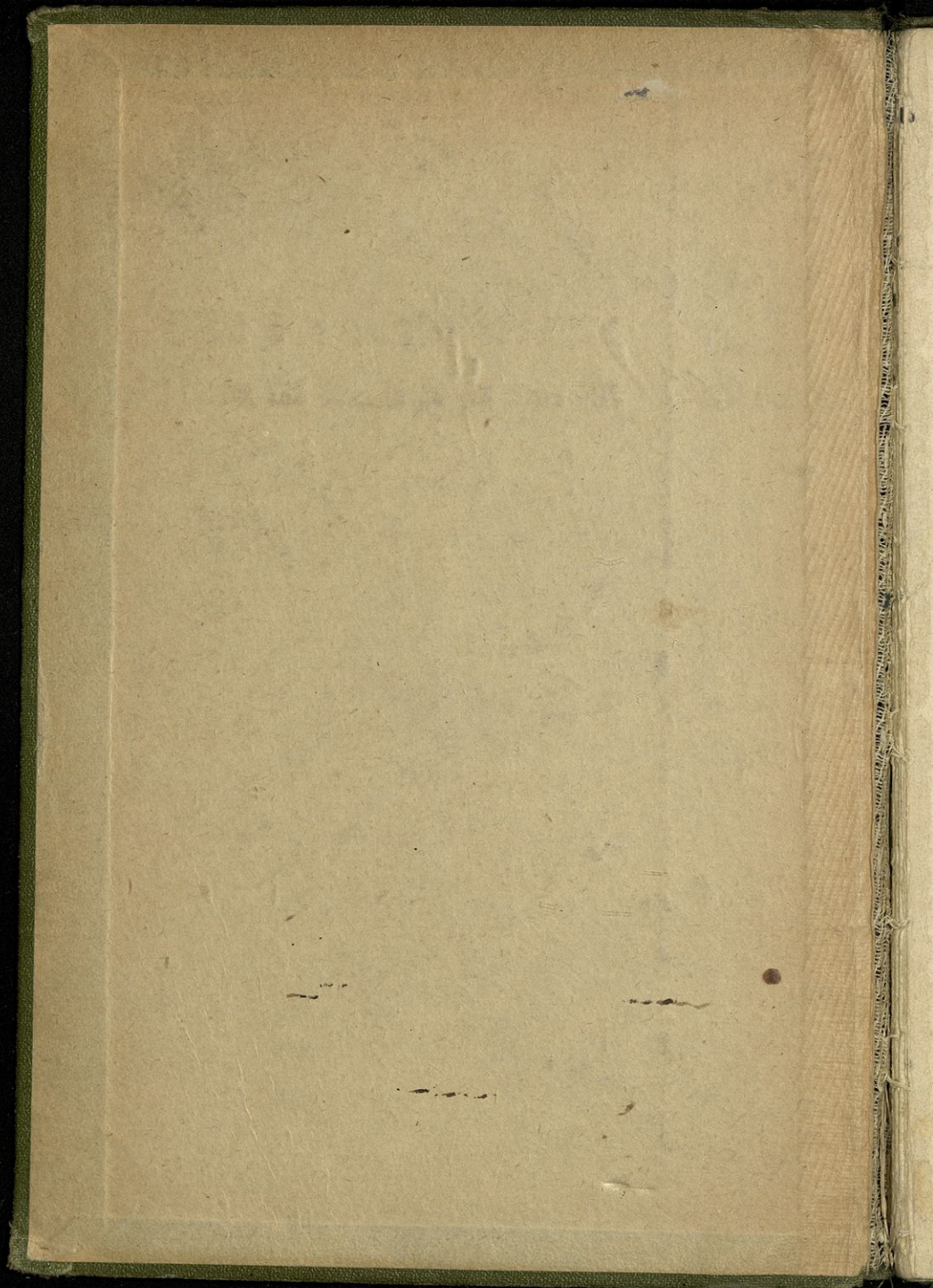




MOČNIK-
SPIELMANN

ANFANGSGRÜNDE DER GEOMETRIE
FÜR DIE I. BIS III. KLASSE DER MITTELSCHULEN



Zuckerm
geb. Hoffmayer
II. Klasse
minim
MOČNIKS

ANFANGSGRÜNDE DER GEOMETRIE

FÜR DIE I. BIS III. KLASSE
DER MITTELSCHULEN

BEARBEITET VON

JOHANN SPIELMANN

K. K. REGIERUNGSRAT
DIREKTOR DER K. K. STAATSREALSCHULE IM IV. BEZIRKE WIENS

MIT 148 FIGUREN

ACHTUNDZWANZIGSTE, NACH DEN NEUEN LEHRPLÄNEN
UMGEARBEITETE AUFLAGE.

PREIS GEBUNDEN 1 K 80 h



WIEN 1909
VERLAG VON F. TEMPSKY

549123

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechtes, vorbehalten.

19.09.2006



D 200616876

Erster Abschnitt.

Der Würfel und der Quader.

Ein Würfel wird so auf einen Tisch gestellt, daß eine seiner Begrenzungsflächen in die Tischfläche fällt.

Die Hauptausdehnungen des Würfels.

§ 1.

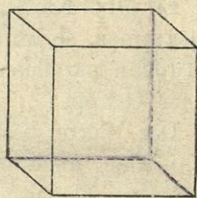
Der *Würfel* (Fig. 1) nimmt einen Raum ein, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein *Körper*. Der Würfel ist ein *Körper*.

Die Geometrie betrachtet an den Körpern nur die Eigenschaften des Raumes, den sie einnehmen, und sieht von dem Stoffe, der den Raum erfüllt, ab.

Der Würfel ist nach *drei Hauptrichtungen* ausgedehnt: nach der Länge, der Breite und der Höhe.

Der Schüler zeige diese drei Ausdehnungen *a)* an dem Modell, *b)* an der Figur.

Fig. 1.



Die Grenzen des Würfels.

§ 2.

Die Grenzen eines Körpers heißen *Flächen*. Wieviel Flächen hat der Würfel? Alle Flächen des Würfels sind *ebene* Flächen.

Jede Fläche des Würfels ist nach *zwei Hauptrichtungen* ausgedehnt: nach der Länge und nach der Breite (Höhe).

Der Schüler zeige an dem Würfel und an der Figur diese beiden Ausdehnungen.

Die untere Fläche, auf welcher der Würfel steht, und die obere Fläche heißen *Grundflächen*; die übrigen vier Flächen werden *Seitenflächen* genannt. Die Seitenflächen bilden den *Mantel*.

Durch Erweiterung einer Begrenzungsfläche des Würfels nach allen Seiten erhält man die *Ebene*. Sie ist unbegrenzt.

Die gegenseitige Lage der Flächen eines Würfels.

§ 3.

1. Die beiden Grundflächen treffen nie zusammen, soweit man sie auch erweitert; sie heißen *parallel*.

Gibt es am Würfel auch parallele Seitenflächen? Wieviele Paare paralleler Flächen kommen am Würfel vor?

2. Jede Seitenfläche trifft mit jeder der Grundflächen zusammen, sie *schneiden* einander. Dasselbe ist bei zwei benachbarten Seitenflächen der Fall. Am Würfel stehen je zwei einander schneidende Flächen *senkrecht* (normal) aufeinander.

Alle Grenzflächen des Würfels zusammen bilden dessen *Oberfläche*.

§ 4. Die Kanten des Würfels.

Wo zwei Flächen eines Würfels einander schneiden, entsteht eine Linie, welche eine Kante des Würfels genannt wird. Wieviel Kanten hat ein Würfel?

Alle Kanten des Würfels sind *gerade Linien*.

Eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge.

Die Kanten an den Grundflächen heißen *Grundkanten*, die übrigen Kanten *Seitenkanten*.

Wieviel Grundkanten und wieviel Seitenkanten hat der Würfel?

Die Kanten des Würfels haben gegeneinander eine dreifache Lage.

1. Der Würfel hat Kanten, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, sie *schneiden* einander in diesem Punkte. Die am Würfel einander schneidenden Kanten stehen paarweise aufeinander senkrecht (normal).

2. Es gibt Kanten, welche dieselbe Richtung besitzen, sie treffen nicht zusammen, so weit man sie auch verlängert. Sie heißen *parallel*. Wieviel Gruppen paralleler Kanten kommen am Würfel vor, wieviel gehören zu einer Gruppe?

3. Der Würfel besitzt auch Kanten, die weder parallel sind noch einander schneiden, auch wenn sie beliebig verlängert werden; sie liegen nicht in derselben Fläche. Derartige Kanten heißen einander *kreuzende*.

Der Schüler suche alle drei Arten von Kanten auf.

Zwei parallele oder zwei einander schneidende Kanten liegen in derselben Ebene, zwei einander kreuzende Kanten sind aber nicht in derselben Ebene enthalten.

Die Kanten des Würfels haben gegen die Flächen desselben eine zweifache Lage. Es gibt Kanten, welche z. B. die untere Grundfläche nicht treffen, auch nicht bei beliebiger Erweiterung beider. Es finden sich aber auch Kanten, welche die untere Grundfläche treffen. Von den ersteren sagt man, daß sie mit der betreffenden Fläche parallel sind, von den letzteren, daß sie dieselbe schneiden.

Der Schüler suche am Würfel die Kanten auf, welche *a)* mit der unteren oder oberen Grundfläche parallel sind, *b)* sie schneiden.

Ebenso bezüglich einer Seitenfläche.

Alle Kanten des Würfels stehen auf den Flächen, welche sie schneiden, senkrecht.

Eine nach allen Seiten begrenzte ebene Fläche heißt eine ebene *Figur*. Die Grenzl意思 einer Figur werden ihre *Seiten* genannt. Jede Fläche des Würfels ist eine *vierseitige* Figur. Da die Seiten gerade Linien sind, heißt die Figur *geradlinig*; da alle Seiten gleich sind, heißt sie *gleichseitig*.

Die Gleichheit der Seiten kann mit Hilfe des Zirkels nachgewiesen werden.

Alle Grenzl意思 einer Figur zusammen bilden ihren *Umfang*. Der Umfang einer Fläche des Würfels ist eine *gebrochene* Linie.

Die Ecken des Würfels.

§ 5.

Die Grenzen einer Linie heißen Punkte. Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei *Eckpunkten* begrenzt. Wieviel Eckpunkte hat der Würfel? 8 Wieviel Kanten³ und wieviel Flächen stoßen an einem Eckpunkte des Würfels zusammen? 3

Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

Eine Figur, welche vier Seiten hat, hat auch vier Eckpunkte und heißt deshalb ein *Viereck*. Jede Fläche am Würfel ist ein gleichseitiges Viereck.

Die Winkel am Würfel.

§ 6.

Zwei Kanten, welche einander schneiden, bilden einen *Winkel*. Wieviel Winkel kommen in jeder Fläche des Würfels vor? 4 Wieviel am ganzen Würfel? 24

Die Kanten, welche einen Winkel bilden, heißen die *Schenkel* und der Eckpunkt, in dem sie zusammentreffen, der *Scheitel* des Winkels.

Ein Winkel, dessen Schenkel aufeinander senkrecht stehen, heißt ein *rechter*. Jede Fläche am Würfel enthält nur rechte Winkel, sie ist *rechtwinklig*; da man mit Benutzung zweier Würfel je zwei dieser Winkel zur Deckung bringen kann, so sind sie gleich; jede Fläche am Würfel ist also auch gleichwinklig. Eine Figur, welche gleichseitig und gleichwinklig ist, heißt *regelmäßig*. Das regelmäßige Viereck heißt *Quadrat*. Am Würfel ist also jede Fläche ein Quadrat.

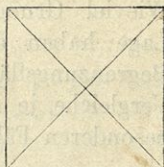
Die Flächen am Würfel haben gleiche *Größe* und gleiche *Gestalt*; infolgedessen lassen sie sich so aufeinander legen, daß sie sich *decken*; sie sind *kongruent*. Ein Körper, welcher von lauter kongruenten und regelmäßigen Figuren so begrenzt wird, daß gleich viele derselben an jedem Eckpunkte zusammentreffen, heißt *regelmäßig*. Der Würfel ist ein *regelmäßiger Körper*.

Die Diagonalen am Würfel.

§ 7.

Verbindet man zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrates durch eine Gerade, so erhält man eine Diagonale desselben. Jedes Quadrat hat zwei *Diagonalen*, die untereinander gleich, aber größer als eine Seite sind. Die Diagonalen eines Quadrates sind zu den Seiten desselben *schief*. Die Winkel zwischen den Diagonalen und den Seiten eines Quadrates heißen *spitze*. (Fig. 2).

Fig. 2.



Verbindet man zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Würfels (einer gehört der oberen, der andere der unteren Grundfläche an) durch eine Gerade, so erhält man eine *Diagonale des Würfels*. Jeder Würfel hat vier Paare gegenüberliegender Eckpunkte, mithin auch vier Diagonalen.

Lage der Kanten und Flächen des Würfels im Raume.

§ 8.

Eine Gerade, welche die Richtung eines Bleilotes d. i. eines frei hängenden durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt *lotrecht* oder *vertikal*.

Eine Gerade, welche die Richtung eines auf einem ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens hat, heißt *horizontal* oder *wagrecht*. Eine Gerade, welche weder horizontal noch lotrecht ist, heißt *schräge*.

Jede ebene Fläche, welche durch eine lotrechte Gerade gelegt wird, heißt lotrecht oder *vertikal*; hingegen heißt sie horizontal, wenn alle in ihr enthaltenen Geraden horizontal sind. Ist eine ebene Fläche weder horizontal noch vertikal, so heißt sie schräge.

Der Schüler zeige am Würfel a) lotrechte, horizontale und schräge Linien, b) lotrechte, horizontale Flächen. Ebenso im Zimmer.

Die Lagen der Flächen des Würfels sind nicht unabhängig von einander. Die Lage der einen bestimmt die Lage der übrigen.

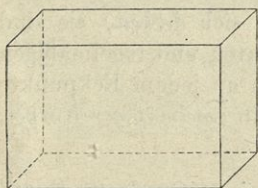
Der auf der Tischfläche liegende Würfel wird um eine der Grundkanten gedreht; wie ändert sich dadurch die Lage der Begrenzungsflächen des Würfels?

§ 9. Der Quader.

Der Quader wird so auf einen Tisch gestellt, daß eine seiner Begrenzungsflächen in die Tischebene fällt.

Der Quader (Fig. 3) ist wie der Würfel von sechs Vierecken begrenzt. Grundflächen? Seitenflächen? Jede Fläche ist rechtwinklig; da aber nur die gegenüberliegenden Seiten gleich, die anstoßenden hingegen ungleich sind, so ist sie nicht gleichseitig. Ein solches Viereck heißt ein Rechteck. In einem Rechtecke wird eine Seite als Grundlinie angenommen, jede der beiden anstoßenden Seiten heißt dann die Höhe des Rechteckes. Wann geht ein Rechteck in ein Quadrat über?

Fig. 3.



Die Seitenflächen des Quaders bilden den Mantel. Wieviel Ecken, wieviel Kanten hat der Quader?

Wieviel Kanten sind parallel? In wieviel Gruppen kann man sie ordnen? Wieviel Kanten sind in der bezeichneten Lage horizontal, wieviel vertikal? Wieviel Grundflächen, wieviel Seitenflächen hat der Quader? Welche Lage haben die Begrenzungsflächen? Was ist eine Diagonale einer Begrenzungsfläche, was eine Diagonale des Quaders?

Vergleiche je zwei gegenüberliegende Flächen des Quaders. Können in besonderen Fällen auch Quadrate an einem Quader vorkommen?)

§ 10. Raumgebilde und Raumgrößen.

Körper, Flächen, Linien und Punkte nennt man Raumgebilde. Die ersteren drei sind im Raume ausgedehnt und heißen deshalb Raumgrößen. Der Punkt hat keine Ausdehnung und ist daher keine Raumgröße; er kann daher nicht gesehen, sondern nur an einer bestimmten Stelle gedacht werden. Um ihn zu versinnlichen, zieht man um die Stelle, an welcher er gedacht wird, einen

kleinen Ring, oder bezeichnet sie mit einem Sternchen usw. und setzt dazu, um ihn benennen zu können, einen Buchstaben oder eine Ziffer. Z. B.

A	a	I	1
○	.	*	+

Ist ein Blatt Papier eine Fläche, ein dünner Faden eine Linie, ein Tüpfchen, das mit der Kreide oder Bleifeder gemacht wird, ein Punkt? Können Flächen, Linien, Punkte selbständig vorkommen?

Entstehung der Raumgrößen durch Bewegung.

§ 11.

Die Raumgrößen können durch *Bewegung* erzeugt werden.

1. Bewegt sich ein *Punkt* im Raume so, daß er stets dieselbe Richtung der Bewegung beibehält, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine gerade Linie; sie kann durch zwei Bewegungen eines Punktes erzeugt werden, deren Richtungen entgegengesetzt sind.
2. Bewegt sich eine gerade *Linie* im Raume in einer bestimmten Richtung, ohne daß sie in sich selbst verschoben wird, so entsteht eine ebene *Fläche*.
3. Bewegt sich eine ebene *Fläche* im Raume in einer andern Richtung, als in der sie selbst ausgedehnt ist, so entsteht eine *Körper*. So kann man den Würfel durch Bewegung eines Quadrates entstanden denken.

Zweiter Abschnitt.

Gerade Linien, Winkel.

Die gerade Linie; Bestimmung ihrer Lage.

§ 12.

Durch *einen* Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Lagen ziehen. Ist noch ein *zweiter* Punkt gegeben, so geht von allen diesen geraden Linien nur eine einzige durch beide Punkte.

Die Lage einer geraden Linie ist demnach durch zwei Punkte vollkommen bestimmt.

Eine gerade Linie wird mit Hilfe des *Lineals* gezeichnet.

Prüfung des Lineales auf seine Richtigkeit:

Die Kante des Lineales muß vollkommen gerade sein. Dies ist der Fall, wenn sie, in entsprechender Weise vor das Auge gebracht, als Punkt erscheint. Oder man zieht nach der Kante des Lineales eine Linie, klappt es um und zieht nach derselben Kante wieder eine Linie. Fallen diese beiden Linien zusammen, so ist die benutzte Kante geradlinig.

Aufgaben.

1. Wieviel vertikale gerade Linien sind durch einen Punkt möglich?
2. Wieviel horizontale gerade Linien sind durch einen Punkt möglich?
3. Wieviel schräge gerade Linien sind durch einen Punkt möglich?

§ 13. Unbegrenzte und begrenzte gerade Linien.

1. Ist eine gerade Linie nach beiden Seiten unbegrenzt, so heißt sie ein *Strahl* (BC , Fig. 4) oder kurz *Gerade*. Nimmt man in einer Geraden einen Punkt A an, so wird sie in zwei Teile geteilt, welche von diesem Punkte aus in zwei einander entgegengesetzten Richtungen ausgedehnt sind und *Halb-*

Fig. 4.

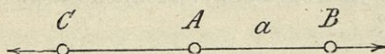


Fig. 6.

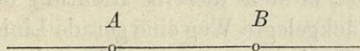
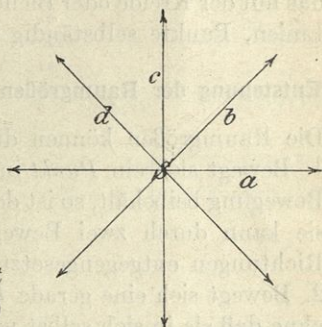


Fig. 5.



strahlen genannt werden. Ein *Halbstrahl* ist demnach eine durch einen Punkt (*Grenzpunkt*) *halb begrenzte gerade Linie*. Er wird durch den Grenzpunkt A und einen zweiten in ihm liegenden Punkt B (C) oder durch einen einzigen Buchstaben a bezeichnet.

Gehen mehrere in einer Ebene liegende Strahlen (Fig. 5) durch denselben Punkt S , so bilden sie ein *Strahlenbüschel*. Der allen Geraden gemeinschaftliche Punkt S wird der *Mittelpunkt* oder das *Zentrum* des Strahlenbüschels genannt. Durch den Mittelpunkt wird jeder Strahl in zwei Halbstrahlen zerlegt, welche dieselbe Lage (§ 8), aber entgegengesetzte Richtung haben.

2. Nimmt man in einer Geraden zwei Punkte an (Fig. 6), so heißt der durch sie begrenzte Teil der Geraden eine *Strecke*.

Die beiden Grenzpunkte nennt man ihre *Endpunkte*, oder auch den einen den *Anfangspunkt*, den andern den *Endpunkt*. Um eine Strecke zu benennen, setzt man an jeden ihrer Endpunkte einen Buchstaben und spricht diese in der Reihenfolge AB oder BA aus, je nachdem man sich die Strecke durch die Bewegung eines Punktes von A nach B oder umgekehrt von B nach A entstanden denkt.

Die zwischen zwei Punkten gezogene Strecke ist die kürzeste Verbindungslinie derselben und wird deshalb die Entfernung oder der Abstand (Distanz) der beiden Punkte genannt.

§ 14. Vergleichung zweier Strecken hinsichtlich ihrer Länge.

Um zwei Strecken hinsichtlich ihrer *Länge* zu vergleichen, lege man sie so aufeinander, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Fallen die anderen zwei Endpunkte ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken einander *gleich*. In Zeichen $AB = CD$ (Fig. 7). Wenn aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammenfallen, so sind die Strecken *ungleich*, und zwar ist diejenige die *kleinere*, deren zweiter Endpunkt zwischen

die Endpunkte der anderen fällt; diese ist die größere. In Fig. 8 ist EF größer als GH oder GH kleiner als EF . (In Zeichen $EF > GH$ oder $GH < EF$.) Die Vergleichung zweier Strecken nach ihrer Länge kann auch mit Hilfe des Zirkels ausgeführt werden.

Eine Gerade hat nur *eine* Lage, *eine* Größe, hingegen *zwei* Richtungen, die entgegengesetzt sind: AB (Fig. 7) von A nach B und von B nach A .

Aufgabe.

⊗ Zeichne nach dem Augenmaße nebeneinander zwei gleiche Strecken und prüfe ihre Gleichheit mit dem Zirkel.

Fig. 7.

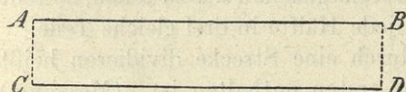
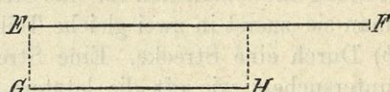


Fig. 8.



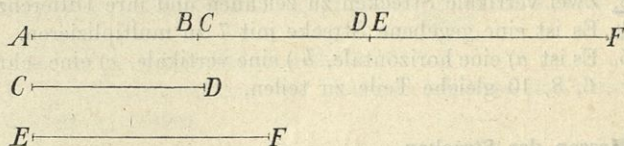
Zeichnendes Rechnen mit Strecken.

§ 15.

1. *Addition zweier oder mehrerer Strecken.* Um zwei oder mehrere Strecken zu addieren, legt man sie in einer Geraden so *nebeneinander*, daß der Endpunkt der ersten mit dem

Fig. 9.

Anfangspunkte der zweiten, der Endpunkt der zweiten mit dem Anfangspunkte der dritten Strecke usw. zu-

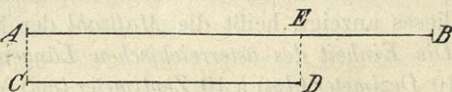


sammenfällt; die Strecke zwischen dem Anfangspunkte der ersten und dem Endpunkte der letzten Strecke ist die gesuchte *Summe*. In Figur 9 ist $AF = AB + BC + DE$.

Fig. 10.

2. *Subtraktion zweier Strecken.* Um

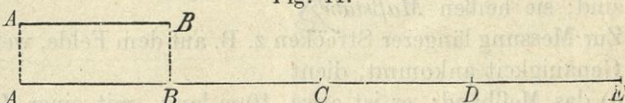
zwei Strecken zu subtrahieren, legt man die kleinere so *auf* die größere, daß zwei Endpunkte derselben zusammenfallen; die Strecke



zwischen den anderen Endpunkten ist die gesuchte Differenz (Unterschied). In Fig. 10 ist $BE = AB - CD$.

Fig. 11.

3. *Multiplikation einer Strecke mit einer ganzen Zahl.* (Vervielfachung einer Strecke.)



Eine Strecke wird mit einer ganzen Zahl multipliziert (vervielfacht), indem man sie in der früher angegebenen Weise so oft als Addend setzt, als die ganze Zahl anzeigt. Ist z. B. die Strecke AB (Fig. 11) mit 4 zu multiplizieren oder zu vervielfachen, so trägt man sie auf einer Geraden

viermal nebeneinander auf; es ist dann $AE = AB \times 4$ oder AE das Vierfache von AB .

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Strecken ist mit Hilfe des Zirkels auszuführen.

- 4) *Division einer Strecke.* a) Durch eine ganze Zahl (Teilung.) Eine Strecke durch eine ganze Zahl dividieren heißt, sie in so viele gleiche Summanden zerlegen, als die ganze Zahl anzeigt. Der Quotient ist eine Strecke. Ist eine Strecke in 2, 4, 8, 16 . . . gleiche Teile zu teilen, so teile man sie vorläufig nach dem Augenmaße in zwei, jede Hälfte wieder in zwei, jedes Viertel wieder in zwei gleiche Teile usw. und prüfe jedesmal die Richtigkeit der Teilung mit dem Zirkel. Ist eine Strecke in sechs gleiche Teile zu teilen, so teilt man sie zuerst in zwei gleiche Teile und jede Hälfte in drei gleiche Teile.
- b) Durch eine Strecke. Eine Strecke durch eine Strecke dividieren heißt untersuchen, wie oft die letztere in der ersten enthalten ist. (Messung.) Der Quotient ist eine Zahl. Z. B. (Fig. 11): $AE : AB = 4$.

Aufgaben (zuerst nach dem Augenmaße zu zeichnen und dann zu prüfen.)

1. Es sind drei horizontale Strecken zu zeichnen, bezüglich ihrer Länge zu vergleichen und zu addieren.
2. Es sind drei vertikale Strecken zu zeichnen und zu addieren.
3. Zwei vertikale Strecken zu zeichnen und ihre Differenz zu ermitteln.
4. Es ist eine gegebene Strecke mit 7 zu multiplizieren.
5. Es ist a) eine horizontale, b) eine vertikale, c) eine schräge Strecke in 3, 4, 5, 6, 8, 10 gleiche Teile zu teilen.

§ 16. Messen der Strecken.

Auf der Division einer Strecke durch eine Strecke beruht die Bestimmung der Länge einer Strecke, d. i. das Messen derselben.

Eine Strecke *messen* heißt untersuchen, wie oft eine als *Längeneinheit* angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die *Maßzahl* der Strecke.

Die Einheit des österreichischen Längenmaßes ist das Meter (m), das in 10 Dezimeter (dm) à 10 Zentimeter (cm) à 10 Millimeter (mm) eingeteilt wird. 1000 Meter = 1 Kilometer (km), 10 Kilometer = 1 Myriameter (µm).

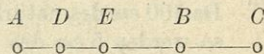
Zum Ausmessen der Längen dienen Stäbe von Holz oder Metall, auf welchen eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Unterabteilungen aufgetragen sind; sie heißen *Maßstäbe*.

Zur Messung längerer Strecken z. B. auf dem Felde, wenn es nicht auf größte Genauigkeit ankommt, dient

- a) das Meßband; es ist etwa 10 m lang, mit einer Zentimeterteilung versehen und mittels einer Kurbel auf einer Rolle aufwickelbar.
- b) Die Meßkette; sie besteht aus einzelnen Gliedern von etwa 2 dm Länge, welche durch Ringe verbunden sind. Die einzelnen Meter sind durch Ringe von besonderer Gestalt erkenntlich gemacht.

Soll eine Strecke AB (Fig. 12) auf dem Felde gemessen werden, so ist sie zuerst abzustecken. Dies geschieht mit Hilfe der Fluchtstäbe (zirka 2 m langer, mit einer eisernen Spitze versehener Stäbe). Die Punkte A und B werden durch vertikal eingesteckte Fluchtstäbe markiert. Der Beobachter stellt sich so in einem Punkte C auf, daß der Stab A durch B gedeckt wird. Ein Gehilfe steckt dann zwischen A und B weitere Fluchtstäbe in $D, E, \dots$ so ein, daß sie von C aus nicht gesehen werden. Die Punkte A, D, E, B liegen dann in einer Geraden.

Fig. 12.



Anfängern ist anzuraten, zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abzuschätzen und dann mit dem Maßstabe genau zu messen.

Aufgaben:

- Die Summe folgender Strecken zu suchen:
 - 3 dm 8 cm 5 mm, 7 dm 9 cm 6 mm, 8 dm 6 mm;
 - 3 km 86 m, 5 km 817 m.
- Die Differenz folgender Strecken zu suchen:
 - 3 m 8 dm 5 cm, 1 m 2 dm 3 cm;
 - 13 m 4 dm 7 cm, 8 m 9 dm 8 cm;
 - 4 km, 1 km 27 m.
- Die Strecke 3 m 8 dm 9 cm a) mit 3 zu multiplizieren, b) ihren 5. Teil zu berechnen.
- Wie oft sind 3 km 826 m in 15 km 304 m enthalten?
- Auf dem Felde eine Strecke abzustecken, ihre Länge zu schätzen und durch Messung die Schätzung zu prüfen.

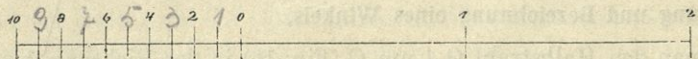
Der verjüngte Maßstab.

§ 17.

Will man eine in der Natur gemessene Strecke auf dem Papiere zeichnen, so geschieht dieses gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren, *verjüngten* Maße. Es wird nämlich angenommen, daß eine bestimmte Länge, z. B. 1 cm, auf dem Papiere eine bestimmte Länge, z. B. 1 m oder 20 m, in der Wirklichkeit vorstellen soll.

Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Längenmaße verkleinert aufgetragen sind, heißt ein *verjüngter Maßstab*, im Gegensatz zu einem *natürlichen* Maßstabe, auf welchem die Längeneinheit in ihrer wahren Größe aufgetragen wird.

Fig. 13.



Aufgaben:

- Einen Maßstab von 3 m, dem man auch Dezimeter entnehmen kann, in der Verjüngung 1 m = 3 cm natürlicher Größe zu zeichnen. Zeichne (Fig. 13) eine Gerade, trage darauf 3 cm natürlicher Größe 3 mal auf und teile dann den ersten Teil links in 10 gleiche Teile!

