

# OPTIMIZACIJA JEKLENEGA VISOKOTLAČNEGA CEVOVODA Z OJAČITVAMI

## OPTIMIZATION OF A STEEL PIPE WITH STIFFENER RINGS FOR HIGH-PRESSURE PENSTOCK

prof. dr. Stojan Kravanja, univ. dipl. inž. grad.

stojan.kravanja@um.si

doc. dr. Tomaž Žula, univ. dipl. inž. grad.

tomaz.zula@um.si

Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo,

prometno inženirstvo in arhitekturo

Smetanova 17, 2000 Maribor

Znanstveni članek

UDK 624.014.2:627.844(497.4)

**Povzetek** | Članek obravnava optimizacijo jeklenega visokotlačnega cevovoda z ojačitvami, vgrajenega v izvrten tunel v hribino. Cevovod je dimenzioniran kot samonosilna jeklena cilindrična lupina s krožnimi ojačitvami brez sodelovanja hribine in okoliškega betona. Optimizacija cevovoda je izvedena z nelinearnim programiranjem, NLP. V ta namen je bil modeliran optimizacijski model PIPEOPT-SR. Optimizacijski model vsebuje namensko funkcijo mase jeklene konstrukcije, ki je podvržena sistemu pogojnih (ne) enačb iz statične analize in dimenzioniranja cevovoda v skladu s priporočili C.E.C.T. V sklepu članka je predstavljen primer optimizacije visokotlačnega cevovoda z ojačitvami črpalne hidroelektrarne Kozjak, locirane v bližini Maribora.

Ključne besede: optimizacija, nelinearno programiranje, NLP, jeklena cev z ojačitvami, visokotlačni cevovod

**Summary** | The paper deals with the optimization of a steel pipe with stiffener rings for high-pressure penstock built in a bored tunnel. The penstock is designed to be self-resistant steel cylindrical shell with stiffener rings, constructed without the assistance of the surrounding concrete and rock. The optimization of the penstock is performed by the non-linear programming approach, NLP. For this purpose, an optimization model PIPEOPT-SR was developed. The model comprises the mass objective function of the steel structure, which is subjected to the design and dimensioning constraints, defined according to C.E.C.T. Recommendations. A numerical example at the end of the paper presents the optimization of the high-pressure penstock with stiffener rings for the Pump Hydropower Plant Kozjak, located close to the city of Maribor, Slovenia.

Key words: optimization, non-linear programming, NLP, steel pipe with stiffener rings, high-pressure penstock

## 1 • UVOD

Članek obravnava optimizacijo jeklenega visokotlačnega cevovoda z ojačitvami, vgrajenega v izvrstan tunel v hribino. Tovrstni visokotlačni cevovodi se gradijo za dovajanje vode pod visokim tlakom za hidroelektrarne. V nasprotju z referencami ((Kravanja, 2014), (Kravanja, 2015)), kjer je bil jekleni cevovod obravnavan kot gladka cev brez ojačitev, je v tem prispevku obravnavan cevovod kot samonosilna jeklena cilindrična lupina z navarjenimi krožnimi ojačitvami (slika 1). Sodelovanje hribine in okoliškega betona pri nosilnosti jeklene cevi ni upoštevano. Ojačitve je smiseln navariti na jekleno cev povsod tam, kjer je cev obremenjena z znatnim zunanjim vodnim tlakom. Računsko dobimo zaradi upoštevanja ojačitev tanjšo steno cevi ter nižjo maso in izdelavne stroške jeklene konstrukcije. Jeklena konstrukcija obbetoniranega cevovoda v hribini je namreč v splošnem obremenjena tako z notranjim kakor tudi z zunanjim vodnim tlakom, zato je treba narediti:

- izračun jeklenega cevovoda na notranji tlak, kjer poleg hidrostatsičnega tlaka mirujoče vode upoštevamo še hidrodinamični vpliv prehodnih pojavov (vodni udar padajoče vode iz akumulacijskega jezera v prazno cev) brez upoštevanja zunanjega tlaka na cev,
- izračun jeklenega cevovoda na zunjni tlak podzemne vode (višina terena nad cevjo) pri praznem cevovodu.

Ker standardi Evrokod ((SIST EN 1993, 2007a), (SIST EN 1993, 2007b)) podajajo samo določena splošna izhodišča za dimenzioniranje cevovodov, in ne obravnavajo cevovodov, vbetoniranih v tunele, smo pri enačbah dimenzioniranja uporabili C.E.C.T.-

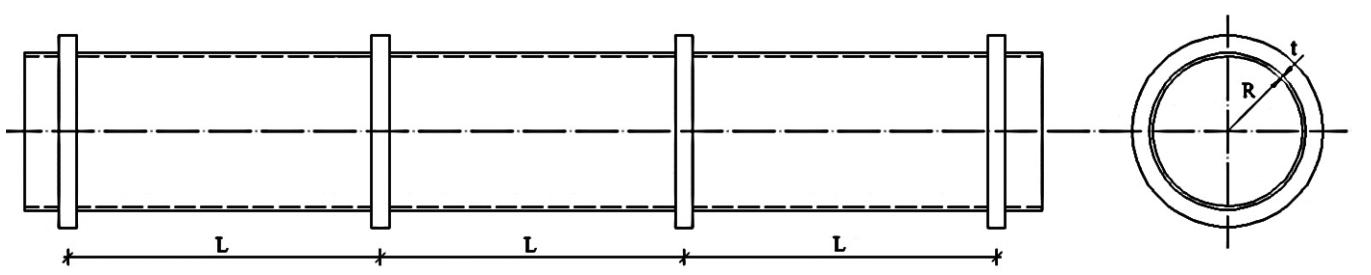
priporočila (C.E.C.T. Recommendations, 1979). Osnovno teorijo stabilnosti cilindričnih lupin, obremenjenih z zunanjim tlakom, je podal (Timoshenko, 1940), teorijo cilindričnih lupin s krožnimi ojačitvami pa so pozneje še razvijali ((Amstutz, 1950), (Amstutz, 1953)) in (Kollbrunner, 1956). Slednja teorija je upoštevana tudi v priporočilih C.E.C.T. Soavtor zadnjega citiranega dela inž. Milosavljević je bil vodja biroja v nekdanji Metalni, kjer so sproektirali in zgradili veliko visokotlačnih cevovodov svetovnih referenc.

Leta 1979 je Metalna dokončala izgradnjo 1400 m dolgega visokotlačnega cevovoda za hidroelektrarno Bajino Bašto v Srbiji s premerom 4,20 m–6,30 m in vodnim tlakom 95 barov. Uporabili so japonsko jeklo HT780 z natezno trdnostjo 780 N/mm<sup>2</sup>. Vodilni konstruktor cevovoda je bil inž. Janez Raztresen, vodja biroja za cevogradnje. Leta 1985 so konstruktorji Metalne pod vodstvom inž. Janeza Raztresa sproektirali in izdelali tlačni cevovod Chiew Larn, Tajska, s premerom 11,20 m in tlakom 12 barov, ki je še danes uvrščen med največje cevovode na svetu (Kravanja, 1988). Za to elektrarno je bil izdelan tudi takrat drugi največji razdelilnik na svetu dolžine 80,7 m, z vstopnim premerom cevi 11,20 m, tremi izstopnimi premeri 6,00 m, obremenjenimi z vodnim tlakom 12 barov. Konstruktor razdelilnika je bil prof. dr. Janez Kramar ((Kramar, 1985), (Kramar, 1990)). V Chiew Larnu je bilo uporabljeni japonsko jeklo SHT50A z natezno trdnostjo 500 N/mm<sup>2</sup>.

