UDK: 658.51 Pregledni znanstveni članek (*Preview Scientific Paper*)

Načrtovanje fleksibilnih proizvodnih sistemov s teorijo čakalnih vrst

Planning of flexible manufacturing system with queueing theory

Mirko TRATNIK*

Izvleček

V prispevku je prikazan način preučevanja proizvodnih sistemov s teorijo čakalnih vrst za proizvodna sistema z enim in več strežniki, z neskončno veliko populacijo strank in primer enostavnega fleksibilnega proizvodnega sistema z enim strežnikom in končno veliko populacijo strank.

Ključne besede: teorija čakalnih vrst, populacija strank, strežnik, sistem strežbe, fleksibilni proizvodni sistem

Abstract

In the article the method of investigating of flexible manufacturing system with queueing theory for the manufacturing systems with one and many servers, with infinite customer population and example of simple flexible manufacturing system with one server and finite customer population is presented.

Keywords: *queueing theory, calling population, server, service mechanism, flexible manufacturing system*

1.UVOD

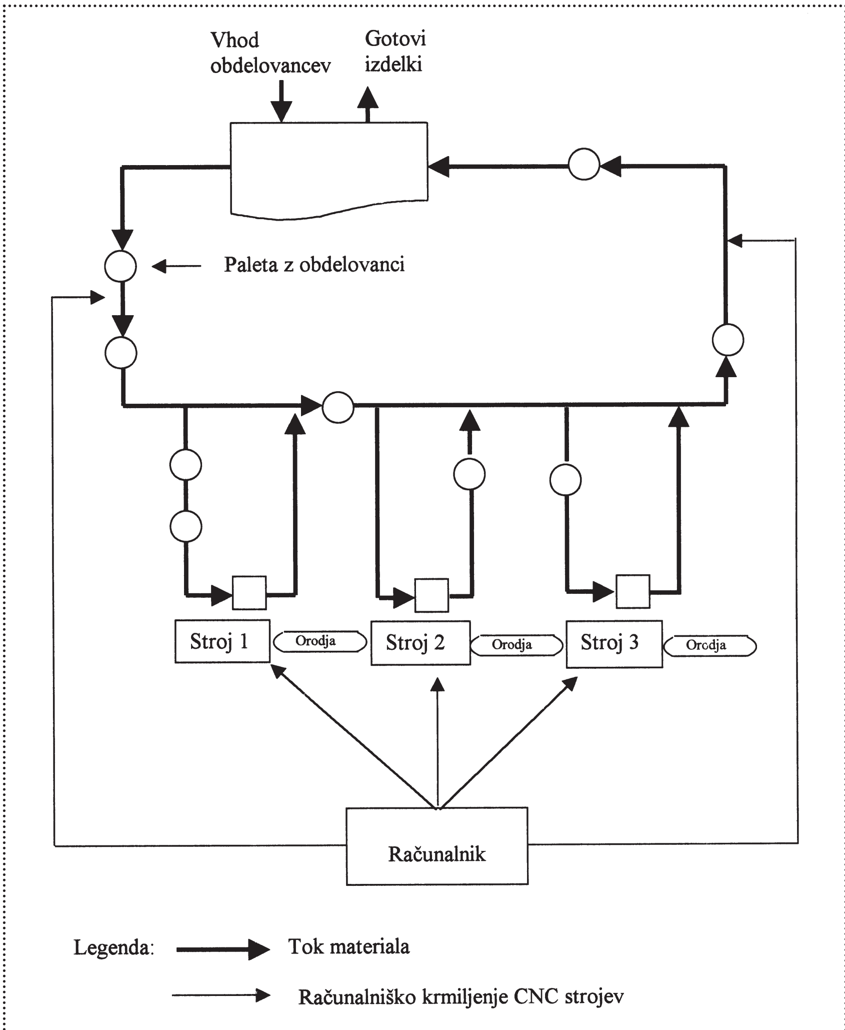
Fleksibilni proizvodni sistem, FP-sistem (an. *Flexible Manufacturing System*, FMS) tvori določeno število numerično krmiljenih strojev, ki so medsebojno povezani z avtomatiziranim transportnim sistemom, vse komponente sistema pa so računalniško krmiljene. Orodje, ki ga potrebujejo posamezni stroji za opravljanje delovnih, kontrolnih in montažnih operacij, pa je običajno locirano v neposredni bližini strojev (takšno skladišče orodja lahko vsebuje od 10 do 200 raznovrstnih orodij). Avtomatizirana menjava orodja omogoča, da lahko delovne operacije, ki jih opravljamo na posameznih strojih, zelo hitro spreminjamo. Zamenjava običajno traja samo nekaj sekund in čas zamenjave ponavadi ni daljši od časa, ki je potreben, da naložimo nov računalniški program za krmiljenje stroja za naslednjo delovno operacijo. Na sliki 1 je skica FP-sistema, ki ga sestavljajo trije CNC obdelovalni stroji in transportna naprava s paleto z vpetim obdelovancem za strežbo obdelovalnih strojev. Z FP-sistemom lahko obdelujemo obdelovance, ki zahtevajo raznovrstne delovne operacije v poljubnem zaporedju, pripravljalno zaključni časi pa so zanemarljivo kratki.