2. Ziehe drei Gerade und trage mit dem obigen Maßstabe auf die erste 2 m, auf die zweite 1 m 5 dm, auf die dritte 2 m 7 dm auf!
 3. Ziehe drei Strecken und bestimme nach dem obigen Maßstabe, wieviel Meter und Dezimeter die Länge einer jeden beträgt!
 4. ^{1 dm = 1/10 m} Zeichne einen Maßstab von 5 m, auf dem 1 m des natürlichen Maßes gleich 2 cm ist und auf dem man noch 5 cm des natürlichen Maßes ablesen kann! Da 100 cm des natürlichen Maßes durch 2 cm oder 20 mm dargestellt werden, so werden 5 cm des natürlichen Maßes durch 1 mm dargestellt.
 5. Zeichne mit beliebiger Verjüngung einen Maßstab von 40 m so, daß man noch Meter abnehmen kann!
 6. Miß die Dimensionen a) des Fußbodens eines Zimmers, b) einer rechtwinkligen Tischfläche und zeichne beide Rechtecke in passender Verkleinerung.
- Anwendung des verjüngten Maßstabes bei Zeichnungen von Grundrissen, von Gebäuden, von Maschinen, von Landkarten usw.

§ 18. Vergleichung zweier Geraden hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage.

1. Zwei Gerade, welche in derselben Ebene liegen und, wenn sie noch so weit verlängert werden, nie zusammentreffen, heißen *gleichlaufend* oder *parallel*. In Zeichen: $AB \parallel CD$ (Fig. 14). Der zwischen zwei parallelen Geraden liegende Teil der Ebene heißt ein *Parallelstreifen*.

Fig. 14.

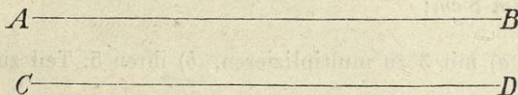
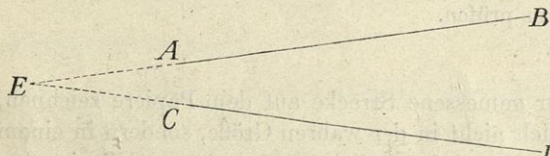


Fig. 15.

2. Zwei gerade Linien, welche, hinreichend verlängert, zusammentreffen, heißen *ungleichlaufend* oder *nicht parallel*, wie AB und CD (Fig. 15). Zwei nicht parallele Gerade sind gegen den Schnittpunkt *konvergierend*, von demselben aus *divergierend*.



Aufgaben:

1. Welche Lage gegeneinander haben die Strecken, welche von den Punkten eines frei fallenden Körpers beschrieben werden?
2. Welche Lage gegeneinander haben die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen?

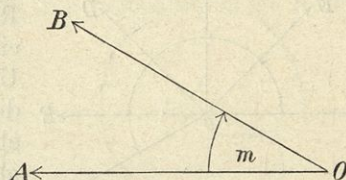
§ 19. Entstehung und Bezeichnung eines Winkels.

Dreht man den Halbstrahl OA um O (Fig. 16) in der Richtung des Pfeiles in die Lage OB , so wird der von ihm beschriebene Teil der Ebene ein Winkel genannt. Nenne a) die Schenkel, b) den Scheitel des Winkels! (§ 6.)

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen Buchstaben am Scheitel oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben. Im letzteren Falle steht ein Buchstabe

am Scheitel und die zwei anderen an beliebigen Punkten der beiden Schenkel; diese Buchstaben werden bei der Benennung eines Winkels in einer solchen Ordnung gelesen, daß der am Scheitel stehende die Mitte einnimmt. Der Winkel in Fig. 16 heißt: Winkel O oder Winkel m oder Winkel AOB oder Winkel BOA . Sind die Schenkel eines Winkels Strecken, so hängt seine Größe nur von der Größe der Drehung ab, sie ist unabhängig von der gewählten Länge der Schenkel.

Fig. 16.



Vergleichung zweier Winkel bezüglich ihrer Größe.

§ 20.

Um zwei Winkel bezüglich ihrer Größe miteinander zu vergleichen, legt man sie so aufeinander, daß die Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen; fällt das andere Paar Schenkel gleichfalls zusammen, so sind die beiden Winkel gleich; im entgegengesetzten Falle ungleich, und zwar ist derjenige der kleineren, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des anderen fällt.

Fig. 17.

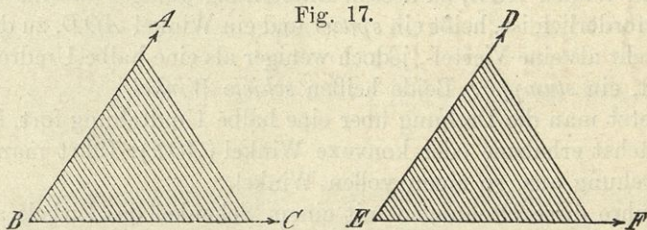


Fig. 18.

gleichfalls zusammen, so sind die beiden Winkel gleich; im entgegengesetzten Falle ungleich, und zwar ist derjenige der kleineren, dessen

zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des anderen fällt.

In Fig. 17 ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, in Fig. 18 $\sphericalangle GFH < \sphericalangle IKL$.

Schneide zwei Winkel aus einem Blatte Papier aus und vergleiche sie nach ihrer Größe!

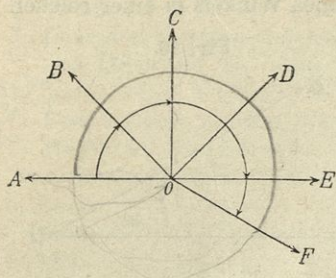
Einteilung der Winkel hinsichtlich ihrer Größe.

§ 21.

Dreht sich der Halbstrahl OA (Fig. 19) in einer Ebene um seinen Grenzpunkt O so lange, bis er in die Richtung OC kommt, also eine Vierteldrehung ausführt, so sagt man, er steht auf seiner ursprünglichen Richtung senkrecht oder normal (in Zeichen: $CO \perp AO$) und nennt den dadurch entstandenen Winkel einen *rechten* (R.).

Führt man mit dem Halbstrahl OC neuerdings ein Viertel einer Umdrehung aus, so kommt er in die Lage OE , man erhält wieder einen rechten Winkel

Fig. 19.



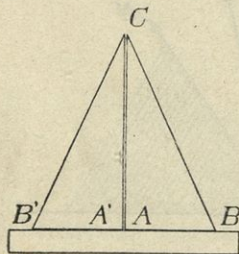
COE. Die beiden rechten Winkel geben als Summe den Winkel *AOE*, dessen Schenkel in dieselbe Gerade nach entgegengesetzten Richtungen fallen. Ein solcher Winkel heißt ein *gestreckter*; er entsteht durch eine halbe Umdrehung. Ein rechter Winkel ist also die Hälfte eines gestreckten. Alle rechten, ebenso alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Beträgt die Drehung des Halbstrahles *OA* weniger als eine halbe Umdrehung, so heißt der entstandene Winkel ein *hohler* oder *konkaver*; jeder hohle Winkel ist also kleiner als ein gestreckter. Ein Winkel *AOB*, zu dessen Entstehung weniger als eine Viertelumdrehung erforderlich ist, heißt ein *spitzer* und ein Winkel *AOD*, zu dessen Entstehung mehr als eine Viertel-, jedoch weniger als eine halbe Umdrehung erforderlich ist, ein *stumpfer*. Beide heißen *schiefe Winkel*.

Setzt man die Drehung über eine halbe Umdrehung fort, so erhält man zunächst erhabene oder konvexe Winkel (*AOF*); führt man eine ganze Umdrehung aus, so einen vollen Winkel.

Führe diese Drehungen mit einem Schenkel des Zirkels aus und zeige die dadurch gebildeten Winkel!

Fig. 20.



Einen rechten Winkel zeichnet man mit Hilfe des Winkelbrettes, welches ein Dreieck mit einem rechten Winkel ist. Welche Winkel finden sich noch an dem Winkelbrett?

Prüfung der Richtigkeit des Winkelbrettes. Man legt es in der Lage *ABC* (Fig. 20) gegen ein Lineal und zieht nach der Kante *AC* eine Linie; sodann klappt man das Winkelbrett bei unveränderter Lage des Lineals um und zieht nach derselben Kante wieder eine Linie. Fallen diese beiden Linien zusammen, so ist das Winkelbrett richtig.

Mit Hilfe des Winkelbrettes können die *Aufgaben* gelöst werden:

1. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese die Senkrechte zu fällen.
2. In einem Punkte einer Geraden auf diese die Senkrechte zu errichten.

Aufgaben:

1. Zwischen welchen Winkeln liegt ein stumpfer, zwischen welchen ein erhabener Winkel?
2. Nenne Gegenstände im Lehrzimmer und außerhalb desselben, an denen
a) rechte, b) spitze, c) stumpfe Winkel vorkommen.
3. Was für einen Winkel beschreibt die Windfahne, wenn sie sich a) von Nord nach Süd, b) von Ost nach Süd, c) von Ost über Süd nach Südwest, d) von West über Ost nach Südost, e) von West über Ost nach Süd dreht?

4. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30 Minuten?
5. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr um 2, 3, 4, 5, 6 Uhr?
6. Mit Hilfe des Winkelbrettes und des Zirkels a) ein Quadrat, b) ein Rechteck zu zeichnen.

Netz des Würfels und des Quaders.

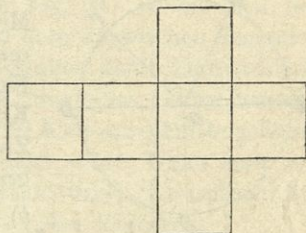
§ 22.

Die zusammenhängende Zeichnung der Grenzflächen eines Körpers in einer einzigen Ebene heißt das Netz dieses Körpers.

Das Netz des Würfels entsteht, wenn man längs einer geraden Linie vier Quadrate nebeneinander aufträgt und überdies an den entgegengesetzten Seiten dieser Reihe von Quadraten noch zwei Quadrate konstruiert (Fig. 21)¹⁾.

Welche Figur bildet im Netz der Mantel des Würfels? Wie groß ist die Grundlinie, wie groß die Höhe?

Fig. 21.



Aufgaben:

1. Das Netz eines Quaders (am besten eines Modelles) zu zeichnen, dessen Grundflächen Rechtecke sind. Welche Figur ergibt sich für den Mantel? Wie groß ist die Grundlinie, wie groß die Höhe derselben?
2. Das Netz eines Quaders zu zeichnen, wenn die Grundflächen Quadrate sind und jede Seitenkante doppelt so groß ist als eine Grundkante.

Dritter Abschnitt.

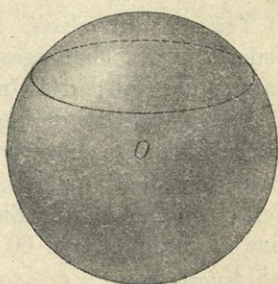
Kugel, Kreis, Anwendungen auf die Winkel.

Die Kugel und der Kreis.

§ 23.

Der in Fig. 22 dargestellte Körper ist eine Kugel. Sie ist von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt, deren Punkte von einem innerhalb derselben liegenden Punkte, dem Mittelpunkt oder Zentrum, gleich weit abstehen. Die Strecke zwischen einem Punkte der Oberfläche und dem Zentrum heißt *Halbmesser* oder *Radius*; eine Strecke, welche zwei Punkte der Oberfläche einer Kugel verbindet und durch den Mittelpunkt geht, heißt *Durchmesser* (*Diameter*). Alle Radien und daher auch alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

Fig. 22



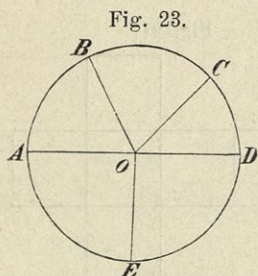
Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so erhält man als Durchschnittsfigur der Kugelfläche mit dieser Ebene eine krumme Linie, welche Kreis genannt wird. (Modell.)

¹⁾ Der Schüler zeichne alle Körpernetze in geeigneter Größe auf Kartonpapier, schneide sie aus und biege das Netz zu dem entsprechenden Körper zusammen.

Alle Punkte des **Umfanges** (**Peripherie**) eines Kreises haben von einem Punkte seiner Ebene, dem **Mittelpunkte** (**Zentrum**), denselben Abstand.

a) *Entstehung der Kreislinie.*

Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 23) um den Punkt O in der Ebene so lange, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punkt A eine Linie, deren Punkte von O gleichen Abstand haben, (welchen?) also einen Kreis. O ist der Mittelpunkt, AO ein Radius, AD ein Durchmesser. Die von der Kreislinie eingeschlossene Figur heißt **Kreisfläche**.



Konstruktion eines Kreises mit Hilfe des Zirkels. Zwei Kreise mit gleichen Radien sind kongruent (§ 6).

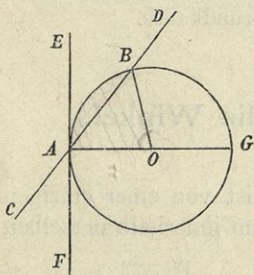
b) *Punkt und Kreis.*

Ein Punkt liegt in der Peripherie, außerhalb oder innerhalb derselben, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkt (Zentralabstand) gleich dem Radius, größer oder kleiner als dieser ist.

c) *Die Gerade und der Kreis.*

Eine Gerade kann mit einer Kreislinie zwei Punkte oder nur einen Punkt oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Fig. 24.



Eine Strecke AB (Fig. 24), welche zwei Punkte des **Umfanges** verbindet, heißt eine **Sehne**. Geht eine Sehne durch den Mittelpunkt, so ist sie ein **Durchmesser**.

Eine Gerade CD , welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinaus entsteht, heißt eine **Sekante**. Eine Gerade EF , welche mit der Kreislinie nur **einen Punkt** A gemeinschaftlich hat und übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine **Tangente** des Kreises.

d) *Teile der Kreislinie.*

Jeder Teil des **Umfanges**, wie z. B. AB (Fig. 24), wird ein **Kreisbogen** genannt; die Hälfte des **Umfanges** heißt insbesondere ein **Halbkreis**, der vierte Teil ein **Quadrant**, der sechste ein **Sextant**, der achte ein **Oktant**. Um die Größe eines Kreisbogens im Vergleiche zum ganzen Kreisumfange angeben zu können, teilt man diesen in 360 gleiche Teile und nennt einen solchen Teil einen **Bogengrad**. Ein Bogengrad ($^{\circ}$) wird in 60 Bogenminuten ($'$) und eine Bogenminute in 60 Bogensekunden ($''$) eingeteilt.

Aufgaben:

- 1) Wieviel Bogengrade kommen auf einen Halbkreis, wieviel auf den Quadranten, den dritten, fünften, sechsten, achten, zehnten Teil des Kreisumfanges?
- 2) Der wievielte Teil des Kreisumfanges ist ein Bogen von 10° , 20° , 30° , 36° , 40° , 60° , 90° , 120° ?

3. Wieviel Grade legt scheinbar die Sonne *a)* in 24 Stunden, *b)* in einer Stunde zurück? Welche Zeit braucht sie zu 1° ?

e) Teile der Kreisfläche.

1. Der *Kreisabschnitt* oder das *Kreissegment* ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne AB (Fig. 24) und dem durch diese abgeschnittenen Bogen begrenzt wird.

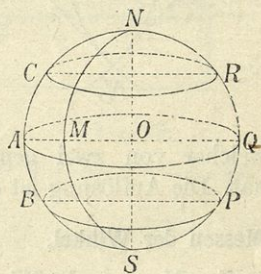
2. Der *Kreisausschnitt* oder *Kreissector* (AOB , Fig. 24) ist ein Teil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird. Der Winkel am Mittelpunkte heißt Zentriwinkel. Schneiden die Halbmesser AO und BO (Fig. 24) nur *einen* Sektor heraus? Wieviel Bogen, Zentriwinkel, Kreisabschnitte und Kreisausschnitte gehören zu einer Sehne? Sind sie gleich? Können sie gleich sein? Wenn man von dem zu einer Sehne gehörigen Kreisbogen, Zentriwinkel, Kreisabschnitte oder Kreisausschnitte spricht, meint man immer den kleineren.

f) Entstehung der Kugel.

Man kann sich eine Kugel durch eine halbe Umdrehung eines Kreises $NASQ$ um den Durchmesser NS (Fig. 25) entstanden denken; der Durchmesser NS heißt die *Achse*, seine Endpunkte werden die *Pole* der Kugel genannt. In den einzelnen Lagen bildet die sich drehende Kreislinie die *Meridiane*; die Kreislinien, z. B. CR , welche die Punkte der sich drehenden Kreislinie beschreiben, heißen *Parallelkreise*. Die Meridiane sind alle einander gleich, die Parallelkreise haben verschiedene Größe. Der größte Parallelkreis ist der *Äquator* AQ , d. i. derjenige Kreis, welcher von dem Halbierungspunkte A des Halbkreises NAS beschrieben wird. Diese Bezeichnungen werden namentlich von der Erde gebraucht, wenn sie als Kugel gedacht wird.

Der zwischen zwei Parallelkreisen liegende Teil der Oberfläche einer Kugel heißt eine *Kugelzone*, der durch eine Ebene abgeschnittene Teil eine *Kugelmütze*. (In der Geographie ebenfalls eine Zone.)

Fig. 25.



Konstruktionsaufgaben.

§ 24.

1. Einen Punkt in der Ebene zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Abstand hat.

Beschreibt man aus dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstand als Halbmesser einen Kreis, so genügen alle Punkte dieser Kreislinie den Bedingungen der Aufgabe.

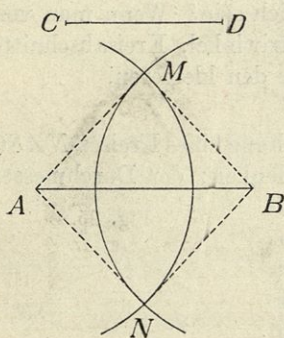
Eine Aufgabe, welche unendlich viele verschiedene Auflösungen zuläßt, heißt unbestimmt im Gegensatze zu einer bestimmten, welche entweder nur eine einzige Auflösung oder eine beschränkte, genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen besitzt; nach der Anzahl der Auflösungen ist sie ein-, zwei- oder mehrdeutig. Die vorliegende Aufgabe ist demnach unbestimmt.

Eine Aufgabe heißt überbestimmt, wenn mehr Bedingungen gegeben sind als zur Auflösung erforderlich sind.

Z. B. Von einem gegebenen Punkte A mit einem gegebenen Radius r einen Kreis zu beschreiben, der durch einen bestimmten Punkt B geht; die Aufgabe ist nur möglich, wenn $r = AB$ ist. Sonst ist sie unmöglich. Im allgemeinen sind überbestimmte Aufgaben unlösbar, weil die gegebenen Stücke die zur Auflösung erforderlichen Bedingungen meist nicht erfüllen.

2. Einen Punkt in der Ebene zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten einen gegebenen Abstand hat.

Fig. 26.



Es seien (Fig. 26) A und B die gegebenen Punkte, CD der gegebene Abstand. Die gesuchten Punkte müssen in den Durchschnittspunkten zweier Kreise liegen, welche von den Mittelpunkten A und B mit CD als Radius beschrieben werden. Da im allgemeinen die beiden Kreislinien einander in zwei Punkten M und N schneiden, so gibt es zwei verschiedene Punkte, welche der Aufgabe genügen.

Bei welcher Größe von CD erhält man a) einen, b) keinen Punkt? (Zeichnungen.)

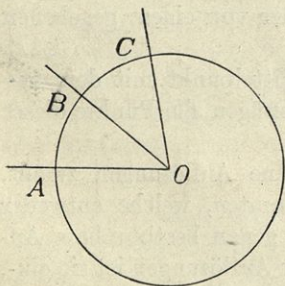
Die Aufgabe kann also eindeutig oder zweideutig bestimmt, aber auch unmöglich sein.

3. Einen Punkt in der Ebene zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten verschiedene gegebene Abstände hat. Die Auflösung ist derjenigen der Aufgabe 2 analog.

§ 25. Messen des Winkels.

1. Zur Messung des Winkels nimmt man einen bestimmten Winkel als *Einheit* an und untersucht, wie oft er in dem zu messenden Winkel enthalten ist. Die Einheit des Winkelmaßes ist der 90. Teil eines rechten Winkels. Dieser wird ein Winkelgrad genannt. Der 60. Teil eines Winkelgrades heißt eine Winkelminute, der 60. Teil einer Winkelminute eine Winkelsekunde.

Fig. 27.



Die Grade, Minuten und Sekunden werden wie bei den Bogen durch $^{\circ}$, $'$, $''$ bezeichnet.

Wie groß ist a) ein gestreckter, b) ein voller Winkel?

Zwischen welchen Grenzen liegt ein hohler, ein spitzer, ein stumpfer, ein erhabener Winkel?

Bei der Drehung des Halbstrahles (Fig. 27) OA um O bis OB entsteht der Winkel AOB und zugleich beschreibt der Punkt A des Halbstrahles den Bogen AB ; setzt man die Drehung so weit fort, daß Winkel $BOC =$ Winkel

AOB wird¹⁾, so ist auch, wie man sich, wenn die Zeichnung auf durchscheinendem Papier gemacht wird, durch Zusammenfallen desselben um OB überzeugen kann, Bogen $AB =$ Bogen BC . Zu gleichen Winkeln bei O (Zentriwinkeln) gehören daher auch gleiche Bogen; zu jedem Winkelgrade, jeder Winkelminute und Winkelsekunde je ein Bogengrad, eine Bogenminute, eine Bogensekunde.

Wegen dieser Übereinstimmung ist es möglich, einen Winkel durch den Bogen zu messen, zu welchem er als Zentriwinkel gehört, obwohl Bogen und Winkel ungleichartig sind.

Zum Messen und Auftragen der Winkel bedient man sich des *Winkelmessers* oder *Transporteurs* (Fig. 28). Dieser ist ein in 180 Grade eingeteilter Halbkreis aus Papier, Holz oder Metall, bei welchem die Kante $0 \dots 180$ den Durchmesser und der Punkt M den Mittelpunkt vorstellt.

Wie groß sind die beiden Winkel, die in Fig. 28 durch

MA und den Durchmesser des Transporteurs $0 \dots 180$ gebildet werden?

Wieviel Winkel bilden in Fig. 29 die beiden Halbstrahlen OA und OB ? Bestimme die Größe beider!

Merke dir: Unter dem Winkel zweier Halbstrahlen versteht man den kleineren, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist.

Fig. 28.

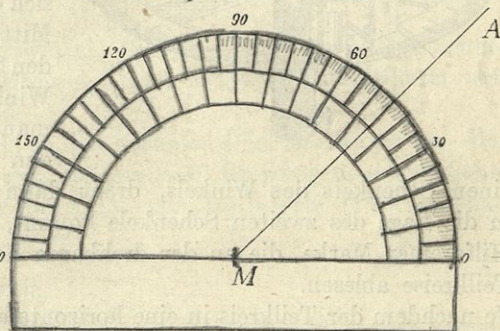
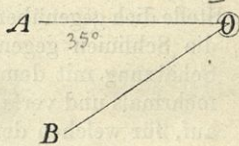


Fig. 29.



Aufgaben:

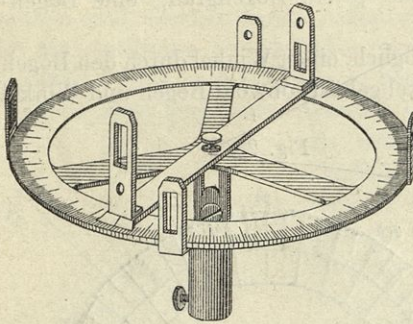
1. Wieviel Grade hat der Winkel, den der Stundenzeiger einer Uhr in 1, 3, 5, 6, 8, 10 Stunden beschreibt?
2. Wie groß ist der Winkel, den der Minutenzeiger in 1, 4, 15, 34, 48 Zeitminuten beschreibt?
3. Wie groß ist der Winkel, welchen die beiden Zeiger einer Uhr um 1, 2, 4, 7, 9, 11 Uhr bilden?
4. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße ab und miß sie dann mit dem Transporteur!
5. Zeichne zuerst nach dem Augenmaße aus freier Hand und dann mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von 90° , 45° , 60° , 30° , 80° , ~~50°~~ , 120° , 175° , 200° , ~~270°~~ , ~~285°~~ , 300° !

¹⁾ Die gleichen Winkel AOB und BOC in Fig. 27 kann man dadurch erhalten, daß man einen Winkel aus Papier ausschneidet und mit Hilfe desselben die Winkel AOB und BOC so zeichnet, wie es die Figur verlangt.

§ 26. Messung der Winkel im Freien.

Zur Messung der Winkel im Freien kann der in Fig. 30 abgebildete Apparat¹⁾ verwendet werden. Er besteht aus einem geteilten Kreise, der mit der Achse

Fig. 30.



des Apparates durch drei Speichen verbunden ist. Um den Mittelpunkt des Kreises ist eine Schiene drehbar, welche zwei Visiere trägt, von denen jedes mit einem Schloch und mit einem rechteckigen Ausschnitte versehen ist, in welchem sich ein feiner Faden befindet. Der Mittelpunkt des Teilkreises muß in den Scheitelpunkt des zu messenden Winkels gebracht werden. Sieht man dann durch das Schloch gegen den Faden in der Richtung des

einen Schenkels des Winkels, dreht dann die Schiene, bis die Sehlinie in die Lage des zweiten Schenkels kommt, so kann man den Winkel mit Hilfe einer Marke, die an der drehbaren Schiene angebracht ist, an dem Teilkreise ablesen.

Je nachdem der Teilkreis in eine horizontale oder vertikale Ebene gebracht wird, kann man Horizontal- oder Vertikalwinkel mit dem Apparate messen.

Aufgaben:

1. Stelle dich gegenüber einem Hause auf, schätze den Horizontalwinkel, welchen die Sehlinien gegen die Kanten des Hauses einschließen und prüfe die Schätzung mit dem Winkelapparat. Ändere den Abstand von den Hause mehrmals und verfähre jedesmal in gleicher Weise. Suche einen Standpunkt auf, für welchen der genannte Winkel 90° beträgt!
2. Verfahre in ähnlicher Weise mit dem Vertikalwinkel, den die Visierlinien nach der untersten und obersten horizontalen Kante eines Hauses miteinander bilden!
3. Schätze in verschiedenen Abständen die Größe des Winkels, den die Sehlinien nach den Rändern einer Bogenlampe miteinander bilden. (Als Anhaltspunkt diene die Angabe, daß uns der Mond und die Sonne im Mittel unter einem Winkel von $30'$ erscheinen.)

§ 27. Komplementäre und supplementäre Winkel.

Beträgt die Summe zweier Winkel 90° , so heißen sie komplementäre Winkel; jeder der beiden Winkel wird das Komplement des andern genannt.

Beträgt die Summe zweier Winkel 180° , so heißen sie supplementäre Winkel; jeder wird das Supplement des andern genannt.

Aufgaben:

1. Wie groß ist das Komplement eines Winkels von a) 35° , b) $48^\circ 12'$, c) $75^\circ 8' 42''$?
2. Wie groß ist das Supplement eines Winkels von a) 55° , b) $96^\circ 20'$, c) $137^\circ 21' 28''$?

¹⁾ Von Ohmann. D.-R.-P.

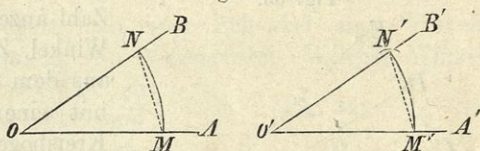
3. Wenn zwei Winkel gleich sind, welche Eigenschaft haben a) die komplementären, b) die supplementären Winkel?

Übertragen eines Winkels.

§ 28.

Macht man die Fig. 27 mit den Sehnen AB und BC auf durchscheinendem Papier und faltet man es nach der Linie BO zusammen, so sieht man, daß die Sehnen AB und BC einander decken. Mithin gehören in demselben Kreise zu gleichen Zentriwinkeln und gleichen Bogen auch gleiche Sehnen. Umgekehrt gehören auch zu gleichen Sehnen in demselben Kreise gleiche Zentriwinkel. Dasselbe gilt auch von den Sehnen und Zentriwinkeln in gleichen Kreisen. Diesen letzteren Satz benutzt man zum Übertragen eines Winkels.

Fig. 31.



Es sei der Winkel AOB (Fig. 31) an den Schenkel $O'A'$ zu übertragen. Man beschreibe aus O und O' mit dem Radius OM Kreisbogen, mache Sehne $M'N' =$ Sehne MN und ziehe durch N' den Halbstrahl $O'B'$. Weshalb ist Winkel $A'O'B' =$ Winkel AOB ?

Zeichnendes Rechnen mit Winkeln.

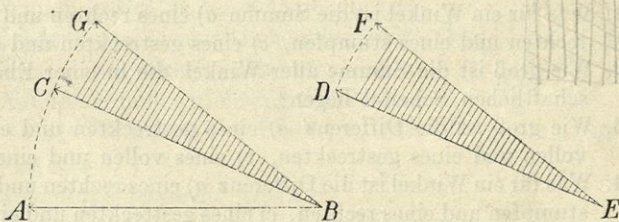
§ 29.

1. *Addition der Winkel.* Zwei Winkel ABC und DEF (Fig. 32) werden addiert, indem man sie so *nebeneinander* legt, daß sie den Scheitel und ein Paar

Schenkel gemeinschaftlich haben und das andere Paar Schenkel auf die entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen fällt.

In Fig. 32 ist $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF$.

Fig. 32.



Die Addition ist auch nach dem Augenmaße auszuführen und dann mit dem Zirkel zu prüfen.

2. *Subtraktion der Winkel.* Zwei Winkel ABG und DEF (Fig. 32) werden subtrahiert, indem man den kleineren so *auf* den größeren legt, daß sie den Scheitel und ein Paar Schenkel gemeinschaftlich haben und das andere Paar Schenkel auf dieselbe Seite des gemeinschaftlichen fällt. In Figur 32 ist $\sphericalangle ABC = ?$

Ebenfalls auch nach dem Augenmaße auszuführen.