Kar nekaj inženirjev raziskovalcev se danes ukvarja z optimizacijo cevovodov. Optimizacijo majhnih hidroelektrarn in cevovodov s celoštevilskim programiranjem

zasledimo v viru (Tapia, 2018), optimizacija tunelov hidroelektrarn z genetskim algoritmom je opisana v (Fathi-Moghadam, 2013), optimizacijo cevovoda z ojačitvami so z enostavnim genetskim algoritmom in direktnim iskanjem predstavili v (Bai, 2013), optimizacijo armature cevovoda s programom ABAQUS so prikazali v (Wu, 2012), optimizacijo cevovoda nadalje obravnavata vir (Gu, 2011), optimizacija cevovoda z genetskim algoritmom je obravnavana tudi v (Haghhighipour, 2010), optimizacija preza cevovoda in črpalne hidroelektrarne z evolucionarnimi algoritmi je opisana v (Anagnostopoulos, 2008), stabilnost cevovoda z nevtronskimi mrežami in simuliranim ohlajanjem so opisali v (Dong, 2008) in optimizacijski model jeklenega obbetoniranega cevovoda z uporabo ANSYS Optimization Toolbox je opisan v (Li, 2008).

S ciljem, da bi znižali izdelavne stroške jeklenih cevovodov, smo tudi mi izvedli optimizacijo, in sicer optimizacijo mase jeklene stene cevovoda in krožnih ojačitev. Optimizacijo smo vršili z nelinearnim programiranjem, NLP. Razvili/sprogramirali smo optimizacijski model jeklenega cevovoda z ojačitvami PIPEOPT-SR. V ta namen smo definirali namensko funkcijo mase jeklenega cevovoda, ki je podvržena (ne)linearnim pogojem nosilnosti in napetosti cevi. V model je treba podati vhodne podatke, kot so premer cevi, obtežba (notranji in zunjni vodni tlak), materialne karakteristike jekla (napetost tečenja) in dolžina cevnega odseka. V optimizaciji so potem izračunani optimalna masa cevi, debelina stene cevi, prerez krožnih ojačitev in njihovi medsebojni razmaki.



Slika 1 • Jekleni cevovod s krožnimi ojačitvami.

## 2 • MODELNA FORMULACIJA NLP

Ker so enačbe nosilnosti in napetosti jeklene konstrukcije visokotlačnega cevovoda nelinearne in nelinearna je tudi namenska funkcija mase cevovoda, smo optimiranje izvedli z nelinearnim programiranjem, NLP. Problem nelinearnega programiranja zapišemo v naslednji obliki:

$$\min z = f(\mathbf{x})$$

p.p.:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{a}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^{LO} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{UP}\} \quad (\text{NLP})$$

V zgornji formulaciji pomeni  $\mathbf{x}$  vektor zveznih spremenljivk, definiranih znotraj svojih spodnjih mej in zgornjih mej  $\mathbf{x}^{LO}$  in  $\mathbf{x}^{UP}$ . Nelinearna namenska funkcija je določena z izrazom  $f(\mathbf{x})$ . Le-ta je podvržena sistemu pogojnih (ne)enačb. Izraz  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  predstavlja sistem nelinearnih pogojnih enačb, izraz  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$  pa sistem nelinearnih pogojnih neenačb. Matrična neenačba  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{a}$  določa sistem linearnih enačb in neenačb. Vse funkcije  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  in  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  morajo biti nelinearne, zvezne in zvezno odvedljive. Učinkovitejše metode rešujejo NLP problem z neposredno zadostitvijo Karush-Kuhn-Tuckerjevega pogoja, glej vire ((Karush, 1939),

## 3 • OPTIMIZACIJSKI MODEL PIPEOPT-SR

V skladu z opisano NLP modelno formulacijo smo za optimizacijo jeklenega cevovoda z ojačitvami zmodelirali optimizacijski model PIPEOPT-SR (PIPE OPTimization with Stiffener Rings). Model smo zapisali v višjem algebrojskem modelnem jeziku GAMS (General Algebraic Modelling System), glej (Brooke, 1988). Model sestavljajo vhodni podatki (skalarji), spremenljivke in namenska funkcija, ki je podvržena sistemu linearnih in nelinearnih pogojnih enačb ter neenačb.

**Faktor varnosti za notranji tlak.** Standard »SIST EN 1993-4-3:2007, Evrokod 3: Projektiranje jeklenih konstrukcij – 4.-3. del: Cevodod« predpisuje tri različne delne faktorje za obtežbo:

$\gamma_F = \gamma_{F1} = 1,39$  naravno (ruralno) okolje,  
 $\gamma_F = \gamma_{F2} = 1,50$  polurbano okolje brez protipoplavne obrambe,  
 $\gamma_F = \gamma_{F3} = 1,80$  polurbano okolje s protipoplavno obrambo.

Delni faktor varnosti odpornosti materiala je v SIST EN 1993-4-3:2007 določen kot  $\gamma_M = 1,0$ . Odločimo se za srednji delni faktor varnosti obtežbe  $\gamma_F = 1,50$ . Skupni faktor varnosti za notranji tlak potem znaša:  $C_{ip} = \gamma_F \gamma_M = 1,50$ , ki ga enakega določajo tudi C.E.C.T.-priporočila.

**Faktor varnosti za zunanji tlak.** Delna faktorja varnosti pri izračunu stabilnosti cevi na zunanji tlak sta definirana v standardu »SIST EN 1993-1-6:2007, Evrokod 3: Projektiranje jeklenih konstrukcij – 1.-6.del: Trdnost in stabilnost lupinastih konstrukcij«:  $\gamma_F = 1,50$  in

(John, 1948), (Kuhn, 1951)). Najpomembnejše metode, s katerimi rešujemo problem nelinearnega programiranja, so:

- metoda reducirane gradijenta (Reduced Gradient Method, RG), glej (Wolfe, 1967),
- posprošena metoda reducirane gradijenta (Generalized Reduced Gradient Method, GRG), glej (Abadie, 1969),
- razširjeni Lagrangian (Augmented Lagrangian, AL), glej ((Powell, 1969), (Hestenes, 1969)),
- zaporedno kvadratno programiranje (Successive Quadratic Programming, SQP), glej (Powell, 1978).

Komercialni računalniški programi za izračun problemov nelinearnega programiranja so NPSOL za SQP, MINOS za RG, programi GRG2, LS-GRG, CONOPT za GRG in LANCELOT za AL itd.

cevi ( $U \leq 0.2e$ ), kjer e predstavlja debelino stene cevi, zmanjšano za koroziski dodatek, in

$j/R = 1.0\%$  prazna vrzel med jekleno cevjo in okoliškim betonom ( $j = 0.001R$ ).

