PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 1
Strani 5–11, I–IV

Marija Vencelj:

UREJENA LEPOTA RASTLIN – Filotaksa in Fibonaccijeva števila

Ključne besede: matematika, biologija, računalništvo, razporeditev listov, samopodobnost, simetrija, Fibonaccijeva števila, filotaksa.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1502-Vencelj.pdf

PRESEK

30 (2002 – 03) 1

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

PIERIS (zgoraj) in RODODENDRON (spodaj) imata filotakso $\frac{3}{8}$.

UREJENA LEPOTA RASTLIN – Filotaksa in Fibonaccijeva števila

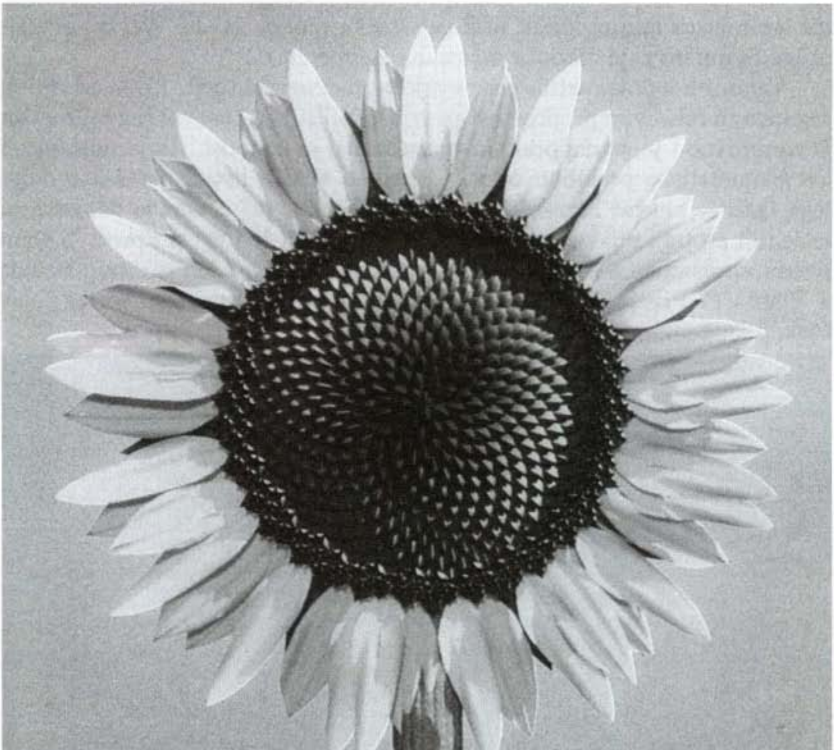
Ob pogledu na nežen cvet, vejo ali drevo marsikdo vzklikne: "Kako lepo!"

Rastline pa niso le lepe, so tudi zelo zanimive. In to ne le z botaničnega vidika. Urejena lepota rastlin privlači pozornost matematikov že stoletja. Največ so se ukvarjali z najopaznejšimi geometrijskimi značilnostmi, kot so osna simetrija listov, rotacijska simetrija cvetov ali npr. spiralasta razporeditev lusk pri storžu pinije. Po H. Weylu, avtorju knjige Symmetry, je *"lepota povezana s simetrijo"*.

Vendar k lepoti rastlin prispevajo tudi drugi faktorji. Eden od njih je eleganca in relativna preprostost pravil, ki opisujejo časovni razvoj rastlin. Še zanimivejša je samopodobnost rastlin, to je lastnost, da je posamezen kos geometrijsko podoben celoti. Tako so včasih lističi peresasto deljenega lista še enkrat razrezani na manjše lističe, pri čemer je del lista na naslednji stopnji enake oblike kot ves list. Taka je npr. praprot. S tema dvema vprašanjema se ukvarja zanimiva knjiga The Algorithmic Beauty of Plants P. Prusinkiewicza in A. Lindenmayerja (Springer-Verlag, New York, 1990).

Slika 1.

Knjiga uspešno povezuje biologijo z matematiko in računalništvom. Primerjava pravih rastlin z računalniško narisanimi modeli je v veliko pomoč pri presoji, kako dobri so modeli. Lahko pa bi tudi rekli, da gre za povezavo med znanostjo in umetnostjo. Iz knjige vam predstavljamo računalniško narisan javor (slika 1) in cvet sončnice (slika 2). V knjigi sta sliki barvni in zato še prepričljivejši. Knjigo hrani tudi matematična knjižnica Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.



Slika 2.