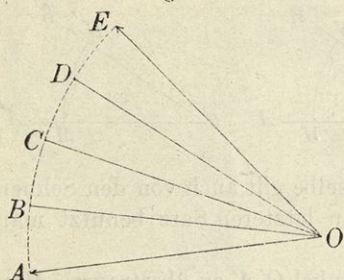
3. *Multiplikation eines Winkels mit einer ganzen Zahl.* (Vervielfachen eines Winkels.) Ein Winkel AOB (Fig. 33) wird mit einer ganzen Zahl multipliziert

(vervielfacht), indem man ihn in der oben angegebenen Weise so oft als Addend setzt, als die ganze Zahl anzeigt. In Fig. 33 ist $\sphericalangle AOE = \sphericalangle AOB \times 4$

Auch nach dem Augenmaße vorzunehmen.

4. a) *Division eines Winkels durch eine ganze Zahl.* (Teilung eines Winkels.) Einen Winkel durch eine ganze Zahl dividieren heißt, ihn in so viele

Fig. 33.



gleiche Summanden zerlegen, als die ganze Zahl anzeigt. Der Quotient ist also ein Winkel. Zu diesem Zwecke beschreibe man aus dem Scheitel des zu teilenden Winkels mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher beide Schenkel durchschneidet und teile den zwischen den Schenkeln liegenden Teil des Kreisbogens zunächst nach dem Augenmaße in so viele gleiche Teile, als die ganze Zahl anzeigt. (Prüfen mit dem Zirkel!) Verbindet man

jeden Teilungspunkt mit dem Scheitel des Winkels, so erscheint dieser als Summe so vieler gleicher Winkel, als die ganze Zahl anzeigt. In Fig. 33

$$\text{ist } \frac{\sphericalangle AOE}{4} = ?$$

b) *Division eines Winkels durch einen Winkel.* (Messung.) Dadurch wird untersucht, wie oft ein Winkel in einem andern enthalten ist. Der Quotient ist also eine Zahl. Z. B. (Fig. 33) $\sphericalangle AOE : \sphericalangle AOB = ?$

Aufgaben:

1. Was für ein Winkel ist die Summe a) eines rechten und eines spitzen, b) eines rechten und eines stumpfen, c) eines gestreckten und eines hohlen Winkels?
2. Wie groß ist die Summe aller Winkel, die in einer Ebene um einen gemeinschaftlichen Scheitel liegen?
3. Wie groß ist die Differenz a) eines gestreckten und eines rechten, b) eines vollen und eines gestreckten, c) eines vollen und eines rechten Winkels?
4. Was für ein Winkel ist die Differenz a) eines rechten und eines spitzen, b) eines stumpfen und eines rechten, c) eines gestreckten und eines stumpfen, d) eines vollen und eines rechten, e) eines vollen und eines stumpfen, f) eines vollen und eines spitzen Winkels?
5. Was für ein Winkel ist das Doppelte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten Winkels?
6. Was für ein Winkel ist die Hälfte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten, d) eines erhabenen, e) eines vollen Winkels?
7. Die Summe folgender Winkel zu suchen:
 - a) 52° , 39° , 124° und 76° ;
 - b) $28^\circ 24' 30''$, $33^\circ 45' 56''$, $74^\circ 28' 53''$, $22^\circ 16' 37''$.
8. Die Differenz folgender Winkel zu suchen:
 - a) 128° , 73° ;
 - b) $216^\circ 34' 28''$, $78^\circ 24' 17''$;

c) $73^{\circ} 16' 47''$, $58^{\circ} 23' 56''$;

d) 23° , $14^{\circ} 25' 38''$.

9. Den Winkel $43^{\circ} 38' 35''$ a) mit 3 zu multiplizieren, b) in 5 gleiche Teile zu teilen.

10. Untersuche, wie oft ein Winkel von a) 8° , b) $15^{\circ} 28'$, c) $12^{\circ} 35' 49''$ bezüglich in einem Winkel von a) 96° , b) $108^{\circ} 16'$, c) $100^{\circ} 46' 32''$ enthalten ist!

Neben- und Scheitelwinkel.

§ 30.

a) *Nebenwinkel* (Fig. 34). Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht sein *Nebenwinkel*. Welcher Winkel ist zu AOB der Nebenwinkel? Welcher zu BOC ? Welcher zu AOD ? Nebenwinkel sind also zwei Winkel, welche einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren zwei andere Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen in einer Geraden liegen.

Suche in Fig. 34 einen Winkel, welcher der Summe zweier Nebenwinkel gleich ist und prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten oder 180° .

Zwei Nebenwinkel sind daher so voneinander abhängig, daß durch die Größe des einen jene des andern bestimmt ist. Wenn der erste ein spitzer, rechter, stumpfer ist, was gilt von dem zweiten?

Kann zu jedem Winkel ein Nebenwinkel konstruiert werden?

b) *Scheitelwinkel* (Fig. 35). Verlängert man beide Schenkel des Winkels BOD über den Scheitel hinaus, so entsteht sein *Scheitelwinkel*.

Nenne zu jedem der Winkel in Fig. 35 den Scheitelwinkel!

Wieviel Nebenwinkel hat a und wieviel Scheitelwinkel?

Scheitelwinkel entstehen durch dieselbe Drehung; denn

dreht man (Fig. 35) AB um O in der Richtung des Pfeiles bis in die Lage CD , so beschreibt AO den Winkel a , BO den Winkel c ; daher ist $a = c$.

Zwei Scheitelwinkel sind daher einander gleich.

Kann zu jedem Winkel ein Scheitelwinkel konstruiert werden? Zu einem Winkel kann man wieviel Nebenwinkel und wieviel Scheitelwinkel konstruieren?

Fig. 34.

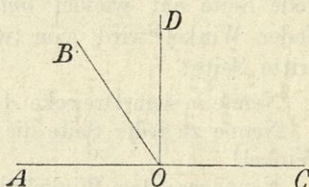
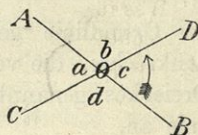


Fig. 35.



Aufgaben:

1. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von a) 65° , b) $28^{\circ} 40'$ c) $115^{\circ} 48'$, d) $73^{\circ} 19' 52''$?

2. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine doppelt so groß als der andere. Wie groß ist jeder?

3. Wenn in Fig. 35 der Winkel a $69^{\circ} 17' 26''$ beträgt, wie groß ist jeder der Winkel b , c , d ?

4. Wie groß ist der Winkel, der von den Halbierungslinien zweier Nebenwinkel gebildet wird?

5. Die Winkel der Fig. 35 sind der Größe nach voneinander abhängig. Wieviel müssen gegeben sein, damit die Größe der übrigen schon bestimmt ist? Lassen sich, wenn $a = 65^\circ$ ist, die Winkel b , c und d berechnen?

Vierter Abschnitt.

Das Dreieck.

§ 31. a) Erklärungen.

1. Eine von drei Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein *Dreieck*. Die drei Strecken heißen *Seiten* des Dreieckes.

Jedes Dreieck ABC (Fig. 36) hat wieviel *Winkel* und *Eckpunkte*?

Jede Seite hat wieviel *anliegende* und wieviel *gegenüberliegende* Winkel? Jeder Winkel wird von wieviel Seiten *eingeschlossen* und wie liegt die dritte Seite?

Nenne in dem Dreiecke ABC (Fig. 36) alle drei Seiten und alle drei Winkel!

Nenne zu jeder Seite die anliegenden Winkel und den gegenüberliegenden Winkel!

Nenne zu jedem Winkel die Seiten, von denen er eingeschlossen wird, und die Seite, welche ihm gegenüberliegt!

Fig. 36.

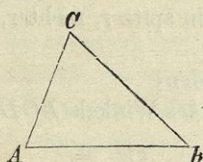
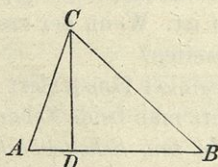


Fig. 37.



2. Diejenige Seite, über welcher man sich ein Dreieck errichtet denkt, heißt die *Grundlinie*. Da man sich über jeder Seite ein Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher

der Grundlinie gegenüberliegt, wird die *Spitze* oder der *Scheitel* und die Senkrechte, die vom Scheitel auf die Grundlinie gefällt wird, die *Höhe* des Dreieckes genannt. Sie gibt den Abstand des Scheitels von der Grundlinie an.

Wieviel Höhen hat jedes Dreieck?

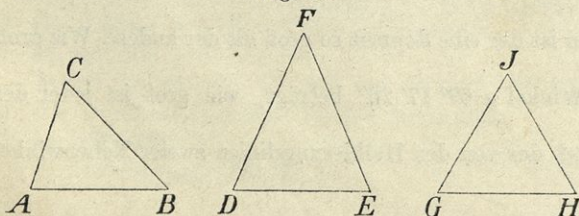
Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 37) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und, wenn $CD \perp AB$ ist, CD die Höhe.

Die Summe der Seiten eines Dreieckes heißt der Umfang desselben.

Zeichne ein Dreieck, schätze den Umfang und prüfe das Resultat!

b) Einteilung der Dreiecke nach den Seiten.

Fig. 38.



In Beziehung auf die Länge der Seiten unterscheidet man *ungleichseitige*, *gleichschenklige* und *gleichseitige* Dreiecke (Fig. 38).

Ein Dreieck heißt un-

gleichseitig, wenn keine Seite einer andern gleich ist, wie ABC ; *gleichschenkelig*, wenn zwei Seiten einander gleich sind, wie DEF ; und *gleichseitig*, wenn alle drei Seiten gleich sind, wie GHJ .

Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man die gleichen Seiten die *Schenkel*, die dritte Seite die *Grundlinie* und den ihr gegenüberliegenden Eckpunkt den *Scheitel* des Dreieckes.

c) Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln.

Nach der Größe der Winkel unterscheidet man *spitzwinklige*, *rechtwinklige* und *stumpfwinklige* Dreiecke. (Fig. 39).

Ein Dreieck heißt *spitzwinklig*, wenn es drei spitze Winkel hat, wie

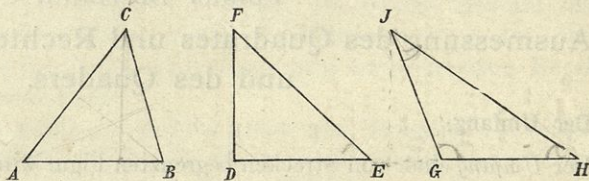
ABC ; *rechtwinklig*, wenn es einen rechten Winkel hat, wie FDE ;

und *stumpfwinklig*, wenn es einen stumpfen Winkel hat, wie JGH .

Im rechtwinkligen Dreiecke nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, *Hypotenuse*, die beiden anderen Seiten *Katheten*.

Was für Dreiecke erhält man, wenn man a) in einem Quadrate, b) in einem Rechtecke eine Diagonale zieht?

Fig. 39.



Die Winkelsumme eines Dreieckes.

§ 32.

Die Summe der Winkel eines Dreieckes beträgt 180° .

Der Schüler überzeuge sich von der Richtigkeit dieses Satzes dadurch, daß er Dreiecke von den in §31 genannten Arten zeichnet und ihre Winkel mit dem Transporteur möglichst genau mißt. Oder auch in folgender Weise: Der Schüler zeichne diese Dreiecke auf Papier, schneide sie aus und lege alle drei Winkel eines jeden ähnlich wie in Fig. 32 nebeneinander; welcher Winkel ergibt sich in jedem Falle?

Aufgaben:

1. Wieviel spitze, rechte, stumpfe und erhabene Winkel können in einem Dreiecke vorkommen? Welche Eigenschaft müssen die übrigen Winkel haben?
2. In einem Dreiecke sind zwei Winkel a) $43^\circ 10'$, $102^\circ 27'$; b) $25^\circ 46' 21''$, $74^\circ 48' 49''$; wie groß ist der dritte Winkel?
3. Kann es ein Dreieck mit den Winkeln 70° , 80° , 50° geben? Wenn die beiden ersten Winkel 70° und 80° sind, wie groß muß der dritte sein? Es ist zu erkennen, daß der dritte Winkel eines Dreieckes von den beiden anderen Winkeln so abhängt, daß er durch ihre Größe schon bestimmt ist und nicht mehr willkürlich gewählt werden kann. Wenn jeder der beiden ersten Winkel eines Dreieckes um 10° zunimmt oder abnimmt, wie ändert sich der dritte Winkel? Wenn der erste Winkel um 10° , der zweite um 15° zunimmt oder abnimmt, wie ändert sich der dritte Winkel?

4. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen und die Winkel desselben möglichst genau mit dem Transporteur zu messen. Welcher Satz ergibt sich daraus?
5. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen und die Winkel an der Grundlinie mit dem Transporteur zu messen. Welcher Satz folgt aus der Messung?
6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Hypotenuse doppelt so groß ist als eine der beiden Katheten. Die Winkel mit dem Transporteur zu bestimmen. Lehrsatz?
7. In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein an der Hypotenuse liegender Winkel 73° . Wie groß ist der zweite Winkel an dieser Seite?

Fünfter Abschnitt.

Ausmessung des Quadrates und Rechteckes, des Würfels und des Quaders.

§ 33. Der Umfang.

Der *Umfang* einer von Strecken begrenzten Figur wird durch die Summierung der Längen aller Begrenzungslinien gefunden.

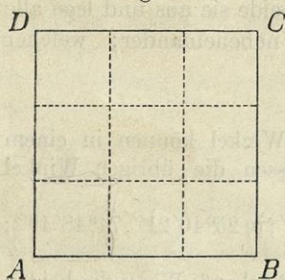
Wenn eine Seite eines Quadrates a) 3 m, b) 4 dm 7 cm 9 mm ist, wie groß ist der Umfang desselben?

Wenn zwei anstoßende Seiten eines Rechteckes a) 4 m und 6 m, b) 3 m 5 dm 8 cm und 4 m 6 dm 7 cm sind, wie groß ist sein Umfang?

§ 34. Fläche des Quadrates und Rechteckes.

Um den *Flächeninhalt* einer Figur zu bestimmen, muß man irgendeine bestimmte Fläche als *Einheit* annehmen und untersuchen, wie oft sie in der zu messenden Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die *Maßzahl* der Fläche.

Fig. 40.



Als *Einheit des Flächenmaßes* nimmt man ein *Quadrat* an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein *Quadratmeter* (m^2), ein *Quadratdezimeter* (dm^2) . . . , je nach dem die Seite einem Meter, Dezimeter, . . . gleich ist.

Wenn eine Fläche $12 m^2$ mißt, wie heißt ihre Maßzahl?

a) *Fläche des Quadrates*. Beträgt eine Seite des Quadrates ABCD (Fig. 40) 3 cm, so kann man jede Seite in drei gleiche Teile teilen, deren jeder 1 cm ist. In welche Figuren zerfällt das ganze Quadrat durch die Verbindung der gegenüberliegenden Teilungspunkte? Wieviele sind in einer Reihe, wieviel Reihen sind vorhanden? Leite den Satz ab:

Die *Maßzahl* für den *Flächeninhalt* eines Quadrates wird gefunden, wenn man die *Maßzahl* einer Seite mit sich selbst multipliziert.

Ein Quadrat, dessen Seite 10 dm beträgt, hat $10 \text{ dm}^2 \times 10 = 100 \text{ dm}^2$ Inhalt. Ein solches Quadrat ist nun 1 m^2 , also ist

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2.$$

Ebenso folgt:

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2.$$

$$1 \text{ km}^2 = 1000000 \text{ m}^2.$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2.$$

$$1 \mu\text{m}^2 = 100 \text{ km}^2.$$

Beim *Bodenflächenmaße* heißt eine Fläche von 100 m^2 ein *Ar* (a), eine Fläche von 100 Ar ein *Hektar* (ha).

Ist eine Seite eines Quadrates 3.4 m , so beträgt sie 34 dm ; die Fläche des Quadrates enthält also 1156 dm^2 oder 11.56 m^2 . Die gleiche Maßzahl für Quadratmeter als Einheit ergibt auch die Multiplikation 3.4×3.4 . Die oben für die Berechnung der Fläche eines Quadrates ausgesprochene Regel gilt daher auch in welchem Falle?

Bei allen Berechnungen wähle der Schüler selbst öfter Beispiele aus seiner Umgebung, schätze zunächst die für die Berechnung erforderlichen Größen und mache einen Überschlag über das zu erwartende Resultat, wenn notwendig mit Abrundung der Maßzahlen. Dieses ist sodann durch genaue Messung und Berechnung zu prüfen.

Aufgaben:

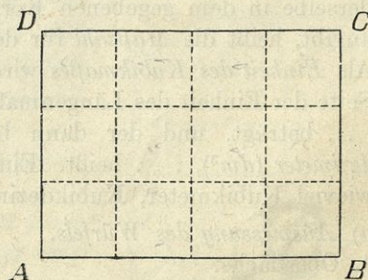
1. Die Seite eines Quadrates ist a) 21 m , b) $5 \text{ m } 4 \text{ dm}$, c) 359 mm , d) 0.715 m . Wie groß ist 1. der Umfang, 2. der Flächeninhalt?
2. Der Umfang eines Quadrates ist $3 \text{ m } 2 \text{ dm}$; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wieviel kostet ein quadratischer Bauplatz von 36 m Seitenlänge, wenn man das Quadratmeter mit $11 \text{ K } 20 \text{ h}$ bezahlt?
4. Ein quadratisches Zimmer mit der Seite $5 \text{ m } 6 \text{ dm}$ soll mit einem Parkettboden belegt werden. Wie groß sind die Kosten, wenn 1 m^2 mit 7 K berechnet wird?
5. Wie ändert sich a) der Umfang, b) die Fläche eines Quadrates, wenn man a) jede Seite 2-, 3-, 4mal so groß, b) 2-, 3-, 4mal so klein macht? (Bestätigung durch Zeichnungen.)
6. Wenn die Vergoldung einer quadratischen Platte 4 K kostet, was kostet die einer Platte a) von doppelter, b) von halber Seitenlänge?

b) *Fläche des Rechteckes*. Die Seiten des Rechteckes in Fig. 41 betragen 4 cm und 3 cm . Zähle die Anzahl der Flächeneinheiten nach Reihen und prüfe den Satz:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes wird gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Kürzer pflegt man diesen Satz auch so auszusprechen:

Fig. 41.



Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Könnte man auch in ähnlicher Weise den Satz für die Flächenberechnung eines Quadrates aussprechen? Weshalb sind aber die beiden letzten Sätze nicht strenge Aufgaben?

Aufgaben:

- Bestimme 1. den Umfang, 2. den Flächeninhalt folgender Rechtecke:
 a) Grundlinie 9.2 m ; Höhe 5.8 m ;
 b) „ $12\text{ m } 3\text{ dm } 3\text{ cm}$, „ 9.2 cm .
- Eine Tischplatte ist 1.4 m lang und 1.2 m breit. Wie groß ist ihre Fläche?
- Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, $34\text{ m } 4\text{ dm}$ lang und $19\text{ m } 2\text{ dm}$ breit, und bezahlt das Quadratmeter mit 10 K . Wieviel kostet der Bauplatz?
- Wieviel Ar hat ein rechteckiger Garten von 38 m Länge und 32 m Breite?
- Ein Acker ist 116 m lang und $18\text{ m } 5\text{ dm}$ breit. Wieviel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf $1\text{ a } 2\frac{1}{2}\text{ l}$ Weizen rechnet?
- Ein Hof von 18 m Länge und 12 m Breite soll mit Steinplatten belegt werden, welche 3 dm lang und ebenso breit sind. a) Wieviel Platten sind erforderlich? b) Wie hoch kommt die Pflasterung, das Quadratmeter zu $16\frac{2}{5}\text{ K}$ gerechnet?
- Wie ändert sich die Fläche eines Rechteckes, a) wenn bei ungeänderter Höhe die Grundlinie verdoppelt wird, b) bei ungeänderter Grundlinie die Höhe verdoppelt wird, c) Grundlinie und Höhe verdoppelt werden? Das Resultat ist durch Zeichnungen zu bestätigen.

§ 35. Ausmessung des Würfels und des Quaders.

Bei der Ausmessung der Körper hat man die *Oberfläche* und den *Kubikinhalt* derselben in Betracht zu ziehen.

Unter der *Oberfläche* eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen. Um daher die Oberfläche eines Körpers zu erhalten, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzfläche zu bestimmen und alle gefundenen Flächen zu addieren. Die Summe der Seitenflächen heißt insbesondere die *Seitenoberfläche* des Körpers.

Der Raum, welchen die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt sein *Kubikinhalt* oder *Volumen*. (Rauminhalt.)

Um den Kubikinhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgendeinen bekannten Körper als *Einheit* des Kubikmaßes an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die *Maßzahl* für den Kubikinhalt des Körpers.

Als *Einheit des Kubikmaßes* wird ein *Würfel* (Kubus) angenommen, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, also ein Meter, ein Dezimeter . . . beträgt, und der dann beziehungsweise *Kubikmeter* (m^3), *Kubikdezimeter* (dm^3), . . . heißt. Einen Körper messen heißt also untersuchen, wieviel Kubikmeter, Kubikdezimeter usw. in demselben enthalten sind.

a) Ausmessung des Würfels.

1. Oberfläche.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Oberfläche eines Würfels ist gleich dem sechsfachen Produkte aus der Maßzahl einer Seite mit sich selbst.

2. Volumen.

Aus Kubikzentimetern soll man einen einzigen Würfel bilden, dessen Seite 3 cm beträgt. Wieviel Kubikzentimeter kommen in die unterste Schichte? Wieviel Schichten müssen gemacht werden? Wieviel Kubikzentimeter enthält also der ganze Würfel? (Modell.)

Der Schüler prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl des Volumens eines Würfels ist gleich dem Produkte der Maßzahlen der drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

Ein Würfel, dessen Kante 10 dm beträgt, hat

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Kubikmeter; also ist

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Ebenso folgt:

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3.$$

1 Kubikdezimeter heißt als Hohlmaß 1 Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

b) Ausmessung des Quaders.

1. Oberfläche.

Die Oberfläche setzt sich aus der doppelten Grundfläche und dem Mantel zusammen.

Mit Hilfe des Netzes des Mantels eines Quaders prüfe der Schüler die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl des Inhaltes des Mantels eines Quaders ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl des Umfanges seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Die Länge, Breite und Höhe a) einer Schachtel, b) eines Zimmers zu messen und die gesamte Oberfläche zu berechnen.

2. Das Volumen.

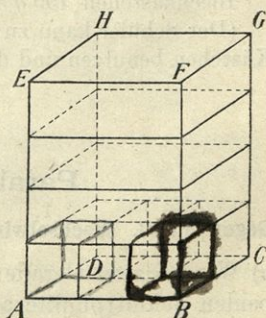
Bilde aus Würfeln, von denen jeder 1 cm³ mißt, einen Quader von 3 cm Länge, 2 cm Breite und 4 cm Höhe. Wieviel Kubikzentimeter enthält die unterste Schichte? Wieviel Schichten kommen übereinander? Wieviel Kubikzentimeter enthält mithin der ganze Quader? (Modell.)

Prüfe daran und auch an Fig. 42 die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl des Volumens eines Quaders ist gleich dem Produkte der Maßzahlen der drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

Oder:

Fig. 42.



Die Maßzahl des Volumens eines Quaders ist gleich der Maßzahl der Grundfläche multipliziert mit der Maßzahl der Höhe.

Kürzer, aber weniger richtig, sagt man auch:

Das Volumen eines Quaders ist gleich dem Produkte dreier an einer Ecke zusammenstoßenden Seiten. Oder: Das Volumen eines Quaders ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

§ 36. Aufgaben:

a) Würfel.

1. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Seite a) 12 dm, b) 2 m 3 dm, c) 0·575 m ist?
2. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0·38 m Kantenlänge angefertigt werden. Wieviel Quadratmeter Kupferblech braucht man?
3. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 dm innere Weite. Wieviel Liter faßt es?
4. Wie schwer ist ein Würfel mit der Seite 3 dm 7 cm, wenn 1 dm³ des Materiales 0·86 kg wiegt?
5. Wie ändert sich a) die Oberfläche, b) das Volumen eines Würfels, wenn die Seite a) verdoppelt, b) halb so groß gemacht wird?
6. Ein Würfel von 2 dm Seitenlänge wiegt 16 kg. Wieviel wiegt ein anderer Würfel aus demselben Material von 6 dm Seitenlänge?

b) Quader.

1. Die Kanten eines Quaders sind a) 12 cm, 16 cm und 48 cm, b) 1·04 m, 1·98 m und 2·64 m. Zu berechnen: 1. die Oberfläche, 2. der Kubikinhalt.
2. Ein viereckiges Gefäß von Blech ist 0·6 m lang, 0·5 m breit und 0·4 m hoch. Wieviel Quadratmeter Blech ist daran, wenn das Gefäß oben unbedeckt ist?
3. Wie hoch kommt eine Kiste zu stehen, die 2 m lang, 1·2 m breit und 1·3 m hoch ist, wenn 1 m² mit 1 K 60 h bezahlt wird?
4. Wie groß ist der Kubikinhalt eines Getreidekastens, bei welchem die Länge 2 m, die Breite 1 m 3 dm und die Höhe 1 m 4 dm ist? Wieviel Hektoliter Getreide kann derselbe aufnehmen?
5. Eine Mauer ist 21 m lang, 8 dm dick und 8 m hoch. Welchen Druck übt sie auf die Unterlage aus, wenn 1 m³ Mauerwerk 1634 kg wiegt? Wie groß ist der Druck auf 1 m²?
6. 1 cm³ reines Wasser wiegt 1 g. Wieviel wiegt ein mit Wasser gefülltes Blechkästchen von 1·5 dm Länge, 1·2 dm Breite und 8 cm Höhe, wenn das leere Blechkästchen 155 g wiegt?

(Der Schüler kann zu dieser Aufgabe auch ein ihm zur Verfügung stehendes Kästchen benutzen und das Rechnungsergebnis durch den Versuch prüfen.)

Sechster Abschnitt.

Parallele und normale Gerade.

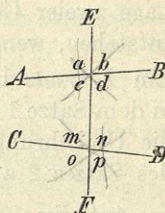
§ 37. Gegenwinkel, Wechselwinkel, Anwinkel.

a) Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Schnittpunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen *innere*, die anderen vier *äußere*

Winkel. Nenne in Fig. 43 die beiden geschnittenen und die schneidende Gerade (Transversale); ebenso die äußeren und die inneren Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen *Gegenwinkel*. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden *Wechselwinkel* genannt. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen *Anwinkel*.

Fig. 43.



Gegenwinkel:

a und m,
b „ n,
c „ o,
d „ p,

Wechselwinkel:

a und p,
b „ o,
c „ n,
d „ m,

Anwinkel:

a und o,
b „ p,
c „ m,
d „ n.

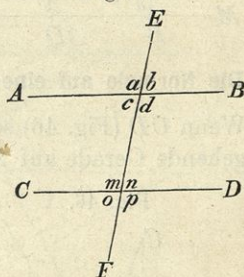
Parallele Gerade.

§ 38.

Es sei (Fig. 44) $AB \parallel CD$.

Bei Parallelverschiebung der Geraden AB bildet sie, da sich dabei ihre Neigung gegen EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel; es fallen also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei *Gegenwinkel* aufeinander, je zwei *Wechselwinkel* gehen in zwei *Scheitelwinkel* über und je zwei *Anwinkel* werden *Nebenwinkel*; daraus folgt:

Fig. 44.



1. Wenn zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so sind

- a) je zwei *Gegenwinkel* einander gleich;
- b) je zwei *Wechselwinkel* einander gleich;
- c) je zwei *Anwinkel* *supplementär*.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit der Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1. \quad a &= m \\ b &= n \\ c &= o \\ d &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad a &= p \\ b &= o \\ c &= n \\ d &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad a + o &= 180^\circ \\ b + p &= 180^\circ \\ c + m &= 180^\circ \\ d + n &= 180^\circ \end{aligned}$$

2. Umgekehrt ist auch der Satz richtig: Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß entweder zwei *Gegenwinkel* oder zwei *Wechselwinkel* gleich oder zwei *Anwinkel* *supplementär* sind, so müssen die geschnittenen Geraden *parallel* sein.

Daraus ergibt sich die große Wichtigkeit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel. Um mit Gewißheit behaupten zu können, daß zwei Gerade *parallel* sind, sollte man zeigen, daß sie, fort und fort verlängert, doch nie zusammentreffen.

Da aber eine solche Verlängerung nicht ausführbar ist, so wird die parallele Lage zweier Geraden ganz einfach durch die Winkel entschieden, welche entstehen, wenn diese Geraden von einer dritten geschnitten werden.

Ein *Lehrsatz* besteht aus Voraussetzung und Behauptung. (Suche beide in dem Satze 1 auf!) Vertauscht man dieselben miteinander, so erhält man die Umkehrung des Lehrsatzes. (Suche Voraussetzung und Behauptung des Satzes 2 auf!)

Aufgabe:

Es sei in Fig. 44 der Winkel $a = 103^{\circ} 47' 25''$. Wie groß ist jeder der Winkel b, c, d, m, n, o, p ?

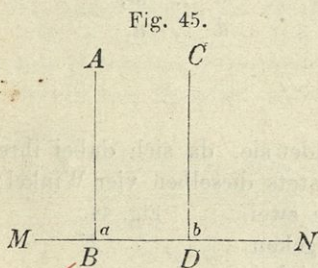
Es ist auch hier die Abhängigkeit der acht Winkel bei paralleler Lage der geschnittenen Geraden voneinander zu ersehen. Wieviel von ihnen sind willkürlich?

Es sei Fig. 45 $a = R$ und $b = R$. Die Geraden AB und CD bilden daher mit der sie Schneidenden MN gleiche Gegenwinkel, folglich sind sie parallel.

3. *Stehen zwei Gerade auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.*

Es sei $AB \parallel CD$ und $a = R$. Daraus folgt, daß auch $b = R$ sein muß.

4. *Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht.*



§ 39. Die Normale auf eine Gerade.

Wenn CD (Fig. 46) senkrecht auf AB steht, so kann keine andere durch C gehende Gerade auf AB senkrecht stehen, Wäre z. B. $CE \perp AB$, so wären m und n als rechte Winkel supplementär: da sie aber Anwinkel sind, so müßten CD und CE parallel sein, was nicht möglich ist, da sie den Punkt C gemeinschaftlich haben.

Von einem Punkte aus läßt sich auf eine Gerade nur eine einzige Normale fallen.

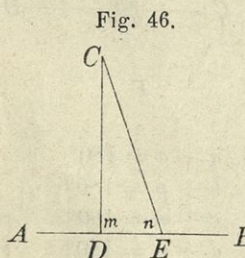
Die Länge dieser völlig bestimmten Senkrechten gibt den Abstand des Punktes von der Geraden an. Der Punkt D heißt der Fußpunkt der Senkrechten.

Auch in einem Punkte einer Geraden läßt sich auf diese nur eine einzige Normale errichten.

