreiseitigen Pyramiden AA_1B_1C (II) und ABB_1C (III) zerlegt. Die Pyramiden I und II sind einander gleich, denn sie haben gleiche Grundflächen, $A_1C_1C = AA_1C$, und eine gemeinschaftliche Höhe, d. i. die Normale von der gemeinschaftlichen Spitze B_1 auf die Ebene ACC_1A_1. Auch die Pyramiden II und III sind gleich, denn sie haben gleiche Grundflächen, $AA_1B_1 = ABB_1$, und eine gemeinschaftliche Höhe, d. i. die Normale von der gemeinschaftlichen Spitze C auf die Ebene ABB_1A_1. (Modell!) Da also die drei Pyramiden einander gleich sind, so ist eine jede der dritte Teil des dreiseitigen Prismas. Bezeichnet man die Grundfläche ABC des dreiseitigen Prismas mit G und die Höhe mit h, so ist sein Volumen $= Gh$. Die Pyramide $ABCB_1$ hat auch die Grundfläche G und die Höhe h, ihr Volumen beträgt also nach dem Vorigen $\frac{Gh}{3}$.

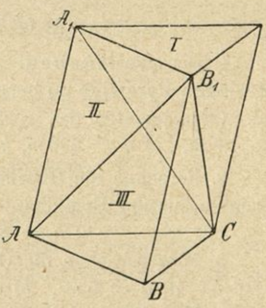

Fig. 173.

Hieraus folgt:

Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide wird gefunden, indem man die (Maßzahl der) Grundfläche mit der (Maßzahl der) Höhe multipliziert und das Produkt durch 3 dividiert.

$$V = \frac{Gh}{3} = G \cdot \frac{h}{3} = \frac{G}{3} \cdot h;\quad G = \frac{3V}{h};\quad h = \frac{3V}{G}.$$

c) Hat eine mehrseitige Pyramide die Grundfläche G und die Höhe h, so ist sie nach *a)* inhaltsgleich mit einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche G und deren Höhe h ist. Daher ist für jede der beiden Pyramiden $V = \frac{Gh}{3}$.

Das Volumen einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der (Maßzahl der) Grundfläche und der (Maßzahl der) Höhe.

Für zwei verschiedene Pyramiden hat man $V = \frac{Gh}{3}$ und $V_1 = \frac{G_1 h_1}{3}$.

Daraus folgt

für $h = h_1$ $\quad V : V_1 = G : G_1$,

für $G = G_1$ $\quad V : V_1 = h : h_1$. (In Worten?)

Übungsaufgaben. 1. Die Oberfläche und das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide zu berechnen, wenn die Grundkante a und die Höhe h gegeben sind. (Man benütze das rechtwinklige Dreieck SEF, Fig. 168.) *a)* $a = 12\ cm$, $h = 16\ cm$, *b)* $a = 233\ m$, $h = 149\ m$ (Pyramide des Cheops).

2. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide aus der Grundkante a und der Seitenkante s!

a) $a = 6\ dm$, $s = 5\ dm$, *b)* $a = s = 1\ m$.

3. Man berechne die Oberfläche und das Volumen eines Oktaeders aus der Kante a! *a)* $a = 5\ cm$, *b)* $a = 0{\cdot}362\ m$.

4. Ein Oktaeder ist einem Würfel eingeschrieben, d. h. die Eckpunkte des Oktaeders liegen in den Mittelpunkten der Würfelflächen. In welchem Verhältnisse stehen die Volumina der beiden Körper?

5. Eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten s hat zur Grundfläche ein Rechteck mit den Dimensionen a und b. Wie groß sind die Oberfläche und das Volumen der Pyramide? $a = 14\ cm$, $b = 6{\cdot}4\ cm$, $s = 1\ dm$.

6. Welches Gewicht hat eine regelmäßige vierseitige Pyramide aus Marmor (spez. Gew. $= 2{\cdot}84$), wenn eine Grundkante $1{\cdot}2\ m$ und die Höhe $3\ m$ beträgt?

7. Eine vierseitige Pyramide ist einem rechtwinkligen Parallelepipede derart eingeschrieben, daß die Grundflächen zusammenfallen und die Spitze der Pyramide in einem oberen Eckpunkte des Parallelepipedes liegt. Man berechne die Oberfläche und das Volumen der Pyramide aus den Dimensionen a, b, c des Parallelepipedes!

8. Die Oberfläche und das Volumen einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide aus der Grundkante a und der Höhe h zu berechnen.

Anleitung. $AE \perp BC$ (Fig. 169), $AE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $DE = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ (§ 59);

$$SE = \sqrt{h^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}};\quad M = \frac{3a}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

a) $a = 18\ cm$, $h = 13\ cm$, *b)* $a = h = 1\ m$.

9. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide aus der Grundkante a und der Seitenkante s!

Anleitung. (Fig. 169) $AD = \frac{2}{3} AE = \frac{a}{3}\sqrt{3}$; $h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{3}}$.

$$V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3}.\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^2}{12}\sqrt{3s^2 - a^2}.$$

$a)$ $a = 17\ cm$, $s = 20\ cm$, $b)$ $a = s = 1\ m$.