Ko se odločamo za investiranje, tj. vlaganje sredstev v FP-sistem, je temeljno merilo sprejemanja odločitve ocena razmerja med prihodnjim donosom (dobičkom, pozitivnim denarnim tokom) in sedanjim vložkom sredstev v izbrani FP-sistem po načelu neto sedanje vrednosti prihodnjih donosov. Predhodno moramo oceniti, katere vrste izdelkov in v kakšnih količinah nameravamo izdelovati na FP-sistemu, iz delovne dokumentacije pa povzeti potrebno število, vrsto in zahtevano zaporedje operacij, ki jih mora posamezni obdelovanec preiti od stroja do stroja (lahko se tudi večkrat vrača na isti stroj). Na temelju teh podatkov skušamo določiti število potrebnih CNC strojev, število vpenjalnih naprav, določiti potrebna vmesna skladišča (tudi njihovo velikost), zmogljivost transportnih naprav itd. FP-sisteme lahko analiziramo z uporabo teorije čakalnih vrst.. Pri tem so palete z vpetimi obdelovanci "stranke" sistema, ki "čakajo, da bodo prišle na vrsto za obdelavo", CNC stroji in transportne naprave za vlaganje obdelovancev, ki jih obdelujemo na CNC strojih, in naprave za odlaganje gotovih obdelovancev - izdelkov, pa so "strežniki" sistema.

2. TEORIJA ČAKALNIH VRST

Problem čakanja, da pridemo na vrsto pred bančnim okencem, da opravimo bančno storitev (plačamo račune), ko naročamo obrok v restavraciji, da smo postreženi s hrano in pijačo, da pri zobozdravniku pridemo na vrsto za zobozdravstveno storitev, ali ko obdelovanec čaka pred obdelovalnim strojem zaradi opravljanja delovne operacije, so primeri, ki jih lahko preučujemo z uporabo teorije čakalnih vrst (an. *queueing theory*). Čakalne vrste se tvorijo običajno takrat, kadar "stranke" vstopajo v sistem, kjer poteka "strežba" po nekem določenem vrstnem redu. Pri obravnavi proizvodnih in podjetniških primerov stranke niso ljudje, lahko so naročila kupcev, ki morajo biti izpolnjena, lahko so

* prof. dr., Biotehniška fakulteta, Oddelek za lesarstvo, Rožna dolina, C. VIII/34, 1000 Ljubljana, Slovenija
E-mail: mirko tratnik@ uni-lj.si



Slika 1. Shematski prikaz FP-sistema (prirejeno po Neumann, 1996)

kamioni, ki čakajo, da bodo nanje naložili tovor, lahko je strojna oprema v okvari, ki čaka na popravilo itd. Značilnost sistema čakalnih vrst je v tem, da stranke vstopajo v sistem naključno, torej v naključnih časovnih intervalih (časovnih razmikih) in da je čas strežbe strank praviloma zelo variabilen, kar pomeni, da strežba strank traja različno dolgo (npr. nekateri pacienti pri zobozdravniku potrebujejo samo kratek poseg, kakršen je ruvanje zoba, ki traja samo minuto, pri drugem pacientu pa lahko traja zobozdravstveni poseg celo uro). Proti pričakovanjem imamo pri oblikovanju čakalnih vrst opravka s sistemom, ki teži k nezasedenosti. Vzemimo npr. samopostrežno restavracijo, ki lahko na uro postreže 250 gostov (strank), iz izkustva pa vemo, da znaša npr. povprečno število naročil le 180 na uro; poudarek je v tem primeru na povprečju, sistem pa je lahko kratkoročno preobremenjen ali pa tudi nezaseden. V primeru, da časi prihodov strank v sistem niso naključni (so npr. lahko planirani), ali pa če so časi strežbe konstantni, so analitični prijemi drugačni.

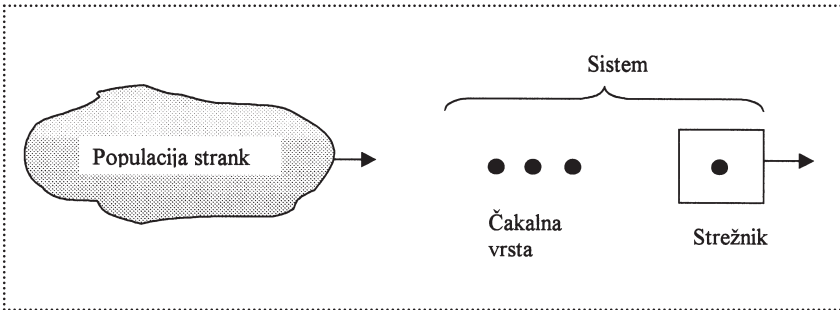
Cilj analize čakalnih vrst je v bistvu iskanje najnižjih skupnih stroškov sistema. Gre za dve temeljni kategoriji stroškov. Prva kategorija so stroški, ki jih imajo stranke zaradi čakanja, da pridejo na vrsto, kot so npr. stroški poslovnih izgub (ker bi lahko stranke namesto, da čakajo na vrsto oz. v vrsti, počele kaj koristnega), stroški npr. porabljenega goriva letal za čas, ko krožijo nad letališčem in čakajo na dovoljenje za pristanek, ipd. Druga stroškovna kategorija pa zajema stroške opreme za strežbo strank (strežna oprema, strežniki), kot so npr. bančna okenca, specializirani vzdrževalci strojne opreme, obdelovalni stroji v proizvodnem sistemu ipd. Sistem skušamo zasnovati tako, da bodo skupni stroški, tj. stroški, ki jih imajo stranke zaradi čakanja, da pridejo na vrsto, in stroški strežne opreme najnižji. Najpomembnejše značilnosti sistema čakalnih vrst so: vhodni vir strank, ki vstopajo v sistem, sistem strežbe (število strežnikov, strežnih mest, strežnih naprav) in disciplina čakanja, da stranka pride na vrsto za strežbo. Stroškovne optimizacije sistema čakalnih vrst v tem prispevku ne bomo obravnavali.