Aufgaben:

1. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese die Senkrechte zu fallen.

Konstruktion mit Hilfe des Winkelbrettchens.



2. In einem Punkte einer Geraden auf diese die Senkrechte zu errichten.

Auflösung ähnlich wie bei Aufgabe 1.

Zur Lösung beider Aufgaben im Freien dient der Feldwinkelmeßapparat der Fig. 30. Benutzt werden zwei Visiere, die an den Endpunkten zweier zueinander normaler Durchmesser angebracht und ähnlich hergestellt sind wie die in § 26 bereits beschriebenen.

a) Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese die Senkrechte zu fällen und den Abstand des Punktes von der Geraden zu bestimmen.

Der Punkt wird durch einen Fluchtstab festgelegt. Der Winkelmeßapparat wird über dem schätzungsweise angenommenen Fußpunkt des Lotes so aufgestellt, daß die eine Visierlinie in die durch die ausgesteckte Gerade gelegte Vertikalebene fällt. Sieht man dann durch das zweite Visier den vertikalen Stab, so ist der Fußpunkt des Lotes richtig. Sieht man ihn nicht, so wird der Apparat ohne Änderung der Richtung des ersten Visieres so lange verschoben, bis man durch das zweite Visier den Stab sieht. Dann wird die Senkrechte abgesteckt und ihre Länge bestimmt.

b) In einem Punkt einer Geraden auf diese die Normale zu ziehen.

Der Winkelmeßapparat wird in dem vorgeschriebenen Punkte wie in a) aufgestellt. Man blickt dann durch das zweite Visier und läßt durch einen Gehilfen einen Fluchtstab in der Sehrichtung aufstellen. Dadurch sind zwei Punkte der Senkrechten gefunden.

3. Die Höhen der drei Dreiecke in Fig. 39 zu ziehen.

4. Durch einen gegebenen Punkt A mit einer Geraden l die Parallele zu konstruieren.

Die Ausführung ergibt sich aus Fig. 47. Benutzt wird ein Lineal L und das Winkelbrett (Parallelverschiebung des Winkelbrettes aus der Lage I in die Lage II). Begründung nach § 38, 3.

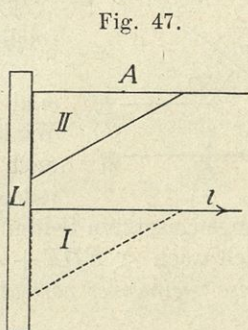


Fig. 47.

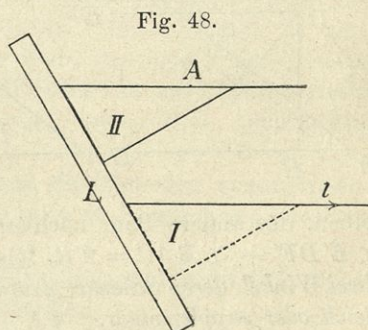


Fig. 48.

Verwandt mit dieser Konstruktion ist die in Fig. 48 enthaltene. Begründung nach § 38, 2. (Gegenwinkel.)

Winkel mit parallelen oder normalen Schenkeln.

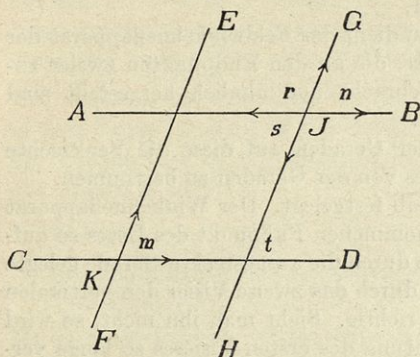
§ 40.

a) Winkel mit parallelen Schenkeln.

Der Schüler vergleiche die Richtungen der Schenkel der Winkel m , n , r und s in Fig. 49 von den Scheitelpunkten K und J aus und beweise mit Benutzung des Winkels t ($m = t$, $t = n$ usw.) die Richtigkeit folgender Sätze:

1. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind gleich,

Fig. 49.



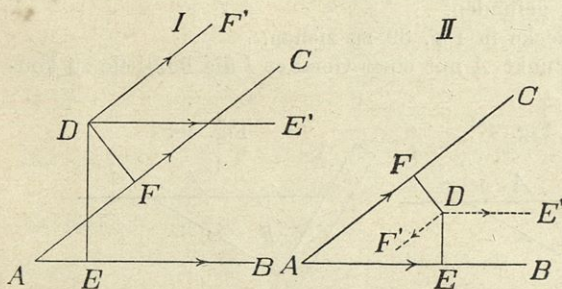
wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

2. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, betragen zusammen 180° , wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

b) Winkel mit normalen Schenkeln.

Es sei (Fig. 50) $DE \perp AB$ und $DF \perp AC$. Man drehe die Schenkel DE und DF des Winkels EDF als eine feste Verbindung um den Scheitel D um 90° , so daß sie in die Lage DE' und DF' kommen.

Fig. 50.



In I haben die Winkel $E'DF'$ und BAC paarweise parallele und nach derselben Seite gerichtete Schenkel; also ist $\sphericalangle E'DF' = \sphericalangle BAC$, folglich auch $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$. — In II sind die Schenkel der Winkel $E'DF'$ und BAC auch paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist $\sphericalangle E'DF' + \sphericalangle BAC = 2R$, folglich auch $\sphericalangle EDF + \sphericalangle BAC = 2R$.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise zueinander normal sind, sind entweder gleich oder supplementär.

Siebenter Abschnitt.

Die Symmetrie ebener und körperlicher Gebilde.

§ 41. Achsiale Symmetrie ebener Gebilde.

1. *Symmetrische Lage zweier Punkte.* Zwei Punkte P und P' (Fig. 51) liegen in bezug auf eine Gerade SS' symmetrisch, wenn ihre gerade Verbindungslinie PP' auf der Geraden SS' normal steht und von ihr halbiert wird.

2. *Symmetrische Lage zweier Gebilde (Figuren).* Zwei Gebilde (Figuren) ABC und $A'B'C'$ (Fig. 51) sind in bezug auf eine Gerade SS' symmetrisch,

wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des andern entspricht.

Die Gerade SS' heißt die Symmetrieachse oder Symmetrale und die beiden Punkte oder Gebilde, welche in bezug auf SS' symmetrisch liegen, einander symmetrisch zugeordnet oder kurz zugeordnet.

Zwei Gebilde, welche einander symmetrisch zugeordnet sind, können durch eine Drehung von 180° um die Symmetrale zur Deckung gebracht werden, sie sind daher kongruent.

Der Schüler überzeuge sich davon durch Zusammenfallen eines durchscheinenden Papiers mit der Fig. 51 um die Gerade SS' und Zusammenlegen der beiden Teile.

Zwei symmetrisch liegende Gebilde haben dieselbe Lage wie Gegenstand und Bild, wenn die Symmetrieachse spiegelnd gedacht wird. Das eine Gebilde kann als Spiegelbild des andern bezeichnet werden.

3. *Symmetrische Figuren (Gebilde)*. Eine Figur (Gebilde) heißt symmetrisch bezüglich einer Geraden, wenn sie sich durch diese Gerade in zwei symmetrisch liegende Hälften teilen läßt. Nach der Anzahl der Geraden (Symmetralen), durch welche eine Figur (Gebilde) in zwei symmetrische Hälften geteilt werden kann, heißt sie ein-, zwei-, drei-, mehrachsig symmetrisch.

Von den bisher betrachteten Gebilden sind die folgenden symmetrisch:
a) die *unbegrenzte Gerade*; jede ihrer Normalen kann als Symmetrale derselben angesehen werden;

b) die *Strecke*. Die Normale in ihrem Halbierungspunkte ist ihre Symmetrale; man nennt sie kurz *Streckensymmetrale*;

c) der *Winkel*. Seine Halbierungslinie ist die Symmetrale; man nennt sie kurz *Winkelsymmetrale*;

d)¹⁾ das *gleichschenklige Dreieck*; die Höhe auf die Grundlinie ist die Symmetrieachse;

e) das *gleichseitige Dreieck*; jede Höhe ist eine Symmetrieachse;

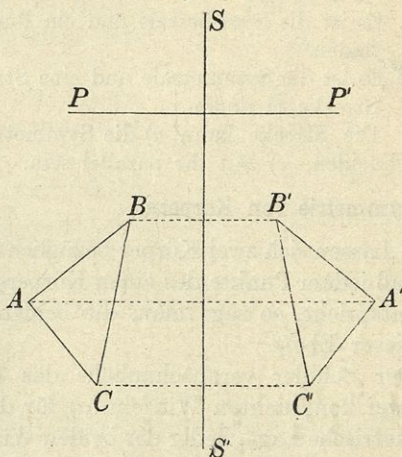
f) das *Quadrat*; jede Seitensymmetrale und jede Diagonale ist eine Symmetrieachse;

g) das *Rechteck*; jede Seitensymmetrale ist eine Symmetrieachse;

h) der *Kreis*. Welche und wieviel Symmetrieachsen besitzt er?

¹⁾ Der Schüler zeichne diese und die folgenden Figuren auf durchscheinendem Papier und überzeuge sich zunächst durch bloße Drehung um die Symmetralen von der Richtigkeit der ausgesprochenen Sätze.

Fig. 51.



Aufgaben:

1. Es ist die Symmetrale und ein Punkt gegeben. Der zugeordnete Punkt zu finden.
2. Es ist die Symmetrale und eine Strecke gegeben. Die symmetrisch liegende Strecke zu finden.

Die Strecke kann *a)* die Symmetrale selbst, *b)* erst in der Verlängerung schneiden, *c)* mit ihr parallel sein.

§ 42. Symmetrie von Körpern.

1. Lassen sich zwei Körper bezüglich einer Ebene in eine solche Lage bringen, daß jedem Punkte des einen Körpers ein symmetrisch liegender des andern entspricht, so sagt man, die beiden Körper liegen symmetrisch bezüglich dieser Ebene.

Der Schüler veranschauliche das Gesagte mit einem Kartonblatte und zwei kongruenten Würfeln, *a)* für die symmetrische, *b)* für die nicht symmetrische Lage. Jeder der beiden Würfel kann im ersten Falle als Spiegelbild des andern betrachtet werden. Was ist als Spiegel anzusehen? Derselbe Versuch mit den beiden Händen auszuführen!

2. Läßt sich ein Körper durch eine Ebene so in zwei Teile schneiden, daß jedem Punkte des einen ein symmetrisch liegender Punkt des andern Teiles entspricht, so heißt der Körper symmetrisch bezüglich dieser Ebene. Die Ebene selbst heißt eine Symmetrieebene.

Fig. 52.



Fig. 53.

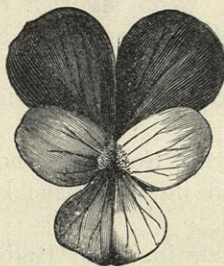


Fig. 54.



Der Schüler ermittle die Symmetrieebenen des Würfels, des Quaders und

der Kugel; ebenso eine Symmetrieebene eines Hauses, des menschlichen Körpers und zeichne den Schnitt der Symmetrieebene des Blattes, Fig. 52, der Blüte, Fig. 53, und des Insektes, Fig. 54, mit der Bildfläche ein.

§ 43. Eigenschaften der Strecken- und Winkelsymmetrale und Konstruktionen auf Grund derselben.

a) Es sei CD (Fig. 55) die Symmetrale der Strecke AB , also $AC = BC$ und $CD \perp AB$. Verbindet man irgendeinen Punkt M der Symmetrale mit den Endpunkten der Strecke und dreht die rechte Hälfte der Figur um CD als Achse um 180° , so muß, da die Winkel bei C als rechte

gleich sind, CB in die Richtung von AC fallen; weil $BC = AC$, fällt ferner B auf A , somit BM auf AM .

Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat also von den Endpunkten der Strecke gleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Endpunkten einer Strecke gleiche Abstände, so liegt er in der Symmetrale der Strecke.

b) Es sei CD (Fig. 56) die Symmetrale des Winkels ACB , also $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$.

Fällt man von irgendeinem Punkte M der Symmetrale auf die Schenkel des Winkels die Normalen MP und MQ und dreht die untere Hälfte ACD der Figur um CD als Achse um 180° , so muß CA in die Richtung von CB fallen, weil $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ ist, MQ muß auf MP fallen, weil von einem Punkte (M) auf eine Gerade (CB) nur eine einzige Senkrechte möglich ist.

Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat also von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände, so gehört er der Symmetrale desselben an.

c) Konstruktionen.

1. Die Symmetrale einer gegebenen Strecke AB (Fig. 57) zu konstruieren. Bestimmt man zwei Punkte C und D so, daß jeder derselben von den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke gleiche Abstände hat, so ist durch CD die Lage der Symmetrale der Strecke AB bestimmt.

2. Eine gegebene Strecke zu halbieren. (Wie Aufgabe 1.)

3. Auf eine gegebene

Gerade AB (Fig. 58) von einem außer ihr liegenden Punkte C die Normale zu fällen.

Man bestimme auf der Geraden zwei Punkte M und N , welche von C gleich weit abstehen, und konstruiere zu MN die Symmetrale CD ; diese ist auf AB normal.

Fig. 55.

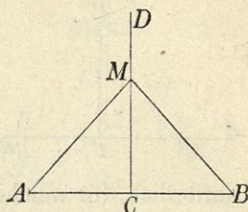


Fig. 56.

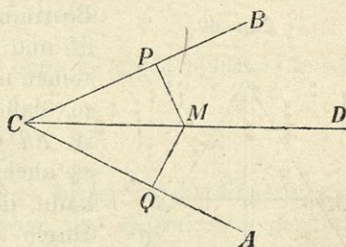


Fig. 57.

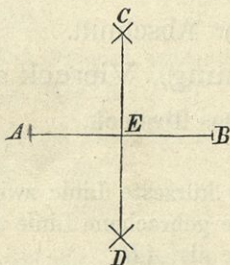


Fig. 58.

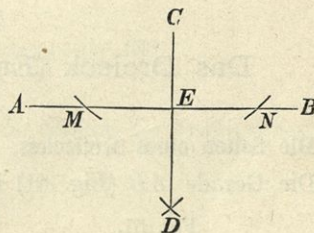
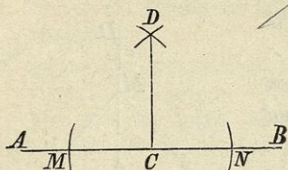


Fig. 59.



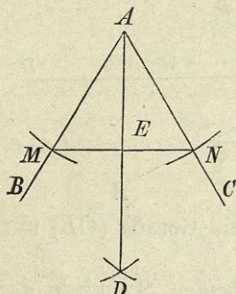
4. Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 59) in einem gegebenen Punkte C derselben die Normale zu errichten.

Man bestimme in der Geraden zwei Punkte M und N so, daß $CM = CN$ ist und konstruiere die Symmetrale von MN ; zur Bestimmung derselben ist außer C noch ein zweiter Punkt D

erforderlich, für welchen $DM = DN$ ist.

5. Die Symmetrale eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 60) zu konstruieren, d. h. den Winkel zu halbieren.

Fig. 60.



Bestimmt man auf den Schenkeln zwei Punkte M und N , welche vom Scheitel A gleich weit abstehen und dann in der Winkelfläche den Punkt D so, daß er von M und N gleichen Abstand hat, so ist AD die Symmetrale der Strecke MN , folglich ist sie auch, wie man sich durch Drehung überzeugen kann, die Symmetrale des Winkels BAC .

Durch diese Konstruktion kann auch folgende Aufgabe gelöst werden;

6. Einen gegebenen Kreisbogen zu halbieren.

Man halbiere den zugehörigen Zentriwinkel.

Durch wiederholte Anwendung der Konstruktionen

2, 5 und 6 kann man eine Strecke, einen Winkel, einen Bogen in 4, 8, 16... gleiche Teile teilen.

Die Konstruktionen 1—6 können auch im Freien ausgeführt werden. Die erforderlichen Kreisbogen erhält man dadurch, daß man im Mittelpunkt einen Pflock mit einer daran befestigten Schnur einschlägt, einen zweiten Pflock an dem andern Ende der Schnur befestigt und mit der Spitze desselben bei straff gespannter Schnur den Bogen einritz.

Achter Abschnitt.

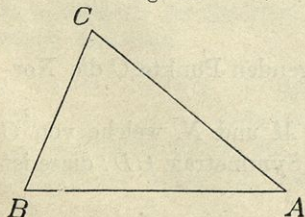
Das Dreieck (Ergänzung), Viereck und Vieleck:

1. Das Dreieck.

§ 44. Die Seiten eines Dreieckes.

Die Gerade AB (Fig. 61) ist die kürzeste Linie zwischen A und B , also ist die gebrochene Linie ACB , d. i. $AC + CB$ größer als AB .

Fig. 61.



In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Aus drei Strecken, deren Längen 2 m, 3 m und 4 m sind, ist demnach ein Dreieck möglich; vergleicht man jede dieser drei Seiten mit der Differenz der beiden anderen, so ergibt sich:

Jede Seite eines Dreiecks ist größer als die Differenz der beiden anderen.

Die Richtigkeit dieser zwei Sätze an den Figuren 62 und 63 zu prüfen.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks 24 m und 17 m sind, zwischen welchen Grenzen liegt die dritte Seite?

In welcher Beziehung steht ein Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks zur Grundlinie?

Fig. 62.

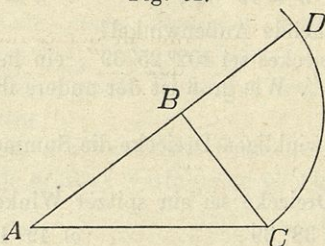
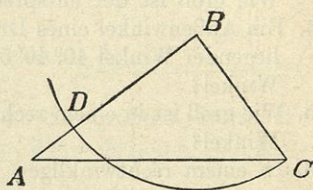


Fig. 63.



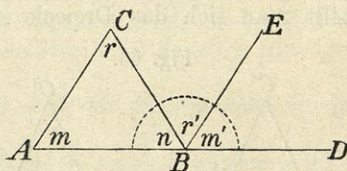
Die Winkel eines Dreiecks.

§ 45.

Verlängert man eine Seite eines Dreiecks, so bildet die Verlängerung mit der anstoßenden Seite einen Winkel, welcher ein *Außenwinkel* des Dreiecks heißt, während die drei Winkel im Dreieck *innere Winkel* sind. $\angle CBD$ (Fig. 64) ist ein Außenwinkel des Dreiecks ABC .

Zieht man $BE \parallel AC$, so entstehen die zwei Winkel m' und r' , von denen m' dem Winkel m als Gegenwinkel, r' dem Winkel r als Wechselwinkel bei Parallelen gleich ist. Die Summe der drei Winkel m, n, r ist daher so groß wie die Summe der Winkel m', n, r' .

Fig. 64.



a) Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten oder 180° .

Aus diesem Satze folgt:

b) Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180° .

Leite aus Fig. 64 den Satz ab:

c) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

Aufgaben:

1. In einem Dreiecke sei der Winkel

$$\begin{aligned} a) \quad m &= 65^\circ, \\ n &= 87^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad m &= 43^\circ 10', \\ n &= 102^\circ 27'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad m &= 25^\circ 46' 21'', \\ n &= 74^\circ 48' 49''. \end{aligned}$$

Wie groß ist der dritte Winkel r ? Was geschieht mit r , wenn m um 15° und n um 10° zunehmen oder abnehmen?

2. Wie groß ist jeder der Winkel, wenn 1. $m = n = r$, 2. $m = n$ und $r = 57^\circ$?

3. In einem Dreiecke sind zwei innere Winkel

$$a) \begin{aligned} m &= 24^\circ, \\ n &= 52^\circ; \end{aligned}$$

$$b) \begin{aligned} m &= 65^\circ 12', \\ n &= 79^\circ 54'; \end{aligned}$$

$$c) \begin{aligned} m &= 12^\circ 47' 43'', \\ n &= 81^\circ 9' 56''. \end{aligned}$$

Wie groß ist der entsprechende Außenwinkel?

4. Ein Außenwinkel eines Dreieckes sei $102^\circ 25' 39''$, ein innerer ihm nicht anliegender Winkel $40^\circ 40' 52''$. Wie groß ist der andere ihm nicht anliegende Winkel?

5. Wie groß ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die Summe der beiden spitzen Winkel?

6. In einem rechtwinkligen Dreiecke sei ein spitzer Winkel

$$a) 62^\circ,$$

$$b) 38^\circ 39',$$

$$c) 49^\circ 17' 25''.$$

Wie groß ist der andere spitze Winkel?

7. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt der eine Außenwinkel an der Hypotenuse

$$a) 96^\circ,$$

$$b) 117^\circ 48',$$

$$c) 133^\circ 56' 50''.$$

Wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?

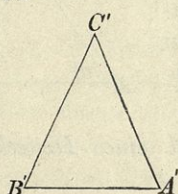
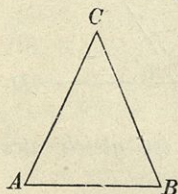
8. Wie groß ist in einem stumpfwinkligen Dreiecke die Summe der beiden spitzen Winkel?

§ 46. Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreieckes.

1. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 65) die Seite $AC = BC$.

Stellt man sich das Dreieck ABC noch einmal, und zwar umgewendet

Fig. 65.



als $A'B'C'$ vor, so kann man das letztere so auf das erstere legen, daß die Winkel C und C' einander decken; wohin fällt dann B' , wohin A' , wohin die Seite $B'A'$, die Winkel B' und A' ? Hieraus folgt:

Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.

2. Ist umgekehrt in dem Dreiecke ABC der Winkel $B = A$, so kann man auf gleiche Weise die Seite $B'A'$ mit der Seite AB zur Deckung bringen und zeigen, daß die Seite $AC = BC$ sein muß; d. h.:

Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.

Aus dem ersten Satze folgt:

a) *In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.*

b) *In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich.*

Ist (Fig. 66) $AB = AD$, also das Dreieck ABD gleichschenklige, so sind die Winkel m und n an der Grundlinie einander gleich. Dreht man BD um B bis BC , so erhält man das Dreieck ABC . Vergleicht man die Winkel der Dreiecke ABD und ABC , so findet man $A = A$, $ABC > m$, folglich ist ACB um ebensoviele kleiner als n oder m . In dem Dreiecke ABC ist

demnach die Seite $AC > AB$ und zugleich der Winkel $ABC > ACB$.

Daraus folgt:

3. Der größeren Seite eines Dreieckes liegt ein größerer Winkel gegenüber; und umgekehrt:

4. Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt eine größere Seite gegenüber.

Welcher Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes ist der größte? Daher ist auch welche Seite die größte? Verfahre in gleicher Weise bei einem stumpfwinkligen Dreieck!

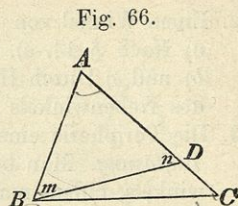


Fig. 66.

Aufgaben:

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?
2. Wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel ein rechter ist?
3. Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist a) $23^\circ 35'$, b) $65^\circ 10' 36''$, c) $118^\circ 48' 29''$. Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie?
4. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie a) $15^\circ 12'$, b) $48^\circ 5' 49''$, c) $73^\circ 41' 17''$ beträgt?
5. Wenn der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes 130° ist, wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie? Welcher Satz ergibt sich daraus?
6. Die Höhe eines Gegenstandes (Hauses, Turmes usw.) zu bestimmen. Man stelle sich vor dem Objekte so auf, daß der Vertikalwinkel, unter welchem die Höhe erscheint, 45° beträgt. Durch welche Strecke ist dann die Höhe des Objektes bestimmt?
7. Wenn in einem Dreiecke $\sphericalangle A = 72^\circ$, $\sphericalangle B = 55^\circ$ ist, welche Seite ist die größte?
8. Wenn in einem Dreiecke die Seiten 75 cm, 48 cm, 90 cm sind, welcher Winkel ist der größte, welcher der kleinste?
9. Ist es möglich, daß in einem Dreiecke mit zwei Seiten von 76 mm und 98 mm Länge der ersten ein Winkel von 95° gegenüberliegt?

Fällt man von einem Punkte A (Fig. 67) auf eine Gerade BC die Normale § 47. AD und zieht zugleich mehrere schiefe Strecken AE, AF, AG, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ADE, ADF, ADG, welche die Kathete AD gemeinschaftlich haben. Vergleiche sie mit den zugehörigen Hypotenusen und prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Normale ist die kürzeste Strecke, die von einem Punkt auf eine gerade Linie gefällt werden kann.

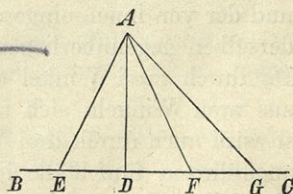


Fig. 67.

§ 48.

- Aufgaben:
1. Einen Winkel von a) 60° , b) 30° , c) 120° , d) 150° zu konstruieren.
 - a) Durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreieckes.
 - b) Durch Halbierung eines Winkels von 60° .
 - c) und d) Durch Konstruktion des Nebenwinkels von 60° , bezüglich von 30° .

2. Einen Winkel von a) 90° , b) 45° , c) 135° zu konstruieren.
 a) Nach § 43, c), 4.
 b) und c) Durch Halbierung eines Winkels von 90° und durch Konstruktion des Nebenwinkels von 45° .
3. Die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Teile zu teilen.
Auflösung. Man bestimme die Größe des zu einem Teile gehörigen Zentriwinkels, indem man 360° durch die Zahl der verlangten gleichen Teile des Kreises dividiert, konstruiere diesen Winkel am Mittelpunkt und trage die durch seine Schenkel abgeschnittene Sehne an der Peripherie herum. Welcher Zentriwinkel entspricht dem 3., 4., 6., 8., 12. Teile der Peripherie? Einige Teilungen des Kreisumfanges lassen sich *geometrisch* (d. h. nur mit Lineal und Zirkel) ausführen. *Mechanisch* (d. h. noch mit anderen Hilfsmitteln als Lineal und Zirkel) kann die Konstruktion der Winkel und daher die Kreisteilung *mit Hilfe der Transporteurs* vorgenommen werden.
4. Einen Halbkreis in Grade zu teilen oder einen Transporteur anzufertigen. Damit der Halbkreis von Grad zu Grad geteilt erscheine, muß er 180 gleiche Teile erhalten. Zu diesem Ende teile man den Halbkreis zuerst in 3 gleiche Teile; durch zweimaliges Halbieren derselben ergeben sich 12 gleiche Bogen, jeder von 15° . Wird ferner durch Versuche jeder solche Bogen in 3 und jeder neu erhaltene Bogen in 5 gleiche Teile geteilt, so erhält man 180 gleiche Teile, deren jeder ein Bogengrad ist.

§ 49. Ein Dreieck enthält sechs Bestandteile: die drei Seiten und die drei Winkel.

1. Ist nur *ein* Bestandteil eines Dreieckes, ein Winkel oder eine Seite, gegeben, so lassen sich unzählig viele verschiedene Dreiecke konstruieren, die alle jenes Stück enthalten. (Konstruktion!) Durch *ein* Bestandteil ist also ein Dreieck nicht bestimmt.

2. Auch aus *zwei* Bestandstücken: aus zwei Winkeln, aus einer Seite und einem anliegenden Winkel, aus einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel oder aus zwei Seiten können unzählig viele verschiedene Dreiecke konstruiert werden. (Zeichnung!) Durch *zwei* Bestandstücke ist also ein Dreieck ebenfalls nicht bestimmt.

3. Sind *drei* Bestandstücke des Dreieckes gegeben, so können es sein: a) alle drei Winkel; b) eine Seite und zwei Winkel (die zwei anliegenden oder ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel); c) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; d) zwei Seiten und der einer derselben gegenüberliegende Winkel; e) alle drei Seiten.

Da durch zwei Winkel eines Dreieckes der dritte Winkel bestimmt ist, aus zwei Winkeln sich aber kein bestimmtes Dreieck konstruieren läßt, so wird auch durch drei Winkel ein Dreieck nicht bestimmt. Der erste der angeführten fünf Fälle liefert also keine bestimmte Konstruktion.

Es bleiben demnach nur die letzten vier Fälle zu untersuchen übrig.

§ 50. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind. Wann ist die Konstruktion nur möglich?

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden oder ein ihr anliegender und der ihr gegenüberliegende Winkel.

a) Es sei (Fig. 68)
 c die gegebene
 Seite und die
 Winkel m und
 n die ihr anlie-
 genden Winkel.
 Der Gang der
 Konstruktion

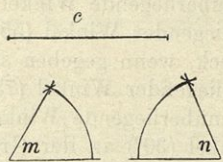
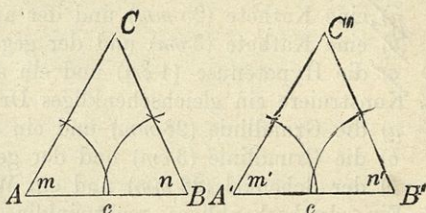


Fig. 68.



ist aus Fig. 68 ersichtlich. Man erhält also aus den gegebenen drei Stücken nur das Dreieck ABC . Konstruiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck $A'B'C'$ etwa auf durchscheinendem Papier, so kann es mit ABC zur Deckung gebracht werden; es unterscheidet sich von ihm nur durch den Ort, an dem es sich befindet; es ist nur eine Kopie desselben und mit ihm kongruent.

Daraus folgt;

1. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.

2. (I. Kongruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent. (WSW.)

Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kann auf die Gleichheit von weiteren drei Paaren der Bestimmungsstücke geschlossen werden nach dem Satze: In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten auch gleiche Winkel und umgekehrt gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber. Auf die Gleichheit welcher Stücke der beiden Dreiecke in Fig. 68 kann mithin aus ihrer Kongruenz geschlossen werden?

b) Sind von einem Dreieck eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so läßt sich auch der dritte Winkel durch Rechnung oder durch Zeichnung (nach § 29 auszuführen) bestimmen; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt. Dieser Fall läßt sich also auf den früheren a) zurückführen und man kann allgemein sagen: Durch eine Seite und zwei Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt. Da rechtwinklige Dreiecke immer den rechten Winkel gleich haben, so gilt auch der Satz;

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie 1. die Hypotenuse und einen spitzen Winkel, 2. eine Kathete und einen gleichliegenden spitzen Winkel paarweise gleich haben.

Vergleiche die Aufeinanderfolge der Seiten und Winkel in den kongruenten und symmetrischen Dreiecken der Figuren 68 und 51!