**Skalarji** (vhodni podatki) v modelu so:

$C_{ip}$  faktor varnosti za notranji vodni tlak (-),

$C_{ep}$  faktor varnosti za zunanji vodni tlak (-),

$cor$  koroziski dodatek na jekleno pločevino (cm),

$E$  modul elastičnosti jekla (kN/cm<sup>2</sup>),

$j_R = j/R$  razmerje med prazno vrzeljo med cevjo in okoliškim betonom  $j$  ter notranjim polmerom cevi  $R$  (-),

$f_y$  napetost tečenja jekla (kN/cm<sup>2</sup>),

$L_{sect}$  dolžina odseka cevovoda (cm),

$p_{in}$  notranji vodni tlak (kN/cm<sup>2</sup>),

$p_{ex}$  zunanji vodni tlak (kN/cm<sup>2</sup>),

$R$  notranji polmer cevi (cm),

$u_e = U/e$  razmerje med največjo notranjo deviacijo cevi  $U$  in teoretično debelino stene cevi  $e$  (-),

$\varepsilon = \eta/R$  razmerje med največjim koeficientom ovalnosti cevi  $\eta$  (deviacija med idealno krožnico polmera cevi in radialno navzven deformirano ovalno cevjo) in notranjim polmerom cevi  $R$  (-)

$\varphi$  koeficient, ki definira najvišjo možno elastično napetost v jek-

$\nu$	lu (kjer še velja Hookov zakon) (-),
$\rho$	Poissonov koeficient (-),
	prostorninska masa jekla (kg/cm <sup>3</sup> ).
<b>Spremenljivke</b> optimizacijskega modela:	
$a_0$	svetli razmak med stojinama ojačitve (cm),
$A_0$	površina prečnega prereza ojačitve (s sodelujočim delom stene cevi) (cm <sup>2</sup> ),
$e$	teoretična debelina stene cevi $e = t_{cor}$ (cm),
$e_0$	teoretična debelina stojine ojačitve (cm),
$h_0$	višina stojine ojačitve (cm),
$I_0$	vztrajnostni moment prereza ojačitve (cm <sup>4</sup> ),
$L$	razmak med ojačitvami cevi (cm),
$L_0$	širina spodnje pasnice ojačitve – tj. sodelujoča širina stene cevi (cm),
$mass$	masa jeklenega cevododa (stena cevi in ojačitve) (kg),
$p_{cr}^{L,min}$	manjši zunanjji kritični tlak (kN/cm <sup>2</sup> ),
$p_{cr}^{L,pipe}$	zunanji kritični tlak v ovalni cevi med dvema ojačitvama (kN/cm <sup>2</sup> ),
$p_{cr}^{L,ring}$	zunanji kritični tlak v ojačitvi (kN/cm <sup>2</sup> ),
$R_0$	polmer do horizontalne težiščne osi ojačitve (cm),
$t$	debelina stene cevi (cm),
$te$	debelina stojine ojačitve (cm),
$Y_0$	razdalja med krajnim vrhom ojačitve in horizontalno težiščno osjo (cm),
$\alpha$	stabilizacijski faktor (-),
$\beta$	faktor oslabitve gladke cevi zaradi splošne ovalnosti (izražen z $\eta=0,01R$ ) (-),
$\gamma$	faktor oslabitve gladke cevi zaradi navzven radialno deformirane ovalne cevi (izražen z $U>0,1e$ ) (-),
$\sigma_N$	normalna obodna napetost v steni cevi (kN/cm <sup>2</sup> ),
$\sigma_{NO}$	normalna obodna napetost v ojačitvi (kN/cm <sup>2</sup> ),

$\sigma_{NO,min}$  manjša normalna obodna napetost (ki ustreza manjšemu zunanjemu kritičnemu tlaku  $p_{cr}^{L,min}$ ) (kN/cm<sup>2</sup>).

**Namenska funkcija**, enačba (1), predstavlja v optimizacijskem modelu maso odseka ojačanega cevododa dolžine  $L_{sect}$ . Prvi izraz enačbe definira maso stene cevi, medtem ko drugi in tretji izraz predstavlja maso ojačitev, glej slike 1 in 2.

$$\begin{aligned} mass = & \pi \cdot t \cdot (2 \cdot R + t) \cdot \rho \cdot L_{sect} + 2\pi \cdot h_0 \cdot [2 \cdot (R + t) + h_0] \cdot e_0 \cdot \rho \cdot L_{sect} / L + \\ & \pi \cdot t \cdot [2 \cdot (R + t + h_0) + t] \cdot (a_0 + 2 \cdot e_0) \cdot \rho \cdot L_{sect} \end{aligned} \quad (1)$$

**Pogojne (ne)enačbe.** V primeru, ko je cevovod obremenjen z notranjim vodnim tlakom, se jeklena cevna lupina radialno raztegne in nasloni na okoliški beton in kamenino. Prosta cev bi se v tem primeru vzdolžno skrčila. To krčenje preprečita okoliški beton in kamenina. Zato se poleg obodnih nateznih napetosti v steni lupine  $\sigma_\theta$  pojavijo še vzdolžne natezne napetosti  $\sigma_x$  zaradi preprečene deformacije (kontrakcije). Zaradi nastalega dvodimensionalnega napetostnega stanja so primerjalne napetosti v cevi  $\sigma_{eq}$  zmanjšane za 11 %. Projektna napetost v cevi ( $C_{ip} \cdot \sigma_{eq}$ ) mora biti manjša od napetosti tečenja jekla  $f_y$ , kar je v modelu definirano s pogojno enačbo (2). Zmanjšana napetost v cevi  $\sigma_{eq}$  Poissonov koeficient za jeklo  $\nu$  in obodna napetost v steni lupine  $\sigma_\theta$  so podani z enačbami (3) do (5).

$$C_{ip} \cdot \sigma_{eq} \leq f_y \quad (2)$$

Kjer je:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \cdot \sigma_\theta} = \sqrt{(\nu \cdot \sigma_\theta)^2 + \sigma_\theta^2 - (\nu \cdot \sigma_\theta) \cdot \sigma_\theta} = 0,89 \sigma_\theta \quad (3)$$

$$\nu = 0,3 \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = p_{in} \cdot R / e \quad (5)$$

Jekleni cevovod mora prenesti obtežbo zunanjega vodnega tlaka  $p_{ex}$ . Enačba (6), s katere preverimo stabilnost stene cevi med dvema krožnima ojačitvama, predstavlja izračun zunanjega kritičnega tlaka  $p_{cr}$  v ovalni cevi v skladu s priporočili C.E.C.T.

$$p_{cr}^{L,pipe} = \alpha \cdot \beta \cdot p_{cr}^{-i} \quad (6)$$

Pri tem je zunanjji kritični tlak idealne (brez napak oblike) cevi brez ojačitev  $p_{cr}^{-i}$  definiran z enačbo (7).

$$p_{cr}^{-i} = \frac{E^*}{4} \left( \frac{e}{R + e} \right)^3 \quad (7)$$

Kjer je:

$$E^* = E / (1 - \nu^2) \quad (8)$$

Faktor oslabitve gladke cevi zaradi ovalnosti  $\beta$  je v skladu s (Kollbrunner, 1956) določen z enačbo (9) za največji možni koeficient ovalnosti cevi  $\eta=0,01 \cdot R$ .