10. Wie groß ist eine Kante des Tetraeders, welches die Oberfläche O besitzt? Z. B. $O = 10\ dm^2$.

11. Man berechne aus dem Volumen V eines Tetraeders die Kante desselben! Z. B. $V = 1\ m^3$.

12. Die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide sind gleich lang (s) und zueinander normal. Man gebe an, durch welchen Schnitt eines Würfels eine solche Pyramide erhalten wird und berechne die Oberfläche und das Volumen derselben! (Bei der Volumsberechnung ist es zweckmäßig, eine der Seitenflächen als Grundfläche anzusehen.)

13. Man berechne die Oberfläche und das Volumen einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide aus der Grundkante a und der Höhe h!

$a)$ $a = 2\ cm$, $h = 8\ cm$, $b)$ $a = h = 1\ dm$.

14. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide aus der Grundkante a und der Seitenkante s!

Anleitung. $V = 6 . \frac{a^2}{4}\sqrt{3} . \frac{1}{3}\sqrt{s^2 - a^2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3\,(s^2 - a^2)}$.

$a)$ $a = 12\ cm$, $s = 2\ dm$, $b)$ $s = 2\,a = 1\ m$.

Der Kegel und der Kegelstumpf.

§ 160. Entstehung, Beschreibung. Gleitet ein Halbstrahl bei fester Lage seines Grenzpunktes längs einer Kreislinie hin, deren Ebene jenen Grenzpunkt nicht enthält, so entsteht ein kegelförmiger Raum (Fig. 174). Erzeugende Gerade, Leitkreis. Die von der erzeugenden Geraden beschriebene Fläche heißt eine Kegelfläche oder konische Fläche. Die Gerade, welche durch den festen Punkt (S) der Erzeugenden und den Mittelpunkt (O) des Leitkreises gelegt wird, heißt die Achse der Kegelfläche.

Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet den kegelförmigen Raum in einem Kreise, dessen Mittelpunkt (O_1) zugleich der Durchschnittspunkt der Achse mit der Schnittebene ist. Denn sind A und A_1, ferner B und B_1 die Schnittpunkte der beiden parallelen Ebenen mit der erzeugenden Geraden in zwei beliebigen Lagen, so ist $\triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S$, ferner $\triangle BOS \sim \triangle B_1O_1S$. Daraus folgt $AO : A_1O_1 = OS : O_1S = BO : B_1O_1$, also wegen $AO = BO$ auch $A_1O_1 = B_1O_1$.

Der Teil des kegelförmigen Raumes zwischen dem festen Punkte und der Ebene des Leitkreises oder einer parallelen Schnittebene heißt ein Kegel (genauer ein Kreiskegel).

Einen Kegel kann man sich aus einer Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist, dadurch entstanden denken, daß die Seitenzahl n unendlich groß geworden ist.

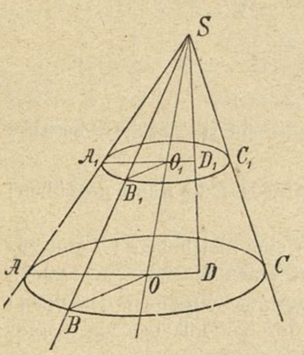

Fig. 174.

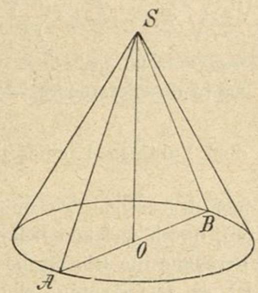

Fig. 175.

Aus der Beschreibung des Zylinders und der Pyramide ist die Bedeutung der Ausdrücke: Grundfläche, Mantel, Spitze, Seitenlinie, Achse und Höhe des Kegels ohne weiteres klar.

§ 161. Einteilung und Benennung. Je nachdem die Achse zur Grundfläche normal oder schief steht, heißt der Kegel gerade oder schief.

Im geraden Kegel (Fig. 175) ist die Achse zugleich die Höhe. Alle Seitenlinien eines geraden Kegels sind einander gleich. (Warum?) Man kann sich einen geraden Kegel auch durch Rotation eines rechtwinkligen Dreieckes um eine Kathete entstanden denken und zählt ihn daher zu den Rotationskörpern.

Ein gerader Kegel, in welchem der Durchmesser der Grundfläche gleich der Seitenlinie ist, heißt gleichseitig.

§ 162. Ebene Schnitte; der Kegelstumpf. *a)* Die Figur, in welcher eine durch die Achse gelegte Ebene den Kegel schneidet, heißt ein Achsenschnitt desselben und ist stets ein Dreieck. Die Achsenschnitte des schiefen Kegels sind im allgemeinen ungleichseitige Dreiecke, jene des geraden Kegels sind kongruente gleichschenklige Dreiecke und jene des gleichseitigen Kegels kongruente gleichseitige Dreiecke.

b) Jeder zur Grundfläche parallele Schnitt ist ein Kreis. (S. § 160.)