Aufgaben:

1. Konstruiere ein Dreieck mit der Seite $2\text{ cm } 9\text{ mm}$ und den anliegenden Winkeln 60° und 45° !
2. Konstruiere ein Dreieck, in welchem eine Seite 27 mm , ein anliegender Winkel 45° und der gegenüberliegende Winkel 75° beträgt!

3. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
- eine Kathete (25 mm) und der anliegende spitze Winkel (30°);
 - eine Kathete (3 cm) und der gegenüberliegende Winkel (75°);
 - die Hypotenuse (4 cm) und ein anliegender Winkel (55°)!
4. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
- die Grundlinie (28 mm) und ein anliegender Winkel (75°);
 - die Grundlinie (3 cm) und der gegenüberliegende Winkel (150°);
 - der Schenkel (26 mm) und ein Winkel (30°) an der Grundlinie!
5. Ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse (35 mm) gegeben ist.

Fig. 69.

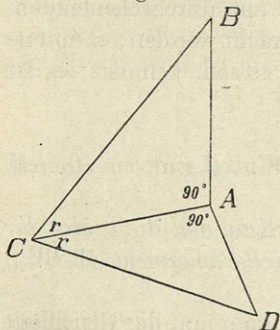
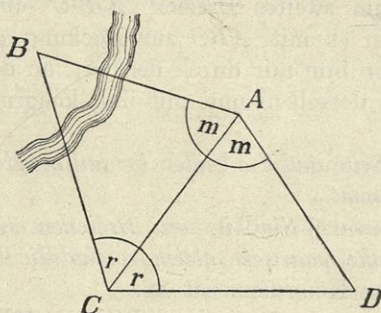


Fig. 70.



6. Die Höhe eines Objektes zu bestimmen.

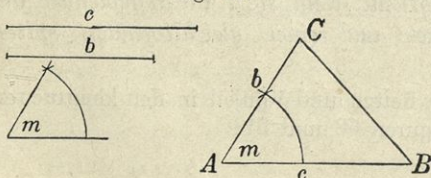
a) Man stelle sich vor dem Objekte AB (Fig. 69) auf und messe den Vertikalwinkel r , unter welchem die Höhe erscheint.

Zeichnet man das Dreieck ABC auf dem Horizont an AC (WSW), so ist die Höhe des Hauses welche Seite desselben?

- b) Man zeichne aus den Stücken AC , 90° und r das Dreieck ABC in verjüngtem Maße, messe die Seite AB in der Figur und berechne die wahre Länge.
7. Die Entfernung zweier Punkte (A und B) zu bestimmen, wenn man zu einem von ihnen (B) nicht gelangen kann (Fig. 70).
- a) Man wähle den Punkt C , messe die Winkel BCA und CAB und konstruiere auf der entgegengesetzten Seite von AC das Dreieck $ACD \cong ACB$. Welche Seite des Dreieckes ACD muß nun gemessen werden?
- b) Ebenso wie in Aufgabe 6 b).

§ 51. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 71.



Es seien b und c (Fig. 71) die zwei gegebenen Seiten und m der von ihnen eingeschlossene Winkel. Der Gang der Konstruktion ist aus Fig. 71 ersichtlich.

Wann ist die Konstruktion nur möglich?

Da die Konstruktion nur ein Dreieck ergibt, so folgt:

1. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.

2. (II. Kongruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent. (SWS.) Wie lautet dieser Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke?

Aufgaben:

Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten 2 cm und 3 cm, welche einen Winkel von 60° einschließen!

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn dessen Schenkel (38 mm) und der Winkel am Scheitel (150°) gegeben sind!

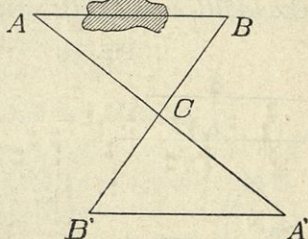
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 2 cm 2 mm und 2 cm 6 mm sind!

Konstruiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 2 cm betragen!

Die Entfernung zweier Punkte (A, B, Fig. 72) zu bestimmen, zwischen welchen ein Hindernis (Hügel, Haus, Teich) sich befindet.

Man wähle den Punkt C so, daß man CA, CB und Winkel ACB messen kann; man mache $CA' = CA$, $CB' = CB$ und hat dann welche Linie zu messen? (Begründung.)

Fig. 72.



Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten § 52. gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Der gegebene Winkel kann der größeren oder der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

a) Es seien (Fig. 73) a und b die beiden gegebenen Seiten, und zwar sei $a > b$; der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel sei m .

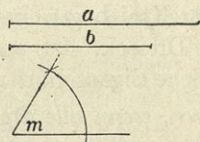
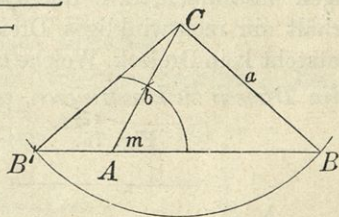


Fig. 73.

Man trage den Winkel m auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b ; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt.

Der dritte Eckpunkt B muß in dem zweiten Schenkel AB und zugleich in der Kreislinie liegen, welche aus C mit dem Halbmesser a beschrieben wird. Der Eckpunkt B muß daher der Durchschnittspunkt dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB sein. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B' und man erhält somit zwei Dreiecke ABC und AB'C. Enthalten beide Dreiecke die gegebenen Stücke? Wann ist die Aufgabe möglich?



Aus dieser Konstruktion folgt:

1. Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck vollständig bestimmt.

2. (III. Kongruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent. (SSW.)

Wie lautet dieser Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke?

~~Aufgaben:~~

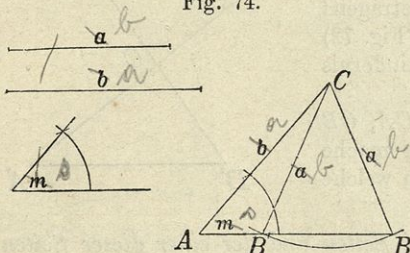
Konstruiere ein Dreieck, worin die Seiten 2 cm und 3 cm 5 mm vorkommen und der zweiten Seite ein Winkel von 75° gegenüberliegt!

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse 25 mm und eine Kathete 2 cm ist!

b) Es seien (Fig. 74) a und b die zwei gegebenen Seiten, und zwar $a < b$, der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, sei m .

Durch ein ähnliches Verfahren wie oben unter a) erhält man zwei Dreiecke ABC und $AB'C$, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten,

Fig. 74.

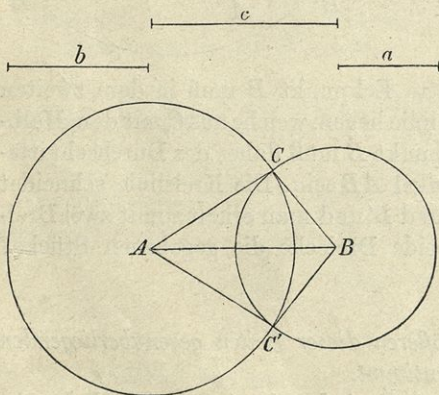


aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also im allgemeinen ein Dreieck nur *zweideutig* bestimmt; es kann aus der Gleichheit dieser Stücke auf die Kongruenz der Dreiecke nicht geschlossen werden.

Damit der aus C mit der kleineren Seite a beschriebene Bogen den Schenkel AB schneide, muß a größer sein als die zur dritten Seite gehörige Höhe. Ist die kleinere Seite a gleich dieser Höhe, so fallen die beiden Schnittpunkte B und B' in einen einzigen zusammen, d. i. der Kreisbogen berührt die dritte Seite und man erhält ein rechtwinkliges Dreieck. Ist endlich a kleiner als die Höhe, so entsteht kein Dreieck. Welche Eigenschaft muß der gegebene Winkel haben?

§ 53. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Fig. 75.



Die ersten zwei Seiten können willkürlich gewählt werden; welche Bedingungen muß die dritte Seite erfüllen, damit die Aufgabe möglich ist? (§ 44.)

Es seien (Fig. 75) a, b, c die Längen der drei Seiten. Der Gang der Konstruktion ist aus Fig. 75 zu ersehen. Da die beiden zur Bestimmung des Punktes C dienenden Kreise einander in zwei Punkten C und C' schneiden, so erhält man zwei Dreiecke ABC und ABC' , welche die gegebenen drei Seiten haben. Diese zwei Dreiecke können aber durch Umklappen des einen um AB zur Deckung gebracht werden, da AB die Symmetrale von CC' ist. (Weshalb?)

Daraus folgt:

1. Durch drei Seiten ist ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. (IV. Kongruenzsatz.) Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent. (SSS.)

Wie lautet dieser Kongruenzsatz für gleichseitige Dreiecke?

Auf die Gleichheit welcher Stücke der Dreiecke ABC und ABC' (Fig. 75) kann aus ihrer Kongruenz geschlossen werden?

Aufgaben:

1. Konstruiere mit den Seiten 38 mm, 30 mm, 41 mm ein Dreieck!
2. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind! (Wann ist die Aufgabe nur möglich?)
3. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 28 mm!

Abhängigkeit der sechs Bestandstücke eines Dreieckes von einander.

§ 54.

Aus den in den §§ 50—53 enthaltenen Konstruktionsaufgaben ergibt sich, daß die sechs Bestandstücke eines Dreieckes nicht unabhängig voneinander sind, daß vielmehr im allgemeinen aus drei Stücken die übrigen sich ergeben.

Der Schüler zähle alle möglichen Fälle nach den §§ 50—53 auf. Was geschieht, wenn die gegebenen drei Bestimmungsstücke abgeändert werden mit den übrigen Bestandstücken?

Ein Dreieck zu übertragen.

§ 55.

Um diese Konstruktion auszuführen, hat man nur drei Stücke des gegebenen Dreieckes zu wählen, welche ein Dreieck bestimmen, und mit denselben das neue Dreieck zu konstruieren. Welche Konstruktion ist die einfachste?

Symmetrie des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieckes.

§ 56.

a) Es sei (Fig. 76) $AC = BC$, also das Dreieck ABC gleichschenkelig. Die Symmetrale der Grundlinie muß durch C gehen. (§ 43.)

Dreht man das Dreieck BCD um CD um 180° , so deckt es ACD . Folglich ist $c = d$.

Die Symmetrale der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, die Höhe und die Symmetrale des Winkels am Scheitel fallen in dieselbe Gerade.

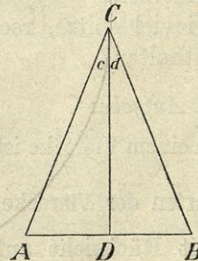
Das gleichschenkelige Dreieck ist mithin eine einachsig symmetrische Figur. Seine Symmetrieachse ist die Höhe.

b) Aus diesen Sätzen über das gleichschenkelige Dreieck ergibt sich:

In einem gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

Das gleichseitige Dreieck ist eine dreiachsig symmetrische Figur; jede seiner drei Höhen ist eine Symmetrieachse des Dreieckes.

Fig. 76.



Aufgaben:

1. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Grundlinie (32 mm) und die Höhe (22 mm) gegeben sind.

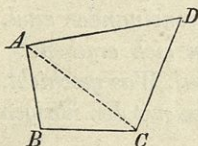
2. Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Höhe (35 mm) auf die Hypotenuse gegeben ist.
3. In welcher Linie liegen die Scheitel aller gleichschenkligen Dreiecke über derselben Grundlinie?
4. Ein gleichseitiges Dreieck aus seiner Höhe (30 mm) zu konstruieren.
5. Von einem Punkte C außerhalb einer Geraden auf diese im Felde das Lot zu fallen (Fig. 76.)

Man konstruiere mit Hilfe einer Schnur (§ 43) einen Kreisbogen, der die Gerade in den Punkten A und B schneidet; halbiert man sodann mit Hilfe des Meßbandes die Strecke AB in D , so ist die Verbindungslinie CD die gesuchte Normale.

2. Das Viereck.

§ 57. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein *Viereck* genannt.

Fig. 77.



Jedes Viereck $ABCD$ (Fig. 77) hat vier Seiten, vier Winkel und vier Eckpunkte. Die Summe aller Seiten eines Viereckes heißt dessen *Umfang*.

Eine Strecke AC , welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Viereckes verbindet, heißt eine *Diagonale*.

Wieviel Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

§ 58. Winkelsumme eines Viereckes.

Die Diagonale AC zerlegt das Viereck $ABCD$ in zwei Dreiecke.

Prüfe die Richtigkeit des Satzes:

Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten oder 360° .

Infolge dieser Beziehung bestimmen wieviel Winkel eines Viereckes die übrigen?

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder derselben?

Wieviel spitze, rechte, stumpfe oder erhabene Winkel kann ein Viereck enthalten?

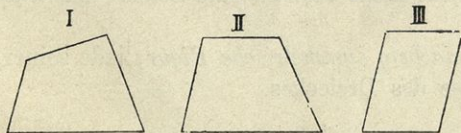
Aufgabe:

In einem Vierecke ist $\sphericalangle A = \frac{2}{3}R$, $\sphericalangle B = \frac{3}{4}R$, $\sphericalangle C = 1\frac{1}{6}R$; $\sphericalangle D$ zu berechnen.

§ 59. Arten der Vierecke.

Mit Rücksicht auf die Lage der gegenüberliegenden Seiten unterscheidet

Fig. 78.



man drei Arten der Vierecke.

Ein Viereck, in welchem *keine* Seite mit einer andern parallel ist, heißt ein *Trapezoid*. Ein Viereck, in welchem *zwei* gegenüberliegende Seiten parallel, die

anderen zwei Seiten aber nicht parallel sind, heißt ein *Trapez*. Ein Viereck,

in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein *Parallelogramm*. Wie heißen also die Vierecke der Fig. 78?

Allgemeine Eigenschaften der Parallelogramme.

§ 60.

a) Die Winkel.

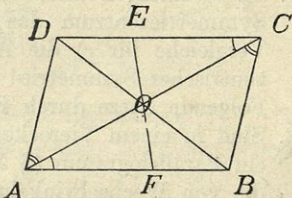
Je zwei gegenüberliegende Winkel eines Parallelogrammes sind einander gleich (§ 40 a), je zwei an derselben Seite eines Parallelogrammes liegende Winkel sind supplementär (§ 38, 1).

Infolge dieser gegenseitigen Abhängigkeit der Winkel eines Parallelogrammes braucht man nur wieviele zu kennen, um die übrigen bestimmen zu können? Wenn ein Winkel eines Parallelogrammes 1. ein rechter, 2. ein schiefer ist, wie sind die übrigen Winkel beschaffen? Kann man also von rechtwinkligen und von schiefwinkligen Parallelogrammen sprechen?

b) Die Seiten und Diagonalen eines Parallelogrammes.

In dem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 79) sei O der Halbierungspunkt der Diagonale AC , DO und BO die Verbindungslinien desselben mit D und B ; dreht man das Parallelogramm $ABCD$ um den Punkt O in der Zeichenebene um 180° ,¹⁾ so fällt OC auf OA , CD in die Richtung von AB , DA in die Richtung von BC , daher D auf B und CD auf AB , DA auf BC , DO auf BO , und da die Drehung 180° betrug, ist die Linie DOB eine gerade. Daraus folgt:

Fig. 79.



1. In einem Parallelogramme halbieren die Diagonalen einander und die Gegenseiten sind einander gleich; oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Da Senkrechte auf eine Gerade parallel sind, so gilt der Satz:

2. Parallele Gerade haben in allen Punkten voneinander den gleichen Abstand. Nimmt man eine Seite eines Parallelogrammes als Grundlinie an, so heißt die Normale zwischen der Grundlinie und der Gegenseite die Höhe des Parallelogrammes.

Wieviele Höhen hat jedes Parallelogramm?

Wenn zwei anstoßende Seiten eines Parallelogrammes gleich sind, so sind alle vier Seiten gleich, das Parallelogramm heißt gleichseitig; sind zwei anstoßende Seiten ungleich, so heißt es ungleichseitig.

Kommen in einem ungleichseitigen Parallelogramme nicht auch gleiche Seiten vor?

c) Die Durchmesser eines Parallelogrammes.

Bei der oben vorgenommenen Drehung fällt OF mit OE zusammen.

¹⁾ Der Schüler mache die Figur 79 auf Pauspapier, bringe sie mit der Figur des Buches zur Deckung und führe die Drehung um eine durch O gestreckte Nadel wirklich aus.

Jede durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogrammes gehende und durch zwei Parallelseiten desselben begrenzte Strecke wird im Schnittpunkte der Diagonalen halbiert.

Der Durchschnittspunkt der Diagonalen heißt der Mittelpunkt, die durch ihn halbierten Strecken (z. B. EF) Durchmesser des Parallelogrammes; von den Endpunkten eines Durchmessers, z. B. E und F , sagt man, daß sie zentrisch symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes O liegen; der Punkt O heißt das *Symmetriezentrum*.

Eine Figur heißt zentrisch symmetrisch, wenn sie einen Punkt (Symmetriezentrum) hat, in bezug auf welchen ihre Punkte paarweise zentrisch symmetrisch liegen.

Das Parallelogramm ist daher eine zentrisch-symmetrische Figur; der Durchschnittspunkt der Diagonalen ist das Symmetriezentrum. Ist a) der Kreis, b) die Kugel ein zentrisch-symmetrisches Gebilde?

Wodurch unterscheiden sich ihre Durchmesser von jenen eines Parallelogrammes?

Aufgaben:

1. Zu a) einem Punkt, b) einer Strecke, c) einem Dreieck bei gegebenem Symmetriezentrum das zentrisch-symmetrische Gebilde zu konstruieren. Vergleiche für c) die Aufeinanderfolge der Eckpunkte bei achsialer und zentrischer Symmetrie! Wie bringt man die Dreiecke zur Deckung?

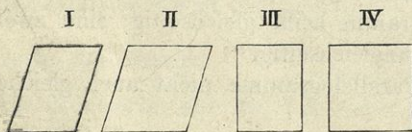
Folgende Sätze durch Kongruenz von zwei Dreiecken zu beweisen:

2. Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist es ein Parallelogramm (§ 53, aus der Gleichheit von Seiten der Dreiecke auf die von Wechselwinkeln zu schließen und § 38, 2).
3. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm (Mit § 51 und § 38, 2).
4. Halbieren die Diagonalen eines Viereckes einander, so ist es ein Parallelogramm. (§ 51.)

§ 61. Einteilung der Parallelogramme.

Mit Rücksicht auf die *Größe der Winkel* und der *Seiten* ergeben sich vier Arten von Parallelogrammen; das schiefwinklige ungleichseitige Parallelogramm oder das *Rhomboid*; das schiefwinklige gleichseitige Parallelogramm oder der *Rhombus*; das rechtwinklige ungleichseitige Parallelogramm oder das *Rechteck* und das rechtwinklige gleichseitige Parallelogramm oder das *Quadrat*.

Fig. 80.



Benenne die in Fig. 80 I—IV dargestellten Parallelogramme!

§ 62. Das Rechteck.

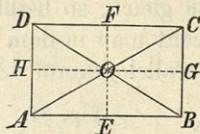
Das Dreieck ABC (Fig. 81) läßt sich durch Umklappen so auf das Dreieck ABD legen, daß Winkel B den Winkel A , Seite BC die Seite AD deckt; wohin fällt AC ?

1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich. Die Symmetrale EF der Seite AB ist zugleich Symmetrale des Rechteckes.

Beweis durch Deckung. Durch eine halbe Umdrehung des Teiles $EBCF$ um EF kommt B wohin? In welche Richtung fällt BC ? Wohin der Punkt C ? Wohin CF ?

2. Das Rechteck ist eine zweiachsig symmetrische Figur. Jede der beiden Seitensymmetralen ist Symmetrieachse.

Fig. 81.



Aufgabe:

Zu beweisen, daß ein Rechteck durch die beiden Diagonalen in zwei Paare kongruenter Dreiecke zerlegt wird. (Vgl. § 63, Aufgabe!)

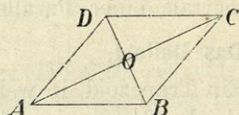
Der Rhombus.

§ 63.

In Fig. 82 ist $AD = CD = BC = AB$. Nach § 43 ist daher BD die Symmetrale von AC und AC die Symmetrale von BD .

Da auch Dreieck ABC mit ADC und Dreieck ABD mit CBD durch eine Drehung um 180° um die Achse AC beziehungsweise BD zur Deckung gebracht werden kann, so sind auch AC und BD Symmetralen des Rhombus.

Fig. 82.



1. Jede Diagonale eines Rhombus ist die Symmetrale der andern.

2. Der Rhombus ist eine zweiachsig symmetrische Figur. Jede der beiden Diagonalen ist eine Symmetrieachse desselben.

Daraus folgt, daß die Diagonalen eines Rhombus zugleich die Winkelsymmetralen sind.

Aufgabe:

Zu beweisen, daß ein Rhombus durch die beiden Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt wird. (Vgl. § 62, Aufgabe!)

Das Quadrat.

§ 64.

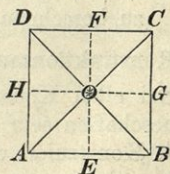
Das Quadrat $ABCD$ (Fig. 83) vereinigt in sich die Eigenschaften des Rechteckes und des Rhombus.

Man hat daher folgende Sätze:

1. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich, jede ist die Symmetrale der andern; sie sind die Symmetralen der Winkel, welche sie durchschneiden.

2. Das Quadrat ist vierachsig symmetrisch; sowohl jede der zwei Seitensymmetralen als auch jede der zwei Diagonalen ist eine Achse desselben.

Fig. 83.



Das Trapez.

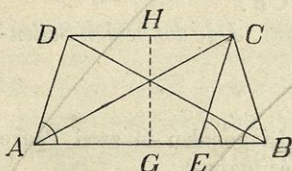
§ 65.

Unter der Höhe des Trapezes versteht man die Normale zwischen den parallelen Seiten.

Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes werden Schenkel genannt. Sind sie gleich, so heißt das Trapez gleichschenkelig.

Zieht man in dem Trapeze $ABCD$ (Fig. 84) $CE \parallel DA$, so zerfällt es in ein Parallelogramm $AECD$ und in ein Dreieck ECB , welches die zwei

Fig. 84.



Schenkel und die Differenz der Parallelseiten des Trapezes zu Seiten hat. Ist das Trapez $ABCD$ gleichschenkelig, so ist in dem Dreiecke EBC auch $CE = CB$, daher ist Winkel $B = E = A$. Dann sind auch die Winkel BCD und ADC gleich (§ 27, Aufgabe 3).

Das gleichschenkelige Trapez hat daher folgende Eigenschaften:

1. Die Winkel an jeder der zwei Parallelseiten sind einander gleich.
2. Die Diagonalen sind einander gleich.

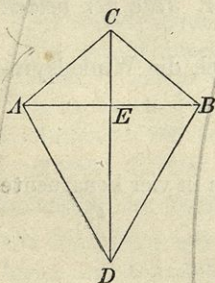
Zu beweisen durch Deckung (oder Kongruenz) welcher Dreiecke?

3. Das gleichschenkelige Trapez ist symmetrisch; seine Achse ist die Symmetrale einer Parallelseite. (Beweis durch Drehung, ähnlich wie § 62.)

§ 66. Das Deltoid.

Ein Trapezoid, in welchem in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten je zwei gleiche Seiten einander schneiden, heißt ein Deltoid. (Fig. 85); es besteht

Fig. 85.



aus zwei gleichschenkeligen Dreiecken, über welcher Grundlinie?

Die Diagonale, welche die Ecken miteinander verbindet, an welcher je zwei gleiche Seiten zusammenstoßen, ist

- a) die Symmetrale der andern Diagonale (Weshalb?);
- b) die Symmetrale des Deltoides und daher auch der Winkel, welche sie durchschneidet. (Beweis.)

Aufgaben:

1. Die Winkel eines Deltoides, welche die Symmetrale durchschneidet, sind $74\frac{20}{3}$ und $106\frac{50}{6}$. Wie groß sind

die beiden anderen?

2. $\sphericalangle A$ (Fig. 85) = $120^\circ 34' 35''$, $\sphericalangle C = 87^\circ 45' 46''$. Die Winkel B und D zu berechnen.

§ 67. Konstruktionsaufgaben.

Bei allen Konstruktionsaufgaben ist anzugeben, wie die gegebenen Stücke beschaffen sein müssen, damit die Aufgabe möglich ist.

1. Konstruiere ein Quadrat, a) dessen Umfang 1 dm ist;
- b) welches mit einem gegebenen Rechtecke gleichen Umfang hat;
- c) wenn die Diagonale (36 mm) gegeben ist.

Durch wieviel Bestandstücke wird ein Quadrat bestimmt?

2. Zeichne ein Rechteck, a) wenn eine Seite (22 mm) und die Diagonale (31 mm) gegeben sind;

4) wenn die Diagonale 32 mm beträgt und die beiden Diagonalen einen Winkel von 60° bilden.

Wieviel Bestandstücke bestimmen ein Rechteck?

3. Es soll ein Rhombus konstruiert werden, wenn gegeben sind:

a) die Seite und ein Winkel (34 mm , 30°);

b) die Seite und eine Diagonale (24 mm , 32 mm);

c) die beiden Diagonalen (18 mm , 28 mm);

d) eine Diagonale und ein Winkel. (Die gegebene Diagonale kann durch den Scheitel des gegebenen Winkels gehen oder nicht.)

4. Zeichne ein Rhomboid, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten (25 mm und 33 mm) und der von ihnen eingeschlossene Winkel 60° ;

b) zwei anstoßende Seiten und die durch ihren Schnittpunkt gehende Diagonale (22 mm , 29 mm , 35 mm);

c) die beiden Diagonalen und eine Seite (31 mm , 34 mm , 25 mm);

d) die beiden Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel (36 mm , 43 mm , 60°).

Durch wieviel Stücke wird a) ein Rhombus, b) ein Rhomboid bestimmt?

5. a) Ein Trapez zu konstruieren, wenn eine Parallelseite a , die zwei Schenkel b und c und der von a und b eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Die Konstruktion ist aus der Fig. 86 zu erkennen.

Da der aus B beschriebene Kreisbogen die Parallele DC in zwei Punkten schneidet, so erhält man zwei Trapeze: $ABCD$ und $ABC'D$, welche die gegebenen vier Stücke enthalten. Die Aufgabe läßt also im allgemeinen zwei Auflösungen zu. Wann erhält man nur ein, wann gar kein Trapez?

Zeichne ein Trapez, wenn gegeben sind:

b) die Parallelseiten und die Schenkel (42 mm , 30 mm , 36 mm , 28 mm);

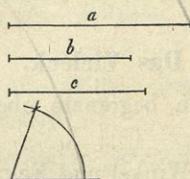
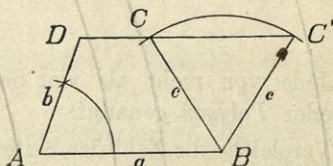


Fig. 86.



Sind unter den Bestimmungsstücken eines Trapezes die beiden Parallelseiten gegeben, so wird die Konstruktion mit Hilfe eines Dreieckes ausgeführt, dessen Grundlinie der Differenz der Parallelseiten gleich ist; die beiden anderen Seiten sind die Schenkel des Trapezes. (Siehe Fig. 84.)

c) die zwei Parallelseiten und die der ersten anliegenden Winkel (45 mm , 28 mm , 45° , 60°);

d) die zwei Parallelseiten, ein Schenkel und ein demselben anliegender Winkel (42 mm , 29 mm , 33 mm , 75°).

6. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez, von welchem gegeben sind:

a) die Parallelseiten (36 mm , 32 mm) und der Schenkel (28 mm);

b) die Parallelseiten und die Höhe (38 mm , 3 cm , 26 mm);

c) die Parallelseiten und ein Winkel (32 mm , 24 mm , 120°).

Durch wieviel Stücke wird a) ein Trapez überhaupt, b) ein gleichschenkliges Trapez bestimmt?

7. Ein Deltoid zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten und die Symmetrale (30 mm , 36 mm , 45 mm);

b) zwei Seiten und die Diagonale, welche nicht die Symmetrale ist (42 mm, 31 mm, 37 mm).

Zahl der Bestimmungsstücke eines Deltoides?

8. Ein Viereck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) alle vier Seiten und ein Winkel (25 mm, 30 mm, 35 mm, 20 mm, 70°);

b) alle vier Seiten und eine Diagonale (20 mm, 24 mm, 30 mm, 36 mm, 28 mm);

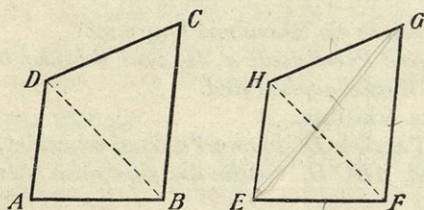
c) drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel (18 mm, 24 mm, 20 mm, 60° , 80°);

d) drei Seiten und die beiden Diagonalen (20 mm, 25 mm, 34 mm, 28 mm, 40 mm).

Zahl der Bestimmungsstücke eines Viereckes. Man beachte, daß bei allen Vierecken infolge der Abhängigkeit der acht Bestandstücke voneinander eine geringere Zahl von Bestimmungsstücken zur Konstruktion ausreicht. (Vgl. § 54.)

§ 68. Ein Viereck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 87) kongruent ist.

Fig. 87.



Zieht man die Diagonale BD , konstruiert $\triangle EFH \cong \triangle ABD$ und über FH das Dreieck $FGH \cong \triangle BCD$, so ist das Viereck $EFGH \cong ABCD$. Es ist übrigens nicht nötig, die Diagonale BD wirklich zu ziehen; man braucht nur die Eckpunkte E, F, G, H des neuen Viereckes

entsprechend zu bestimmen.

3. Das Vieleck.

§ 69. Jede von mehr als vier Seiten begrenzte ebene Figur wird ein *Vieleck* oder *Polygon* genannt.

Vergleiche die Zahl der Seiten, Winkel und Eckpunkte eines Vieleckes miteinander! Wieviel Winkel liegen an jeder Seite? Wieviel Seiten schließen einen Winkel ein?

Je nachdem ein Vieleck fünf, sechs, Ecken hat, heißt es ein *Fünfeck*, *Sechseck* usw.

Eine Strecke, welche zwei Eckpunkte verbindet, die nicht in derselben Seite liegen, heißt *Diagonale*.

Aufgaben:

1. Wieviel Diagonalen können von einem Eckpunkte in einem Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wieviel Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?