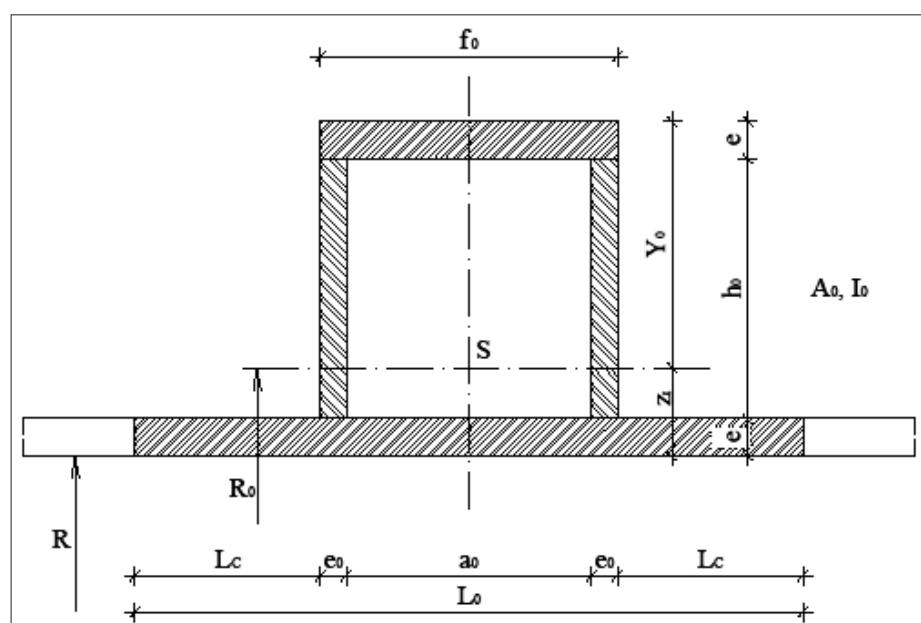
$$\beta = \frac{\gamma_{KM}}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma_{KM}^2}{4} - \nu} \quad (9)$$

$$\beta \leq 1,0 \quad (10)$$

Kjer je:

$$\gamma_{KM} = \nu + 6 \frac{\epsilon}{\Phi_{KM}} + 1 \quad (11)$$

$$\nu = f_y \cdot \Phi_{KM} / p_0 \quad (12)$$



Slika 2 • Prečni prerez krožne ojačitve.

$$\varphi_{KM} = e / R \quad (13)$$

$$p_0 = \frac{E}{4(1-v^2)} \cdot \varphi_{KM}^3 \quad (14)$$

$$\varepsilon = \eta / R = 0,01 \quad (15)$$

Stabilizacijski faktor  $\alpha$  je podan z enačbo (16). Ker so krožne ojačitve cevi v izvrtni hribini zalite z okoliškim betonom, so v betonu v svoji bočni smeri vpete in se ne morejo bočno zvrniti, lahko v skladu z določilom 8.4.2.1.a C.E.C.T.-priporočil računsko zmanjšamo razmake med krožnimi ojačitvami  $L$ . Ta zmanjšani razmak  $L_t$  izračunamo po enačbi (18).

$$\alpha = \frac{3,34}{\psi \sqrt{\varphi_{KM}}} + \frac{4}{9} \left( \frac{\pi^2}{\psi^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (16)$$

Kjer je:

$$\psi = L_f / R \quad (17)$$

$$L_f = 0,8 \cdot (L - a_0) \quad (18)$$

Visokotlačni cevovodi, vgrajeni v izvrte tunele v hribini, se zaradi večje varnosti obravnavajo brez sodelovanja okoliškega betona in hribine. Skladno s C.E.C.T.-priporočili se računajo kot samostojna jeklena konstrukcija. Zato je treba preveriti stabilnost krožnih ojačitev z enačbami (19) in (20), tj. z neenačbo C poglavja 8.4.2.2. priporočil C.E.C.T., kjer je  $\sigma_{NO}$  normalna obodna napetost v ojačitvi,  $p_{cr}^{L,ring}$  pa je zunanj kritični tlak v ojačitvi.

$$0,58 \cdot \frac{Y_0}{R} \cdot \left( \sigma_{NO} + E \frac{j}{R_0} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\sigma_{NO}}{E} \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{\frac{A_0 \cdot R_0^2}{I_0 + \frac{L - L_0}{12} \cdot e^3}}{e^3} \right)^{3/2} \leq (f_y - \sigma_{NO}) \cdot \left( 1 - 0,23 \cdot \left( \frac{3e}{2} + h_0 - z_t \right)^2 \right) \quad (29)$$

$$\cdot \frac{R_0}{Y_0} \cdot \frac{f_y - \sigma_{NO}}{E} \quad (19)$$

$$p_{cr}^{L,ring} = \sigma_{NO} \cdot \frac{A_0}{L_0 \cdot R_0} \cdot \left( 1 + 0,175 \cdot \frac{R_0}{Y_0} \cdot \frac{f_y - \sigma_{NO}}{E} \right)^{-1} \quad (20)$$

Karakteristike prečnega prereza krožne ojačitve izračunamo z enačbami (21)-(29). Krožna ojačitev (slika 2) je v bistvu votli pravokotni jekleni rez, pri čemer sta dve stojini in zgornja pasnica navarjene na jekleno steno cevi, ki s svojo sodelujočo širino  $L_0$  računsko predstavlja spodnjo pasnico ojačitve.

$$e_0 = t_e - cor \quad (21)$$

$$L_c = 0,78 \sqrt{R \cdot e} \quad (22)$$

$$L_0 = 2(L_c + e_0) + a_0 \quad (23)$$

$$f_0 = a_0 + 2e_0 \quad (24)$$

$$A_0 = L_0 \cdot e + 2h_0 \cdot e_0 + f_0 \cdot e \quad (25)$$

$$z_t = \left[ L_0 \cdot e \cdot \frac{e}{2} + 2h_0 \cdot e_0 \cdot \left( e + \frac{h_0}{2} \right) + f_0 \cdot e \cdot \left( \frac{3e}{2} + h_0 \right) \right] / A_0 \quad (26)$$

$$R_0 = R + z_t \quad (27)$$

$$Y_0 = 2e + h_0 - z_t \quad (28)$$

$$I_0 = \frac{L_0 \cdot e^3}{12} + L_0 \cdot e \cdot \left( \frac{e}{2} - z_t \right)^2 + 2 \cdot \frac{e_0 \cdot h_0^3}{12} + 2 \cdot h_0 \cdot e_0 \cdot \left( e + \frac{h_0}{2} - z_t \right)^2 + \frac{f_0 \cdot e^3}{12} + f_0 \cdot e \cdot \left( \frac{3e}{2} + h_0 - z_t \right)^2 \quad (29)$$

Normalna obodna napetost v ojačitvi  $\sigma_{NO}$  mora biti manjša od najvišje elastične napetosti v jeklu, zato v cevovodu velja Hookov zakon, kar izračunamo z enačbo (30).

$$\sigma_{NO} \leq \varphi \cdot f_y \quad (30)$$

Največji projektni zunanj vodni tlak na cev ( $C_{ep} \cdot p_{ex}$ ) mora biti manjši od zunanjega kritičnega tlaka v cevi  $p_{cr}^{L,pipe}$  kakor tudi od zunanjega kritičnega tlaka v ojačitvi  $p_{cr}^{L,ring}$ . Pri tem izračunamo zunanj kritični tlak  $p_{cr}^L$ , pri katerem jeklena cev z ojačitvami še izkazuje svojo odpornost/stabilnost. Leta je po enačbi (31) določen kot manjša vrednost izmed obeh zunanjih kritičnih tlakov v cevi  $p_{cr}^{L,pipe}$  in ojačitvi  $p_{cr}^{L,ring}$ . Zatem preverimo enačbo (32).

$$p_{cr}^L = \min \left\{ p_{cr}^{L,pipe}, p_{cr}^{L,ring} \right\} \quad (31)$$

$$C_{ep} \cdot p_{ex} \leq p_{cr}^L \quad (32)$$

Elastično obnašanje jeklenega materiala pri obtežbi zunanjega tlaka preverimo z enačbami (33)-(37), pri čemer je normalna obodna napetost v steni cevi  $\sigma_N$  definirana z enačbo (34), manjša normalna obodna napetost  $\sigma_{NO,min}$  ki ustreza najmanjšemu zunanjemu kritičnemu tlaku  $p_{cr}^{L,min}$ , pa z enačbo (35).

