PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 1
Strani 2–11

Ivan Pucelj:

KITE - SPLETI - VOZLI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1023-Pucelj.pdf

MATEMATIKA

KITE – SPLETI – VOZLI

1. Kulturna zgodovina nam kaže, da se je človek že od davnine zanimal za pletenje in vozlanje. Kite občudujemo v raznih pleteninah, vzbujajo nam zaradi praktičnosti in lepega občutek urejenosti in naravnosti; z vozli se ukvarjajo praktično vsepovsod: od tehnike, medicine do umetnosti.

V geometriji poznamo razne like, telesa, računamo jim razne prirejene količine: ploščine, površine, prostornine. Pa se seznanimo še z nekimi drugimi "bitji" geometrijskega prostora; za ogrevanje si jih oglejmo na slikah:

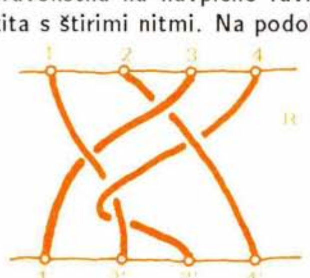
Poskusi, ali je ta vozel zavozlan?

Splet dveh uveriženih krožnic

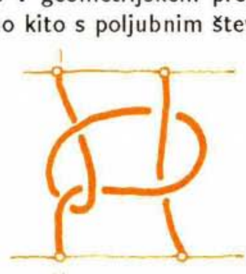
Boromejski splet: poljubni krožnici tega spleta nista uveriženi, trojica je

Matematiki so v prejšnjem stoletju pričeli več razmišljati o načinih obravnave in računanju s kitami in vozli. S temi vrsticami usmerimo v to področje nekaj prvih korakov.

2. Na vsaki od dveh vzporednih vodoravnih daljic ("deščic") na skupni navpični ravnini izberimo na enakih medsebojnih razdaljah štiri točke ("žebljičke"), na zgornji 1, 2, 3, 4 in na spodnji daljici točke 1', 2', 3', 4'. Pa jih povežimo s štirimi nitmi; to je mogoče narediti na različne načine, vedno pa pazimo na to, da se niti vedno spuščajo, kar pomeni, da vsaka nit kvečjemu enkrat seče vsako ravnino R, ki je vzporedna deščicama in je pravokotna na navpično ravnino. Tako nastane v geometrijskem prostoru kita s štirimi nitmi. Na podoben način oblikujemo kito s poljubnim številom



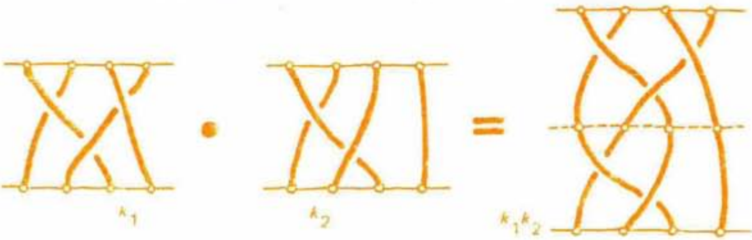
Kita s štirimi nitmi



To ni kita, nit 11' se ves čas ne spušča niti (pri nas bo to število 1, 2, 3, 4).

Enakost kit. Kito smemo po prostoru premikati z vzporednimi togimi premiki, njene niti smemo tudi premikati npr. levo-desno, pri čemer si mislimo, da so te niti raztegljive ali pa skrčljive, pazimo pa na to, da ne prekršimo zgornjega pogoja o ravnini R. Niti se naj med seboj ne sečejo ali dotikajo.

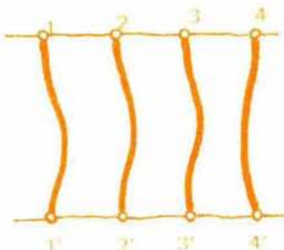
Zmnožek dveh kit k_1 in k_2 (z enakima številoma niti) uvedemo preprosto takole: prvi kiti k_1 prilepimo drugo kito (in srednjo deščico odstranimo):



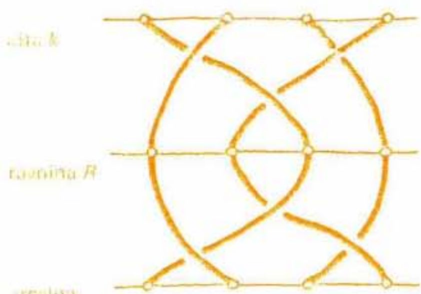
Enotska kita (na kratko enota e): kito, ki ji lahko vse niti "poravnamo", imenujemo enota.