Die Anzahl der Diagonalen, die in einem Vielecke von einem Eckpunkte aus gezogen werden können, ist immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten; und die Anzahl der Dreiecke, in welche dadurch das Vieleck zerlegt wird, ist um 2 kleiner als die Seitenanzahl. Will man die Zahl aller Diagonalen eines Vieleckes berechnen, so hat man die Zahl der Diagonalen, die von einem Eckpunkte aus möglich sind, mit der Zahl der Eckpunkte zu multiplizieren

und das Produkt, da jede Diagonale zweimal gerechnet wurde, durch zwei zu dividieren.

2. Wie groß ist die Zahl aller Diagonalen *a*) in einem Achtecke, *b*) in einem Zwölfecke?
3. In einem Polygon gehen von einem Eckpunkte 7 Diagonalen aus. Wie groß ist die Zahl aller Diagonalen des Polygons?

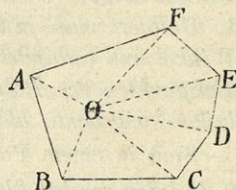
Die Winkel eines Vieleckes.

§ 70.

Die *Winkel* eines Polygons können spitz, recht, stumpf und selbst auch erhaben sein.

Zeichne ein Polygon, in welchem alle diese Arten von Winkeln vorkommen! Es sollen im folgenden nur Polygone mit hohlen Winkeln betrachtet werden. Zieht man von einem Punkte *O* innerhalb des Polygons *ABCDEF* (Fig. 88) zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Polygon Seiten hat; die Winkel eines dieser Dreiecke betragen *zwei* Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke so vielmal *zwei* Rechte als das Polygon Seiten hat. Gehören aber alle diese Dreieckswinkel den Polygonwinkeln an? Welche sind daher noch abzuziehen?

Fig. 88.



Prüfe den Satz:

Die Summe aller Winkel eines Polygons ist gleich so vielmal zwei Rechten, als das Polygon Seiten hat, vermindert um vier Rechte.

Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes, eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Zwölfeckes?

Ein Vieleck, in welchem alle Seiten gleich sind, heißt *gleichseitig*; ein Vieleck, in welchem alle Winkel gleich sind, *gleichwinklig*; ein Vieleck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, *regelmäßig*.

In einem regelmäßigen Polygon ist ein Winkel gleich der Summe aller Winkel, dividiert durch ihre Zahl. Es beträgt z. B. jeder Winkel

$$\text{des regelmäßigen Fünfeckes } \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ,$$

$$\text{des regelmäßigen Sechseckes } \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ \text{ usw.}$$

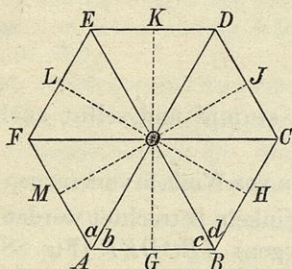
Aufgaben:

1. Wieviel Winkel eines unregelmäßigen Polygons müssen bekannt sein, um die anderen durch Rechnung bestimmen zu können?
2. Von den Winkeln des Fünfeckes *ABCDE* ist $A = 28\frac{30}{4}$; jeder der drei folgenden ist doppelt so groß als der vorhergehende. Wie groß ist der 5. Winkel?
3. Wie groß ist die Seitenzahl eines regelmäßigen Polygons, wenn ein Winkel desselben 140° ist?

Es sei das Polygon *ABCDEF* (Fig. 89) regelmäßig, also $AB = BC = CD = \dots$ und $A = B = C = \dots$ § 72.

Halbiert man zwei Winkel A und B , die an derselben Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABO . Zieht man von seinem Scheitel O zu den übrigen Eckpunkten die Strecken $OC, OD, OE \dots$, so wird dadurch

Fig. 89.



das Polygon in lauter kongruente, gleichschenklige Dreiecke geteilt; denn wendet man das erste Dreieck ABO um die Seite OB um, so deckt es das Dreieck BCO : es muß nämlich wegen $d = c$ AB in die Richtung von BC fallen und wegen $BC = AB$ der Punkt A auf C ; dieses kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden usf. Die Strecken $OA, OB, OC \dots$ sind also einander gleich.

Da kongruente Dreiecke in bezug auf gleiche Seiten auch gleiche Höhen haben, so sind die

von O auf die Seiten gefällten Normalen $OG, OH, OJ, \dots$ einander gleich. Daraus folgt:

1. Halbiert man in einem regelmäßigen Polygon zwei aufeinander folgende Winkel und verbindet den Schnittpunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Polygons durch Strecken, so wird dadurch das Polygon in lauter kongruente gleichschenklige Dreiecke geteilt.

Sind in einem Polygon diese Dreiecke gleichseitig?

2. In jedem regelmäßigen Polygon gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit absteht.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygons. Er ist der Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Winkelsymmetralen.

§ 73. Bezüglich der Symmetrie der regelmäßigen Polygone gelten folgende Sätze:

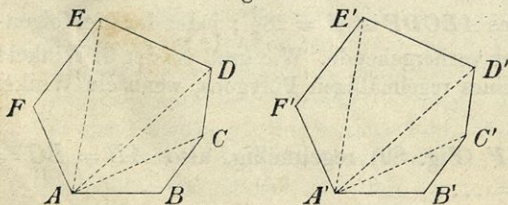
1. Sowohl jede Seitensymmetrale als jede Winkelsymmetrale eines regelmäßigen Vieleckes ist eine Symmetrieachse (Fig. 89).

Von der Richtigkeit überzeugt man sich durch Umwenden um die bezügliche Symmetrale.

2. Ein regelmäßiges Vieleck hat so viele Symmetrieachsen, als es Seiten hat. Denn ist die Seitenanzahl des Vieleckes gerade, so haben immer je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel dieselbe Symmetrale. Ist dagegen die Seitenanzahl ungerade, so fallen immer eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale zusammen.

§ 74.

Fig. 90.



Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ (Fig. 90), welche aus gleich vielen der

Ordnung nach kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst kongruent.

Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, daß zwei gleichliegende Dreiecke aufeinander fallen, z. B. ABC auf $A'B'C'$, so kommt auch das zweite Paar Dreiecke zur Deckung, folglich auch das dritte Paar . . . ; daher decken einander auch die ganzen Vielecke, d. i. sie sind kongruent.

Ein Vieleck zu übertragen.

Zerlegt man das gegebene Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 91) durch Diagonalen in Dreiecke und konstruiert das $\triangle GHJ \cong ABC$, über GJ das $\triangle GJK \cong ACD$, über GK das $\triangle GKL \cong ADE$ und

über GL das $\triangle GLM \cong AEF$ so ist das Vieleck $GHJKLM \cong ABCDEF$. Man braucht übrigens die Diagonalen der Vielecke nicht zu ziehen, sondern bestimmt nach § 55 nur die Punkte J, K, L, M .

1. Ein Fünfeck zu konstruieren, wenn die Seiten a, b, c, d und die von diesen eingeschlossenen Winkel $132^\circ, 120^\circ$ und 86° gegeben sind. § 76.

Man mache (Fig. 92)

$AB = a$, trage in B den Winkel 132° auf; auf dem neuen Schenkel schneide man $BC = b$ ab, trage in C den Winkel 120° auf; mache ferner $CD = c$, zeichne in D den Winkel 86° und schneide $DE = d$ ab. Zieht man nun AE ,

so ist $ABCDE$ das verlangte Fünfeck.

2. Zeichne ein Sechseck, in welchem die Seiten 22 mm, 37 mm, 18 mm, 25 mm, 40 mm nach der Ordnung die Winkel $120^\circ, 105^\circ, 140^\circ, 135^\circ$ einschließen!

Zahl der Bestimmungsstücke eines Vieleckes.

Man denke sich das Vieleck durch von einem Eckpunkt aus gezogene Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Für das erste Dreieck sind drei Bestimmungsstücke erforderlich. Für das nächste Dreieck (4. Eckpunkt) zwei weitere Stücke; ebenso für jeden folgenden Eckpunkt.

Wieviel Stücke bestimmen ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck? Prüfe daraus die Richtigkeit des Satzes: Die Zahl der Bestimmungsstücke eines Vieleckes ist gleich der doppelten Zahl der Eckpunkte weniger drei.

Ein regelmäßiges Polygon ist durch eine Seite und die Seitenzahl bestimmt. Prüfe diesen Satz an dem Dreieck AOB (Fig. 89). (Abhängigkeit der Bestandstücke voneinander; vgl. § 54.)

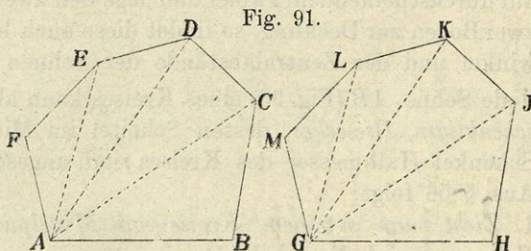


Fig. 91.

§ 75.

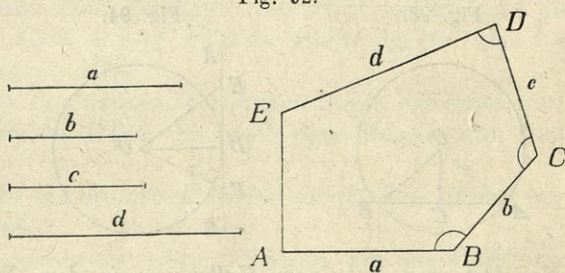


Fig. 92.

135
20
45
140
90
50

90
15
125

unvollständig

Neunter Abschnitt. Der Kreis.

§ 77. Zu gleichen Bogen eines Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Sehnen, gleiche Zentriwinkel und gleiche Zentralabstände der Sehnen.

Man zeichne zwei gleiche Kreise, den einen auf gewöhnlichem, den zweiten auf durchscheinendem Papier und lege den zweiten auf den ersten. Kommen zwei Bogen zur Deckung, so findet diese auch bezüglich der Sehnen, Zentriwinkel und der Zentralabstände der Sehnen statt.

§ 78. Jede Sehne AB (Fig. 93) eines Kreises kann als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden.

Aus § 56 folgt:

1. Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte die Senkrechte auf eine Sehne, so wird diese halbiert.

2. Die Symmetrale einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

§ 79. Es sei (Fig. 94) $AB \perp OD$. Jede zu AB gezogene schiefe Strecke, wie OE , $OF \dots$, ist länger als die Senkrechte OD ; also liegen die Punkte E , $F \dots$ außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, ist also eine Tangente des Kreises.

Fig. 93.

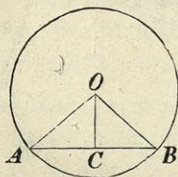


Fig. 94.

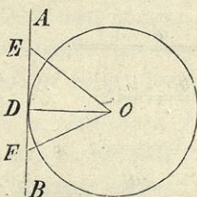
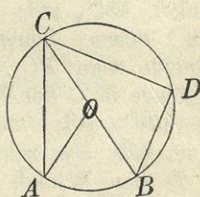


Fig. 95.



Errichtet man auf einem Halbmesser in dem Endpunkte D (Fig. 94) die Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Umgekehrt: Die auf der Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte eines Kreises heißt der Zentralabstand. Ist der Zentralabstand einer Geraden kleiner, ebenso groß oder größer als der Radius, so ist beziehungsweise die Gerade eine Sekante, eine Tangente oder sie liegt ganz außerhalb des Kreises. Und umgekehrt.

§ 80. Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel.

AOB (Fig. 95) ist ein Zentriwinkel, der auf dem Bogen AB aufsteht; ACB ist ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB aufsteht.

Ein Peripheriewinkel BDC , dessen zugehöriger Bogen ein Halbkreis ist, heißt ein Winkel im Halbkreise.

Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des Zentriwinkels, der auf demselben § 81. Bogen aufsteht.

Der Mittelpunkt eines Kreises kann in Beziehung auf einen Peripheriewinkel eine dreifache Lage haben: er liegt entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels

(Fig. 96 I), oder er liegt in der Winkelfläche des Peripheriewinkels

(Fig. 96 II), oder er liegt außerhalb der Winkelfläche des-

selben (Fig. 96 III).
1. Fall. Der Winkel m ist der Außenwinkel am Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks BOC ;

daher $a = \frac{m}{2}$. (§ 46, Aufg. 5.)

2. Fall. Dieser läßt sich auf den ersten zurückführen. Zieht man den Durchmesser CD , so ist a die Hälfte von m , b die Hälfte von n ; daher ist auch die Summe $a + b$, d. i. $\sphericalangle ACB$, die Hälfte der Summe $m + n$ oder des Winkels AOB .

3. Fall. Zieht man auch hier den Durchmesser CD , so ist (1. Fall) BCD die Hälfte von BOD , ebenso ACD die Hälfte von AOD , folglich auch die Differenz von BCD und ACD , d. i. $\sphericalangle ACB$ die Hälfte der Differenz von BOD und AOD , d. i. des $\sphericalangle AOB$.

Da ein Zentriwinkel durch den ganzen zugehörigen Bogen gemessen wird, so hat ein Peripheriewinkel die Hälfte des zugehörigen Bogens zum Maß. Daraus folgt:

1. Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.
2. Ein Winkel im Halbkreise ist ein rechter. Denn er hat die Hälfte des Halbkreises zum Maß.

Aufgaben:

1. Ein Zentriwinkel eines Kreises sei a) 64° , b) $87^\circ 45'$, c) $128^\circ 13' 50''$, d) $64\frac{20}{3}$.

Wie groß ist der Peripheriewinkel über demselben Bogen?

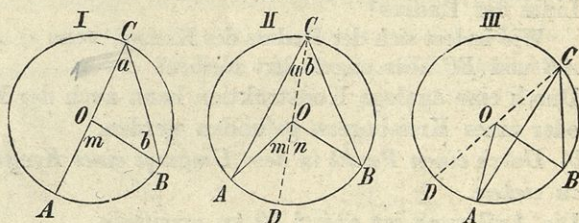
2. Ein Peripheriewinkel eines Kreises sei a) 56° , b) $41^\circ 37'$, c) $108^\circ 12' 12''$, d) $64\frac{20}{3}$. Wie groß ist der Zentriwinkel über demselben Bogen?

3. Wie groß ist ein Peripheriewinkel eines Kreises, wenn der zugehörige Zentriwinkel über $\frac{3}{8}$ der Peripherie aufsteht?

4. Von demselben Punkt auf der Peripherie eines Kreises werden zwei Sehnen gezogen, welche Bogen von $130\frac{10}{2}$ und $70\frac{20}{3}$ abschneiden. Welchen Winkel bilden die Sehnen?

5. In welchem Vierecke bilden zwei Durchmesser eines Kreises die Diagonalen? Wann wird es ein Quadrat?

Fig. 96.



§ 82. Konstruktionsaufgaben.

a) Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 97), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Man ziehe die Strecken AB und BC und errichte die Symmetralen derselben; welcher Punkt ist dann der gesuchte Mittelpunkt und welche Linie der Radius?

Wie ändert sich der Radius des Kreises, wenn $\sphericalangle ABC$ wächst, die Strecken AB und BC aber ungeändert bleiben?

Durch eine analoge Konstruktion kann auch der Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens gefunden werden.

b) Durch einen Punkt in dem Umfange eines Kreises an diesen die Tangente zu ziehen.

Die Auflösung ist aus § 79 zu ermitteln.

c) Durch einen Punkt A außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man verbinde (Fig. 98) den gegebenen Punkt A mit dem

Fig. 97.

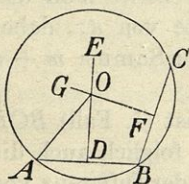
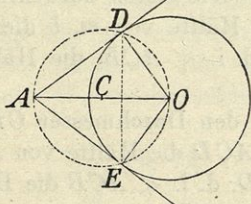


Fig. 98.



Mittelpunkte O des gegebenen Kreises durch die Strecke AO , halbiere diese in C und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten D und E schneidet. Zieht man nun AD und AE , so

sind diese beiden Geraden Tangenten des Kreises. (Beweis mit Hilfe der Winkel ADO und AEO .)

Aus der Kongruenz der Dreiecke ADO und AEO folgt, daß die Tangenten AE und AD einander gleich sind.

Wie ändert sich die Lage der Punkte D und E , wenn der Abstand AO wächst?

Übungsaufgaben:

1. Aus einem gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt.
2. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.
3. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

§ 83. Sehnen- und Tangentendreiecke.

a) Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 99) DO die Symmetrale der Seite AB und FO die Symmetrale der Seite AC . Der Schnittpunkt O der beiden Symmetralen ist sowohl von A und B als auch von A und C , somit auch von B und C gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von B und C gleiche Abstände, so muß er auch in der Symmetrale der Seite BC liegen. Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in dem selben Punkte, der von den drei Eckpunkten gleiche Abstände hat.

Von dem Punkt O läßt sich mithin ein Kreis beschreiben, der durch die Eckpunkte des Dreieckes geht. Sein Radius ist der Abstand des Punktes O von einem Eckpunkt. Er heißt dem Dreieck umgeschrieben, das Dreieck ist dem Kreis eingeschrieben (Sehndreieck).

Wo liegt der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises *a)* bei einem spitzwinkligen, *b)* bei einem rechtwinkligen, *c)* bei einem stumpfwinkligen Dreiecke?

b) Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 100) AO die Symmetrale des Winkels BAC und CO die Symmetrale des Winkels ACB . Der Schnittpunkt O

der beiden Symmetralen ist sowohl von den Schenkeln AB und AC als auch von den Schenkeln AC und BC , somit auch von AB und BC gleich weit entfernt. Hat

aber der Punkt O von den Schenkeln AB und BC gleiche Abstände, so muß er auch in der Symmetrale des Winkels ABC liegen.

Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

Von dem Punkte O läßt sich ein Kreis beschreiben, der die Seiten des Dreieckes berührt. Sein Radius ist der Abstand des Punktes O von einer Seite. Er heißt dem Dreieck eingeschrieben. Das Dreieck ist dem Kreise umgeschrieben. (Tangentendreieck.)

Jede Seitensymmetrale eines gleichseitigen Dreieckes hat überdies welche Bedeutung? Folgerung daraus bezüglich des Mittelpunktes des einem gleichseitigen Dreiecke ein- und umgeschriebenen Kreises.

Sehnen- und Tangentenvierecke.

§ 84.

a) Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt ein Sehnenviereck: $ABCD$ in Fig. 101. Der Kreis ist dem Vierecke umgeschrieben. Da die Winkel A und C des Sehnenviereckes $ABCD$ durch die Hälfte der Bogen BCD und BAD gemessen werden, so hat ihre Summe die halbe Peripherie zum Maße; mithin ist $A + C = 180^\circ$, daher auch $B + D = 180^\circ$.

In jedem Sehnenviereck sind zwei Gegenwinkel supplementär.

Welche Parallelogramme können daher nur Sehnenvierecke sein? Wo liegt der Mittelpunkt des Kreises? Weshalb läßt sich jedem gleichschenkligen Trapez ein Kreis umschreiben? Die Konstruktion ist in Fig. 102 enthalten. Weshalb ist $OB = OA = OD = OC$?

b) Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt ein

Fig. 99.

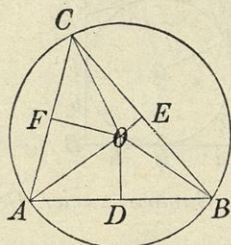


Fig. 100.

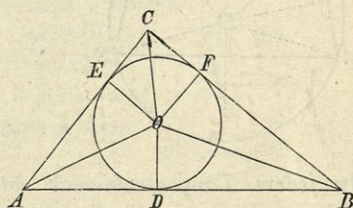
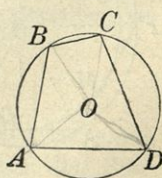


Fig. 101.



Tangentenviereck; $ABCD$ (Fig. 103). Der Kreis ist demselben eingeschrieben.

In Fig. 103 sind die mit a, b, c und d bezeichneten Tangenten einander gleich. Da $AB + CD = a + b + c + d$ und $AD + BC = a + b + c + d$ ist, so ist $AB + CD = AD + BC$.

Fig. 102.

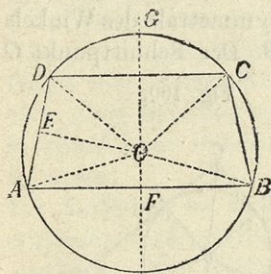


Fig. 103.

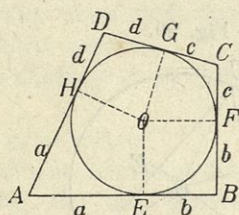
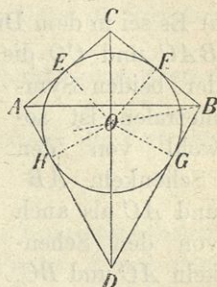


Fig. 104.



In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern.

Welche Parallelogramme können nur Tangentenvierecke sein? Der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises muß den gleichen Abstand von allen Seiten haben. Wo muß er daher liegen? (§ 43.) Vgl. auch § 83 b).

Weshalb läßt sich jedem Deltoid ein Kreis einschreiben? Die Konstruktion ist in Fig. 104 enthalten. Weshalb ist $OE = OF = OG = OH$?

§ 85. Regelmäßige Sehnen- und Tangentenpolygone.

Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Polygons (§ 72) ist a) von allen Eckpunkten, b) von allen Seiten gleich weit entfernt. Er ist daher sowohl der Mittelpunkt des dem regelmäßigen Polygone umgeschriebenen als auch des eingeschriebenen Kreises (Fig. 105). Welche Abstände sind die Radien?

§ 86. Es sei (Fig. 106) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Teile geteilt.

Fig. 105.

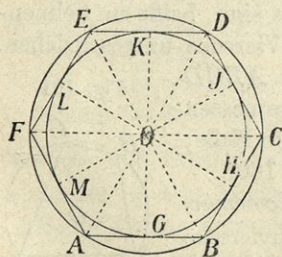
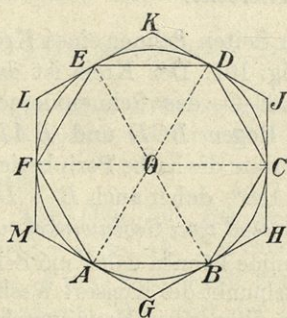


Fig. 106.



a) Zieht man durch die Teilungspunkte die Sehnen $AB, BC, CD, DE \dots$ und dreht das dadurch entstehende, dem Kreise eingeschriebene Vieleck $ABCDE \dots$ um den Mittelpunkt O , bis jeder Teilungspunkt den nächstfolgenden

deckt, so deckt auch jede Seite des Vieleckes die folgende Seite und jeder Winkel den folgenden Winkel; das Vieleck ist also regelmäßig.

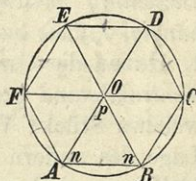
b) Errichtet man in den Teilungspunkten $A, B, C, D, \dots$ auf die zudenselben gezogenen Halbmesser Normale, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck $GHIJKL \dots$. Dieses Vieleck ist regelmäßig; denn dreht man dasselbe um den Mittelpunkt, bis jeder Teilungspunkt mit dem nächstfolgenden zusammenfällt, so deckt auch jeder Halbmesser den folgenden, daher auch jede Tangente die folgende, und somit auch jeder Winkel des Vieleckes den folgenden.¹⁾

Es ergibt sich daher der Satz:

Wird die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Teile geteilt, so sind die Teilungspunkte a) die Eckpunkte eines eingeschriebenen und b) die Berührungspunkte eines umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes.

Es sei $ABCDEF$ Fig. 107 ein dem Kreise eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck. Wie groß ist Winkel p ? Wie groß sind die Winkel n ? Wie groß ist mithin die Seite des einem Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes?

Fig. 107.



§ 87.

Aufgaben:

1. Die Peripherie eines Kreises a) in 6, b) in 3, c) in 12 gleiche Teile zu teilen.
2. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges a) Dreieck, b) Viereck, c) Sechseck, d) Achteck, e) Zwölfeck einzuschreiben und umzuschreiben.
3. Einem gegebenen Kreise mit Hilfe des Transporteurs ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Zehneck ein- und umzuschreiben.
4. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, wenn die Seite gegeben ist.

Hier kommt es nur darauf an, die Größe des Kreises zu finden, welchem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Zu diesem Ende wird das Dreieck ABO (Fig. 106) konstruiert, indem man für AB die gegebene Seite und für BAO und ABO die halben Vieleckswinkel annimmt. Man berechne daher zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Strecke, welche der gegebenen Seite gleich ist, trage in jedem Endpunkte den halben Vieleckswinkel auf, aus dem Schnittpunkte der beiden neuen Schenkel beschreibe man durch die Endpunkte der gezogenen Strecke einen Kreis und trage darin die gegebene Seite als Sehne herum.

Ein regelmäßiges Polygon ist durch zwei Stücke bestimmt. In diesem Falle durch die Seite und einen Winkel.

Ist ein regelmäßiges Polygon durch die Seitenzahl und den Radius a) des eingeschriebenen, b) des umgeschriebenen Kreises bestimmt?

5. Zeichne eine Strecke von 2 cm Länge und konstruiere über derselben ein regelmäßiges a) Sechseck, b) Achteck!

Zwei Kreise.

§ 88.

Zwei Kreise heißen *konzentrisch* oder *exzentrisch*, je nachdem sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben oder nicht. Die zwischen den Peri-

¹⁾ Der Schüler nehme die Drehung so vor, wie es in der Fußnote zu § 60 beschrieben wurde.

pherien zweier konzentrischer Kreise liegende Fläche heißt *Kreisring* (Fig. 108).

Die durch die Mittelpunkte zweier exzentrischer Kreise gelegte Gerade heißt *Zentrale*, der Abstand der Mittelpunkte *Zentralabstand*. Da in die

Fig. 108.

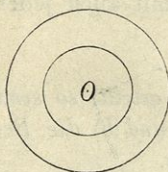
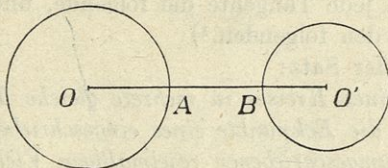


Fig. 109.



Zentrale ein Durchmesser eines jeden der beiden Kreise fallen muß, so ist sie für beide eine Symmetrieachse.

Die Lage zweier Kreise ist von der

Beziehung zwischen dem Zentralabstand und den beiden Radien derart abhängig, daß sie aus ihr erkannt werden kann.

1. Haben die Umfänge zweier Kreise keinen Punkt gemeinsam, so ist der *Zentralabstand* größer als die *Summe der beiden Radien* (Fig. 109). Um welches Stück? Verschiebt man den einen der beiden Kreise (O') bei fester Lage des andern (O) so, daß sein Mittelpunkt auf der früheren *Zentrale* bleibt, so sind noch folgende Lagen möglich.

2. Die beiden Umfänge haben einen gemeinschaftlichen Punkt und der kleinere Kreis liegt sonst außerhalb des größeren; der gemeinschaftliche Punkt muß wegen der Symmetrie in der *Zentrale* liegen; *diese ist gleich der Summe der beiden Radien* (Fig. 110).

Fig. 110.

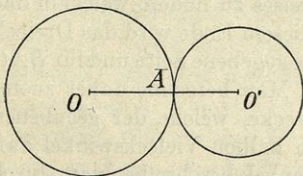


Fig. 111.

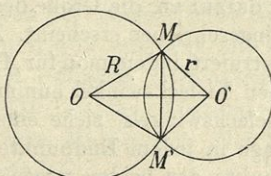
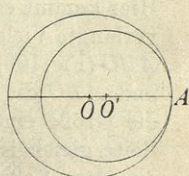


Fig. 112.



3. Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinschaftlich, sie schneiden einander (Fig. 111). Wegen der Symmetrie muß die *Zentrale* die *Symmetrale* der gemeinschaftlichen Sehne, der zugehörigen Bogen und *Zentriwinkel* sein. Der *Zentralabstand* liegt zwischen der *Summe* und *Differenz der beiden Radien* (§ 44).

4. Die beiden Kreise haben wieder einen Punkt gemeinschaftlich (Fig. 112), der ebenfalls auf der *Zentrale* liegen muß, aber der kleinere Kreis liegt sonst innerhalb des größeren; *der Zentralabstand ist gleich der Differenz der beiden Radien*.

5. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam, der kleinere liegt ganz innerhalb des größeren. *Der Zentralabstand ist kleiner als die Differenz der beiden Radien*. (Die Zeichnung aus Fig. 112 abzuleiten.)

6. Die Kreise werden konzentrisch, *der Zentralabstand ist Null*.

Bei fortgesetzter Verschiebung wiederholen sich die früheren Fälle.
 In den Fällen 2 und 4 sagt man, die beiden Kreise *berühren* einander; in 2 von außen, in 4 von innen. Der gemeinschaftliche Punkt heißt der *Berührungspunkt*.
 Die obigen Sätze gelten auch umgekehrt. Wie lauten sie dann?

Aufgaben:

1. Die Lage zweier Kreise zu bestimmen, für welche der Zentralabstand und die Halbmesser folgende Werte haben:

a)	Zentralabstand	8 dm,	Halbmesser	5 dm und	3 dm;
b)	„	2 „	„	7 „ „	4 „
c)	„	9 „	„	6 „ „	2 „
d)	„	6 „	„	8 „ „	3 „
e)	„	4 „	„	9 „ „	5 „
f)	„	0,	„	6 „ „	3 „
2. Mit den Halbmessern 35 mm und 21 mm zwei Kreise zu konstruieren, die einander a) von außen, b) von innen berühren.
3. Aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu konstruieren, welcher einen gegebenen Kreis berührt.

Zehnter Abschnitt.

Geometrische Örter.

Ein Kreis, der mit dem Radius 3 cm von einem Punkte aus beschrieben § 89.
 wird, enthält alle Punkte, welche von diesem Punkte den Abstand 3 cm haben. Alle anderen Punkte der Zeichnungsebene haben diese Eigenschaft nicht; denn wie groß ist der Abstand a) der Punkte innerhalb, b) außerhalb des Kreises von diesem Punkte? Man sagt, der geometrische Punkt Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand 3 cm haben, ist ein Kreis, welcher von diesem Punkte als Mittelpunkt mit dem Radius 3 cm konstruiert wird.

Allgemein:

Eine Linie, welche die Punkte enthält, die eine bestimmte Bedingung erfüllen, heißt der geometrische Ort dieser Punkte.

Den geometrischen Ort anzugeben für

1. alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Abstand a haben.
2. die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und durch einen gegebenen Punkt gehen.
3. alle Punkte, welche von den Endpunkten einer Strecke gleich weit abstehen.
4. die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen.
5. alle Punkte, welche von einer gegebenen Geraden den Abstand d haben.
6. die Mittelpunkte aller Kreise, welche den Radius r haben und eine gegebene Gerade berühren.

