PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 348-351

Boris Lavrič:

PLOŠČINA NAPOLEONSKEGA TRIKOTNIKA

Ključne besede: matematika, geometrija, Napoleonov trikotnik, ploščina.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Lavric-Napoleon.pdf

PLOŠČINA NAPOLEONOVEGA TRIKOTNIKA

Preden si ogledamo, kateri trikotnik nosi bogvezakaj to veleslavno ime, naj spomnimo bralce, da je o njem v drugi številki predlanskega Preseka pisal Damjan Kobal. Razkril je nekaj njegovih geometrijskih skrivnosti, mi pa ga bomo tudi izmerili.

Na zunanjo stran danega trikotnika ABC načrtajmo enakostranične trikotnike A_1CB, B_1AC in C_1BA. Njihova središča P_1, R_1 in S_1 tvorijo oglišča trikotnika, ki je enakostraničen in ga imenujemo Napoleonov trikotnik.

Se da oceniti njegovo velikost, če poznamo le ploščino trikotnika ABC? Pokazali bomo, da nima nikdar manjše ploščine kot prvotni trikotnik. Pomagali si bomo z računom. Dolžine stranic trikotnika ABC zaznamujmo na običajen način z a, b, c in določimo dolžino stranice P_1R_1. V ta namen se ozrimo na sliko 1 in primerjajmo trikotnika A_1CA in P_1CR_1. V prvem stranica A_1C dolžine a oklepa kot $\sphericalangle BCA + 60^0$ s stranico AC dolžine b, v drugem pa velja:

$$|P_1C| = a\sqrt{3}/3, \quad |R_1C| = b\sqrt{3}/3 \text{ in}$$

$$\sphericalangle P_1CR_1 = \sphericalangle BCA + 30^0 + 30^0 = \sphericalangle BCA + 60^0$$

Obravnavana trikotnika sta potem podobna, zato velja enakost $|P_1R_1| = |AA_1|\sqrt{3}/3$. Torej je dovolj izračunati dolžino daljice AA_1. Poglejmo na sliko 2, kjer smo z D označili sredino daljice BC, z E nožišče višine v_a, točko F pa smo izbrali na premici A_1D tako, da velja $AFA_1 = 90^0$. Predpostavimo, da sta kota ABC in BCA ostra in z uporabo Pitagorovega izreka dobimo naslednje zveze:

$$|EC| = \sqrt{b^2 - v_a^2}$$

$$|DE| = |DC| - |EC| = a/2 - \sqrt{b^2 - v_a^2}$$

$$|AA_1|^2 = |AF|^2 + |A_1F|^2 = |DE|^2 + (|A_1D| + |DF|)^2 =$$

$$= (a/2 - \sqrt{b^2 - v_a^2})^2 + (a\sqrt{3}/2 + v_a)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 - a\sqrt{b^2 - v_a^2} + \sqrt{3}\,av_a$$

Upoštevajmo, da ploščina p trikotnika ABC meri $p = av_a/2$ in imamo:

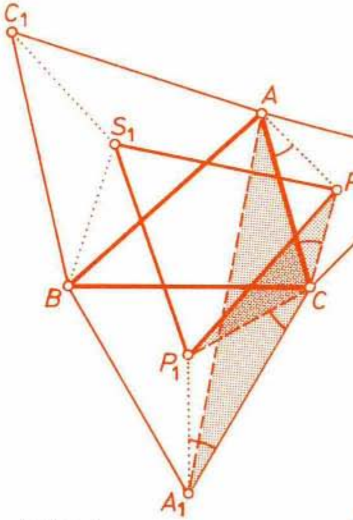
$$|AA_1|^2 = a^2 + b^2 - a\sqrt{b^2 - v_a^2} + 2\sqrt{3}p$$

Če zamenjamo med seboj vlogi stranic b in c, dobimo še zvezo:

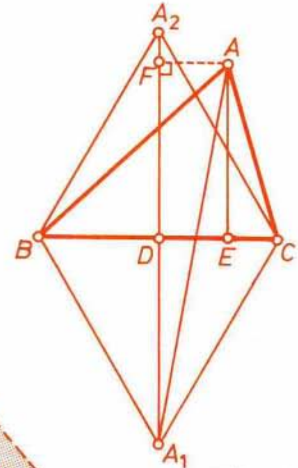
$$|AA_1|^2 = a^2 + c^2 - a\sqrt{c^2 - v_a{}^2} + 2\sqrt{3}\,p$$