Durch den zur Grundfläche parallelen Schnitt zerfällt der Kegel in zwei Körper, den Kegelstumpf und den Ergänzungskegel. Die beiden in parallelen Ebenen liegenden Kreise heißen die Grundflächen und ihr Abstand (DD_1 in Fig. 174) die Höhe des Kegelstumpfes. Der auf diesen entfallende Teil des Kegelmantels heißt sein Mantel. Der Kegelstumpf heißt gerade oder schief, je nachdem der ganze Kegel und daher auch der Ergänzungskegel gerade oder schief ist. Alle Achsenschnitte eines geraden Kegelstumpfes sind gleichschenklige Trapeze. Was sind die Achsenschnitte eines schiefen Kegelstumpfes?

c) Es ist (Fig. 174) $\triangle AOS \sim A_1O_1S$ und $\triangle DOS \sim D_1O_1S$. Daraus folgt

$$AO : A_1O_1 = OS : O_1S = DS : D_1S, \text{ also}$$
$$\overline{AO}^2 : \overline{A_1O_1}^2 = \overline{DS}^2 : \overline{D_1S}^2.$$

Bezeichnet man also den Flächeninhalt der Grundfläche und der parallelen Schnittfläche mit G bezw. G_1, so folgt

$$G : G_1 = \overline{AO}^2 : \overline{A_1O_1}^2 = \overline{DS}^2 : \overline{D_1S}^2.$$

Die Grundfläche eines Kegels und eine parallele Schnittfläche verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

§ **163. Die Kegelschnittslinien.** Wird als Erzeugende einer Kegelfläche eine unbegrenzte Gerade angenommen, so entsteht eine vollständige Kegelfläche (Doppelkegel). Der ebene Schnitt, welcher alle Seitenlinien der Kegelfläche trifft, heißt Ellipse (speziell Kreis, wenn z. B. die Schnittebene zum Leitkreise parallel ist). Der ebene Schnitt, welcher nur zu einer Seitenlinie parallel ist, heißt Parabel; und jener, welcher zu zwei Seitenlinien parallel ist, Hyperbel (Fig. 176 und 177). Im letzten Falle trifft die Schnittebene beide Teile der vollständigen Kegelfläche und die durch die Spitze gelegte parallele Ebene schneidet die Kegelfläche in jenen zwei Seitenlinien, zu denen die Ebene der Hyperbel parallel ist.

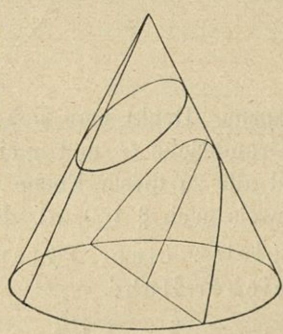

Fig. 176.

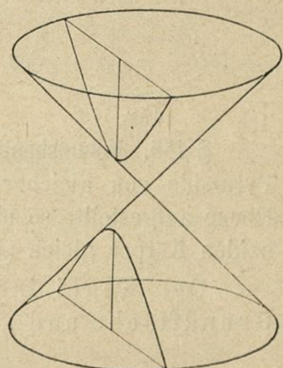

Fig. 177.

Man kann alle Arten der Kegelschnittslinien durch fortgesetzte Drehung der Schnittebene um eine zur Grundfläche parallele Achse erhalten.

Zur Veranschaulichung der Kegelschnitte kann man einen hohlen, aus Glas gefertigten Doppelkegel benützen, dessen Hohlräume an der Spitze miteinander in Verbindung stehen und der zum Teil mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt ist.

§ **164. Oberflächenbestimmung.** Für die Oberfläche eines jeden Kegels gilt die Formel: $O = G + M$. Denkt man sich den Mantel eines geraden Kegels (Fig. 178) längs einer Seitenlinie aufgeschnitten und in eine Ebene aufgerollt, so erhält man einen Kreisausschnitt (Fig. 179), dessen Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche und dessen Radius gleich einer Seitenlinie des Kegels ist.

Daher ist

$$M = 2 r \pi \,.\, \frac{s}{2} = r \pi s \text{ und } O = r^2 \pi + r \pi s = r \pi (r + s).$$

Beim gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $O = 3 r^2 \pi$.

Übungsaufgabe. Zeichne das Netz eines geraden Kegelstumpfes (Fig. 179)!

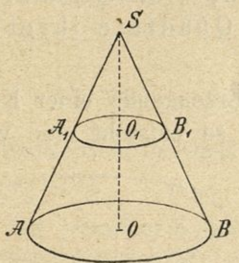

Fig. 178.

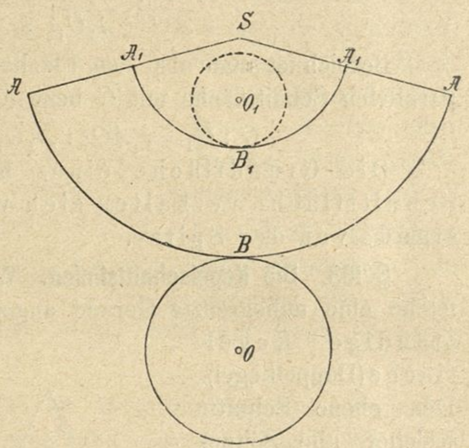

Fig. 179.

§ 165. Volumsbestimmung. Denkt man sich einen Kegel und eine Pyramide von gleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h auf eine Ebene aufgestellt, so sind alle zu dieser Ebene parallelen Schnitte der beiden Körper gleich (Beweis nach § 159, *a*). Hieraus folgt:

Der Kegel ist gleich einer Pyramide mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

$$V = \frac{Gh}{3} = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

Beim gleichseitigen Kegel ist $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}$, $V = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}$.

