tedaj, kadar sta izpolnjeni obe, kadar je torej

- $12u - v = b$ in $-u + 12v = a$.

Izračunajmo od tod u in v:

- $$u = \frac{a + 12b}{143}, \quad v = \frac{12a + b}{143}. \qquad (1)$$

Če je $a = b$, je tudi $u = v$; tedaj oba kazalca sovpadata in čas je določen. Koliko je ura, ne moremo ugotoviti le v primeru, ko je $a \neq b$ in se u in v izražata z (1). Lahko je namreč a ur in $5(b + v)$ minut ali pa b ur in $5(a + u)$ minut. Ker imamo za a dvanajst možnosti $a = 0, 1, \ldots, 11$) in pri izbranem a enajst možnosti za b (ker je $a \neq b$), je vseh leg $12 \times 11 = 132$. V teh primerih ne vemo, kateri je urni in kateri minutni kazalec; zato je različnih leg polovico manj, torej $132 : 2 = 66$. Weinstein je postavil še dodatno vprašanje: Kaj pa, če poznamo lego sekundnega kazalca, morda je tedaj čas vselej določen?

Denimo, da prvi kazalec kaže minute. Razmak med dvema številkama na uri pomeni 5 minut. Torej je preteklo $5u$ minut od trenutka, ko je bil ta kazalec usmerjan proti a. Število $5u$ ni nujno celo. Presežek nad celim številom pokaže sekundni kazalec (presežek ja treba pomnožiti s 60). Če se presežek ne sklada z lego sekundnega kazalca, potem prvi kazalec ne kaže minut temveč ure. Prav tako ugotovimo, da drugi kazalec ni minutni, kadar se z lego sekundnega kazalca ne ujema presežek števila $5v$ nad celim številom. V dvomu bi ostali tedaj, kadar bi bila oba presežka v skladu z lego sekundnega kazalca. V tem primeru pa bi morala biti oba presežka enaka in zato $5v - 5u$ celo število. Od prej vemo, da prideta v upoštev le u in v, ki se izražata z (1). Od tod izračunamo

- $$5v - 5u = \frac{5 \cdot 11(a - b)}{143} = \frac{5(a - b)}{13}.$$

Desna stran je celo število le tedaj, če je razlika $a - b$ deljiva z 13. Ker sta a in b manjša od 12, mora biti $a - b = 0$, se pravi $a = b$. V tem primeru pa se kazala na uri ujemata in lahko razberemo, koliko je ura.

Tako smo ugotovili: Če poznamo lego obeh (velikih) kazalcev na uri in lego sekundnega kazalca, lahko določimo čas, čeprav ne vemo, kateri od kazalcev kaže ure in kateri minute.

× × ×

Matematik – pisatelj Kombinatorik

Ivan Pucelj

Znana čarovniška beseda ABRAKADABRA je vznemirila tudi tri šolarje: Miho, Jano in Jureta. To besedo so poskusili zapisati v »naravnem abecednem zaporedju« črk

- AAAAABBDKRR.

Jure je predlagal, naj v abecednem vrstnem redu zapišejo vse možne besede z 11 črkami, ki nastanejo, če vsakega od zgornjih simbolov uporabimo natanko enkrat.

»Koliko ›besed‹ bo imel ta slovar?« se sprašuje Miha.

»Na kateri strani in v kateri vrstici je beseda ABRAKADABRA, če ima vrstica dve besedi, stran pa 30 vrstic?« doda Jana.

»Koliko dragocenega časa bi porabil za izpis slovarja, če potrebujem sekundo za zapis črke?« vpraša Miha.

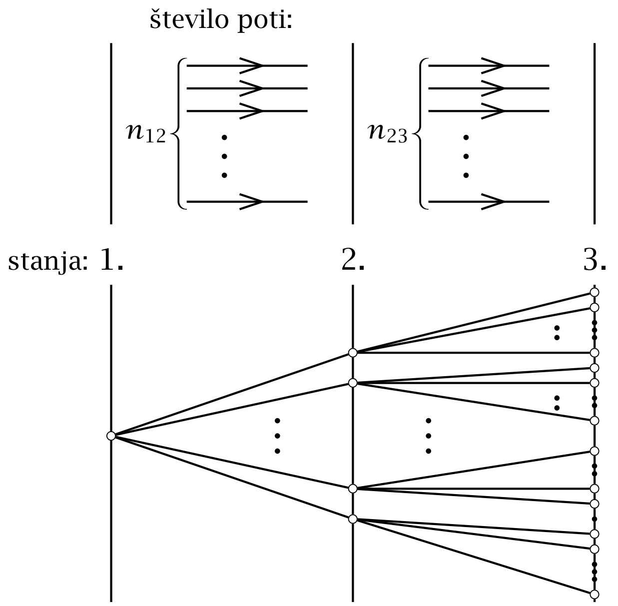
Problem, ki ga je zastavila naša trojka, je ena od osnovnih nalog kombinatorike, ki se ukvarja s *preštevanjem*.