Vhodni vir strank

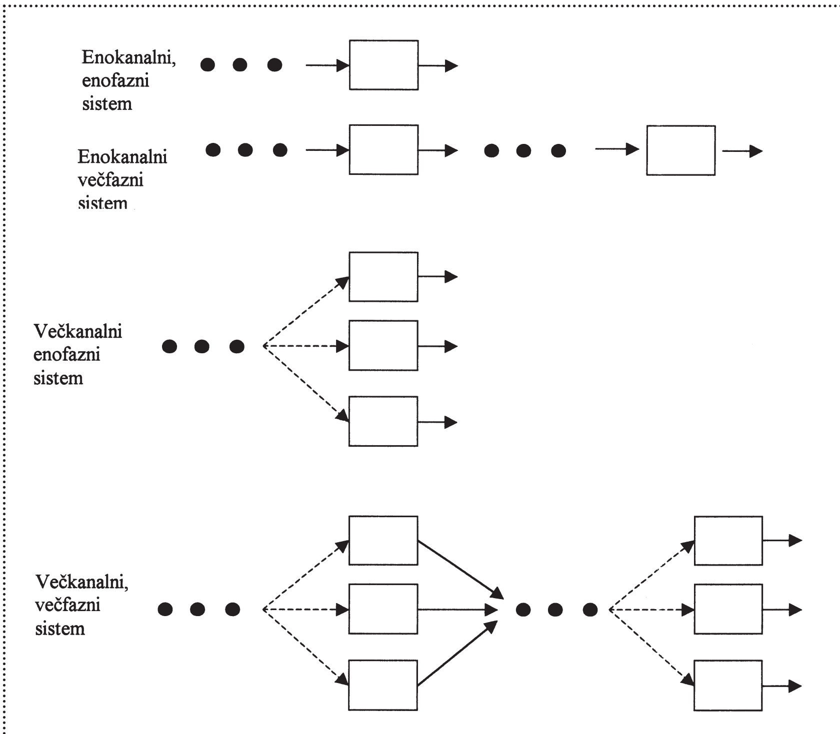
Velikost populacije strank je skupno število strank, ki prihajajo, vstopajo v sistem in morajo biti "postrežene" (pacienti zdravljeni, stroji servisirani, obdelovanci obdelani itd.). Velikost populacije strank je lahko neskončna ali pa končna. Kadar je število strank, ki vstopajo v sistem čakalne vrste v časovnem razmiku majhno v primerjavi s celotno populacijo, pravimo, da je populacija neskončno velika (npr. na skladišču hlodovine je lahko na zalogi več tisoč hlodov, od teh pa jih v proces razžagovanja na tračnem žagalnem stroju npr. vstopa samo devet na uro, je populacija hlodov v tem primeru praktično "neskončno velika", saj potencialno število hlodov, strank močno prekaša zmogljivost sistema strežbe). V primeru pa, da je število potencialnih strank omejeno (limitirano), govorimo o *končno veliki populaciji strank*. S takim primerom imamo npr. opravka, kadar je vzdrževalec strojne opreme zavezan za vzdrževanje natančno določenega števila strojev, vodja izmene za vodenje določenega števila delavcev ipd. Pri analizi čakalnih vrst praviloma domnevamo, da je vhodna populacija strank neskončno velika, ker je reševanje problemov ob tej domnevi enostavnejše kot v primeru končnega števila populacije strank. Naslednja običajna domneva pri obravnavi sistema čakalne vrste je, da je vstopanje strank v sistem naključno, kar pomeni, da so vstopi (prihodi) strank med seboj neodvisni in jih ni mogoče z gotovostjo napovedati, fiksno povprečje števila prihodov strank v časovni enoti torej ne zavisi od trenutnega števila strank v čakalni vrsti. Domnevamo, da lahko prihode strank v sistem čakalne vrste v enoti časa opišemo s *Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo*. Za verjetnostno porazdelitev vmesnih časov (vmesni čas, an. interarrival time), t. j. časov med zaporednimi prihodi strank v sistem, pa domnevamo, da je padajoča eksponentna. Če je v binomskem poskusu število neodvisnih poskusov "n" zelo veliko, verjetnost "p", da se pri posameznem poskusu zgodi dogodek, pa majhna, imamo opravka s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo. Verjetnost za število prihodov strank v enoti časa v sistem čakalne vrste je dana z naslednjo enačbo Poissonove verjetnostne porazdelitve:

$$p(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

Pri tem je *n* pričakovano število prihodov strank v enoti časa, λ srednja vrednost števila prihodov strank v enoti časa, *e* (2,71828...) pa je osnova naravnega logaritma. Pri teoriji čakalnih vrst domnevamo, da lahko verjetnostni porazdelitvi vmesnih časov prihodov strank v sistem in časov strežbe opišemo z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo. Enačba funkcije $P = e^{-\lambda t}$ opisuje strogo padajočo funkcijo.