$$\sigma_N \leq \varphi \cdot \gamma \cdot f_y \quad (33)$$

$$\sigma_N = \frac{p_{cr}^L \cdot L \cdot R - \sigma_{NO,min} \cdot A_0}{(L - L_0) \cdot e} \quad (34)$$

$$\sigma_{NO,min} = \frac{p_{cr}^L \cdot L_0 \cdot R_0}{A_0} \quad (35)$$

$$\sigma_{NO,min} \leq \varphi \cdot f_y \quad (36)$$

$$\gamma = 1 - 3 \cdot p_{cr}^L \cdot \frac{R}{f_y \cdot e} \left( \frac{U}{e} - 0,1 \right) \quad (37)$$

uporabili nelinearno programiranje (NLP). Optimirali smo variante z gladko jekleno cevjo brez ojačitev, glej (Kravanja, 2015), kakor tudi variante cevovodov s krožnimi ojačitvami. Namen optimizacije je bil izračunati optimalno maso variant cevovoda, pri čemer bi dobili tudi vse potrebne dimenzije cevi in ojačitev. Podobno kot v viru (Kravanja, 2015) tudi v tem članku predstavljamo optimizacijo dveh variant:

- poševni cevovod - varianta 1, tj. cevovod z najdaljšo dolžino (optimalna masa gladke cevi brez ojačitev znaša 9967,41 tone jekla S 690 (Kravanja, 2015)) in
- vertikalni cevovod, tj. cevovod z najvišjim zunanjim tlakom (optimalna masa gladke cevi brez ojačitev je 3165,34 tone jekla S 690 (Kravanja, 2015)).

## 4 • OPTIMIZACIJA VISOKOTLAČNEGA CEVOVODA KOZJAK

Optimizacijski model PIPEOPT-SR smo uporabili pri optimizaciji visokotlačnega cevovoda črpalne hidroelektrarne Kozjak pri Mariboru. Bodoča elektrarna ima že izgrajeno akumulacijsko jezero velikosti 3 milijone m<sup>3</sup> vode, kjer je načrtovana elektrarna z dvema Francisovima reverzibilnima turbinama moči 2x220 MW. Strokovnjaki IBE Ljubljana so leta 2011 izdelali idejni projekt elektrarne in izvedli osnovno dimenzioniranje poševnega cevovoda (Močnik, 2011). Načrtovanih je bilo več variant jeklenega visokotlačnega cevovoda, obremenjenega z vodnim tlakom več kot 100 barov, dolžine do 2400 m in več. Za varianto

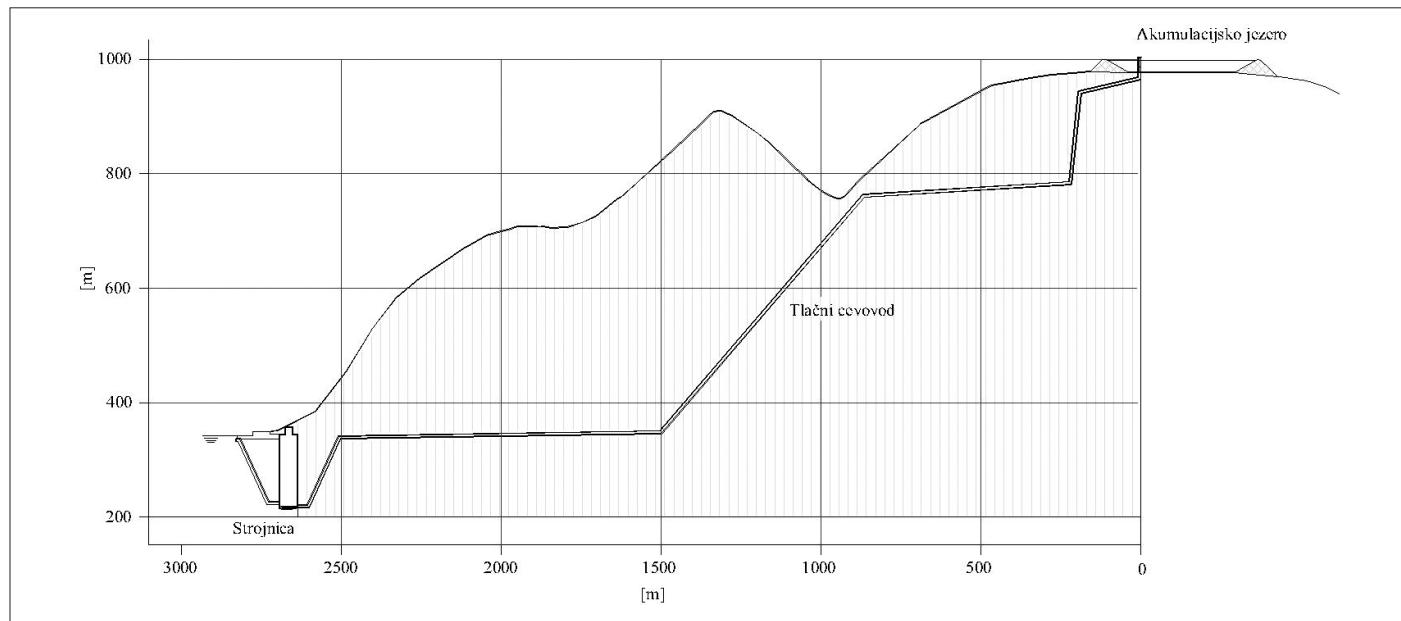
1 so npr. načrtovali porabo 12751,98 ton jekla kvalitete S 460. Variante vertikalnega visokotlačnega cevovoda so načrtovali leta 2012 (Močnik, 2012).

Na Fakulteti za gradbeništvo Univerze v Mariboru (danes je to Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, FGPA UM) smo v letih 2011–2012 izvedli optimizacijo vseh predvidenih variant poševnega visokotlačnega cevovoda (Kravanja, 2011). Na koncu smo optimirali še vertikalne variante cevovoda (Kravanja, 2012). Poleg optimizacije cevovoda smo izdelali navodila za projektante. Za reševanje optimizacijskega problema smo

#### 4.1 Optimizacija variante poševnega visokotlačnega cevovoda z ojačitvami – varianta 1

Varianta 1 (z asinhronim generatorjem) ima predvideno dolžino visokotlačnega cevovoda 2471,03 m, glej sliko 3. Ker se bosta na vrhu dva vertikalna odseka dolžin po 67,97 m

V izračunu smo upoštevali jeklo visoke trdnosti, drobnozrnate strukture in dobre varnosti, poboljšano jeklo kvalitete S 690Q. Za omenjeno varianto smo optimirali 6 dolžinskih odsekov cevi dolžin od 144,10 m do 619,78 m z notranjimi radiji  $R=1,95$  m ( $D=3,90$  m) do  $R=2,15$  m ( $D=4,30$  m), z največjim notranjim jih vstavili v optimizacijski model PIPEOPT-SR, vsebujejo vrednosti naslednjih konstant:  $C_{ip}=1,5$ ,  $C_{ep}=1,8$ ,  $cor=0,2$  cm,  $f_y=69,0$  kN/cm<sup>2</sup> (S 690Q,  $t \leq 50$  mm),  $f_y=65,0$  kN/cm<sup>2</sup> (S 690Q,  $t > 50$  mm),  $E=21000$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\nu=0,3$ ,  $\varphi=0,7$ ,  $j_r=j/R=0,001$ ,  $\varepsilon=\eta/R=0,01$ ,  $u_e=U/e=0,2$  in  $\rho=0,00785$  kg/cm<sup>3</sup>.



Slika 3 • Prerez skozi poševni visokotlačni cevovod Kozjak.