Pa se še mi vključimo v reševanje zgornje naloge. Dela se lotimo s premisleki. Ko v besedi premešamo črke, pride beseda iz enega ›stanja‹ v drugo ›stanje‹, potem v tretje.

Če naredimo najprej npr. pet korakov, potem pa iz drugega stanja potrebujemo za prehod v tretje stanje npr. štiri korake, je na dlani, da vodi od prvega stanja v tretje stanje pet krat štiri korakov, torej dvajset korakov.

Tako smo prišli do prve zakonitosti, ki jo ponazorimo s sliko 1. Število poti (ali načinov) priti iz stanja 1 v 3 je:

- $n_{13} = n_{12} \cdot n_{23}$.



SLIKA 1.

Nekoliko natančneje: Če je iz stanja 1 v 2 n_{12} možnih poti, iz stanja 2 v 3 pa n_{23} poti, je iz 1 v 3 $n_{13} = n_{12} \cdot n_{23}$ poti, pri pogoju, da se razmere ne spremené in da se poti dajo sestavljati.

Povedano lahko razširimo na primere, ko je stanj več (obravnavamo končno mnogo primerov), npr. k, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

- $n_{1k} = n_{12} \cdot n_{23} \cdot n_{34} \cdot \ldots \cdot n_{k-1,k}$.

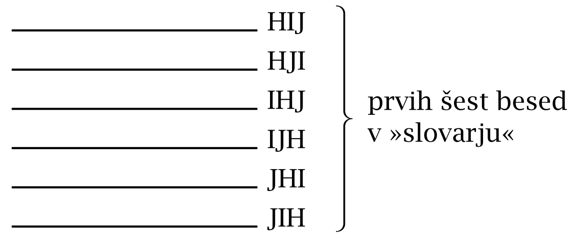
Opomba. Privzeli smo, da so si stanja različna.

Zgornja zakonitost zasluži poimenovanje *zlato pravilo kombinatorike*, saj je čarobni ključek v reševanju številnih kombinatoričnih nalog. Rečemo mu tudi pravilo produkta.

Najprej uporabimo to v primeru besede

- ABCČDEFGHIJ,

ki sestoji iz enajstih **različnih** črk **slovenske** abecede, ki so v tej besedi že **urejene** po slovarskem vrstnem redu. Koliko različnih besed nastane iz te besede – recimo ji začetna beseda, ko premeščamo v njej črke po slovarskem načinu? Po tem načinu zapišimo nekaj primerov – po vrstnem redu: premeščamo naprej **končno** trojico črk HIJ, **začetni rep** črk, torej ABCČDEFG, pustimo pri miru in dobimo:



Število vseh mogočih besed dobimo s premislekom. Najprej so besede z začetno črko A, rep ima deset črk, premeščamo jih na vse mogoče načine in zapisujemo po slovarskem redu oblikovane besede.

Potem pridejo na vrsto besede z začetno črko B. V teh primerih rep recimo izgleda takole:

- BACČDEFGHIJ.

Ker ima ta rep deset črk, dobimo s premeščanjem prav toliko besed kot prej (nove besede).

S postopkom nadaljujemo. Na koncu pridejo na vrsto besede z začetnico J:

- JABCČDEFGHI.

Torej: število vseh besed je enajst krat število vseh besed, ki imajo deset črk. (Zadnja beseda z začetkom J v tem slovarju je JIHGFEDČCBA.)

Pa zaznamujmo število besed, ki sestoje iz k različnih črk, z zapisom P_k (pri čemer je k v našem primeru lahko $k = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$).

Poznamo že enakost:

- $P_{11} = 11P_{10}$.