Für zwei verschiedene Kegel hat man $V = \frac{r^2 \pi h}{3}$, $V_1 = \frac{r_1^2 \pi h_1}{3}$.

Daraus folgt für $h = h_1$ $\quad V : V_1 = r^2 : r_1^2$,

für $r = r_1$ $\quad V : V_1 = h : h_1$. (In Worten?)

Übungsaufgaben. 1. Man berechne die Oberfläche und das Volumen eines geraden Kegels aus dem Radius r der Grundfläche und der Höhe h!

a) $r = 6$ *cm*, $h = 8$ *cm*, *b)* $r = 1$ *dm*, $h = 13$ *cm*.

2. Berechne die Oberfläche und das Volumen eines geraden Kegels aus dem Radius r der Grundfläche und der Seitenlinie s!

a) $r = 2$ *m*, $s = 2{\cdot}9$ *m*, *b)* $r = 15$ *cm*, $s = 32$ *cm*.

3. Berechne die Oberfläche und das Volumen eines gleichseitigen Kegels aus der Seitenlinie s! *a)* $s = 1$ *dm*, *b)* $s = 0{\cdot}41$ *m*.

4. Wie groß sind die Oberfläche und das Volumen eines geraden Kegels, welcher einem Würfel mit der Kante a eingeschrieben ist?

5. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b rotiert der Reihe nach um jede seiner drei Seiten. Man berechne die Oberflächen und die Volumina der drei Rotationskörper! Z. B. $a = 3$ *dm*, $b = 4$ *dm*.

6. Das Gewicht eines hölzernen Kegels beträgt 1·378 *kg*, der Durchmesser der Grundfläche beträgt 15 *cm* und die Höhe 2 *dm*. Berechne das spezifische Gewicht des Holzes!

7. Aus der Oberfläche eines gleichseitigen Kegels die Höhe zu berechnen. Z. B. $O = 10$ *dm*^{2}.

8. Aus dem Volumen eines gleichseitigen Kegels den Durchmesser der Grundfläche zu berechnen. Z. B. $V = 1·5$ *m*^{3}.

9. Ein Zylinder wird in einen Kegel von gleicher Höhe verwandelt. Wie verhalten sich die Radien der Grundflächen beider Körper?

10. Ein gleichseitiger Zylinder wird in einen gleichseitigen Kegel mit der Seitenlinie s verwandelt. Man berechne die Höhe des Zylinders!

11. Die Höhe und das Volumen eines geraden Kegels zu suchen, wenn die Oberfläche und der Durchmesser der Grundfläche gegeben sind. Z. B. $O = 113·097$ *cm*^{2}, $d = 8$ *cm*.

12. Aus dem Volumen eines Kegels, dessen Höhe das Dreifache des Durchmessers der Grundfläche ist, den letzteren zu suchen. Z. B. $V = 1$ *dm*^{3}.

13. Aus der Grundfläche und dem Mantel eines geraden Kegels das Volumen zu berechnen. Z. B. $G = 28·27$ *cm*^{2}, $M = 94·25$ *cm*^{2}.

Die Kugel.

§ 166. Entstehung der Kugelfläche, Erklärungen. Wenn ein Halbkreis um den ihn begrenzenden Durchmesser rotiert, so beschreibt er eine Kugelfläche oder Sphäre. Der von der Kugelfläche eingeschlossene Raum heißt eine Kugel. Die Kugel ist ein Rotationskörper.

Da ein beliebiger Punkt des Halbkreises bei der Rotation seinen Abstand vom festen Mittelpunkte nicht verändert, so haben alle Punkte der Kugelfläche gleichen Abstand vom Mittelpunkte. Die Kugelfläche ist also der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem bestimmten Punkte gleichen Abstand haben. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum der Kugelfläche oder der Kugel. Die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem Punkte der Kugelfläche heißt ein Radius oder Halbmesser. Alle Radien der Kugel sind gleich. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte der Kugelfläche heißt eine Sehne und, wenn dieselbe durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser der Kugel. Alle Durchmesser der Kugel sind gleich und zwar gleich dem Durchmesser des erzeugenden Halbkreises oder gleich dem doppelten Radius.

Ein Punkt liegt in der Kugelfläche, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Zentralabstand gleich dem Radius, kleiner oder größer als derselbe ist.

§ 167. Kugelfläche und Gerade. Ist der Zentralabstand der Geraden größer als der Radius, so hat sie mit der Kugelfläche keinen Punkt gemein. Ist der Zentralabstand gleich dem Radius, so hat sie mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemein, den Berührungspunkt (B, Fig. 180); alle anderen Punkte der Geraden liegen außerhalb der Kugel. (Warum?) — Die Gerade heißt dann Tangente der Kugelfläche (TT_1).

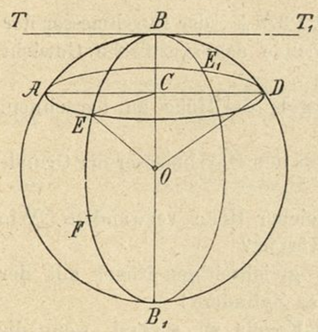

Fig. 180.

Ist der Zentralabstand kleiner als der Halbmesser, so trifft die Gerade die Kugelfläche in zwei Punkten. Kugelsehne.

Aufgabe. Aus dem Zentralabstande c einer Kugelsehne und dem Kugelradius r die Länge s der Kugelsehne zu berechnen.