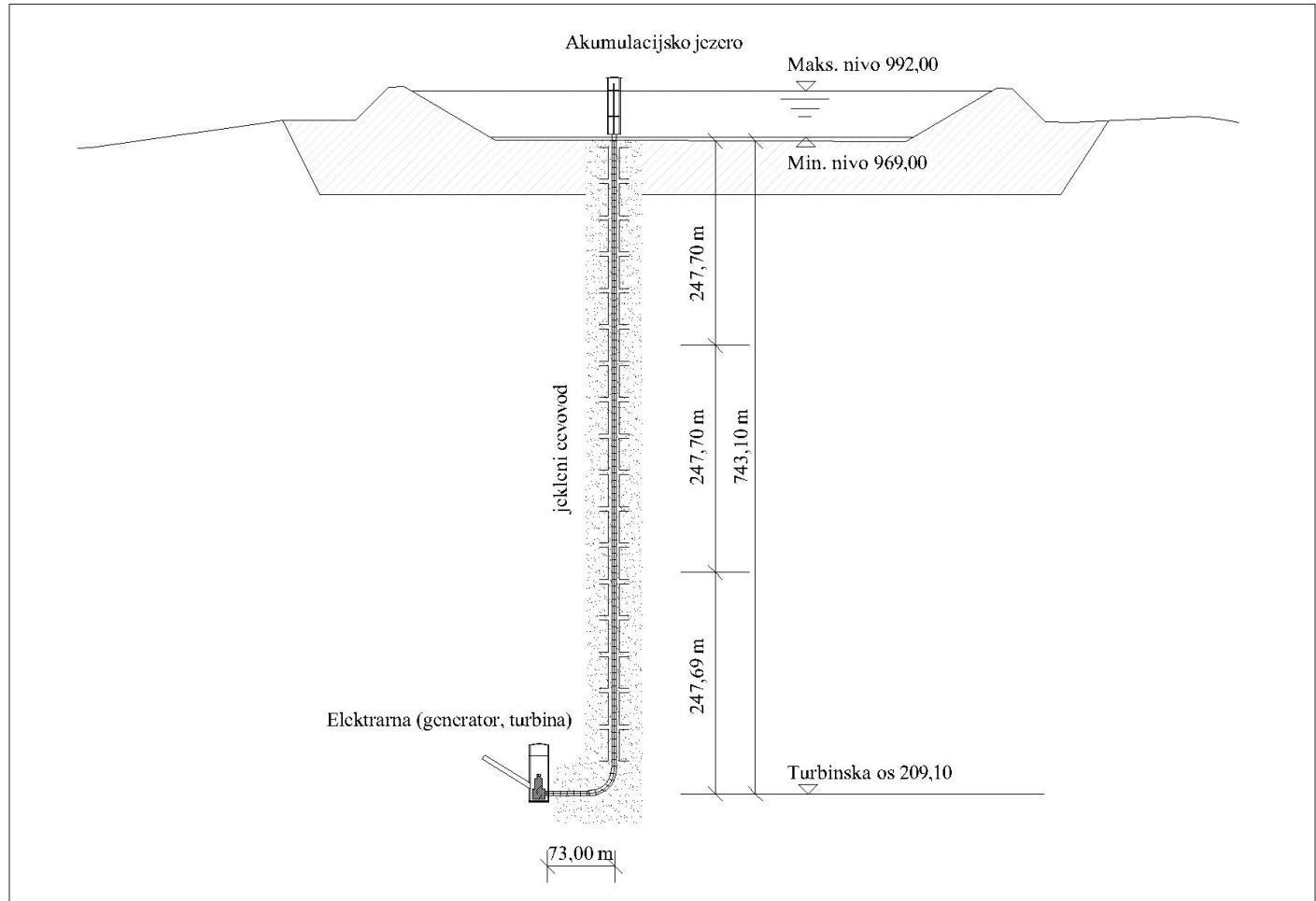
izdelala iz stene cevi z najmanjšo možno debino, smo optimirali samo preostalo dolžino cevovoda  $L=2335,09$  m.

vodnim tlakom 102,830 bara in največjim zunanjim vodnim tlakom 46,388 bara, glej preglednico 1. Nadaljnji vhodni podatki, ki smo

Optimizacijski model PIPEOPT-SR smo za 6 različnih cevnih odsekov variante 1 uporabili 6-krat in izvedli 6 izračunov, glej preglednico 1.

x (m)	p <sub>in</sub> (m)	p <sub>ex</sub> (m)	D (m)	t (mm)	ΔL (m)	ΣG (kg)
0,00	1028,30	150,00	3,9	41	144,10	cev: <b>574 214</b>
108,15	926,19	200,00	3,9	37	356,87	cev: <b>1 282 025</b>
465,00	885,62	348,53	3,9	36	465,02	cev: 1 624 983 rebra: 147 007 skupaj: <b>1 771 990</b>
930,00	832,76	463,88	4,1	45	363,66	cev: 1 672 831 rebra: 160 086 skupaj: <b>1 832 917</b>
1205,00	589,65	369,28	4,1	36	385,66	cev: 1 416 143 rebra: 161 487 skupaj: <b>1 577 630</b>
1480,00	293,91	42,06	4,3	15	619,78	cev: 989 302 rebra: 83 941 skupaj: <b>1 073 243</b>
<b>Jekleni cevovod skupaj:</b>					<b>2335,09</b>	<b>8 112 019</b>

Preglednica 1 • Optimalna masa poševnega cevovoda z ojačitvami Kozjak – varianta 1.



Slika 4 • Prerez skozi vertikalni visokotlačni cevovod Kozjak.

Za vsak odsek smo v model v modelnem jeziku GAMS vstavili vse potrebne vhodne podatke in definirali začetne vrednosti spremenljivk ter njihove spodnje in zgornje meje. Zatem smo izvedli optimizacijo, ki smo jo vršili z optimizacijskim podprogramom GAMS/CONOPT2 (Drud, 1994), ki NLP računa po metodi reduciranih gradientov. Model PIPEOPT-SR vsebuje 809 vrstic, 16 skalarjev, 23 spremenljivk, 28 osnovnih pogojuh (ne)enačb, 23 dodatnih neenačb mej spremenljivk in 2 ukazna stavka. Ker optimizacijski model ni obsežen, je znašal računski čas optimizacije odseka cevi manj kot 1 sekundo. Delovni čas, ki še vključuje vnos podatkov in interpretacijo rezultatov, je znašal 10 minut. Skupni delovni čas izračuna celotnega cevovoda z vsemi odseki je tako znašal samo 1 uro.

Optimalni rezultat predstavlja najmanjšo izračunano možno maso 8112,02 tone jekla visokotlačnega cevovoda z ojačitvami. Dobljene so tudi bile potrebne debeline t jeklene stene 15 mm do 45 mm in dimenzijske krožne ojačitev (reber), glej preglednico 1. Ugotovili smo, da prvima dvema cevnima odsekoma

( $x=0,00 \text{ m}$  in  $x=108,15 \text{ m}$ ) ni bilo treba dajati ojačitev, saj je potrebna debelina cevi z ojačitvami znašala enako kot v primeru gladke cevi (brez ojačitev). To se je zgodilo zato, ker se na teh dveh odsekih pojavi največji notranji vodni tlak in relativno majhen zunanjji tlak, ki ni bil merodajan. Priporočiti velja, da smo cevovodu s privaritvijo krožnih ojačitev zmanjšali maso jekla za 18,6 %, saj optimirana masa gladke cevi (brez ojačitev), glej vir (Kravanja, 2015), znaša 9967,41 tone jekla.