Filotaksa

V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali posebno značilnost nekaterih rastlin, poznano pod imenom **filotaksa.** Dobesedni prevod besede je urejenost listov, vendar pod njo razumemo tako pravilno urejenost listov na veji kot urejenost lusk na storžu ali cvetov v cvetnem košku.

Če vzamemo v roke lipovo vejico (slika na strani III, spodaj) in sledimo njenim listom od začetka do konca vejice, vidimo, da izraščajo listi izmenično na nasprotnih straneh vejice. Podobno razporeditev listov lahko opazimo še pri nekaterih drugih rastlinah, npr. pri brestu in lovorikovcu. Koti med zaporednimi listi na vejici (natančneje, med mesti, kjer listi izraščajo) so med seboj enaki, merijo $180°$, to je $\frac{1}{2}$ **polnega obrata**. Pri pokonci postavljeni vejici lahko tudi rečemo, da moramo od danega lista **enkrat** (po vijačnici) obiti vejico, da pridemo do prvega naslednjega lista, ki izrašča navpično nad njim. Pri tem pridobimo vzdolž veje **dva** lista. Pravimo, da imajo take rastline polovično filotakso (filotakso $\frac{1}{2}$).

Pri bukvi, leski, ognjenem trnu (slika na strani III, spodaj) ali oslezu potrebujemo za prehod od enega lista k naslednjemu zasuk za tretjino polnega obrata. Govorimo o filotaksi $\frac{1}{3}$.

Marelica ima filotakso $\frac{2}{5}$, torej je kot med dvema zaporednima listoma enak $\frac{2}{5} \cdot 360° = 144°$. To pomeni, da moramo **dvakrat** okrog veje, da pridemo do lista, ki prvi po vrsti izrašča natanko nad izbranim. To se zgodi pri **petem listu**. Tako filotakso imata tudi hrast in krvenka (sliki na strani III, zgoraj).

Nadalje imajo topol in hruška ter okrasna grma rododendron in pieris (slike na strani II) filotakso $\frac{3}{8}$, vrba in mandelj filotakso $\frac{5}{13}$ itd.

Vidimo, da so števci in imenovalci ulomkov, s katerimi se izraža filotaksa, Fibonaccijeva števila

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Posamezna filotaksa je kvocient dveh Fibonaccijevih števil $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, katerih vrstni indeks v Fibonaccijevem zaporedju se razlikuje za 2. Enako dobro bi lahko uporabili pare zaporednih Fibonaccijevih števil. Matematik takoj vidi, da je negativnemu zasuku za $\frac{3}{8}$ polnega obrata enakovreden pozitivni zasuk za $\frac{5}{8}$ polnega obrata. V splošnem preide na ta način $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$ v $\frac{f_k}{f_{k+1}}$. Toda filotakso so seveda definirali botaniki. (Najnujnejše o Fibonaccijevih številih in zlatem razmerju najdete na koncu članka, v delu teksta, ki smo ga osenčili.)

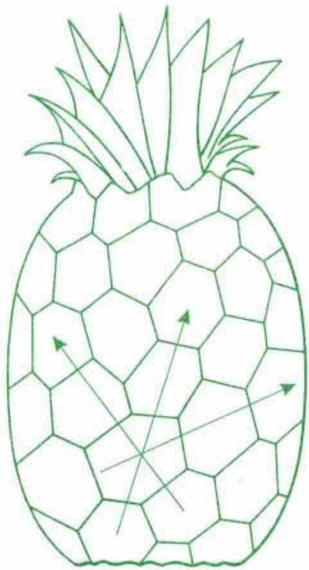
Drugačen tip filotakse srečamo pri urejenosti cevastih cvetov nekaterih košaric, npr. socvetja v sredini koška sončnice ali marjetice, pri urejenosti ananasovih lusk ali lusk storža jelke in pinije. Tu so cvetovi oziroma luske urejeni v spiralastih ali vretenastih zavojih.

Pri cvetu marjetke in ivanjščice (slika na naslovni strani) lahko sledimo, gledano iz centra glavice, 34 spiralam v negativni smeri in 21 spiralam v pozitivni smeri. Pri manjših sončnicah je v dveh smereh razločno vidnih 34 oziroma 55 spiral, pri večjih tja do 89 in 144 ali celo

144 in 233 pri nekaterih posebnih vrstah, ki imajo v košku tudi preko 2000 cvetov. Pri računalniško narisani sončnici na sliki 1 poteka 34 spiral v negativni smeri in 55 v pozitivni smeri.