Man findet $s = 2\sqrt{r^2 - c^2}$. Hieraus folgt:

a) Zu gleichen Zentralabständen gehören gleiche Kugelsehnen und umgekehrt.

b) Zum kleineren Zentralabstande gehört die größere Kugelsehne und umgekehrt.

c) Der Kugeldurchmesser ist die größte Kugelsehne.

§ 168. Kugelfläche und Ebene. Ist der Zentralabstand der Ebene größer als der Radius, so hat sie mit der Kugelfläche keinen Punkt gemein. Ist der Zentralabstand gleich dem Radius, so hat sie mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemein, den Berührungspunkt, und heißt Berührungs- oder Tangentialebene. Sie kann dadurch erhalten werden, daß ein Kreis zugleich mit einer Tangente (TT_1) um den zur Tangente normalen Durchmesser (BB_1) rotiert. Hieraus folgt:

a) Die Tangentialebene enthält alle Tangenten, welche im Berührungspunkte an die Kugel gelegt werden können.

b) Die Tangentialebene steht auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Kugelradius normal.

Ist der Zentralabstand der Ebene kleiner als der Radius, so schneidet sie die Kugelfläche. Jeder ebene Kugelschnitt ist ein Kreis und wird ein Kugelkreis genannt. Da nämlich die Strecken OD, OE,... gleich sind, so sind es auch ihre Projektionen CD, CE,... (Fig. 180).

Aufgabe. Den Radius ϱ eines Kugelkreises aus seinem Zentralabstande c und dem Kugelradius r zu berechnen. Man findet $\varrho = \sqrt{r^2 - c^2}$. Hieraus folgt:

c) Zu gleichen Zentralabständen gehören gleiche Kugelkreise und umgekehrt.

d) Zum kleineren Zentralabstande gehört der größere Kugelkreis und umgekehrt.

e) Die Kugelkreise, deren Ebenen das Kugelzentrum enthalten, sind die größten unter allen Kugelkreisen. Sie sind einander gleich und heißen größte Kugelkreise oder Hauptkreise; jeder andere Kugelkreis heißt ein Nebenkreis. (Haupt- und Nebenkreise auf einem Globus.)

Übungsaufgaben. 1. Aus dem Kugelradius r und dem Radius ϱ eines Nebenkreises den Zentralabstand des letzteren zu berechnen.

a) $r = 1\ dm$, $\varrho = 8\ cm$, *b)* $r = 13\ cm$, $\varrho = 6{\cdot}4\ cm$.

2. Aus den Flächen F und f eines Haupt- und eines Nebenkreises den Zentralabstand des letzteren zu berechnen. $\left(\text{Man findet } c^2 = \frac{F - f}{\pi}.\right)$

Z. B. $F = 40\ cm^2$, $f = 25\ cm^2$.

3. Man berechne das Volumen jenes Kegels, welcher als Grundfläche einen Nebenkreis und die Spitze im Mittelpunkte der Kugel hat, wenn die Radien der Kugel und des Nebenkreises gegeben sind.

a) $r = 1\ m$, $\varrho = 0{\cdot}6\ m$, *b)* $r = 6\ cm$, $\varrho = 5\ cm$.

§ 169. Figuren in der Kugelfläche oder sphärische Figuren. *a)* Durch die Endpunkte eines Durchmessers kann man unzählig viele Hauptkreise legen. (Erdmeridiane.) Durch zwei Punkte der Kugelfläche, welche nicht die Endpunkte eines Durchmessers sind, läßt sich jedoch nur ein Hauptkreis legen. (Warum?)

Unter dem sphärischen Abstande zweier Punkte der Kugelfläche versteht man den kleineren von den Punkten begrenzten Bogen des Hauptkreises, welcher durch die beiden Punkte geht. Man bestimme in Fig. 180 den sphärischen Abstand der Punktepaare E und F, B und F, A und D, B und B_1. Wie läßt sich der sphärische Abstand zweier Punkte des Äquators aus den geographischen Längen und der sphärische Abstand zweier Punkte eines Meridians aus den geographischen Breiten der beiden Punkte berechnen?

b) Den auf der Ebene eines Kugelkreises normalen Kugeldurchmesser nennt man die Achse und deren Endpunkte die Pole desselben. Man bezeichne die Achse und die Pole des Kugelkreises AED! Durch die beiden Pole (B, B_1) eines Nebenkreises und einen dritten Punkt der Kugelfläche (F) ist ein Hauptkreis bestimmt, welcher den Nebenkreis in zwei Punkten (E, E_1) schneidet. Der kleinere der sphärischen Abstände FE und FE_1 heißt der sphärische Abstand des Punktes F vom Kugelkreise.

Es sind die Pole eines Parallelkreises auf dem Erdglobus zu bestimmen! Wie heißt für einen Punkt auf dem Globus der sphärische Abstand vom Äquator?

Man begründe noch die Richtigkeit der folgenden Lehrsätze:

Alle parallelen Kugelkreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole.

Jeder Pol eines Kugelkreises hat von allen Punkten desselben gleiche sphärische Abstände, welche sphärische Halbmesser des Kugelkreises heißen.

Jeder Kugelkreis hat auf der Kugelfläche zwei sphärische Halbmesser.