Vidimo, da je poimenovanje enota upravičeno, saj za poljubno kito k velja:

$$ke = ek = k$$



Zrcalna ali obratna kita dane kite. Prezrcalimo dano kito k na ravnini R (primerjaj na sliki), ki gre skozi spodnjo deščico pravokotno na navpično ravnino, pa nastane zrcalna (ali obratna) kita k' (kite k). Če potem odmislimo srednjo deščico 1'2'3'4, ohranimo pa zgornjo in spodnjo, lahko niti poravnamo, tako da nastane enota e:



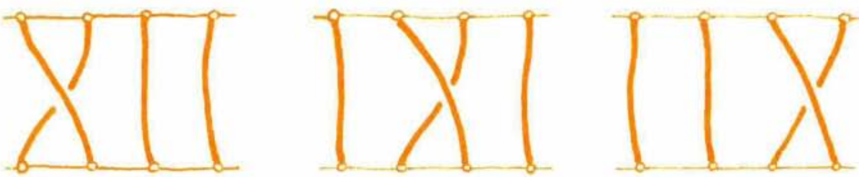
Velja:

$$(k')' = k$$
$$e' = e$$
$$kk' = k'k = e$$

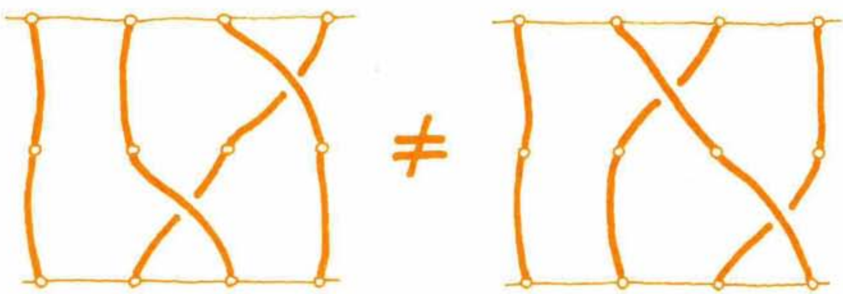
Razvidno je, da za poljubne tri kite k_1, k_2, k_3 velja pri množenju združljivost (asociativnost)

$$(k_1 k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 k_3)$$

Žal pa v splošnem množenje kit ni zamenljivo (komutativno), kot kaže zgled s kitama a in b (ali b in c):



a $\quad$ b $\quad$ c



ab $\quad$ ba

Kite a, b, c in njihove zrcalne kite imenujemo *osnovne kite* (s štirimi nitmi).

Pri kitah a in b opazimo, da sta njuna "nadvoza" za en "korak" vsaksebi. Pravimo, da sta a in b sosednji kiti; po prejšnjem sodilu prav lahko ugotovimo, da sta si kiti v tehle parih tudi sosednji:

a' in b	b in c
a in b'	b' in c
a' in b'	b in c'
	b' in c'

Drugače sta osnovni kiti nesosednji, npr. a in c.

Prav lahko s sliko ugotoviš: Zmnožek nesosednjih osnovnih kit je zamenljiv. Torej: $ac = ca$, $a'c = ca'$, $ac' = c'a$, $a'c' = c'a'$.

Za vajo potrdi, da veljata enakosti

$$aba = bab \text{ in } bcb = cbc$$

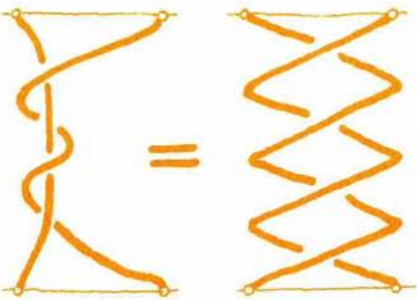
medtem ko ne velja

$$aca = cac$$

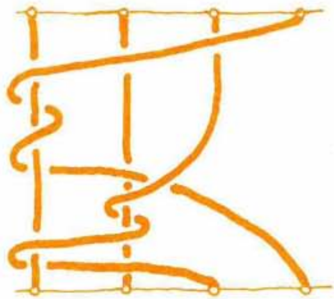
Pomen osnovnih kit je razviden iz te trditve:

S pripravnimi dovoljenimi premiki niti je mogoče doseči, da je dana kita zmnožek osnovnih kit.