Štirikotne luske storža pinije (slika na zadnji strani ovitka) so urejene v treh polžastih spiralah. Proti levi se od osnove rahlo dvigajo 3, nekoliko bolj strmih je 5 spiral, ki so usmerjene v desno, 8 najbolj strmih spiral pa spet poteka v levo. Posebno razločni so zavoji pri ananasu (slika 3), katerega bolj ali manj šestkotne luske so vidno urejene v vijačnice, ki potekajo v treh različnih smereh. Opazimo lahko 5 vzporednih vrst, ki vodijo v desno položno navzgor, 8 vrst gre nekoliko bolj strmo levo navzgor, 13 vrst pa se strmo ovija desno navzgor. (Včasih so smeri ustrezno zamenjane.)

Vidimo, da se tudi pri tem tipu filotakse pojavljajo samo Fibonaccijeva števila.



Slika 3.

Lista smo imenovali zaporedna, če med njima, vzdolž vejice, ne izrašča noben drug list. Govorimo tudi o zaporedju listov na vejici, pri čemer jih navadno številčimo od osnove vejice proti njenemu koncu. Tudi cevaste cvetove košaric ali luske storžev lahko postavimo v zaporedje, glede na njihovo oddaljenost od osnove, čeprav so, posebej pri glavicah košaric, te razdalje izredno majhne. Koti med zaporednimi listi, cvetovi ali luskami so pri večini rastlin natanko določeni, odvisni so le od rastline oziroma njene filotakse. Na fotografijah, ki smo jih posneli za Presek, tega razumljivo ne moremo razločno opazovati, v naravi pa je snovi za opazovanje dovolj.

Koti, ki pripadajo posameznim vrednostim filotakse, so enaki $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}} \cdot 360°$, $k = 2, 3, 4, \ldots$. To so zapored koti

$$180°, 120°, 144°, 135°, 138.5°, 137.1°, \ldots .$$

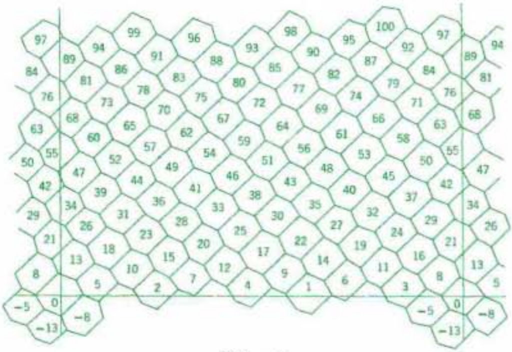
Ker zaporedje kvocientov $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ zaporednih Fibonaccijevih števil konvergira k razmerju zlatega reza $\tau = 1.6180339\ldots$, konvergira zaporedje filotaks k vrednosti $1 - \tau^{-1} = 0.3819660\ldots$ in z njim zgornje zaporedje kotov proti kotu

$$(1-\tau^{-1})\cdot 360^\circ = 0.3819660\cdot 360^\circ = 137.5^\circ\,.$$

Ta kot imenujemo tudi Fibonaccijev kot.

— — —

Zanimivo povezavo med posameznimi vrednostmi filotakse najdemo v knjigi Introduction to geometry H. S. M. Coxeterja, od koder je tudi slika 4. Na sliki je prikazano površje ananasa kot plašč pokončnega krožnega valja, razgrnjenega v ravnino. Šestkotne luske so oštevilčene v vrstnem redu glede na njihovo oddaljenost od vodoravne osnove. Da se videti, da je kot med zaporednima luskama približno Fibonaccijev kot. Luska 0 ima za sosede luske z oznakami 5, 13 in 8, ki določajo vidne smeri v vzorcu.



Slika 4.

Če enakomerno raztegujemo sliko v navpični smeri, se manjša topi kot med smerema od središča luske 0 proti luskama 5 in 8, dokler ne postane pravi kot. Tedaj šestkotne luske preidejo v pravokotnike. Vrste (na valju so to vijačnice), ki pripadajo luski 13, postanejo manj razločne, 3 nove vrste, dvigajoče se proti levi, pa postanejo bolj opazne. Tako preprostejšo ureditev smo opazili pri storžu pinije. Nadaljnje raztegovanje bi zakrilo smeri, ki pripadajo številu 8, in odkrilo 2 novi smeri, usmerjeni proti desni. Tako ureditev listov smo npr. opazili pri hrastu.

Če pa vzorec stiskamo v navpični smeri, raste kot med smerema od luske 0 proti luskama 8 in 13, dokler ne postane pravi. Tedaj nastopi Fibonaccijevo število 21 kot sosed števila 0, odmakne pa se število 5.

Pri raztegovanju in stiskanju valja njegovega obsega nismo spreminjali. Za spreminjanje vzorca je torej odločilno razmerje višine in premera valja. Če se valj hitreje debeli, kot pridobiva na višini, lahko en par Fibonaccijevih števil preide v drugega, kar se včasih res zgodi pri rasti iste rastline.