Jeder Pol eines Hauptkreises hat von allen Punkten desselben den Abstand von 90°, oder: Der sphärische Halbmesser eines Hauptkreises beträgt 90°.

Wie berechnet man den sphärischen Halbmesser eines Parallelkreises aus der geographischen Breite desselben?

c) Unter einem sphärischen Winkel versteht man den Winkel zweier Hauptkreise einer Kugelfläche; z. B. ABC (Fig. 181). Die Bogen BA und BC heißen seine Schenkel und der Schnittpunkt B sein Scheitel. Jeder sphärische Winkel wird durch den Winkel der beiden im Schnittpunkte an die Hauptkreise gelegten Tangenten ($\sphericalangle\ MBN$, Fig. 181) oder, was dasselbe ist, durch den Neigungswinkel der Ebenen der beiden Hauptkreise gemessen.

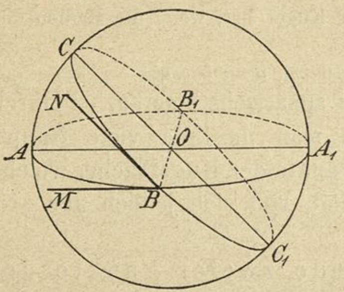

Fig. 181.

d) Zwei Hauptkreise zerlegen die Kugelfläche in vier Teile, welche sphärische Zweiecke genannt werden; z. B. BAB_1CB. Die beiden sphärischen Winkel eines sphärischen Zweieckes sind einander gleich.

e) Drei Hauptkreise, deren Ebenen sich nicht in einer Geraden schneiden, zerlegen die Kugelfläche in acht Teile, welche sphärische Dreiecke genannt werden, z. B. ABC. Die Kreisbogen AB, BC, CA heißen die Seiten und die sphärischen Winkel CAB, ABC, BCA die Winkel des sphärischen Dreieckes ABC.

Übungsaufgaben. 1. Bezeichne sämtliche sphärische Dreiecke in der Fig. 181! 2. Suche Beispiele für sphärische Winkel, Zweiecke und Dreiecke an einem Globus!

§ 170. Kugelsegment, Kugelschichte, Kugelsektor. Die Kugel wird durch eine Ebene in zwei Teile zerlegt, welche Kugelabschnitte oder Kugelsegmente heißen. Von denselben ist jener der größere, welcher den Mittelpunkt der Kugel enthält. Geht die Schnittebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so zerlegt sie dieselbe in zwei gleiche Teile, welche Halbkugeln heißen.

Die Kugelfläche wird durch die Schnittebene in zwei Kugelkappen oder Kalotten zerlegt. Die Oberfläche eines Kugelabschnittes besteht aus einem Kugelkreise (Grundfläche) und einer Kugelkappe (Mantel). Die Teile, in welche die Achse eines Kugelkreises durch diesen zerlegt wird, sind zugleich die Höhen der zugehörigen Kugelsegmente und Kugelkappen (BC und B_1C in Fig. 180).

Der Teil einer Kugel zwischen zwei parallelen Schnittebenen heißt Kugelschichte. Die Oberfläche derselben besteht aus zwei parallelen Kugelkreisen (den Grundflächen) und dem zwischen den parallelen Schnittebenen enthaltenen Teil der Kugelfläche, welcher Kugelzone genannt wird (Mantel). Der Abstand der Grundflächen heißt die Höhe der Kugelschichte und der Kugelzone.

Rotiert ein Kreisausschnitt eines Hauptkreises (BOD, Fig. 180) um einen der ihn begrenzenden Radien (OB), so beschreibt er einen Kugelausschnitt oder Kugelsektor. Dieser Körper läßt sich durch einen ebenen Schnitt in ein Kugelsegment und einen Kegel zerlegen. Seine Oberfläche besteht aus einer Kalotte und dem Mantel eines geraden Kegels.

Übungsaufgaben. 1. Man gebe an, welche Fläche durch Rotation α) ein Kugelsegment, β) eine Kugelschichte erzeugt.

2. Welche geometrischen Bezeichnungen entsprechen den geographischen Begriffen: kalte, gemäßigte und heiße Zone?

3. Aus dem Kugelradius r und der Höhe h eines Kugelsegmentes den Radius ϱ der Grundfläche zu suchen. Z. B. $r = 0{\cdot}085\ m$, $h = 1\ cm$.

4. Wie berechnet man h aus r und ϱ? Z. B. $r = 12\ cm$, $\varrho = 85\ mm$.

§ 171. Oberfläche und Volumen der Kugel. *a)* Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der vierfachen Fläche eines Hauptkreises.

$$O = 4\pi r^2.$$

Die Begründung dieser Formel wird in diesem Lehrbuche übergangen.

Für eine zweite Kugel hat man $O_1 = 4\pi r_1^2$. Daraus folgt:

$$O : O_1 = r^2 : r_1^2.$$ In Worten?