Zgled. S kito z dvema nitima ni posebno mnogo dela, precej več ga je s kito s štirimi nitmi:



$k_1 = aaaa = a^4$



$k_2 =$ [illegible]

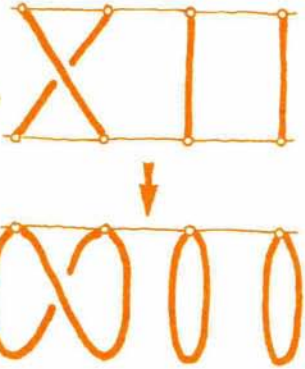
Upoštevajoč zgornje lastnosti (osnovnih) kit se da za dano kito tudi računsko ugotoviti, ali je (ni) enota.

Zgled. Kita $k = bac'a'cb'aca'c'$ je enota, saj je mogoče zapisati $k = b(ac')a'cb'(ac)a'c' = b(c'aa')cb'(ca)a'c' = bc'cb'cc' = bb' = e$. Nariši za kito k ustrezno sliko.

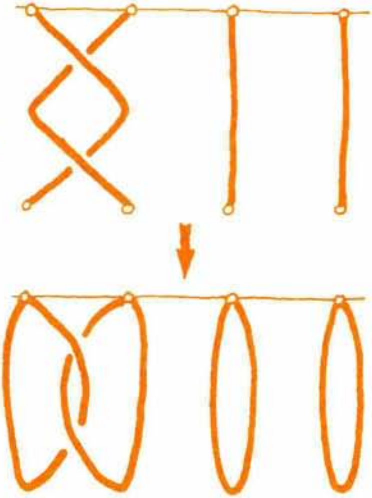
3. Zlepimo pri dani kiti k obe deščici, tako da se poistovetijo točke **1** in 1', 2 in 2', 3 in 3', 4 in 4'. Iz kite k nastane *splet*. Ima lahko več enostavno sklenjenih krivulj (na kratko rečemo tudi krožnic). Če nastane samo ena sklenjena krivulja, govorimo o *vozlu*.

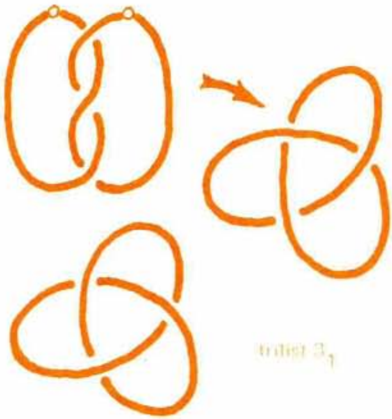
Zgledi. Iz osnovne kite a nastane splet treh krožnic. Iz kite $aa = a^2$ oblikujemo splet štirih krožnic, prvi dve sta med seboj uveriženi. Kita a^3 daje vozel s tremi nadvozi. Znak tega vozla je 3_1, imenujemo ga tudi *trilist*.

a



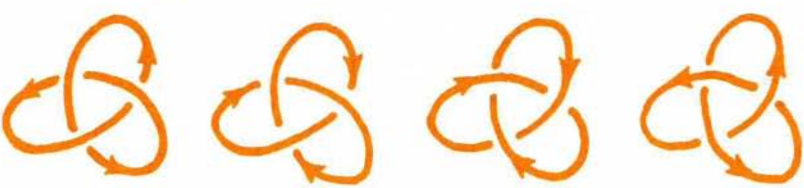
a^2





trilist 3_1

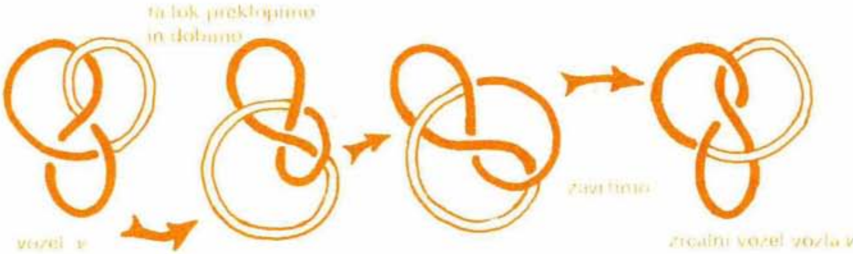
Izberimo na trilistu smer obhoda in to označimo s puščicami; pravimo, da smo vozel orientirali. Če pa zamenjamo na vozlu vlogi nadvoz-podvoz, dobimo zrcalni vozel