Slika 2. Enokanalni sistem



Slika 3. Štiri najbolj pogoste različice čakalnih sistemov

Sistem strežbe

Zmogljivost sistema čakalnih vrst je odvisna od števila strežnih naprav in od njihove zmogljivosti. Pojma *strežnik* (an. server) in *strežni kanal* (an. channel) sta sinonima, z enim strežnim kanalom *strežemo (servisiramo)* v določenem času eno stranko v sistemu. *Čas strežbe* (an. service time) je čas, ki je potreben, da je stranka v sistemu "*postrežena*" (da je npr. stroj servisiran, da je opravljena bančna storitev pri bančnem okencu, da je obdelovanec obdelan na stroju itd.). Poznamo *enokanalne* (an. single channel) in *večkanalne* (an. multiple channel) sisteme strežbe. Enokanalni strežni sistem je npr. bančno okence, pred katerim čakajo komitenti, da opravijo bančno storitev, ali pa tračni žagalni stroj, na katerem razžagujemo hlode v žagarske sortimente. Večkanalni sistemi strežbe pa imajo več strežnikov, ki delajo, tj. strežejo vzporedno, hkrati. Primer večkanalnega sistema je lahko sistem velike trgovine z več blagajnami. Sistemi strežbe pa se razlikujejo tudi po številu zaporednih korakov oz. faz strežbe. Poznamo *enofazne* in *večfazne* sisteme strežbe. Pri enofaznem sistemu strežbe stranka, ko je postrežena, zapusti sistem, pri večfaznem sistemu strežbe pa se stranka, ko je postrežena na prvem strežniku, ponovno postavi v vrsto za strežbo na naslednjem strežniku itd. Na slikah 2 in 3 so predstavljene sheme nekaterih osnovnih sistemov čakalnih vrst. V modelu čakalne vrste predpostavljamo določeno vrsto *verjetnostne porazdelitve časov strežbe*, za vsak strežnik posebej, čeprav praviloma domnevamo, da so verjetnostne porazdelitve časov strežbe za vse strežnike v sistemu istovrstne. Naključne čase strežbe običajno opišemo s padajočo eksponentno porazdelitvijo. V drugih primerih pa tudi s ti. "*degenerirano porazdelitvijo*", kjer so časi strežbe konstantni (npr. konstantni časi obdelave istovrstnih obdelovancev na obdelovalnem stroju) in s ti. *Erlang (gama) porazdelitvijo*.

Disciplina v sistemu čakanja v vrsti

Disciplina v sistemu čakalne vrste je pravilo strežbe. Običajno pravilo strežbe je: *Kdor prvi pride, bo tudi* *prvi postrežen* (an. *First - Come - First - Served*). Veljajo pa lahko tudi druga pravila, kot npr.: *Kdor pride zadnji, bo prvi na vrsti.* (npr. obdelovanec, ki smo ga odložili na vrh palete, bo prvi na vrsti za obdelavo, tj. za strežbo), lahko pa velja tudi kak drugačen prednostni vrstni red, tj. disciplina sistema (npr. pri okvarah strojne opreme lahko vrstni red popravil upošteva prioriteto odprave okvare najprej pri ključnih napravah, tam, kjer bi bila lahko povzročena škoda največja).

Čakanje in oblikovanje čakalne vrste

Teorija čakalnih vrst obravnava različne čakalne vrste. Čakalna vrsta pred enim ali več strežniki se oblikuje zaradi tega, ker stranke čakajo, da bodo postrežene. Občasno je lahko čakalna vrsta tudi prazna (v tem primeru strežnik čaka na stranko). Teorija čakalnih vrst ne določa oblike vhodne vrste, ki je lahko v resnici vrsta (kakršna se npr. oblikuje pri čakanju pred bančnim okencem), ali pa stranke ne čakajo v vrsti, lahko čakajo v skupini, da pridejo na vrsto za strežbo (npr. obdelovanci čakajo zloženi na paleti, da pridejo na vrsto za obdelavo na stroju/strežniku, ali pa pacienti čakajo v čakalnici, da pridejo na vrsto pri zdravniku). Bistvena zahteva je, da za čakajoče stranke veljajo pravila *discipline strežbe*. Teorija čakalnih vrst operira le s *povprečnim številom čakajočih v vrsti* in s *povprečnimi časi strežbe strank*.