#### 4.2 Optimizacija variante vertikalnega visokotlačnega cevovoda z ojačitvami

Dolžina vertikalnega visokotlačnega cevovoda znaša 784,06 m, glej sliko 4. Optimizacijo te variante smo prikazali v tudi viru (Kravanja, 2018), kjer pa nismo izvedli primerjave dobrijene mase z maso gladkega cevovoda brez ojačitev. Tudi pri tej varianti smo predvideli jeklo visoke trdnosti S 690Q. Za omenjeno varianto smo optimirali 16 dolžinskih odsekov cevi (5 v spodnjem delu, 5 v srednjem delu in 6 v zgornjem delu cevi) dolžin od 9,00 m do 81,00 m z notranjimi radiji  $R=1,60 \text{ m}$  ( $D=3,20 \text{ m}$ ) do

$R=2,00 \text{ m}$  ( $D=4,00 \text{ m}$ ), z največjim notranjim vodnim tlakom 94,920 bara in največjim zunanjim vodnim tlakom 78,290 bara, glej preglednico 2. V optimizacijski model PIPEOPT-SR smo vstavili še naslednje konstante:  $C_p=1,5$ ,  $C_{ep}=1,8$ ,  $cor=0,2 \text{ cm}$ ,  $f_y=69,0 \text{ kN/cm}^2$  (S 690Q,  $t \leq 50 \text{ mm}$ ),  $f_y=65,0 \text{ kN/cm}^2$  (S 690Q,  $t > 50 \text{ mm}$ ),  $E=21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu=0,3$ ,  $\varphi=0,7$ ,  $j_R=j/R=0,001$ ,  $\varepsilon=\eta/R=0,01$ ,  $U_e=U/e=0,2$  in  $\rho=0,00785 \text{ kg/cm}^3$ .

Zgornje vhodne podatke smo v model PIPEOPT-SR vstavili 16-krat za 16 različnih cevnih odsekov. Zatem smo s podprogramom GAMS/CONOPT2 izvedli 16 NLP-optimizacij. Celotni delovni čas izračuna cevovoda vseh 16 odsekov je znašal okoli 3 ure. Izračunali smo maso jekla vertikalnega cevovoda z ojačitvami v višini 2592,55 tone. Izračunali smo tudi optimalne debeline stene cevi  $t$  od 8 mm do 61 mm in preze ojačitev (reber), glej preglednico 2. Visokotlačnemu cevovodu smo s privaritvijo krožnih ojačitev zmanjšali maso jekla za 18,1 %, saj optimirana masa gladke cevi (brez ojačitev), glej vir (Kravanja, 2015), znaša 3165,34 tone jekla.

x (m)	prerez	p <sub>in</sub> (m)	p <sub>ex</sub> (m)	D (m)	t (mm)	ΔL (m)		jeklo ΣG (kg)	
0,00	1	949,20	782,90	3,20	62	81,00	S 690	cev: 403 998 rebra: 23 944 skupaj: <b>427 942</b>	
81,00	4	883,00	733,90		58	54,00		cev: 251 647 rebra: 15 501 skupaj: <b>267 148</b>	
135,00	6	817,60	679,90		54	54,00		cev: 234 005 rebra: 15 168 skupaj: <b>249 173</b>	
189,00	8	752,10	625,90		47	54,00		cev: 203 233 rebra: 15 105 skupaj: <b>218 338</b>	
243,00	10	686,70	571,90		43	36,66		cev: 126 074 rebra: 10 348 skupaj: <b>136 422</b>	
Spodnji del:								<b>1 299 023</b>	
279,66	11	642,20	535,20	3,40	43	54,00	S 690	cev: 197 160 rebra: 16 687 skupaj: <b>213 847</b>	
333,66	13	576,70	481,20		39	54,00		cev: 178 612 rebra: 15 827 skupaj: <b>194 439</b>	
387,66	15	511,30	427,20		35	54,00		cev: 160 106 rebra: 15 635 skupaj: <b>175 741</b>	
441,66	17	445,80	373,20		31	54,00		cev: 141 643 rebra: 15 477 skupaj: <b>157 120</b>	
495,66	19	380,40	319,20		27	31,70		cev: 72 336 rebra: 8 144 skupaj: <b>80 480</b>	
Srednji del:								<b>821 627</b>	
527,36	20	341,90	287,50	3,60	25	54,00	S 690	cev: 120 687 rebra: 22 210 skupaj: <b>142 897</b>	
581,36	22	276,50	233,50		21	54,00		cev: 101 265 rebra: 14 925 skupaj: <b>116 190</b>	
635,36	24	211,00	179,50		17	54,00		cev: 81 886 rebra: 15 282 skupaj: <b>97 168</b>	
689,36	26	145,60	125,50		12	54,00		cev: 57 722 rebra: 16 349 skupaj: <b>74 071</b>	
743,36	28	78,10	69,50		8	31,70		cev: 22 565 rebra: 10 020 skupaj: <b>32 585</b>	
775,06	29	39,80	37,80		8	9,00		cev: 7 116 rebra: 1 869 skupaj: <b>8 985</b>	
Zgornji del:								<b>471 896</b>	
<b>Jekleni cevovod skupaj:</b>								<b>2 592 546</b>	

Preglednica 2 • Optimalna masa vertikalnega cevovoda z ojačitvami Kozjak.

## 5 • ZAKLJUČEK

V prispevku smo predstavili optimizacijo jeklenega cevovoda s krožnimi ojačtvami, kakršne se uporabljajo pri gradnji visokotlačnih cevovodov. Omenjene ojačitve navrimo na jekleno cev povsod tam, kjer je cev obremenjena z znatnim zunanjim vodnim tlakom. Optimizacijo smo opravili z nelinearnim programiranjem, NLP. V ta namen smo razvili optimizacijski model, kjer je namenska funkcija mase jeklene konstrukcije cevovoda podvržena pogojnemu (ne)enačbam nosilnosti in napetosti. Upoštevana sta dva obtežna primera: notranji vodni tlak z upoštevanjem vodnega udara padajoče vode iz akumulacijskega jezera v prazno cev in zunanjji vodni tlak, ki je enak višini podtalnice – terena nad

cevjo. Pogojne (ne)enačbe so definirane v skladu s priporočili za visokotlačne cevovode C.E.C.T. V modelu smo definirali enačbe odpornosti cevi na notranji vodni tlak, kjer smo upoštevali zmanjšane napetosti v cevi pri nastopu dvoosnega napetostnega stanja zaradi preprečene kontrakcije. Nadalje smo definirali enačbe stabilnosti stene cevi med dvema krožnima ojačtvama in enačbe stabilnosti krožnih ojačitev na zunanjem vodnem tlaku. Na koncu članka smo prikazali optimizacijo jeklene cevi z ojačtvami visokotlačnega cevovoda črpalne hidroelektrarne Kozjak pri Mariboru. Optimirali smo dve variante, in sicer poševni in vertikalni cevovod z ojačtvami. Prvi cevovod (varianta 1), to je poševni

cevovod z ojačtvami, je dolg 2471,03 m, načrtovan z notranjimi premeri od 3,90 m do 4,30 m in obremenjen z največjim notranjim vodnim tlakom 102,830 bara ter največjim zunanjim vodnim tlakom 46,388 bara. Za ta cevovod smo izračunali optimalno maso 8112,02 tone jekla S 690Q. Za drugo varianto, to je vertikalni cevovod z ojačtvami, dolžine 784,06 m, premerov 3,20 m do 4,00 m, obremenjen z največjim notranjim vodnim tlakom 94,920 bara in največjim zunanjim vodnim tlakom 78,290 bara, smo izračunali optimalno maso 2592,55 tone jekla S 690Q. Rezultati optimizacije pokažejo, da če jekleni gladki cevi (brez ojačitev) visokotlačnega cevovoda Kozjak privarimo krožne ojačitve, bistveno povečamo stabilnost konstrukcije na zunanjem tlaku in zmanjšamo maso jekla za več kot 18 %.