levi trilist desni trilist

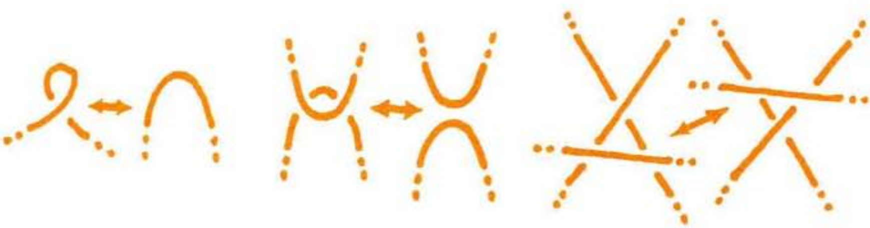
Seveda lahko to naredimo z vsakim vozlom v.

Obstajajo vozli, ki so sami sebi zrcalni. Tak je npr. vozel 4_1 s štirimi nadvozi, ki ga imenujemo na kratko *osmica*:



4. V praksi oblikujemo (sklenjen) vozel tako, da "zavozlamo" vrv in konca vrvi združimo:

Vrv in njene dele smemo potem še premikati, le pretrgati (ali celo presekati, kot je naredil neki vojskovodja z gordijskim vozlom) je ne smemo, pa dobimo k danemu vozlu ekvivalentni vozel. Trije osnovni dovoljeni premiki delov so vidni na tej sliki:



V geometriji pravimo, da nastane vozel z *vložitvijo* krožnice v (trirazsežni) prostor. Tudi tu dobimo iz vozla *ekvivalentnega*, če (končno krat) uporabimo osnovne premike (te je v geometrijo uvedel nemški matematik K. Reidemeister in se po njem poimenujejo Reidemeisterovi premiki vozla).

Vozel je razvozlan, če s temi osnovnimi premiki nastane iz danega vozla *v* "navadna krožnica" (tako kot pri kiti *a*) v prostoru. Zanjo uporabljamo v nadaljevanju znak ○.

Vozle razvrstimo nekako po številu nadvozov:

Vidimo, da so prvi trije vozli v zgornji preglednici nezavozlani, vsi so ekvivalentni $\bigcirc$. Za naslednje tri nam geometrijska nazornost pravi, da so zavozlani (da jih ni mogoče razvozlati).

Omenili smo dva načina oblikovanja vozlov. Pa se vprašajmo: Ali dobimo po obeh opisanih načinih iste vozle? Ali je mogoče ugotoviti (ne)zavozlanost tudi z računsko metodo?

Oba problema sodita v *topologijo*, lepo panogo sodobne matematike.

Prvi problem je leta 1925 pritrdilno rešil ameriški topolog J.W.Alexander: vse vozle je mogoče narediti z lepljenjem kit.

Glede drugega problema povejmo, da so topologi dognali to: vsakemu usmerjenemu vozlu v (spletu) je mogoče prirediti izraz $i(v)$ dveh spremenljivk x in y, tako da sta izpolnjeni dve lastnosti:

(1) Za nezavozlan vozel $\bigcirc$ je $i(\bigcirc) = 1$

(2) Če se trije usmerjeni vozli (spleti) v^+, v^- in v^0 ujemajo povsod razen v okolici ene točke, kot kaže slika

velja enakost $xi(v^+) + \frac{1}{x}i(v^-) + yi(v^0) = 0$.

Pri uporabi je treba vedeti, da iz enakosti $i(v_1) = i(v_2)$ ne smemo sklepati na ekvivalentnost vozlov v_1 in v_2 (ali spletov), pač pa zagotovo vozla v_1 in v_2 nista med seboj ekvivalentna, če izraza $i(v_1)$ in $i(v_2)$ nista med seboj enaka. (Pravimo, da je enakost izrazov $i(v_1)$ in $i(v_2)$ potrebni pogoj ekvivalentnosti vozlov, ni pa zadostni.)