Posamezne modele čakalnih vrst prikazujemo običajno v skrajšani obliki z naslednjim zapisom: *oblika porazdelitve vmesnih časov prihodov strank v sistem/oblika porazdelitve časov strežbe/število strežnikov*. Zapis čakalne vrste: *M/M/m* pomeni, da se vmesni časi prihodov strank in časi njihove strežbe porazdeljujejo po eksponentni porazdelitvi, kar je označeno s simbolom *M*, *m* pa pomeni število strežnikov v sistemu. Posamezne porazdelitve so označene z naslednjimi simboli:

M = eksponentna (Markovska) porazdelitev,
D = degenerirana porazdelitev(konstantni časi),
E_k = Erlang porazdelitev (parameter oblike = *k*),
G = splošna (generalna) porazdelitev, ki je lahko katerakoli poljubno izbrana porazdelitev.

Standardna terminologija in simboli, ki jih uporabljamo pri analizi čakalnih vrst se pri posameznih avtorjih delno razlikuje.

Preglednica 1. Terminologija in simboli, uporabljeni pri analizi čakalnih vrst (Stevenson, 1993)

Simbol	Pomeni
λ	povprečno število prihodov strank v časovni enoti,
μ	povprečno število postreženih strank v časovni enoti,
L_q	povprečno število strank v čakalni vrsti, ki čakajo na strežbo,
L_s	povprečno število strank v sistemu (čakajočih in tistih, ki so v strežbi),
ρ	izkoriščenost sistema,
W_q	povprečni čas, ki ga stranka porabi za čakanje v čakalni vrsti,
W_s	povprečni čas, ki ga stranka porabi v sistemu (čas čakanja v čakalni vrsti in čas strežbe),
$1/\mu$	čas strežbe,
P_0	verjetnost, da ni nobene stranke v sistemu,
P_n	verjetnost, da je *n* strank v sistemu,
M	število strežnikov (strežnih kanalov),
L_{max}	največje pričakovano število strank v sistemu.

Za neskončno veliko vhodno populacijo strank v sistemu čakalnih vrst veljajo naslednje enačbe (formule):

Povprečno število strank, ki bodo postrežene, je razmerje med povprečnim številom prihodov strank v časovni enoti in povprečnim številom v časovni enoti postreženih strank:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad [1]$$

Opomba: λ in μ morata biti merjena z enakim merilom (npr. strank na uro, strank na minuto).

Povprečno število strank v sistemu je seštevek povprečnega števila v vrsti čakajočih strank in tistih, ki so v strežbi:

$$L_s = L_q + \rho \quad [2]$$

Povprečni čas, ki ga stranka porabi za čakanje v čakalni vrsti, dobimo, če povprečno število strank v čakalni vrsti, ki čakajo na strežbo, delimo s povprečnim številom prihodov strank v časovni enoti:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad [3]$$

Povprečni čas, ki ga stranka porabi v sistemu (čas čakanja v čakalni vrsti in čas strežbe):

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad [4]$$

Izkoriščenost sistema izračunamo tako, da povprečno število prihodov strank v časovni enoti delimo z zmogljivostjo strežbe:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} \quad [5]$$

Vsi modeli čakalnih vrst, ki temeljijo na neskončno velikem viru vhodne populacije strank predpostavljajo, da je izkoriščenost sistema manjša od 1,0. Povprečno število strank v čakalni vrsti, ki čakajo na strežbo, L_q, je ključni parameter sistema čakalne vrste, ker od njega zavisi učinkovitost sistema, ki je določena s povprečnim številom strank v čakalni vrsti, povprečnim časom, ki ga stranka porabi, ko mora čakati, da pride na vrsto, in povprečnim časom, ki ga stranka porabi v sistemu.

V preglednici 2 so predstavljene temeljne enačbe (formule) za izračunavanje parametrov sistema čakalne vrste z enim strežnikom (M/M/1), osnova analize je zapletena matematična teorija čakalnih vrst, v kateri prihod nove stranke v sistem obravnavamo kot "rojstvo", odhod postrežene stranke iz sistema pa kot njeno "smrt". Ta proces rojstvo-smrt (an. *birth-and-death process*) opisuje verjetnostno spreminjanje stanja sistema čakalne vrste.

Preglednica 2. Enačbe za izračun parametrov za sistem M/M/1 (Stevenson, 1993)

Parameter	Formula	
Povprečno število strank v čakalni vrsti	$L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	[6]
Verjetnost, da ni nobene stranke v sistemu	$P_0 = 1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)$	[7]
Verjetnost, da je v sistemu n strank	$P_n = P_0\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n$	[8]

3. PRIMERI UPORABE ANALIZE ČAKALNIH VRST

3.1. Model 1: Enokanalni sistem, eksponentna porazdelitev časov strežbe

Enostavni model čakalne vrste je enokanalni, enofazni sistem z enim strežnikom, v katerem velja disciplina "kdor prvi pride, je prvi postrežen". Naključne prihode strank v sistem lahko opišemo s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo, čase strežbe pa z eksponentno porazdelitvijo, vhodna populacija strank je neskončno velika in dolžina čakalne vrste ni omejena. Za reševanje tovrstnih problemov bomo uporabljali simbole in obrazce iz prejšnjih preglednic.