Seštejmo obe, uporabimo enakost

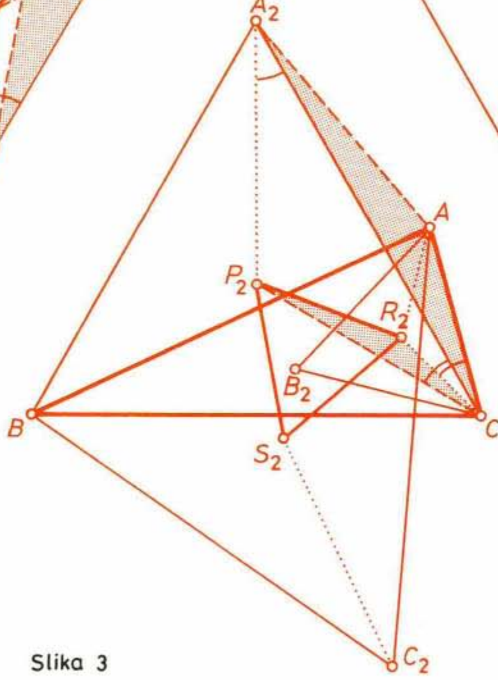
$$\sqrt{b^2 - v_a{}^2} + \sqrt{c^2 - v_a{}^2} = |EC| + |BE| = a$$



Slika 1



Slika 2



Slika 3

in pred nami je relacija:

$$2\,|AA_1|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,p$$

Tudi v primeru, ko eden od kotov ABC in BCA ni oster, dobimo isto – račun pa prepustimo bralcu za vajo. Od tod dobimo:

$$|P_1R_1|^2 = |AA_1|^2/3 = (a^2 + b^2 + c^2)/6 + (2\sqrt{3}/3)\,p$$

Pri medsebojni zamenjavi stranic se izraz na desni ne spremeni, torej je trikotnik $P_1R_1S_1$ enakostraničen. Njegova ploščina meri

$$p_1 = |P_1R_1|^2\sqrt{3}/4 = (\sqrt{3}/24)(a^2 + b^2 + c^2) + p/2$$

Ali res drži neenakost $p_1 \geqslant p$, ki smo jo obetali dokazati? Z drugimi besedami: ali za trikotnik ABC drži ocena

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,p \tag{1}$$

Pot k dokazu se nam je ponujala že prej, zato stopimo nekaj korakov nazaj. Se nismo znašli na razpotju že ob postavitvi Napoleonovega trikotnika? Zakaj pa ne bi načrtali enakostraničnih trikotnikov (z osnovnicami na stranicah trikotnika ABC) navznoter namesto navzven? Storimo to zdaj, na novo dobljena oglišča pa označimo z A_2, B_2 in C_2. Trikotniki A_2BC, B_2CA in C_2AB so torej enakostranični, njihova središča pa naj bodo zaporedoma P_2, R_2 in S_2 (glej sliko 3). Izračunajmo dolžino stranice P_2R_2. Krenimo po podobni poti kot prej, zato jo le skopo opišimo. Trikotnika A_2CA in P_2CR_2 sta podobna, tudi enakost $|P_2R_2| = |AA_2|\sqrt{3}/3$ velja, dolžino $|AA_2|$ pa spet lahko določimo s pomočjo Pitagorovega izreka in slike 2. Dobimo enakost

$$2\,|AA_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\,p$$

ki pove, da velja ocena (1) in nam da zvezo:

$$|P_2R_2|^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/6 - (2\sqrt{3}/3)\,p$$

Le–ta dokazuje, da je trikotnik $P_2R_2S_2$ enakostraničen (recimo mu kar notranji Napoleonov trikotnik, prvotnega pa opremimo še z besedico zunanji), poleg tega pa nam da njegovo ploščino:

$$p_2 = (\sqrt{3}/24)(a^2 + b^2 + c^2) - p/2$$

Za hip se spomnimo še na ploščino p_1 in našli bomo naslednjo lepo lastnost. Ploščini p_1, p_2 zunanjega in notranjega Napoleonovega trikotnika se razlikujeta za ploščino p prvotnega trikotnika ABC.

Naloge, ki smo si jih postavili, smo rešili, zvedavega bralca pa čaka še nekaj orehov:

1. Kdaj v oceni (1) velja enakost?
2. Vsota ploščin zunanjega in notranjega Napoleonovega trikotnika, ki pripada pravokotnemu trikotniku ABC, znaša $6\sqrt{3}$. Koliko meri hipotenuza c?
3. Naj bo ABC enakokrak trikotnik z osnovnico BC. Ploščini njegovega notranjega oziroma zunanjega Napoleonovega trikotnika merita $4\sqrt{3}-6$ oziroma $4\sqrt{3}+6$. Poišči stranice trikotnika ABC.

Za konec pa še

DOMAČA NALOGA ★

Ko je bil Napoleon mlad je bil zelo suh
in topničarski častnik
potlej je postal cesar
dobil je trebuh in veliko dežel
in ko je umrl je še imel
trebuh
a ostalo ga je bolj malo.

Jacques Prévert
(prevedel *Aleš Berger*)

Boris Lavrič

NAPOLEON BONAPARTE (1769 – 1821)

Ilustracija Krešimir Skozret

★ Pesem smo vzeli iz knjižice *Barbara* (izbor Prévertove poezije), ki je izšla v mladinski zbirki *Odisej*.