Preden preidemo k zgledom, pokažimo, kako iz dveh vozlov v_1 in v_2 oblikujemo njuno *povezano vsoto* $v_1] v_2$: Oba vozla (v prostoru si ju mislimo vsaksebi) povežemo s trakom (možna sta dva načina), oblikovani usmerjeni vozel (torej povezana vsota) je označen s krepko črto:

Pokazati je mogoče, da je tako povezana vsota vozel, ki je določen do ekvivalence, in da velja enakost

(3) $i(v_1]v_2) = i(v_1)i(v_2)$

5. Zgledi.

a) Vemo že, da je vozel, ki nastane iz osnovne kite a ali a' (z dvema nitima), nezavozlan; splet, ki nastane iz enote e, pa ima dve neuveriženi krožnici. Vidno je, da lahko uporabimo (1) in (2):



in dobimo od tod izraz $i(v^0)$ dveh nespletenih krožnic

$$i(v^0) = -\frac{1}{y}(x + \frac{1}{x})$$

b) Na podoben način dobimo po (2) in a) za tele splete

nespleteni krožnici

spleteni krožnici

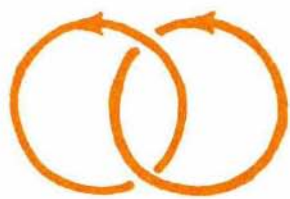
nespletena krožnica

enakost $x(-\frac{1}{y}(x + \frac{1}{x})) + \frac{1}{x}i(v^-) + y\mathbf{1} = 0$ in po lahkem računu sledi izraz spleta dveh uveriženih krožnic

$$i(v^-) = \frac{1}{y}(x^3 + x) - xy$$

Od tod sklepamo, da si spleta v^0 v a) in v^- v b) nista ekvivalentna.

Za vajo pokaži, da splet v^- v zgledu b) ni ekvivalenten spletu na tejle sliki:



c) Določimo izraz $i(3_1)$. Pozorno poglejmo sliko

pa lahko po (1), (2) pišemo: $x\mathbf{1} + \frac{1}{x}i(3_1) + yi(v^0) = 0$. Zaradi b) dobimo potem izraz za levi trilist

$$i(3_1 \text{ levi }) = -2x^3 - x^4 + x^2y^2$$

Izkaže se: če zamenjamo x z $\frac{1}{x}$, dobimo izraz i za desni trilist

$$i(3_1 \text{ desni }) = -2(\frac{1}{x})^3 - (\frac{1}{x})^4 + (\frac{1}{x})^2y^2$$

Ker noben teh izrazov ni $\mathbf{1}$, sklepamo, da sta trilista zavozlana; še več, trilista si nista ekvivalentna vozla (to velja zaradi neenakosti njunih izrazov).

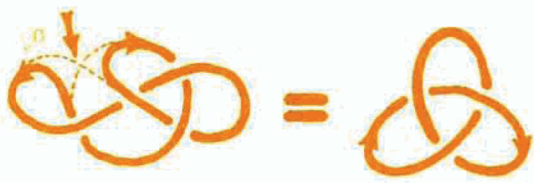
č) Tudi osmica 4_1 je zavozlan vozel, kot je vidno na podlagi slike in računov:

$$xi(4_1) = \frac{1}{x}\mathbf{1} + yi(v^0) = 0, \quad i(4_1) = -(\frac{1}{x})^2 - x^2 - 1 + y^2$$

Zanimivo je, da je ta izraz neobčutljiv na zamenjavo x z $\frac{1}{x}$, presenetljivo pa to ni, saj smo že pokazali (s poskusom), da je osmica sebi zrcalen vozel.

d) Na kraju pokažimo, da Whiteheadov splet (glej sliko) ni ekvivalenten niti spletu dveh neuveriženih niti spletu dveh uveriženih krožnic. To ugotovimo na podlagi slik in računov (puščice kažejo tudi, na katerih točkah se spleti razlikujejo):

v^+ (Whiteheadov splet W) v^- (uveriženi krožnici)



$$xi(W) = \frac{1}{x} i(v^-) + yi(v^0) = 0$$

Upoštevajoč zgleda b) in c) izračunamo

$$i(W) = -\frac{1}{y}(x + \frac{1}{x}) + y(\frac{1}{x} + 2x + x^3) - xy^3$$

kar ni niti izraz v b) niti v c).

Ob koncu tega kratkega potepanja povejmo, da mnogo pomembnih matematičnih problemov privede do študija kit in vozlov.

Ivan Pucelj