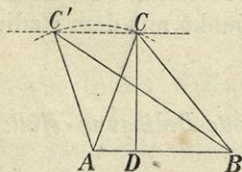
7. alle Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände haben.
8. die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei nicht parallele Gerade berühren.
9. die Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke über einer Geraden als Hypotenuse.
10. die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren.
11. die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren.
12. die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis *a)* von außen, *b)* von innen berühren.
13. alle Punkte im Raume, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand *d* haben.
14. alle Punkte im Raume, die von einer Ebene den Abstand *d* haben.
15. alle Punkte im Raume, die von zwei gegebenen parallelen Ebenen (z. B. Fußboden und Plafond) denselben Abstand haben.

Ist für einen Punkt eine einzige Ortslinie gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes nicht bestimmt, da es unzählig viele Punkte gibt, welche in dieser Ortslinie liegen; ein geometrischer Ort enthält daher die Lösungen einer *unbestimmten* Aufgabe. Sind dagegen für einen Punkt zwei Ortslinien bekannt, so gibt es nur einen oder eine bestimmte Anzahl von Punkten, welche in beiden geometrischen Örtern liegen; zwei Ortslinien] eines Punktes enthalten daher die Auflösung einer *bestimmten* Aufgabe.

Die geometrischen Örter sind für die Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben von großer Wichtigkeit, da es bei diesen meist nur auf die Bestimmung von Punkten ankommt.

- § 90. Ein Dreieck *ABC* (Fig. 113) zu konstruieren, wenn zwei Seiten *AB* und *AC* und die Höhe *CD* auf die erste dieser Seiten gegeben sind.

Fig. 113.



Durch die gegebene Seite *AB* sind die beiden Eckpunkte *A* und *B* bestimmt. Für den dritten Eckpunkt *C* ist ein geometrischer Ort der um *A* mit dem Halbmesser *AC* beschriebene Kreis (weshalb?) und ein zweiter die zu *AB* im Abstände *CD* gezogene Parallele (weshalb?); somit ist auch *C* bestimmt.

Die Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich.

Die Aufgabe hat zwei Auflösungen oder eine oder keine. Wann tritt jeder dieser drei Fälle ein?

- § 91. Aufgaben:

1. In einer Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt zu finden, welcher von den beiden anderen Seiten gleich weit entfernt ist.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe gegeben sind. Welche Fälle sind möglich?
3. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und die Höhe auf die dritte Seite gegeben sind.

4. Einen Rhombus zu konstruieren, wenn die Höhe und ein Winkel (29 mm , 70°) gegeben sind.
5. Einen Rhombus zu konstruieren, wenn ein Winkel und der Radius des eingeschriebenen Kreises (15 mm , 65°) gegeben sind.
6. Ein Trapez zu zeichnen, wenn die zwei Paralleelseiten, ein Winkel an denselben und die Höhe (40 mm , 32 mm , 60° , 26 mm) gegeben sind.
7. Ein Trapez zu zeichnen, wenn die zwei Schenkel, eine Paralleelseite und die Höhe (34 mm , 42 mm , 48 mm , 27 mm) gegeben sind.
8. Ein gleichschenkliges Trapez zu zeichnen, wenn der Schenkel, die Diagonale und die Höhe (36 mm , 46 mm , 28 mm) gegeben sind.
9. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher
 - a) durch zwei gegebene Punkte geht,
 - b) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt,
 - c) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt,
 - d) zwei gegebene Gerade berührt,
 - e) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,
 - f) zwei gegebene Kreise berührt.
10. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt und dessen Peripherie
 - a) durch zwei gegebene Punkte geht,
 - b) zwei gegebene Gerade berührt. (Sie können parallel sein oder nicht.)
11. Einen Kreis zu beschreiben, welcher
 - a) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt,
 - b) zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.
12. Drei Kreise, deren Halbmesser gegeben sind, so zu konstruieren, daß sie einander von außen berühren.
13. Ein rechter Winkel ist gegeben; es sind Punkte zu suchen, die a) von dem einen Schenkel den Abstand 5 cm , b) von dem andern Schenkel den Abstand 4 cm haben, c) beiden Bedingungen genügen.
Wieviel Punkte genügen der Forderung in a und b, wieviel der in c?
14. Man bestimme nach Aufgabe 13 die Lage eines Punktes in der Ebene der Tafel.

Eilfter Abschnitt.

Die senkrechten Formen des Prismas, des Zylinders, der Pyramide und des Kegels.

Prisma und Zylinder.

§ 92.

Ähnlich wie der Quader über einem rechtwinkligen Parallelogramme aufgebaut ist, können auch verwandte Körper über anderen ebenen Figuren errichtet werden.

Man lege ein Dreieck zunächst auf die Tischebene und nehme mit ihm eine Parallelverschiebung in vertikaler Richtung vor. Es entsteht ein senkrechtes *dreiseitiges Prisma* (Säule, Fig. 114), welches von zwei kongruenten Dreiecken als Grundflächen und drei Rechtecken als Seitenflächen begrenzt wird. Die sämtlichen Seitenflächen bilden den *Mantel* des Prismas. Grundkanten?

Seitenkanten? Höhe? Vergleiche die Seitenkanten nach ihrer Länge! Dieses Prisma heißt ein senkrechtes dreiseitiges Prisma. Wie würde man ein senkrechtes vierseitiges, fünfseitiges, sechseitiges... Prisma erhalten?

Regelmäßig heißt ein senkrechtes Prisma, wenn es zu Grundflächen regelmäßige Figuren hat.

Ein *schiefes Prisma* erhält man durch eine Parallelverschiebung einer ebenen Figur aus der horizontalen Lage in einer schrägen Richtung.

Würfel und Quader sind besondere Formen der Prismen.

Legt man einen Kreis zunächst auf eine horizontale Ebene und nimmt dann in vertikaler Richtung eine Parallelverschiebung vor, so beschreibt er einen *senkrechten Zylinder* (Fig. 115). Dieser ist von zwei parallelen und kongruenten Kreisflächen als Grundflächen und einer zwischen diesen liegenden krummen Fläche als Mantelfläche begrenzt. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte heißt die *Achse*. Eine Seite CD des Zylinders erhält man durch die Verbindung der Endpunkte zweier paralleler und gleichgerichteter Radien der Grundflächen. Vergleiche die Seiten nach ihrer Länge. *Höhe* des Zylinders? Ist eine Seite (Höhe) eines senkrechten Zylinders dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt der Zylinder *gleichseitig*. Ein *Achsenschnitt* ist der Schnitt eines Zylinders mit einer durch die Achse gelegten Ebene. (Achsenschnitt eines senkrechten, eines gleichseitigen Zylinders?)

Einen senkrechten Zylinder kann man auch durch eine Umdrehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten entstanden denken. Welche Seite des Rechteckes gibt die Höhe, welche den Radius der Grundfläche? Welche Figur erzeugt durch eine Umdrehung einen gleichseitigen Zylinder?

Fig. 114.

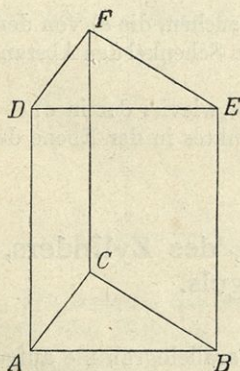


Fig. 115.

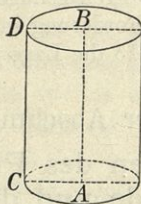
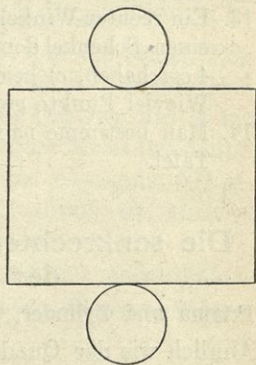


Fig. 116.



Das Netz eines regelmäßigen Prismas zu zeichnen, wenn die Grundfläche *a)* ein Dreieck (welches?), *b)* ein Viereck (welches?), *c)* ein Sechseck ist. Welche Figur ist das Netz des Mantels? Grundlinie? Höhe?

Fig. 116 enthält das Netz eines senkrechten Zylinders. Der Mantel ist ein Rechteck; die Seiten desselben, welche von den beiden Grundkreisen berührt werden, müssen $3\frac{1}{2}$ mal so groß sein als ihr Durchmesser.

Pyramide, Pyramidenstumpf, Ähnlichkeit der Dreiecke.

§ 93.

Denkt man sich mit dem Dreiecke ABC (Fig. 117) eine Parallelverschiebung so vorgenommen, daß der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises stets in derselben Normalen auf der Dreiecksfläche bleibt und die Fläche des Dreieckes gleichmäßig so abnimmt, daß es endlich in einem Punkte verschwindet, so wird ein Körper beschrieben, der eine senkrechte dreiseitige Pyramide genannt wird. Sie ist von einem Dreiecke als Grundfläche und von drei gleichschenkligen Dreiecken, welche den *Mantel* der Pyramide bilden, begrenzt. Grundkanten. Seitenkanten. Diese sind gleich lang. (Modell.) Der Punkt S heißt der *Scheitel* der Pyramide, SD (senkrecht auf der Grundfläche) die *Höhe*. Diese Pyramide kann auch dadurch erzeugt werden, daß man im Mittelpunkt des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises die Normale errichtet, einen Punkt S derselben mit einem Eckpunkte des Dreieckes durch eine Gerade verbindet und diese Verbindungslinie an dem Umfange des Dreieckes so herumführt, daß sie immer durch den Punkt S geht. Sie beschreibt dabei den Mantel der Pyramide.

Fig. 117.

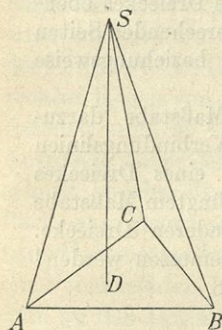


Fig. 118.

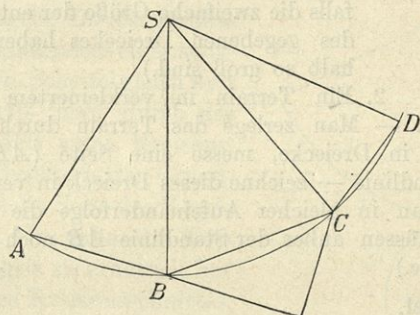


Fig. 119.

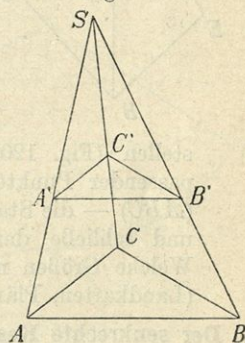


Fig. 118 enthält das Netz einer senkrechten dreiseitigen Pyramide. Wie lange ist die gebrochene Linie $ABCD$? Was ist SA an der Pyramide?

Schneidet man die Pyramide Fig. 119 durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so wird sie in zwei Teile geteilt, von welchen der eine ($ABC A'B'C'$) Pyramidenstumpf, der zweite $SA'B'C'$ die Ergänzungspyramide heißt. Der Pyramidenstumpf ist von zwei in parallelen Ebenen liegenden Dreiecken als Grundflächen und von drei gleichschenkligen Trapezen begrenzt, welche den Mantel bilden.

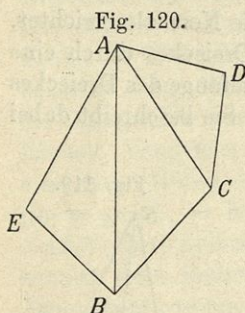
Die Schnitfigur $A'B'C'$ wird um so kleiner, je näher sie der Spitze der vollständigen Pyramide liegt. Sie hat aber dieselben Winkel wie die Grundfläche (Nachweis durch paarweise vorgenommene Deckung an einem Modell!); ferner sind, wie man sich durch Abmessung an dem Modell überzeugen kann, alle Seiten, verglichen mit den entsprechenden der Grundfläche in demselben Maße verkleinert. Sie hat bei verschiedener Größe dieselbe Gestalt wie die Grundfläche. Zwei derartige Dreiecke heißen *ähnlich*. Von zwei ähnlichen

Dreiecken ist jedes eine Abbildung des andern in vergrößertem oder verkleinertem Maßstabe, je nachdem die paarweise einander entsprechenden Seiten des einen in gleichem Maße vergrößert oder verkleinert sind.

Es läßt sich zeigen, daß zwei Dreiecke schon ähnlich sind, wenn sie in den Winkeln paarweise übereinstimmen.

Eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche eine regelmäßige Figur ist, heißt *regelmäßig*. Eine von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzte Pyramide heißt ein *Tetraeder*.

Anzugeben, wie *a)* eine senkrechte quadratische Pyramide, *b)* eine regelmäßige sechseckige Pyramide entstehen kann? Die zugehörigen Pyramidenstümpfe zu beschreiben.

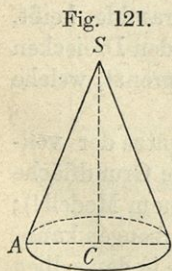


Aufgaben:

1. Zu einem gegebenen Dreiecke ein ähnliches zu zeichnen, wenn die Seiten desselben *a)* doppelt so groß, *b)* halb so groß sind als die des gegebenen. (Verdopple eine Seite des gegebenen Dreiecks und trage die anliegenden Winkel desselben in den Endpunkten auf. Überzeuge dich durch Abmessen, daß die beiden anderen Seiten des Dreiecks ebenfalls die zweifache Größe der entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks haben, beziehungsweise halb so groß sind.)
2. Ein Terrain in verkleinertem Maßstabe darzustellen (Fig. 120). — Man zerlege das Terrain durch Verbindungslinien passender Punkte in Dreiecke, messe eine Seite (*AB*) eines Dreiecks (*ABC*) — die *Standlinie* — zeichne dieses Dreieck in verjüngtem Maßstabe und schließe daran in gleicher Aufeinanderfolge die anderen Dreiecke. Welche Größen müssen außer der *Standlinie AB* noch gemessen werden? (Landkarten, Pläne.)

§ 94. Der senkrechte Kegel.

Nimmt man mit einem Kreise eine Parallelverschiebung so vor, daß der Mittelpunkt stets in derselben Normale auf der Kreisfläche bleibt und die Fläche des Kreises so abnimmt, daß er endlich in einen Punkt sich zusammenzieht, so wird ein Körper beschrieben, der ein *senkrechter Kegel* heißt. Er ist



von einem Kreise als *Grundfläche* und einer krummen Fläche, dem *Mantel*, begrenzt. Der senkrechte Kegel kann auch dadurch erzeugt werden, daß man im Mittelpunkte eines Kreises die Normale auf die Kreisfläche errichtet, von einem Punkte *S* (Fig. 121) zur Peripherie des Kreises eine Strecke zieht und diese an dem Umfange des Kreises so herumführt, daß sie immer durch den Punkt *S* geht. Sie beschreibt dabei den Mantel eines senkrechten Kegels.

Einen *schiefen Kegel* würde man durch Parallelverschiebung eines gleichmäßig kleiner werdenden Kreises in einer Richtung erhalten, welche nicht in die im Mittelpunkte auf die Kreisfläche errichtete Normale fällt.

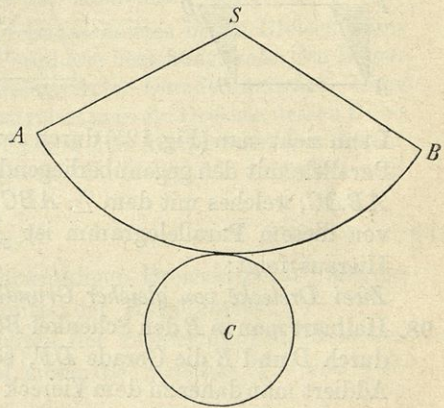
Der Punkt S heißt der Scheitel, eine Strecke (SA), welche den Scheitel mit einem Punkte der Grundfläche verbindet, eine Seite des Kegels. Alle Seiten eines senkrechten Kegels sind gleich lang. (Kongruenzsatz?) Die *Achse* des Kegels ist die Strecke zwischen dem Scheitel und dem Mittelpunkte des Grundkreises; unter *Höhe* eines Kegels versteht man die Senkrechte vom Scheitel auf die Grundfläche. Beim senkrechten Kegel fällt die Höhe mit der Achse zusammen. Ist die Seite eines senkrechten Kegels dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt der Kegel ein *gleichseitiger*.

Legt man durch die Achse eines Kegels eine Ebene, so heißt die Schnittfigur ein *Achsenschnitt* des Kegels. Es ist ein Dreieck; welches bei einem a) senkrechten, b) gleichseitigen Kegel?

Einen senkrechten Kegel kann man auch durch eine Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten erzeugen. Was bedeutet diese Kathete an dem Kegel, was die andere Kathete, was die Hypotenuse? Welches rechtwinklige Dreieck erzeugt durch eine Umdrehung einen gleichseitigen Kegel?

Wie erhält man einen Kegelstumpf? (Analogie mit dem Pyramidenstumpf.) Netz eines senkrechten Kegels. Da alle Punkte der Peripherie des Grundkreises eines senkrechten Kegels von dem Scheitel gleich weit entfernt sind, so erhält man durch das Aufrollen seines Mantels einen Kreisausschnitt, welcher die Peripherie der Grundfläche zum Bogen und die Seite des Kegels zum Halbmesser hat. Um daher das Netz eines senkrechten Kegels zu erhalten, hat man an den Bogen des Kreisausschnittes, den man durch Aufrollen des Mantels erhält, noch den Grundkreis zu zeichnen (Fig. 122).

Fig. 122.

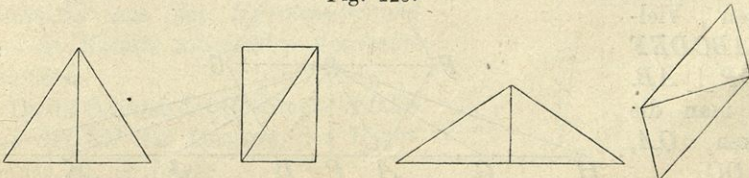


Zwölfter Abschnitt.

Flächengleichheit, Verwandlung und Teilung ebener Figuren.

Zwei Figuren, welche denselben Flächeninhalt haben, heißen *flächengleich*. § 95. Zwei kongruente Figuren sind auch flächengleich. Figuren, welche aus kongruenten Teilen bestehen, sind im allgemeinen nicht kongruent, aber stets flächengleich (Fig. 123).

Fig. 123.



- § 96. Zieht man (Fig. 124) von den Eckpunkten A und B des schiefwinkligen Parallelogrammes $ABDC$ zu der Seite CD die Normalen AF und BE , so erhält man das Rechteck $ABEF$, welches mit dem Parallelogramme $ABDC$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Die rechtwinkligen Dreiecke BED und AFC sind kongruent (Kongruenzsatz?); addiert man jedes derselben zu dem Trapeze $ABEC$, so müssen auch die Summen gleich sein, d. i. Parallelogramm $ABDC =$ Rechteck $ABEF$.

Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist flächengleich einem Rechtecke, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Aus diesem Lehrsatzes folgt:

Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich; denn jedes ist mit demselben Rechtecke flächengleich.

- § 97. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 124.

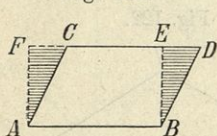


Fig. 125.

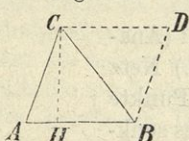
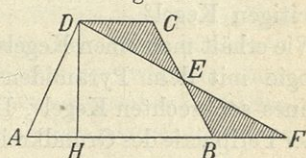


Fig. 126.



Denn zieht man (Fig. 125) durch zwei Eckpunkte C und B des Dreieckes ABC Parallele mit den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht das Parallelogramm $ABDC$, welches mit dem $\triangle ABC$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; von diesem Parallelogramm ist ABC die Hälfte.

Hieraus folgt:

Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

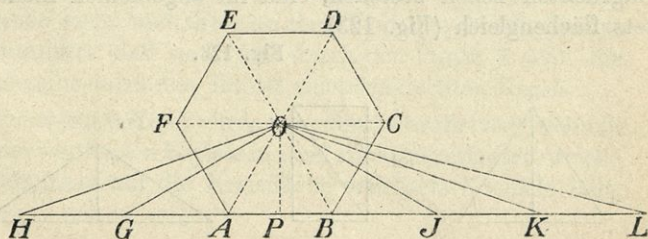
- § 98. Halbiert man in E den Schenkel BC des Trapezes $ABCD$ (Fig. 126) und zieht durch D und E die Gerade DF , so ist $\triangle CDE \cong BFE$. (Kongruenzsatz?) Addiert man daher zu dem Viereck $ABED$ einmal das $\triangle CDE$ und dann das $\triangle BFE$, so müssen die Summen gleich sein, d. i. Trapez $ABCD =$ Dreieck AFD . Die Grundlinie des Dreieckes AFD ist $AB + BF = AB + CD$, also gleich der Summe der Paralleelseiten des Trapezes, und die Höhe DH gleich der Höhe des Trapezes.

Jedes Trapez ist flächengleich einem Dreiecke, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich ist der Summe der parallelen Seiten des Trapezes.

- § 99. Es sei (Fig. 127)

Fig. 127.

O der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes $ABCDEF$ und $OP \perp AB$. Zieht man die Strecken OA , OB , OC , ..., H G A P B J K L



so wird das Vieleck in lauter kongruente Dreiecke zerlegt. Trägt man nun alle Seiten des Vieleckes auf der verlängerten AB auf und zieht von den Endpunkten zu dem Punkte O Strecken, so ist $\triangle HOL = \triangle AOB \times 6$, Polygon $ABCDEF = \triangle AOB \times 6$. Daher Polygon $ABCDEF = \triangle HOL$. *Jedes regelmäßige Vieleck ist flächengleich einem Dreiecke, das den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes desselben von einer Seite zur Höhe hat.*

Läßt man in einem regelmäßigen Vielecke die Anzahl der Seiten ohne Ende zunehmen, so nähert sich das Vieleck ohne Ende einem Kreise, der Umfang des Vieleckes der Peripherie und der Abstand des Mittelpunktes des Vieleckes von einer Seite dem Halbmesser des Kreises.

Daraus ergibt sich:

Ein Kreis ist flächengleich einem Dreiecke, das die Peripherie des Kreises zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Ebenso findet man:

Ein Kreisausschnitt ist flächengleich einem Dreiecke, das die Länge des Kreisbogens zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Die Verwandlung eines Kreises oder Kreisausschnittes in ein Dreieck kann dadurch ausgeführt werden, daß man die Peripherie beziehungsweise den Bogen des Ausschnittes in kleine Teile teilt und diese auf eine Gerade überträgt. Über der so erhaltenen Strecke als Grundlinie konstruiert man ein Dreieck, dessen Höhe der Radius ist. Dieses Dreieck ist nur annähernd dem Kreise oder dem Sektor gleich, da seine Grundlinie nur näherungsweise der Peripherie bezüglich dem Bogen gleich ist.

Flächensätze des rechtwinkligen Dreieckes.

§100.

Zieht man (Fig. 128) die Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes ABC auf die Hypotenuse, so erhält man zwei Abschnitte der Hypotenuse.

Man konstruiere ferner über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes die Quadrate, verlängere CD bis L und ziehe die Strecken FB und CG .

1. Es ist $\triangle ABF \cong \triangle AGC$ (Kongruenzsatz?)

Da $\triangle ABF = \frac{1}{2} AFEC$ und $\triangle ACG = \frac{1}{2} ADLG$, so ist $AFEC = ADLG$.

Ebenso kann bewiesen werden, daß $BCKJ = DBHL$.

Das Quadrat über jeder Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Abschnitte derselben.

2. Da die Summe der Rechtecke $ADLG$ und $BDLH$ das Quadrat der Hypotenuse ist, so folgt:

Fig. 128.

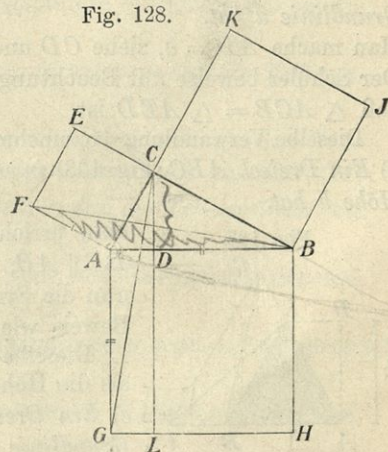
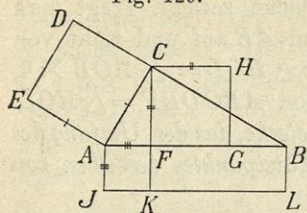


Fig. 129.



Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten (Pythagoreischer Lehrsatz).

Daher ist das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der anderen Kathete.

3. Es ist (Fig. 129) $CHGF = ACDE - AFKJ$ oder $CHGF = ABLJ - AFKJ = BFKL$.

Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

§101. Verwandlung ebener Figuren.

Ein gegebenes Gebilde in ein anderes *verwandeln* heißt ein Gebilde konstruieren, welches bestimmten Bedingungen entspricht und dem gegebenen flächengleich ist.

- a) Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 130) in ein gleichschenkliges über derselben Grundlinie AB zu verwandeln.

Die Konstruktion ist aus Fig. 131 zu erkennen. Beweis?

- b) Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 131) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel m enthält.

Fig. 130.

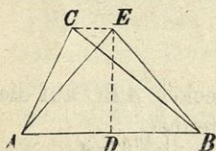


Fig. 131.

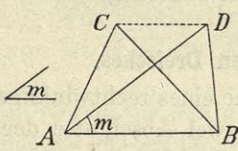
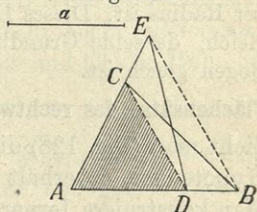


Fig. 132.



Die Konstruktion ist aus Fig. 131 zu erkennen. Beweis?

- c) Ein Dreieck ABC (Fig. 132) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

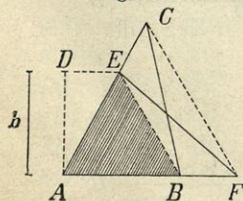
Man mache $AD = a$, ziehe CD und $BE \parallel CD$.

Der Schüler beweise mit Beachtung des gemeinschaftlichen Dreiecks ACD , daß $\triangle ACB = \triangle AED$ ist.

Dieselbe Verwandlung vorzunehmen, wenn $a > AB$ ist.

- d) Ein Dreieck ABC (Fig. 133) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Fig. 133.



Man errichte $AD = h$ senkrecht auf AB , ziehe $DE \parallel AB$, dann EB , und $CF \parallel BE$. Zieht man nun die Strecke EF , so ist $\triangle AEF = \triangle ABC$.

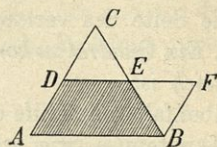
Beweis wie bei der Aufgabe in c).

Dieselbe Verwandlung vorzunehmen, wenn h größer als die Höhe des gegebenen Dreiecks ist.

- e) Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit gleicher Grundlinie zu verwandeln.

Man halbiere (Fig. 134) die Seite BC , ziehe durch den Halbierungspunkt E $DF \parallel AB$, ferner $BF \parallel AC$. Das dem Dreiecke ABC flächengleiche Parallelogramm ist $ABFD$. Durch die Kongruenz der Dreiecke CDE und BFE nachzuweisen.

Fig. 134.



f) Ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 135) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 135.

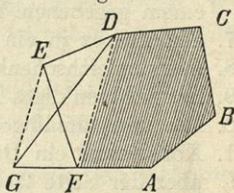
Man verlängere die kleinere Seite AB bis E , so daß $AE = AD$ wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher die verlängerte Seite CB in F trifft. Zieht man AF und beschreibt darüber das Quadrat $AFGH$, so ist dieses dem gegebenen Rechtecke gleich. (§ 100, 1).

g) Ein Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 136) in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.

Man ziehe die Diagonale DF und $EG \parallel DF$ und verlängere AF bis G . Zieht man DG , so ist das Vieleck $ABCDG$ gleich dem Vielecke $ABCDEF$; zu beweisen mit Hilfe der Dreiecke FDE und FDG .

Fig. 136.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden. Da sich nun jedes Dreieck in ein Parallelogramm, dieses in ein Rechteck und letzteres in ein Quadrat verwandeln läßt, so kann auch jedes Vieleck durch bloße Konstruktion in ein Quadrat verwandelt werden.



Teilung ebener Figuren.

§ 102.

a) Ein gegebenes Dreieck durch Strecken, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Teile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in so viele gleiche Teile, als verlangt werden, und verbinde die Teilungspunkte mit jenem Eckpunkte durch Strecken!

b) Ein Parallelogramm in mehrere gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien mit zwei Gegenseiten parallel sind.

Teile die beiden anderen Gegenseiten in die verlangte Anzahl gleicher Teile und verbinde je zwei gleich liegende Teilungspunkte durch eine Strecke!

c) Ein Trapez in mehrere gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien die beiden parallelen Seiten schneiden.

Durch Teilung der Parallelseiten in gleiche Teile und Verbindung der entsprechenden Teilungspunkte.

1. Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Summe zweier gegebener Quadrate § 103. gleich ist.

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind

den Seiten der gegebenen Quadrate; die Hypotenuse dieses Dreieckes ist die Seite des verlangten Quadrates.

2. *Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.*

Ebenfalls mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreieckes zu lösen; wie groß ist die Hypotenuse, wie groß eine Kathete?

§104. *Aufgaben:*

1. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges über derselben Grundlinie zu verwandeln.
Der rechte Winkel kann a) an der Grundlinie, b) gegenüber der Grundlinie liegen.
2. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten 31 mm und 17 mm und dem eingeschlossenen Winkel 45° und verwandle es dann in ein Dreieck mit der Grundlinie 26 mm und einem anliegenden Winkel von 60° !
3. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.
4. Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.
5. Ein Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln, von dem eine Seite und ein Winkel gegeben sind.
6. Ein Parallelogramm in ein anderes a) mit einer gegebenen Seite, b) mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.
7. Ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln.
8. Ein ungleichschenkliges Trapez in ein gleichschenkliges zu verwandeln.
9. Ein hohlwinkliges Trapezoid in ein Rechteck zu verwandeln.
10. Ein unregelmäßiges Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln.
11. Konstruiere ein Dreieck, welches gleich ist einem regelmäßigen Achtecke über der Seite 20 mm!
12. Konstruiere ein Quadrat, welches flächengleich ist einem regelmäßigen Sechsecke über der Seite 2 cm!
13. Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien a) zu addieren, b) zu subtrahieren.
14. Zwei Parallelogramme mit gleichen Höhen a) zu addieren, b) zu subtrahieren.
15. Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien a) zu addieren, b) zu subtrahieren.
16. Zwei beliebige Parallelogramme (Dreiecke) a) zu addieren, b) zu subtrahieren.
17. Ein Quadrat zu konstruieren, welches a) doppelt so groß, b) halb so groß als ein gegebenes Quadrat ist.
18. Ein Quadrat zu konstruieren, das
a) der Summe dreier oder mehrerer gegebener Quadrate gleich ist;
b) dreimal, viermal so groß ist als ein gegebenes Quadrat.
19. Ein Parallelogramm von einem Eckpunkte aus in vier gleiche Teile zu teilen.