Primer 1.

Na tračnem žagalnem stroju razžagujemo hlodovino iglavcev v žagarske sortimente določenih dimenzij. Zaradi zelo variabilnih srednjih premerov, dolžin in kakovosti hlodov se časi razžagovanja hlodov tj. "časi strežbe" razporejajo po padajoči eksponentni porazdelitvi, za razžagovanje enega hloda potrebujemo povprečno štiri minute (srednja vrednost eksponentne porazdelitve je 4,0 min). Viličar dovaža hlodovino na transporter pred tračni žagalni stroj v neenakomernih časovnih razmikih tako, da domnevamo, da dotok hlodovine do žagalnega stroja lahko dovolj dobro opišemo s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo. Če viličar pripelje na transporter povprečno devet hlodov na uro, znaša srednja vrednost Poissonove porazdelitve 9.

Določiti, izračunati je potrebno:

a. izkoriščenost, zasedenost sistema;
b. odstotek časa, ko tračni žagalni stroj ne dela;
c. pričakovano število hlodov, ki čakajo v vrsti pred tračnim žagalnim strojem;
d. povprečni čas čakanja hloda pred tračnim žagalnim strojem;
e. verjetnost, da ni nobenega hloda v sistemu, in verjetnost, da je v sistemu osem hlodov.

Rešitev:

ρ = 9 hlodov na uro (povprečno število prihodov "strank" v časovni enoti)

μ = 1/čas strežbe = 1/čas razžagovanja = hlod/4 min * 60 min / uro = 15 hlodov / uro

a. $\rho = \lambda / m\mu = 9 / 1.15 = 0{,}60$

b. Delež časa, ko tračni žagalni stroj ne dela = 1 - ρ = 1 - 0,60 = 0,40

c. $L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{9^2}{15(15-9)} = 0{,}9\,\boldsymbol{hloda}$

d. $W_s = \dfrac{L_q}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{0{,}9}{9} + \dfrac{1}{15} = 0{,}167\,\mathbf{ure}$

e. $P_0 = 1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right) = 1 - \dfrac{9}{15} = 0{,}4$

f. $P_8 = P_0\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^8 = 0{,}40\left(\dfrac{9}{15}\right)^8 = 0{,}0067$

3.2. Model 2: Večkanalni sistem, eksponentna porazdelitev časov strežbe

O večkanalnem sistemu vrste M/M/m govorimo, kadar sta v sistem vključena najmanj dva ali več strežnikov, ki *neodvisno* drug od drugega strežejo čakajočim strankam, ko pridejo na vrsto za strežbo. V modelu predpostavljamo:

1. Poissonovo verjetnostno porazdelitev prihodov strank v sistem,
2. da vsi strežniki delujejo z enakim povprečnim časom strežbe oziroma z enakim povprečnim številom postreženih strank v časovni enoti,
3. da stranke tvorijo čakalno vrsto (čakajo, da pridejo na vrsto) po sistemu "kdor prvi pride, je prvi na vrsti",
4. da je vhodna populacija strank neskončno velika.

Enačbe za izračunavanje parametrov večkanalnega sistema so bolj zapletene od enačb za reševanje problemov čakalnih vrst pri enokanalnem sistemu, predvsem enačbi za izračunavanje vrednosti L_q in P_0 (glej preglednico 3).

Preglednica 3. Enačbe za izračun parametrov za sistem M/M/m (Stevenson, 1993)

Parameter	Formula	
Povprečno število strank v čakalni vrsti	$L_q = \dfrac{\lambda\mu\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(m-1)!(m\mu-\lambda)^2} P_0$	[9]
Verjetnost, da ni nobene stranke v sistemu	$P_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=1}^{M-1}\dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!\left(1-\frac{\lambda}{m\mu}\right)}}$	[10]
Povprečni čas, ki ga stranka porabi za čakanje v čakalni vrsti	$W_q = \dfrac{1}{m\mu-\lambda}$	[11]
Verjetnost, da bo stranka morala čakati na strežbo	$P_W = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^m \dfrac{P_0}{m!\left(1-\dfrac{\lambda}{m\mu}\right)}$	[12]

Opomba: Simbol m v zgornjih formulah pomeni število strežnikov.

Primer 2.

Če v proizvodni sistem razžagovanja hlodov na tračnem žagalnem stroju iz primera 1 vključimo še dodatni tračni žagalni stroj, imamo opravka z dvokanalnim sistemom strežbe vrste M/M/2. Za $\lambda = 9$, $\mu = 15$ in m = 2 lahko s formulami 9, 10, 11 in 12 izračunamo najprej P_0, verjetnost, da ni nobene stranke v sistemu

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\left(\frac{9}{15}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{9}{15}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{9}{15}\right)^2}{2!\left(1-\frac{9}{2.15}\right)}} = 0{,}5385$$

nato L_q, povprečno število strank v čakalni vrsti

$$L_q = \frac{9.15\left(\frac{9}{15}\right)^2}{(2-1)!(2.15-9)^2}0{,}5385 = 0{,}059 \; .$$

Povprečni čas, ki ga stranka porabi za čakanje v čakalni vrsti W_q znaša

$$W_q = \frac{1}{2.15-9} = 0{,}0476 \,\text{ure} \; ;$$

verjetnost, da bo stranka morala čakati na strežbo P_W pa

$$P_W = \left(\frac{9}{15}\right)^2 \frac{0{,}5385}{2!\left(1-\frac{9}{2.15}\right)} = 0{,}1384 \; .$$

Zamudno izračunavanje si lahko olajšamo z uporabo tablic. Izsek iz tablic za izračunavanje vrednosti L_q in P_0 pri dani vrednosti kvocienta λ/μ in za dano število strežnikov m (od 1 do 3), za neskončno veliko populacijo strank je prikazan v preglednici 4.