## 6 • LITERATURA

- Abadie, J., Carpenter, J., Generalization of the Wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints, Optimization, New York: Academic Press, 37–47, 1969.
- Amstutz, E., Das Einbeulen von Schacht- und Stollenpanzerungen, Schweizerische Bauzeitung 68 (9), 102–105, 1950.
- Amstutz, E., Das Einbeulen von vorgespannten Schachtund Stollenpanzerungen, Schweizerische Bauzeitung 71 (16), 229–231, 1953.
- Anagnostopoulos, J. S., Papantonis, D. E., Simulation and size optimization of a pumped-storage power plant for the recovery of wind-farms rejected energy, Renewable energy 33 (7), 1685–1694, 2008.
- Bai, X. L., Jia, Q. P., Su, H. L., Optimal Design of the Stiffener Penstock Structure in a Hydropower Station, Civil engineering, architecture and sustainable infrastructure II, pts 1 and 2, Applied Mechanics and Materials 438–439, 561–564, 2013.
- Brooke, A., Kendrick, D., Meeraus, A., GAMS - A User's Guide, Scientific Press, Redwood City, CA, 1988.
- C.E.C.T., Recommendations for the design, manufacture and erection of steel penstocks of welded construction for hydro electric installations, European Committee for boilermaking and kindred steel structures, Prepared by the »Penstock« Section, 1979.
- Dong, W. S., Tang, K. D., Hou, X. M., Liu, X. M., Research on the stability problem of hydroelectric station penstock under external pressure, 2008 International symposium on intelligent information technology application, vol II, Proceedings, IEEE Computer Soc, Los Alamitos, CA, 508–+, 2008.
- Drudd, A. S., CONOPT – A Large-Scale GRG Code, ORSA Journal on Computing 6 (2), 207–216, 1994.
- Fathi-Moghadam, M., Haghishipour, S., Samani, H. M. V., Design-Variable Optimization of Hydropower Tunnels and Surge Tanks Using a Genetic Algorithm, Journal of water resources planning and management-ASCE 139 (2), 200–208, 2013.
- Gu, H., Yan, G. H., Analysis on Dynamic Response and its optimized design of Penstock and Expansion Joint Structure in Hydropower Station, Advanced building materials, pts 1-4, Advanced Materials Research 250-253 (1-4), 2892–2896, 2011.
- Haghishipour, S., Fathi-Moghadam, M., Optimization of hydropower conveyance systems, Journal of food agriculture & environment 8 (2), 1093–1096, 2010.
- Hestenes, M. R., Multiplier and gradient methods, J. Optim. Theory Appl. 4, 303–320, 1969.
- John, F., Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Studies and Essays presented to Richard Courant on his 60th birthday, New York: Interscience, 187–204, 1948.
- Karush, W., Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, 1939.
- Kollbrunner, C. F., Milosavljević, S., Beitrag zur Berechnung von auf Ausendruck beanspruchten kreiszylindrischen Rohren, Verlag Leemann, Zürich, 1956.

Kramar, J., Računalniško podprtvo snovanje razdelilnih delov tlachnih cevovodov: odpravljanje ozkih gril v konstrukcijskem procesu, Strokovni bilten 2 (2), 31–35, 1985.

Kramar, J., Raztresen, J., Bradač, J., Ocepek, M., The design and construction of the Chiew Larn penstock system, International water power & dam construction 42 (7), 32–35, 1990.

Kravanja, S., Faith, Š., Raztresen, J., Zelenko, B., Bedenik, B., Visokotlačni cevovod, jeklena obloga in razdelilnik za hidroelektrarno Chiew Larn na Tajskem, Gradbeni vestnik 37 (4/5/6), 86–90, 1988.

Kravanja, S., The optimization of penstock with the recommendations for the design of steel liner and the collaboration of the rock, The recommendations for the dimensioning and optimization of steel penstock, (Optimizacija cevovoda z izhodišči za načrtovanje jeklene oblage in sodelovanja hribine, Izhodišča za dimenzioniranje in optimizacijo jeklenega cevovoda), Kozjak PSP, Faculty of Civil Engineering, University of Maribor, 2011.

Kravanja, S., The optimization of penstock with the recommendations for the design of steel liner and the collaboration of the rock, Variant the Verical penstock, The recommendations for the dimensioning and optimization of steel penstock, (Optimizacija cevovoda z izhodišči za načrtovanje jeklene oblage in sodelovanja hribine, Varianta vertikalni cevovod – kaverna, Izhodišča za dimenzioniranje in optimizacijo jeklenega cevovoda), Kozjak PSP, Faculty of Civil Engineering, University of Maribor, 2012.

Kravanja, S., Optimization of steel penstock in a bored tunnel, High performance and optimum design of structures and materials, International Conference on High performance and optimum design of structures and materials, HPSM/OPTI 2014, WIT transactions on the built environment 137, WIT Press, Southampton, 337–345, 2014.

Kravanja, S., Optimizacija jeklene gladke stenske oblage visokotlačnega cevovoda, Gradbeni vestnik 64, 280–286, 2015.

Kravanja, S., Optimization of a steel penstock with stiffener rings, E-GFOS 9 (17), 64–73, 2018.

Kuhn, H. W., Tucker, A. W., Nonlinear programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley: University of California Press, 481–492, 1951.

Li, H. W., Ning, H. M., Yang, Z. S., The Optimal Design Model of Steel-lined Reinforced Concrete Penstock Based on ANSYS, Proceedings of first international conference of modelling and simulation, vol VI: Modelling and simulation in architecture, civil engineering and materials, 31–35, 2008.

Močnik, I., Kimovec, J., Penstock dimensioning, 3. civil construction design, Penstock, Kozjak PSP, IBE Ljubljana, 2011.

Močnik, I., Technical Report, 3. civil construction design, 3/18 Penstock – cavern type, Kozjak PSP, IBE Ljubljana, 2012.

Powell, M. J. D., A method for nonlinear constraints in minimization problems, Optimization, New York: Academic Press, 238–298, 1969.

Powell, M. J. D., A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations, Proceedings 1977 Dundee Conference on Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics, Belin: Springer-Verlag, 1978.

SIST EN 1993-1-6:2007, Evrokod 3: Projektiranje jeklenih konstrukcij -1-6.del: Trdnost in stabilnost lupinastih konstrukcij, 2007a.

SIST EN 1993-4-3:2007, Evrokod 3: Projektiranje jeklenih konstrukcij -4-3.del: Cevovodi, 2007b.

Tapia, A., Millan, P., Gomez-Estern, E., Integer programming to optimize Micro-Hydro Power Plants for generic river profiles, Renewable energy 126, 905–914, 2018.

Timoshenko, S., Theory of plates and shells, 1st edition, McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1940.

Wolfe, P., Methods of nonlinear programming, Nonlinear Programming, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 97–131, 1967.

Wu, H. L., Du, X. F., Qin, S. H., Li, Y., Li, Q., Influence of Concrete Tension Softening Properties on the Steel-liner Reinforced Concrete Penstock, Applied mechanics and materials I, pts 1-3, Applied Mechanics and Materials 275–277, 1544–+, 2012.