Anmerkung. Die Kugelfläche läßt sich in der Ebene nicht ausbreiten; daher ist eine genaue Konstruktion ihres Netzes unmöglich.

b) Es sei ein Polyeder mit beliebig vielen Seitenflächen G_1, G_2, ... G_n einer Kugel umgeschrieben, d. h., jede Seitenfläche werde von der Kugel berührt. Zerlegt man nun das Polyeder in lauter Pyramiden, welche ihre Spitzen im Mittelpunkte der Kugel und die Flächen G_1 G_2, ... G_n als Grundflächen haben, so ist das Volumen des Polyeder,

$$V = G_1 . \frac{r}{3} + G_2 . \frac{r}{3} + \ldots + G_n . \frac{r}{3} = (G_1 + G_2 + \ldots + G_n) \frac{r}{3} = O . \frac{r}{3}.$$

Diese Formel gilt auch für die Kugel, da sich dieselbe von dem umgeschriebenen Polyeder beliebig wenig unterscheidet, wenn man nur die einzelnen Seitenflächen hinlänglich klein und daher die Anzahl derselben hinlänglich groß annimmt. Dann ist V das Volumen und O die Oberfläche der Kugel und es gilt somit der Satz:

Die Kugel ist inhaltsgleich mit einer Pyramide, welche die Kugeloberfläche zur Grundfläche und den Radius zur Höhe hat.

$$V = O \cdot \frac{r}{3}, \text{ somit auch } V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Für zwei verschiedene Kugeln findet man

$$V : V_1 = r^3 : r_1^3. \text{ In Worten?}$$

Übungsaufgaben. 1. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer Kugel aus dem Radius!

$a)$ $r = 1$ *m*, $b)$ $r = 2\text{·}821$ *m*.

2. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer Kugel aus dem Durchmesser!

$a)$ $d = 134$ *mm*, $b)$ $d = 1\text{·}2407$ *m*.

3. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer Kugel aus dem Flächeninhalte eines Hauptkreises!

$a)$ $f = 1$ m^2, $b)$ $f = 14\text{·}2376$ m^2.

4. Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen der Erde, wenn dieselbe als vollkommene Kugel und der Umfang eines Hauptkreises $\alpha) = 40000$ *km*, $\beta) = 5400$ geographischen Meilen angenommen wird?

5. Berechne das Gewicht einer Kugel aus Buchsbaumholz (spez. Gew. = 0·92) von 12 *cm* Durchmesser!

6. Wie oft ist das Volumen des Mondes in jenem der Erde enthalten, wenn der Durchmesser des Mondes 3482 *km* und jener der Erde 12756 *km* beträgt?

7. Aus der Oberfläche einer Kugel den Radius und das Volumen zu berechnen. Z. B. $O = 125$ cm^2.

8. Aus dem Volumen einer Kugel den Radius und die Oberfläche zu berechnen. Z. B. $V = 1$ m^3.

9. Von zwei Kugeln aus gleichem Materiale hat die eine ein doppelt so großes Gewicht als die andere. Wie verhalten sich die Durchmesser der beiden Kugeln?

10. In welchem Verhältnisse ist die Erdoberfläche auf einem Globus verkleinert, dessen Durchmesser 42 *cm* beträgt? (Aufg. 6.)

11. Eine Kugel hat gleiches Volumen mit einem gleichseitigen Zylinder, dessen Höhe h ist. Wie groß ist der Radius der Kugel? Z. B. $h = 12$ *cm*.

12. Eine Kugel wird in einen Würfel mit der Kante a verwandelt. Um wieviel wird dadurch die Oberfläche vergrößert? Z. B. $a = 16$ *cm*.

13. Einem Würfel mit der Kante a ist eine Kugel umgeschrieben. Man berechne die Differenz der beiden Volumina! Z. B. $a = 23$ *cm*.

14. Einem geraden Zylinder (ϱ, h) wird eine Kugel umgeschrieben. Man berechne die Oberfläche und das Volumen der letzteren! Z. B. $\varrho = 4$ *dm*, $h = 6$ *dm*.

15. Einer Halbkugel wird ein Zylinder umgeschrieben und ein gerader Kegel eingeschrieben. Wie verhalten sich die Volumina der drei Körper? (Satz des Archimedes.)

16. Ein kugelförmiger Luftballon mit einem Durchmesser von 10 *m* wird mit Leuchtgas gefüllt. Man berechne die Steigkraft des Ballons, wenn die Dichte des Leuchtgases halb so groß ist als jene der Luft, wenn 1 m^3 Luft 1·293 *kg* wiegt und wenn das Gewicht aller Bestandteile des Ballons (ausgenommen die Füllung) 130 *kg* beträgt!

17. Der äußere Durchmesser einer kupfernen Hohlkugel beträgt 12 *cm* und die Wanddicke 2 *mm*. Wie groß ist das Gewicht der Hohlkugel, wenn das Kupfer die Dichte 8·8 hat?

Die regelmäßigen Polyeder.

§ 172. Erklärung und Lehrsatz. Regelmäßig heißen solche Polyeder, deren Grenzflächen kongruente regelmäßige Polygone und deren Ecken kongruent und regelmäßig sind.[1])

Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

Denn sind gleichseitige Dreiecke die Grenzflächen, so können dieselben nur drei- oder vier- oder fünfseitige Ecken bilden, da die Summe der Kantenwinkel weniger als vier Rechte betragen muß. Es gibt drei von gleichseitigen Dreiecken begrenzte regelmäßige Polyeder und zwar das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder.