Za naš konkretni primer znaša kvocient $\lambda/\mu = 9/15 = 0{,}60$ in m = 2. Odčitana vrednosti za $L_q = 0{,}059$ in za $P_0 = 0{,}538$.

3.3. Model 3: Večkanalni sistem s končno veliko vhodno populacijo strank

Ta model čakalne vrste uporabljamo v primerih, ko imamo opravka z relativno majhnim številom potencialnih strank, ki jim moramo zagotoviti strežbo. Na primer, kadar en delavec streže trem strojem (število strank, strojev je 3), ali kadar je en vzdrževalec zavezan za vzdrževanje 20 strojnih naprav (število strank, strojnih naprav je 20). V sistem je lahko vključenih tudi več strežnikov. Tako kot pri modelih, ki predpostavljajo neskončno veliko vhodno populacijo strank, tudi pri modelu s končno veliko populacijo strank predpostavljamo, da lahko prihode strank v sistem opišemo s Poissonovo verjetnostno porazdelitvijo, čase strežbe pa z eksponentno porazdelitvijo. Bistvena razlika med modeloma je, da je pri modelu, ki upošteva končno veliko vhodno populacijo strank število prihodov strank v sistem *odvisno* od dolžine čakalne vrste, tj. od števila čakajočih strank, da pridejo na vrsto za strežbo: število prihodov strank se znižuje, če se daljša čakalna vrsta. Mejni primer nastopi takrat, kadar so vse stranke v čakalni vrsti in nobena ne more vstopiti v sistem. Ker je matematična teorija reševanja problemov čakalnih vrst s končno vhodno populacijo strank zapletena, lahko analiziramo tovrstne probleme z enačbami in tablicami (preglednici 5 in 6).

Postopek uporabe tablic je naslednji:

1. izpišemo vrednosti za:
   N, velikost populacije strank,
   m, število strežnih kanalov, strežnikov,
   T, povprečni čas strežbe,
   U, povprečni čas med dvema zahtevama za strežbo.
   izračunamo faktor strežbe
   X = T/ (T + U);
2. v tablicah izberemo območje za končno veliko vhodno populacijo strank, N;
3. pri vhodni vrednosti za izračunani *X* in za izbrano vrednost *m* odčitamo vrednosti za *D* in *F;*

Preglednica 4. Vrednosti za L_q in P_0 za dano razmerje λ/μ in m, izsek iz tablic (Stevenson, 1993)

λ/μ	m	Lq	P_0	λ/μ	m	Lq	P_0
0,15	1	0,026	0,850	0,45	1	0,368	0,550
	2	0,001	0,860		2	0,024	0,633
0,20	1	0,050	0,800		3	0,002	0,637
	2	0,002	0,818	0,50	1	0,500	0,500
0,25	1	0,083	0,750		2	0,033	0,600
	2	0,004	0,778		3	0,003	0,606
0,30	1	0,129	0,700	0,55	1	0,672	0,450
	2	0,007	0,739		2	0,045	0,569
0,35	1	0,188	0,650		3	0,004	0,576
	2	0,011	0,702	0,60	1	0,900	0,400
0,40	1	0,267	0,600		2	0,059	0,538
	2	0,017	0,667		3	0,006	0,548

Preglednica 5. Enačbe za izračun parametrov večkanalnega sistema s končno veliko vhodno populacijo strank (Stevenson, 1993)

Parameter	Formula	
Faktor strežbe	$X = \frac{T}{T+U}$	[13]
Povprečno število čakajočih strank	$L = N(1-F)$	[14]
Povprečni čas čakanja stranke v vrsti (da pride na vrsto)	$W = \frac{L(T+U)}{N-L} = \frac{T(1-F)}{XF}$	[15]
Povprečno število strank, ki niso v čakalni vrsti ali v strežbi	$J = NF(1-X)$	[16]
Povprečno število strank v strežbi	$H = FNX$	[17]
Populacija strank	$N = J + L + H$	[18]

Pri tem pomenijo: D = verjetnost, da bo stranka morala čakati v čakalni vrsti, F = faktor učinkovitosti = 1 - odstotek čakajočih v vrsti, H = povprečno število strank v strežbi, J = povprečno število strank, ki niso v čakalni vrsti ali v strežbi, L = povprečno število strank, ki čakajo, da bodo postrežene, m = število strežnih kanalov, strežnikov, N = populacija strank, T = povprečni čas strežbe, U = povprečni čas med dvema zahtevama za strežbo, W = povprečni čas čakanja stranke v vrsti (da pride na vrsto), X = faktor strežbe.