Če valj nadomestimo s stožcem, kot je primer pri jelki, ne dobimo vijačnic, ampak polžaste spirale. Če privzamemo, da so tvorilke stožca čedalje bolj pravokotne na os stožca, dobimo mejni primer (marjetica, sončnica), pri katerem polžaste spirale preidejo v logaritmične spirale.

Kako razkriti skrivnost očitne naklonjenosti narave zlatemu razmerju? Ali morda velja, da rastline slede naslednjima praviloma, ki ju je za Fibonaccijev kot odkril Vogel:

1. Vsak nov list ali cvet je postavljen na mesto, ki je za fiksen kot α zavrteno od položaja prejšnjega lista ali cveta.
2. Pozicijski vektor vsakega novega lista ali cveta kaže v najširšo obstoječo vrzel med pozicijskimi vektorji starejših listov ali cvetov.

Gotovo ne gre ugovarjati tema osnovnima predpostavkama (druga je z vidika iskanja svetlobe še kako smiselna), vendar sta nezadostni, kot ugotavlja Ridley, strokovnjak s tega področja. Pojasnjuje:

Medtem, ko je razumno domnevati, da rastline vsebujejo genetsko informacijo za določanje velikosti fiksnega vmesnega kota, je povsem nemogoče samo na tej osnovi fiksirati vmesni kot do take neverjetne natančnosti, kot jo opažamo v naravi, kajti naravna variacija je pri bioloških pojavih normalno precej velika.

Natančnost je res neverjetna. Pri številnih cvetovih sončnic sta npr. opazni spirali 55 in 89. To pa pomeni, da mora pri njih ležati izbrani kot med $\frac{21}{55} \cdot 360°$ in $\frac{34}{89} \cdot 360°$, kar zahteva relativno napako manjšo od $\frac{1}{1869}$.

Povejmo še, da se pri nekaterih rastlinah filotaksa izraža s posplošenimi Fibonaccijevimi števili, npr. 2, 1, 3, 4, 7, 11, ..., pa 3, 1, 4, 5, 9, ... ali 5, 2, 7, 9, 16, ..., katerih zaporedni kvocienti konvergirajo k zlatemu razmerju.

Zato neobremenjeni zaključimo z mislijo, da filotaksa ni kak splošni zakon, ampak osupljivo prevladujoča težnja rastlin.

Fibonaccijeva števila

Zaporedje Fibonaccijevih števil $\{f_k, k \in \mathbb{N}\}$ je določeno s predpisom

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{k+2} = f_k + f_{k+1},\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Začetek zaporedja je torej takle:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Zaporedje kvocientov zaporednih Fibonaccijevih števil $\frac{f_k}{f_{k+1}}$ je

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots,$$

vrednosti filotakse pa so kvocienti $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, kjer je $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}} = \frac{f_{k+1}-f_k}{f_{k+1}} = 1 - \frac{f_k}{f_{k+1}}$.

Zlato razmerje

Če daljico razdelimo na dva dela tako, da je razmerje dolžin večjega in manjšega dela enako razmerju dolžin dane daljice in večjega dela, pravimo, da smo daljico razdelili v zlatem rezu. Delilno razmerje imenujemo zlato razmerje in ga običajno označimo s τ.

Zlato razmerje je pozitivna rešitev enačbe $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ in sicer je

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339\ldots$$

Zveza med zlatim razmerjem in Fibonaccijevimi števili

Številu τ pripada neskončni verižni ulomek, v katerem so vsi členi enaki 1, torej

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}.$$

Med vsemi verižnimi ulomki ta ulomek najpočasneje konvergira.

Delni ulomki verižnega ulomka števila τ so enaki kvocientom $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ zaporednih Fibonaccijevih števil. Za ilustracijo izračunajmo nekaj začetnih vrednosti:

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} = 2 = \frac{2}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2},$$
$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \ \ldots$$

To pomeni, da zaporedje kvocientov $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ zaporednih Fibonaccijevih števil konvergira k τ. Zaporedje recipročnih števil $\frac{f_k}{f_{k+1}}$ konvergira k $\tau^{-1} = \tau - 1 = 0.6180339\ldots$, količniki $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, s katerimi se izraža filotaksa, pa konvergirajo proti $1 - \tau^{-1} = 2 - \tau = 0.3819660\ldots$.

HRAST (levo zgoraj) in KRVENKA (desno zgoraj) imata filotakso $\frac{2}{5}$,
OGNJENI TRN (levo spodaj) $\frac{1}{3}$, LIPA (desno spodaj) pa $\frac{1}{2}$.