Sind die Grenzflächen Quadrate, so können dieselben nur dreiseitige Ecken bilden. (Warum?) Es gibt ein einziges von Quadraten begrenztes regelmäßiges Polyeder und zwar das Hexaeder (Kubus, Würfel). Sind die Grenzflächen regelmäßige Fünfecke, so können dieselben nur dreiseitige Ecken bilden. (Warum?) Es gibt ein einziges von regelmäßigen Fünfecken begrenztes regelmäßiges Polyeder, das Dodekaeder.

Warum kann es kein Polyeder geben, welches nur regelmäßige Sechsecke oder Siebenecke u. s. f. zu Grenzflächen hat?

§ 173. Beschreibung. Das Tetraeder, das Oktaeder und das Hexaeder sind bereits besprochen worden. Fig. 182 stellt ein Oktaeder mit seinem Netze vor.

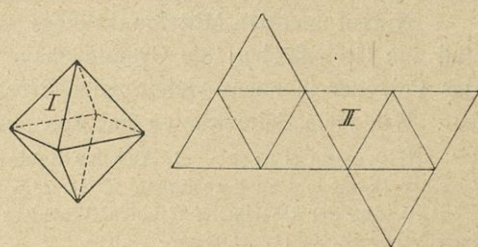

Fig. 182.

Das Ikosaeder hat 20 kongruente gleichseitige Dreiecke als Grenzflächen. Von den $3 \times 20 = 60$ Dreieckseiten fallen je zwei in eine Kante zusammen; das Ikosaeder hat also 30 gleiche Kanten. Von den 60 Winkeln der 20 Dreiecke bilden je fünf eine Ecke des Ikosaeders; dasselbe hat also 12 kongruente fünfseitige Ecken. Fig. 183 zeigt ein Ikosaeder und sein Netz.

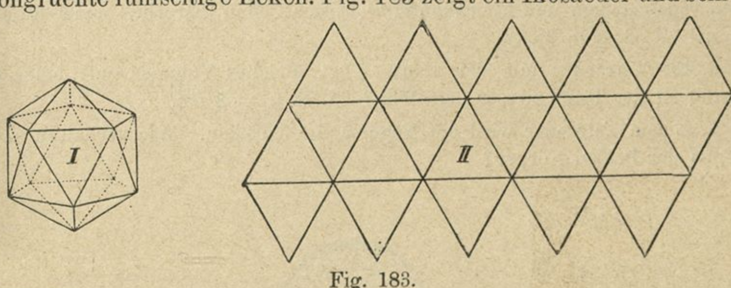

Fig. 183.

[1]) Hier wird das Wort „regelmäßig" in einem anderen Sinne gebraucht als in den §§ 141 und 156.

Das **Dodekaeder** ist von zwölf kongruenten regelmäßigen Fünfecken begrenzt. Wie viele Kanten und Ecken hat dasselbe? — Fig. 184 zeigt ein Dodekaeder mit seinem Netze.

In jedem regelmäßigen Polyeder gibt es einen Punkt, welcher von allen Eckpunkten und zugleich von allen Grenzflächen gleiche Abstände hat; er ist daher der Mittelpunkt der dem Polyeder umgeschriebenen

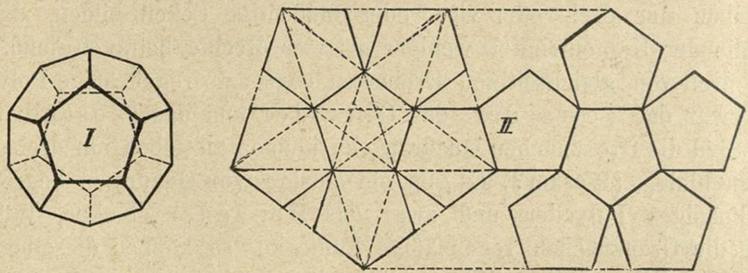

Fig. 184.

und zugleich der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel und heißt der **Mittelpunkt** des Polyeders. Wie wird der Mittelpunkt α) des Hexaeders, β) des Oktaeders gefunden?

Nimmt man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Polyeders als Spitze und die Grenzflächen als Grundflächen von Pyramiden an, so zerfällt das Polyeder in ebensoviele regelmäßige Pyramiden, als es Grenzflächen hat. Wie viele Seitenkanten hat eine dieser Pyramiden?

Übungsaufgaben. 1. Aus der Kante a die Oberfläche α) eines Oktaeders, β) eines Ikosaeders zu berechnen. Z. B. $a = 12{\cdot}7\ cm$.

2. Aus der Oberfläche O eines Oktaeders eine Kante und das Volumen zu berechnen. Z. B. $O = 40\ cm^2$.

3. Aus dem Volumen V eines Tetraeders eine Kante und die Oberfläche zu berechnen. Z. B. $V = 172\ cm^3$.

4. Ein Tetraeder mit der Kante a hat gleiche Oberfläche mit einem Ikosaeder. Wie groß ist eine Kante des letzteren? Z. B. $a = 1\ dm$.

5. Ein Oktaeder mit der Kante a hat gleiches Volumen mit einem sechsseitigen regelmäßigen und gleichkantigen Prisma. Man berechne eine Kante des letzteren! Z. B. $a = 12\ cm$.

6. Ein Tetraeder mit der Kante a hat gleiches Volumen mit einer Kugel. Wie groß ist der Durchmesser derselben? Z. B. $a = 2\ dm$.

7. Einem Tetraeder wird ein Kegel umgeschrieben. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Körper?