Za število P_{10} velja $P_{10} = 10P_9$. Sklepamo, da je $P_{11} = 11P_{11} = 11 \cdot 10 \cdot P_9 = 11 \cdot 10 \cdot 9P_8 = \ldots = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot P_1$ in

- $P_{11} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Desni izraz imenujemo v matematiki fakulteta in ga zaznamujemo ali zapišemo na kratko 11!.

Tako smo premislili: Oblikovani slovar ima 11! besed, pod vsako črko iz danih enajstih črk pa je $10! = 10 \cdot (9 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2) = 10 \cdot 72 \cdot 42 \cdot 20 \cdot 6 = 3628800$ besed. Ker ima dan 86400 sekund, bi po Mihovem predlogu (sekunda za zapis črke) potrebovali za zapis slovarja $\frac{11 \cdot 11!}{86400}$ dni, blizu 14 let.

Končno, prišli smo pripravljeni do naše čarovniške besede. Tudi ta ima enajst črk, ki pa niso med sabo različne, v njej je pet A-jev, dva B-ja in dva R-ja. Ko začenši z besedo

- AAAAABBDKRR

začnemo oblikovati slovar, bo ta imel zagotovo manj kot 11! besed. Kolikokrat manj?

Označimo z x iskano število. Poiskali ga bomo v devetih korakih.

1. korak: Oblikujmo besedo iz enajstih različnih znakov v obliki $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2DKR_1R_2$.

2. korak: Zapišimo eno izmed 11! mogočih permutacij, npr.

- $KA_2R_2DA_5B_2B_1R_1A_3A_4A_1$

na beli listek.

3. korak: Prijazni čarovnik začara v tej besedi vse A_i v A, vse B_j v B in vse R_k v R ($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 1, 2$; $k = 1, 2$).

4. korak: Začarano besedo

- KARDABBRAAA

zapišemo na rdeči listek in ga položimo na mizo.

5. korak: V vsaki besedi drugega koraka naredimo vse permutacije med A_i, vse permutacije med B_j in vse permutacije med R_k ($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 1, 2$; $k = 1, 2$).

6. korak: Tako dobimo po zlatem pravilu

- $5! \cdot 2! \cdot 2! = 480$

besed, ki so različne, če upoštevamo indekse in enake, če indekse izbrišemo. Zapišimo vsako od njih na beli listek. Lepo poravnan *šop* teh listkov spravimo v omaro nad mizo, tako da je ta beli šop nad rdečim listkom iz četrtega koraka.

7. korak: Na vsaki iz 11! izbranih besed iz drugega koraka ponavljamo po vrsti naslednje korake (torej 3., 4., 5., in 6. korak).

8. korak: Ko izčrpamo vseh 11! možnosti, imamo

a) na mizi x rdečih listkov (torej ves slovar!) čarovniške besede ABRAKADABRA;
b) v omari nad mizo pa 11! belih listkov, ki so razvrščeni po šopih (svežnjih) $480 = 5! \cdot 2! \cdot 2!$ listkov. Ti svežnji so si vsi med seboj *tuji*, nobena dva svežnja nimata kaka skupne besede.

9. korak: Ponazori naj ga slika zlatega pravila. Miha naj to sliko za naš primer nariše. Iz zadnjih dveh korakov sledi: $x \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! = 11!$

Miha naj preveri, da je $x = 83160$ besed. Za pisanje porabi $83160 \cdot 11$ sekund, kar je več kot deset dni (približno 10,58 ... dneva).

Koliko časa pa potrebuje Miha, da pride v slovarju do razporeditve

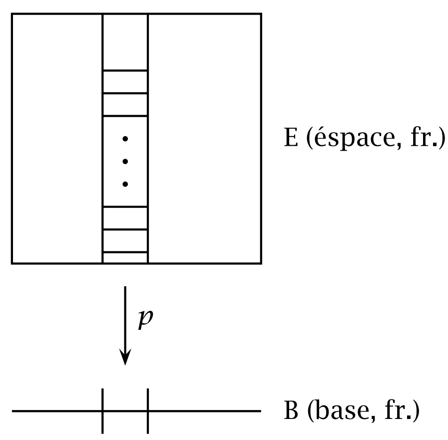
- ABRAKADABRA?

Dodatna opomba za mlade in starejše matematike:

V gornjih vrsticah smo se srečali z enim od primerov *vlaknastih svežnjev*. Ta sodobni matematični pojem so uvedli tudi živahni in šaljivi francoski matematiki, ki so preživljali težke dni v ujetništvu.