Preglednica 6. Izračun parametrov čakalne vrste za končno veliko populacijo strank, za N = 5 strank, izsek iz tablic (Stevenson, 1993)

X	m	D	F	X	m	D	F	X	m	D	F	X	m	D	F
0,012	1	0,048	0,999	0,058	2	0,019	0,999	0,080	2	0,035	0,998	0,120	2	0,076	0,995
0,019	1	0,076	0,998		1	0,229	0,984		1	0,313	0,969		1	0,456	0,927
0,025	1	0,100	0,997	0,060	2	0,020	0,999	0,085	2	0,040	0,998	0,125	2	0,082	0,994
0,030	1	0,120	0,996		1	0,237	0,983		1	0,332	0,965		1	0,473	0,920
0,034	1	0,135	0,995	0,062	2	0,022	0,999	0,090	2	0,044	0,998	0,130	2	0,089	0,933
0,036	1	0,143	0,994		1	0,245	0,982		1	0,350	0,960		1	0,489	0,914
0,040	1	0,159	0,993	0,064	2	0,023	0,999	0,095	2	0,049	0,997	0,135	2	0,095	0,933
0,042	1	0,167	0,992		1	0,253	0,981		1	0,368	0,955		1	0,505	0,907
0,044	1	0,175	0,991	0,066	2	0,024	0,999	0,100	2	0,54	0,997	0,140	2	0,102	0,992
0,046	1	0,183	0,990		1	0,260	0,979		1	0,386	0,950		1	0,521	0,900
0,050	1	0,198	0,989	0,068	2	0,026	0,999	0,105	2	0,059	0,997	0,145	3	0,011	0,999
0,052	1	0,206	0,988		1	0,268	0,978		1	0,404	0,945		2	0,109	0,991
0,054	1	0,214	0,987	0,070	2	0,027	0,999	0,110	2	0,065	0,996		1	0,537	0,892
0,056	1	0,018	0,999		1	0,275	0,977		1	0,421	0,939	0,150	3	0,012	0,999
	1	0,222	0,985	0,075	2	0,031	0,999	0,115	2	0,017	0,995		2	0,115	0,990
					1	0,294	0,973		1	0,439	0,933		1	0,553	0,885

4. nato z vrednostmi *N*, *M*, *X*, *D* in *F* izračunamo druge parametre modela.

Primer 3.

Z eno avtomatizirano strežno napravo (strežnikom) strežemo petim CNC strojem. Domnevamo, da lahko čas strežbe opišemo dovolj dobro z eksponentno verjetnostno porazdelitvijo, srednja vrednost časa strežbe naj znaša 10 minut, povprečni čas med dvema zahtevama za strežbo strojev pa je 70 minut.

Izračunaj:

a. povprečno število strojev, ki čakajo na strežbo,
b. povprečno število strojev v obratovanju,
c. povprečni skupni čas čakanja in strežbe,
d. verjetnost, da strojem ne bo potrebno čakati na strežbo.

Rešitev:

N = 5 CNC strojev
m = 1 strežnik
T = 10 min
U = 70 min

X = T / (T + U) = 10 / (10 + 70) = 0,125

Iz tablice v preglednici 6, za vrednosti N = 5, M = 1 in X = 0,125 odčitamo vrednosti za D = 0,473 in F = 0,920 in nato izračunamo:

a. povprečno število strojev, ki čakajo na strežbo, L = N (1 - F) = 5 (1 - 0,92) = 0,40 CNC strojev,

b. povprečno število strojev v obratovanju, J = NF(1 - X) = 5 (1 - 0,125) = 4,025 CNC strojev,

c. povprečni čas čakanja stroja, da pride na vrsto + povprečni čas strežbe = W + T = (L x (T + U) / (N - L)) + T = (0,40 x (10 + 70) / (5 - 0,40)) + 10 = 6,975 + 10 = 16,975 min

d. verjetnost, da strojem ne bo potrebno čakati na strežbo = 1 - D = 1 - 0473 = 0,527

Značilnost opisanega FP-sistema je, da obdelovanci po obdelavi na enem izmed petih obdelovalnih strojev zapustijo proizvodni sistem. Značilnost sodobnih FP-sistemov pa je, da se lahko obdelovanci, vpeti na transportni napravi za strežbo CNC strojev, ponovno in večkrat, v poljubnem zaporedju vračajo na istovrstne stroje, na katerih lahko opravljamo raznovrstne delovne operacije. Analiza tovrstnih sistemov je bolj kompleksna.

4. UPORABLJENI VIRI

1. Stevenson, J. W. 1993. Produktion/Operations Management. 4th ed. Homewood, Boston. IRWIN. 916 s.

2. Günther/Tempelmeier. 1995. H. Produktionsmanagement. Einführung mit Übungsaufgaben. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg,..., Tokyo. Springer -Verlag. 447 s.

3. Neumann, K. 1996. Produktions- und Operations- Management. Berlin, Heidelberg,..., Tokyo. Springer- Verlag. 368 s.