Miza iz slike 2 je *baza*, omara pa *prostor* svežnja, čaranje je *projekcija* svežnja. Od tod oznaka

- (E, p, B)



SLIKA 2.

Omenimo, da se dejavno ukvarjajo s teorijo svežnjev tudi uspešni slovenski matematiki. Pisec meni, da se jim kmalu pridružijo Jure, Jana in Miha.

Pred besedo ABRAKADABRA so gotovo vse besede, ki se začnejo z AA. Ker se take besede končajo s črkami AAABBDKRR v poljubnem vrstnem redu, je teh besed $\frac{9!}{3!2!2!} = 15120$. Prav tako so pred ABRAKADABRA tudi vse besede, ki se začnejo z ABA, ABB, ABD, ABK, ABRAA, ABRAB, ABRAD, ABRAKAA, ABRAKAB, ABRAKADAA, ABRAKADABA. Naslednja tabela prikazuje vse možne začetke besed, ki so pred ABRAKADABRA, preostale črke v tej besedi in število vseh takih besed.

začetek	ostale črke	število besed
AA	AAABBDKRR	$\frac{9!}{3!2!2!} = 15120$
ABA	AAABDKRR	$\frac{8!}{3!2!} = 3360$
ABB	AAAADKRR	$\frac{8!}{4!2!} = 840$
ABD	AAAABKRR	$\frac{8!}{4!2!} = 840$
ABK	AAAABDRR	$\frac{8!}{4!2!} = 840$
ABRAA	AABDKR	$\frac{6!}{2!} = 360$
ABRAB	AAADKR	$\frac{6!}{3!} = 120$
ABRAD	AAABKR	$\frac{6!}{3!} = 120$
ABRAKAA	ABDR	$4! = 24$
ABRAKAB	AADR	$\frac{4!}{2!} = 12$
ABRAKADAA	BR	$2! = 2$
ABRAKADABA	R	$1! = 1$

Pred besedo ABRAKADABRA je torej $15120+3360+840+840+840+360+120+120+24+12+2+1 = 21639$ besed. Zato je beseda ABRAKADABRA na 21640. mestu.

Odgovorimo na zastavljena vprašanja!

Prvo Mihovo vprašanje. Slovar ima

- $$\frac{11!}{5!2!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = (11 \cdot 10 \cdot 9)(2 \cdot 7 \cdot 6) = 990 \cdot 84 = 83160 \text{ besed.}$$

Na Janino vprašanje: ABRAKADABRA je v slovarju na 361. strani v dvajseti vrstici na desni:

- $21640 = 360 \cdot 60 + 2 \cdot 20.$

Odgovor Jani in Mihu. Da pridemo s pisanjem do čarovniške besede, bi porabili dva dni, osemnajst ur, sedem minut in dvajset sekund dragocenega časa:

- $21640 \cdot 11 = 2 \cdot 86400 + 18 \cdot 3600 + 7 \cdot 60 + 20.$

- »Ali je morda vse to kje uporabno?« vprašuje Jana.
- »Seveda!«, sta zagrmela fanta.

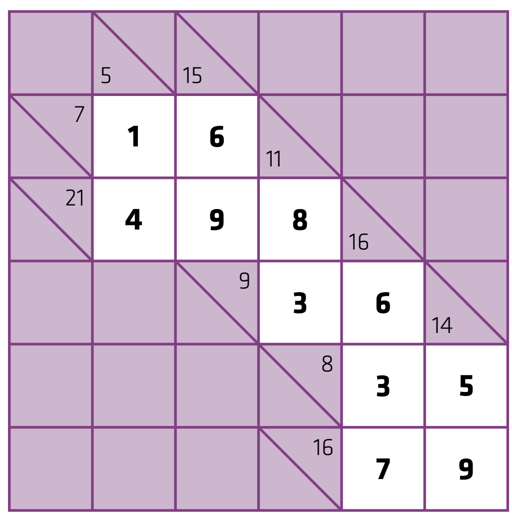
Kombinatorik želi, da ga razveselite na dva načina:

- z besedo z indeksom sedeminsedemdeset tisoč sedem sto sedeminsedemdeset v gornjem slovarju;
- z indeksi vseh besed v tem slovarju, ki vsebujejo podbesedo ...KADABRA ... (koliko je teh besed?).

× × ×

Križne vsote

Rešitev s strani 29



× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si