Dreizehnter Abschnitt.

Berechnung der ebenen Figuren; Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes.

§105. Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht nicht durch *unmittelbares* Auftragen der Flächenmaße auf die zu messende Fläche (vgl. Fig. 41), da dieses sehr mühsam und meistens auch unausführbar wäre. (Wann?) Man bestimmt

vielmehr den Flächeninhalt *mittelbar*, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße mißt und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch *Rechnung* sucht.

Das Quadrat.

§ 106.

In § 34 wurde folgender Lehrsatz nachgewiesen:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch a und die Maßzahl seines Flächeninhaltes durch f , so ist

$$f = a^2.$$

Bei den Berechnungen sind die Zahlen, welche aus Messungen hervorgegangen sind, als unvollständig anzusehen, daher ist das Endresultat mit der erreichbaren Genauigkeit durch abgekürzte Rechnungen zu entwickeln.

Aufgaben:

1. Die Seite eines Quadrates ist a) 236 m, b) 35·9 ... cm, c) 0·715 ... m, d) 3·475 ... m. Wie groß ist 1. der Umfang, 2. der Flächeninhalt?
2. Der Umfang eines Quadrates ist 217 m 2 ... cm. Wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite 58 m 5 dm ist, ringsherum einen Weg machen; der eine Breite von 1 m 2 dm haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?
4. Ein Gang ist 12 m lang, 3 m breit. Wieviel quadratische Platten von 30 cm Seite sind zur Pflasterung erforderlich? Was kostet sie, wenn 1 Platte mit 1 K 60 h berechnet wird?
5. Wenn die Pflasterung eines quadratischen Hofes 500 K kostet, wie hoch kommt unter übrigens gleichen Umständen die Pflasterung eines Hofes von a) doppelter, b) halber Seitenlänge? (Die drei Quadrate sind ähnliche Figuren.)
6. Man stecke nach dem Augenmaße auf dem Felde ein Quadrat mit dem Flächeninhalte a) 1 a, b) 1 ha ab und prüfe sodann die Schätzung durch Messung.

Das Rechteck.

§ 107.

In § 34 wurde für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechteckes gefunden:

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Grundlinie und der Maßzahl der Höhe.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Rechteckes und f die Maßzahl seines Flächeninhaltes, so ist

$$f = g \cdot h.$$

Wie findet man aus dem Produkte zweier Faktoren und dem einen Faktor den andern?

Prüfe die Richtigkeit der Gleichungen:

$$g = \frac{f}{h} \text{ und } h = \frac{f}{g}.$$

Drücke diese zwei Formeln mit Worten aus!

Aufgaben:

1. Bestimme 1. den Umfang, 2. den Flächeninhalt folgender Rechtecke:
 - a) Grundlinie $12\text{ m } 3\text{ dm } 3\text{ cm}$, Höhe $9\text{ m } 2\text{ cm}$;
 - b) Grundlinie $3\cdot 215\dots\text{ m}$, Höhe $1\cdot 064\dots\text{ m}$!
2. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist $34\cdot 2\text{ m}^2$, die Grundlinie 9 m . Wie groß ist die Höhe?
3. Ein Rechteck ist $0\cdot 873\dots\text{ m}$ breit und enthält $12\cdot 17\dots\text{ m}^2$. Wie groß ist seine Länge?
4. Der Umfang eines Rechteckes beträgt $87\cdot 432\dots\text{ m}$, eine Seite $18\cdot 246\dots\text{ m}$. Wie groß ist der Flächeninhalt?
5. Ein Quadrat hat mit einem Rechtecke, dessen Seiten 62 cm und 34 cm sind, gleichen Umfang. Um wieviel ist der Flächeninhalt des Quadrates größer als der des Rechteckes?
6. Ein Spiegel mit Rahmen hat $6\text{ dm } 3\text{ cm}$ Breite und $8\text{ dm } 5\text{ cm}$ Höhe. Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 cm breit ist?
7. Ein Kassatisch, der $1\cdot 3\text{ m}$ lang und $0\cdot 8\text{ m}$ breit ist, soll eine Steinplatte erhalten. Wieviel kostet die Platte, wenn das Quadratmeter mit $17\frac{1}{2}\text{ K}$ bezahlt wird?
8. Ein Dach von $7\cdot 4\text{ m}$ Länge und $5\cdot 8\text{ m}$ Breite soll mit Zinkplatten belegt werden. a) Wieviel Platten von $1\cdot 5\text{ m}$ Länge und 8 dm Breite sind dazu erforderlich, wenn an jeder Seite der Platte 3 cm durch die Falze verloren gehen? b) Wieviel kosten dieselben, wenn jede Platte 6 kg wiegt und 1 kg Zinkplatte mit 80 h bezahlt wird?
9. Ein Acker hat die Gestalt eines Rechteckes und ist 116 m lang und $18\text{ m } 5\text{ dm}$ breit. Wieviel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf $1\text{ a } 2\frac{1}{2}\text{ l}$ Weizen aussät?
10. Wie ändert sich die Fläche eines Rechteckes, wenn a) die Grundlinie oder die Höhe mit m multipliziert oder durch m dividiert wird? b) Die Grundlinie und die Höhe mit m beziehungsweise n multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert werden?
 Wie ändert sich die Grundlinie eines Rechteckes, wenn bei ungeänderter Höhe die Fläche verdoppelt wird? Wenn bei ungeänderter Fläche die Höhe verdoppelt wird? Wenn die Fläche und die Höhe verdoppelt werden? Ähnliche Fragen bezüglich der Höhe.

§108. Das schiefwinklige Parallelogramm.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus § 96 und § 107.

Daher ist wie beim Rechtecke $f = g h$. $g = ?$ $h = ?$

Aufgaben:

1. Die Grundlinie eines Rhomboides ist 108 dm , die Höhe 64 dm ; wie groß ist der Flächeninhalt?
2. Von einer Wiese, welche die Form eines Rhomboides hat, worin die Grundlinie $66\cdot 4\text{ m}$ und die Höhe $45\cdot 2\text{ m}$ beträgt, wird ein Stück von 14 m Höhe parallel mit der Grundlinie abgeschnitten und zu Ackerland gemacht. a) Wie groß war die Wiese? b) Wie groß ist das übrig bleibende Stück derselben?

3. Die Fläche eines Parallelogrammes ist $19\cdot437 \dots m^2$, die Grundlinie $6\cdot238 \dots m$. Die Höhe zu berechnen.

Das Dreieck.

§109.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus § 97 und § 108.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Dreieckes und f seinen Flächeninhalt, so hat man

$$f = \frac{g \cdot h}{2}, \quad g = \frac{2f}{h} \quad \text{und} \quad h = \frac{2f}{g}, \quad \text{oder} \quad g = f : \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad h = f : \frac{g}{2}.$$

In einem rechtwinkligen Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen; welche Linie ist dann die Höhe? Wie lautet in diesem Falle die Formel für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes? Von wieviel veränderlichen Größen hängt nach der obigen Formel die Fläche eines Dreieckes ab?

Aufgaben:

- Berechne den Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn gegeben sind:
Grundlinie a) $3\cdot5 m$, b) $1 m \ 4 dm \ 2 cm$, c) $794\cdot3 \dots cm$,
Höhe $3\cdot2 m$, $5 dm \ 9 cm$, $563\cdot4 \dots cm!$
- In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete $29\cdot35 \dots dm$, die andere $18\cdot42 \dots dm$. Wie groß ist der Flächeninhalt?
- Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes, wenn die Höhe $5\cdot64 \dots m$ und der Flächeninhalt $40\cdot32 \dots m^2$ beträgt?
- Ein Dreieck hat $20\cdot67 \dots dm^2$ Flächeninhalt und $5\cdot32 \dots dm$ zur Grundlinie. Wie groß ist die Höhe?
- In einem rechtwinkligen Dreiecke, welches $21 m^2 \ 5 dm^2$ enthält, ist eine Kathete $7 m \ 4 dm$. Wie groß ist die zweite Kathete?
- Ein Dreieck hat mit einem Parallelogramme gleichen Flächeninhalt und gleiche Grundlinie. Wie groß ist die Höhe des Dreieckes?
- Die Fläche eines Dreieckes ist $12\cdot4786 \dots m^2$, die Grundlinie ist $8\cdot3452 \dots m$; die Höhe zu berechnen.
- Wie ändert sich die Fläche eines Dreieckes, wenn zwei Seiten desselben konstant bleiben, der eingeschlossene Winkel aber veränderlich ist? Für welchen Winkel ist die Dreiecksfläche am größten? Durch eine Zeichnung zu zeigen, daß je zwei dieser Dreiecke flächengleich sind.
- Ein Dreieck auf dem Felde abzustecken, die Grundlinie und die Höhe zu schätzen (durch Abschreiten¹) und die Fläche näherungsweise zu berechnen. Das Resultat durch genaue Messung zu prüfen.
- Wie ändert sich die Grundlinie eines Dreieckes, wenn die Fläche bei ungeänderter Höhe a) mit 2 multipliziert oder durch 2 dividiert wird? b) Wenn man diese Abänderung bei ungeänderter Fläche an der Höhe vornimmt? c) Wenn man sie an der Fläche und an der Höhe zugleich vornimmt?

¹) Der Schüler ermittle die Schrittlänge durch Abschreiten einer abgemessenen Strecke und benütze das gefundene Resultat bei ähnlichen Aufgaben.

§ 110. Das Trapez.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Maßzahl der Summe der Parallelseiten und der Maßzahl der Höhe.

Folgt aus § 98 und § 109.

Sind a und b die Maßzahlen der zwei Parallelseiten, h die Maßzahl der Höhe eines Trapezes und f des Flächeninhaltes, so hat man

$$f = \frac{(a + b) \cdot h}{2}.$$

Von wieviel veränderlichen (variablen) Größen hängt nach dieser Formel die Fläche eines Trapezes ab?

Es ist $(a + b) \cdot h = 2f$, daher $h = \frac{2f}{a + b}$, oder $h = f : \frac{a + b}{2}$.

Wie findet man aus der Fläche, der Höhe und einer der Parallelseiten die zweite Parallelseite eines Trapezes? (Zuerst $a + b$, dann a suchen.)

Aufgaben:

- Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
 - Parallelseiten 36 m und 27 m, Höhe 18 m;
 - „ 3·5 m und 2·8 m, Höhe 1·6 m;
 - „ 2 m 5 dm 4 cm und 5 m 3 dm 9 cm, Höhe 4 m 2 dm 8 cm!
- In einem Trapeze, dessen Flächeninhalt 18·81 m² beträgt, sind die Parallelseiten 5½ m und 4½ m. Wie groß ist die Höhe?
- Ein Trapez ist flächengleich mit einem Quadrate, dessen Seite 2·5 m beträgt; die Höhe des Trapezes ist 1·2 m, eine Parallelseite 1·6 m. Wie groß ist die andere Parallelseite?
- In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 m und 46·8 m, ihr Abstand ist 34·5 m. Wieviel ist der Garten wert, das Ar zu 50 K gerechnet?
- Wieviel kostet die Pflasterung eines Hofes von der Form eines Trapezes mit den Parallelseiten 27·6 m und 24·5 m, die 11·2 m voneinander abstehen, wenn 1 m² Pflaster zu 6½ K gerechnet wird?
- Die Fläche eines Trapezes ist 13·47 .. m², die Höhe 2·474 ... m, eine der beiden Parallelseiten 4·274 ... m. Die zweite Parallelseite zu suchen.

§ 111. Das regelmäßige Vieleck.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen des Umfanges und des Abstandes des Mittelpunktes von einer Seite.

Folgt aus § 99 und § 109.

Bezeichnen a , r , u und f folgeweise die Maßzahlen für die Seite eines regelmäßigen n -Eckes, für den Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite, für den Umfang und den Flächeninhalt, so ist

$$u = na \text{ und } f = \frac{u \cdot r}{2} = \frac{na \cdot r}{2};$$

und umgekehrt

$$a = \frac{u}{n}; \quad u = \frac{2f}{r}; \quad r = \frac{2f}{u} \quad \text{und} \quad a = \frac{2f}{nr}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, muß man die Maßzahl der gegebenen Seite

in einem gleichseitigen	Dreiecke	mit 0.28868 . . .
„ „	Quadrate	„ 0.50000,
„ „	regelmäßigen Fünfecke	„ 0.68819 . . .
„ „	Sechsecke	„ 0.86603 . . .
„ „	Achtecke	„ 1.20711 . . .
„ „	Zehnecke	„ 1.53884 . . .
„ „	Zwölfecke	„ 1.86603 . . .

multiplizieren.

Der Schüler zeige, daß die für das Quadrat angegebene Zahl richtig ist. Die anderen Zahlen können an dieser Stelle noch nicht berechnet werden.

Aufgaben:

1. Wie groß ist in jedem der eben angeführten regelmäßigen Vielecke a) der Umfang, b) der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite, c) der Flächeninhalt, wenn eine Seite 12.54 cm beträgt?
2. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist 21.5 dm. Wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Es soll eine regelmäßige, achtseitige Laube, deren Seite 2 m lang ist, ausgesteckt werden. Wie groß ist der dazu erforderliche Flächenraum?

Das unregelmäßige Vieleck.

§112.

Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen:

a) Man zerlegt das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, berechnet jedes derselben und addiert alle Dreiecksflächen.

b) Man zieht die längste Diagonale des Vieleckes und fällt darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte; dadurch zerfällt das Vieleck in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, aus denen sein Flächeninhalt berechnet werden kann. Dabei werden die Senkrechten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abschnitte der Diagonale als Höhen betrachtet.

Aufgaben:

1. In dem Vielecke *ABCDEFGF* (Fig. 137) ist gegeben: $BG = 39 \text{ m}$, $BE = 42.5 \text{ m}$, $CD = 31.5 \text{ m}$, $GE = 39.5 \text{ m}$, $Aa = 11.6 \text{ m}$, $Cc = 19.7 \text{ m}$, $Ee = 12.1 \text{ m}$, $Bb = 35.4 \text{ m}$, $Ff = 16.4 \text{ m}$. Die Fläche zu suchen. Bei den Berechnungen der einzelnen Flächen kommt bei jeder die Division durch 2 vor. Welcher Rechnungsvorteil ist möglich?

Fig. 137.

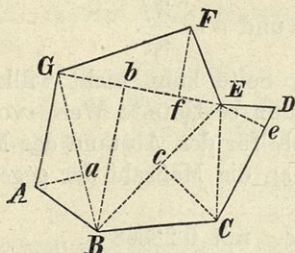
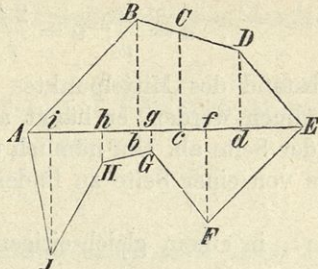


Fig. 138.



2. In dem Vielecke $ABCDEFGHJ$ (Fig. 138) ist gegeben: $Bb = 60.5\text{ m}$, $Cc = 57.2\text{ m}$, $Dd = 46\text{ m}$, $Ff = 52.3\text{ m}$, $Gg = 12.1\text{ m}$, $Hh = 17.1\text{ m}$, $Ji = 63.4\text{ m}$; ferner $Ai = 9.1\text{ m}$, $ih = 29.2\text{ m}$, $hb = 22.1\text{ m}$, $bg = 3.1\text{ m}$, $gc = 19.2\text{ m}$, $cf = 15.4\text{ m}$, $fd = 16.8\text{ m}$, $dE = 34.8\text{ m}$. Die Fläche zu suchen.
3. Das Querprofil eines Flusses (Fig. 139) zu berechnen aus nachstehenden Dimensionen: $af = 5.6\text{ m}$, $fg = 6.2\text{ m}$, $gh = 5.9\text{ m}$, $he = 2.8\text{ m}$, $bf = 2.1\text{ m}$, $cg = 2.9\text{ m}$, $dh = 1.9\text{ m}$.
4. Am Ufer eines Flusses liegt eine Wiese $adeh$ (Fig. 140). Welche Dimensionen müssen

Fig. 140.

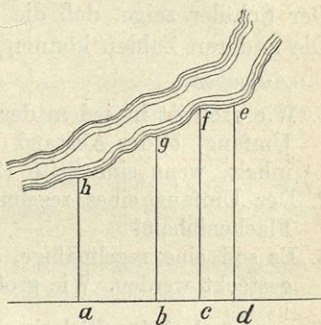
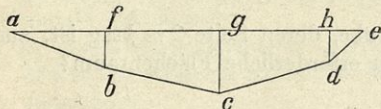


Fig. 139.



gemessen werden, um sie aus den in der Figur enthaltenen Streifen annähernd berechnen zu können? Wie sind die Strecken ab , bc , cd zu wählen, damit der Fehler nicht zu groß wird?

§ 113. a) Der Umfang eines Kreises.

Das einem Kreis eingeschriebene regelmäßige Sechseck hat einen kleineren, das umgeschriebene regelmäßige Sechseck einen größeren Umfang als der Kreis. Bestimmt man daher die Umfänge dieser Sechsecke, so erhält man zwei Werte, zwischen denen die Peripherie des Kreises liegt. Noch enger wird die Peripherie durch die Umfänge der dem Kreise ein- und umgeschriebenen 12-, 24-, 48ecke usw. eingeschlossen. So findet man bei fortgesetzter Verdopplung der Seitenzahl:

Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen 3072eckes $= 3.141592 \dots \times d$,
 „ „ umgeschriebenen „ „ „ $= 3.141594 \dots \times d$,
 wenn d die Länge des Durchmessers bedeutet.

Welche Grenzen für die Peripherie liefern das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck und das umgeschriebene Quadrat?

Da nun die Peripherie des Kreises immer zwischen den Umfängen der ein- und der umgeschriebenen Vielecke liegt, so müssen die Dezimalstellen, in welchen die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen 3072eckes übereinstimmen, notwendig auch für die Peripherie des Kreises gelten. Man hat daher auf 5 Dezimalstellen genau

$$\text{Peripherie des Kreises} = 3 \cdot 14159 \dots \times d.$$

Die Zahl $3 \cdot 14159 \dots$, mit welcher man den Durchmesser eines Kreises multiplizieren muß, um die Peripherie zu erhalten, heißt die Ludolfische Zahl, da sie von Ludolf van Ceulen auf eine größere Zahl von Dezimalstellen ⁶⁹⁴ berechnet wurde, und wird mit dem griechischen Buchstaben π ^{psi} bezeichnet. Sie ist die Verhältniszahl zwischen dem Kreisumfang und dem Durchmesser. Sie läßt sich nicht durch einen endlichen Dezimalbruch genau ausdrücken, kann aber mit jedem Grade der Annäherung bestimmt werden. In Rechnungen, welche keine große Genauigkeit erfordern, ist der Näherungswert $\pi = 3 \cdot 14 \dots$ oder $\pi = 3\frac{1}{7}$ ausreichend.

Bezeichnen d , r und p folgeweise die Maßzahlen des Durchmessers, des Halbmessers und der Peripherie eines Kreises, so ist nach dem Vorhergehenden

$$p = d\pi \text{ oder } p = 2r\pi, \text{ daher}$$

$$d = \frac{p}{\pi} \text{ und } r = \frac{p}{2\pi} \text{ oder } r = \frac{p}{2} : \pi.$$

Die in diesen Gleichungen enthaltenen Sätze auszusprechen.

Der Schüler prüfe die Richtigkeit der Gleichung $p = d\pi$ durch Hinrollen einer kreisförmigen Scheibe auf einem Meterstabe.

Wenn der Halbmesser eines Kreises mit 2, 3, 4... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird, wie ändert sich dadurch sein Umfang? (Die Kreise sind ähnlich.) Wie der Radius bei Verdoppelung des Umfanges?

b) Länge eines Kreisbogens:

Da der Umfang eines Kreises $2r\pi$ ist, so ist die Länge eines Bogen-

grades $\frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$; hat ein Bogen m Bogengrade, so ist seine Länge (b)

im Längenmaß $b = \frac{r\pi m}{180}$. Da mithin $r\pi m = 180b$ ist, so erhält man

$$r = \frac{180b}{\pi m} \text{ und } m = \frac{180b}{r\pi}.$$

Aufgaben: μ

1. Der Halbmesser eines Kreises ist 13 m. Wie groß ist die Peripherie?
2. Der Durchmesser d eines Kreises ist a) 5·8 m, b) 3·85 m, c) 5·83... m, d) 2·874... m. Wie groß ist die Peripherie? ($\pi = 3 \cdot 1416 \dots$)
3. Wie groß ist der Umfang p eines Kreises, dessen Halbmesser r a) 2 m, b) 3·8 dm, c) 715 cm, d) 3·479... m ist?
4. Wie groß ist a) der Durchmesser, b) der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie 20 m beträgt?

5. Wie groß ist r für
a) $p = 2.5\text{ m}$, b) $p = 131.95\text{ dm}$, c) $p = 18.34\text{ dm}$, d) $p = 15.247 \dots\text{ m}$?
6. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 14 cm lang. Welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt?
7. Der Umfang eines Baumes ist $8\text{ dm } 6\text{ cm}$. Wie groß ist der zugehörige Durchmesser?
8. Man will einen kreisrunden Tisch für 8 Personen machen. Wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person 8 dm des Umfanges rechnet?
- ☒ Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang. Wie groß ist a) der Umfang, b) der Halbmesser des Äquators?
10. Ein Erdglobus hat 6 dm im Durchmesser. Welche Länge hat der Äquator desselben?
- $240 \times$ ☒ 11. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1.1 m beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht. Wie lang war die ~~Strecke~~?
12. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 m und jedes Hinterrad 1.4 m Durchmesser. Wieviel Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 km zurückgelegt hat?
13. Welchen Durchmesser hat ein Lokomotivrad, das sich auf einem Schienenwege von 990 m 215 mal umdreht?
- ☒ 14. Welche Strecke legt ein Eisenbahnzug in einer Minute zurück, wenn das Tribrad der Lokomotive einen Radius von 1.1 m hat und in einer Minute 210 Umdrehungen macht?
- $24 \times$ ☒ 15. Mit welcher Geschwindigkeit müßte sich ein Eisenbahnzug am 21. März oder am 23. September am Äquator bewegen, um die Sonne stets gerade über sich zu haben? (Radius der Erde 6378 km .)
- ☒ 16. Welchen Weg legt die Erde täglich in ihrer Bahn um die Sonne zurück? (Mittlerer Radius der Erdbahn $149,500,000\text{ km}$.)
- $12 \times$ ☒ 17. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist 37 cm . Wie tief ist ~~der Brunnen~~, wenn das Seil, das bis auf den Boden reicht, 12 mal um die Winde geht?
18. Bestimme die Bogenlänge von a) 56° , b) 120° , c) 270° in einem Kreise vom Halbmesser 1 m !
19. Der Durchmesser eines Kreises ist a) 1 m , b) 2 m , c) 3 m . Welche Länge hat in jedem dieser Kreise ein Bogen von 60° ?
20. Der französische Arzt Jean Fernel fuhr am 25. August 1525 auf der nahezu im Meridian liegenden Straße Paris-Amiens einen Meridiangrad ab und fand, daß dabei ein Rad seines Wagens 17024 Umläufe machte. Wie groß ist der Erdradius, wenn der Durchmesser des Rades $= 2.08\text{ m}$ war?
21. Wie lang ist ein Äquatorgrad auf der Erde (Erdradius 6378 km), wie lang auf der Sonne, wenn der Sonnenradius 109 mal so groß ist wie der Erdradius?
22. Wie groß ist der Längen- und Zeitunterschied zweier Punkte des Äquators, die einen Abstand von 1000 km haben?
23. Ein Bogen von 48° hat 1.26 m Länge. Wie groß ist der Halbmesser dieses Kreises?
24. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, in welchem ein Bogen von 15° a) 3 dm , b) 7.5 dm , c) 25.2 dm , d) 4.5 cm , e) $1.627 \dots\text{ m}$ lang ist?

25. Wieviel Grade hat ein Bogen von $1.853 \dots m$ Länge, wenn der Kreisdurchmesser $2 m$ lang ist?

Flächeninhalt eines Kreises und seiner Teile.

§114.

a) Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Peripherie und des Halbmessers.

Folgt aus § 99 und § 109.

Bezeichnet f den Flächeninhalt und p die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so hat man $f = \frac{p \cdot r}{2}$.

Da aber $p = 2r\pi$ ist, so ist auch $f = \frac{2r\pi \cdot r}{2}$ oder $f = r^2\pi$.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der zweiten Potenz der Maßzahl des Halbmessers multipliziert mit der Ludolfischen Zahl.

Umgekehrt ist $r^2 = \frac{f}{\pi}$ und $r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$.

Wie ändert sich die Fläche eines Kreises, wenn der Radius mit 2, 3, 4. . . multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird? (Die Kreise sind ähnlich!) Umgekehrt: wie ist die Fläche abzuändern, wenn der Radius doppelt so groß werden soll?

Nachfolgende Tabelle zu ergänzen.

Radius eines Kreises	Umfang	Fläche
r	p	f
$2r$		
$3r$		
$\frac{r}{2}$		
$\frac{r}{3}$		

Achte auf die Potenz, in welcher bei den obigen Änderungen des Halbmessers a) der Umfang, b) die Fläche des Kreises sich ändert! Wie ist es beim Würfel bezüglich der Oberfläche und des Volumens? (§ 36, Aufg. 5.)

Von wieviel variablen Größen hängen nach den obigen Formeln die Peripherie und die Fläche eines Kreises ab?

b) Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich der Differenz der Flächeninhalte der beiden konzentrischen Kreise, die den Ring einschließen. Sind R und r die Maßzahlen der Halbmesser zweier konzentrischer Kreise und f der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Kreisringes, so hat man

$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi, \text{ oder } f = (R + r)(R - r)\pi.$$

c) Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Länge des Bogens und des Halbmessers. Folgt aus § 99 und § 109.

Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit dem Halbmesser r und der Bogenlänge b , so hat man

$$f = \frac{b \cdot r}{2}, \quad b = \frac{2f}{r} \quad \text{und} \quad r = \frac{2f}{b},$$

$$\text{oder } b = f : \frac{r}{2} \quad \text{und} \quad r = f : \frac{b}{2}.$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes kann auch aus dem Radius und dem Zentriwinkel m berechnet werden;

$$\text{da } b = \frac{r\pi m}{180}, \text{ so ist } f = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r^2 \pi m}{360}.$$

d) Um den *Flächeninhalt eines Kreisabschnittes* zu finden, berechnet man den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes und subtrahiert davon den Inhalt des Dreieckes, um welches der Ausschnitt größer als der Abschnitt ist.

Aufgaben.

1. Der Flächeninhalt eines Kreises zu suchen, wenn der Radius 8 dm ist.
2. In einem Kreise ist der Halbmesser a) 2.65 m , b) $1 \text{ m } 7 \text{ dm } 8 \text{ cm}$, c) $35\frac{1}{2} \text{ dm}$, d) $3.475 \dots \text{ m}$. Wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser a) 15 m , b) 5.135 m , c) $8 \text{ dm } 3 \text{ cm } 4 \dots \text{ mm}$, d) $8.473 \dots \text{ m}$ beträgt?
4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Peripherie $24.41 \dots \text{ cm}$ beträgt?
5. Eine Scheibe hat $1.48 \dots \text{ m}$ im Umfange. Wie groß ist ihr Flächeninhalt?
6. Der Umfang eines Baumes ist $2\frac{4}{5} \text{ m}$. Wie groß ist der Flächeninhalt des zugehörigen Querschnittes?
7. Wieviel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser 14 m ist, wenn auf einen Menschen 25 dm^2 gerechnet werden?
8. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die zwei konzentrischen Kreise $5 \text{ m } 6 \text{ dm}$ und $4 \text{ m } 4 \text{ dm}$ zu Durchmessern haben?
9. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge 315 mm und 410 mm betragen!
10. Auf einer Schießscheibe beträgt der Durchmesser des inneren schwarzen Kreises 0.15 m und die Breite des weißen Ringes 0.3 m . Wie groß ist der weiße Ring?
11. Um einen kreisrunden Turm von 32 m Umfang wird ein 3 m breiter Graben gezogen. Welchen Flächenraum nimmt dieser ein?
12. Wie groß ist der Flächeninhalt eines *Kreisausschnittes*, wenn
a) der Halbmesser 5.8 m , der Bogen 8.2 m ,
b) „ „ „ 0.17 dm , „ „ „ 0.25 dm ist?
13. Ein Kreisausschnitt von $23.4 \dots \text{ cm}$ Bogenlänge hat $161 \dots \text{ cm}^2$ Flächeninhalt. Wie groß ist der Halbmesser?
14. Der Halbmesser eines Kreises ist 4 m , ein Zentriwinkel beträgt 36° . Den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes zu berechnen.
15. Ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel $57^\circ 20'$ hat 12 cm Halbmesser. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

16. Ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser 6 cm ist, hat $41\cdot357\dots\text{cm}^2$ Flächeninhalt. Wie groß ist der zugehörige Zentriwinkel?
17. Einem Kreise, dessen Radius $2\cdot7\text{ m}$ beträgt, ist ein Quadrat eingeschrieben. Wie groß ist das durch eine Seite desselben abgeschnittene Segment?
18. Einem Kreise, dessen Halbmesser $3\cdot4\text{ m}$ ist, ist ein Quadrat eingeschrieben. Wie groß ist die Differenz der Flächeninhalte?
19. Der Flächeninhalt eines Kreises ist a) 10 dm^2 , b) $0\cdot8659\text{ m}^2$, c) $31\cdot47\dots\text{dm}^2$, d) $23\cdot4763\dots\text{m}^2$. Wie groß ist der Halbmesser? Wie müssen diese Zahlen abgeändert werden, wenn die zugehörigen Halbmesser a) doppelt, b) halb so groß werden sollen?
20. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der einem Quadrate mit der Seite a) 2 m 3 dm, b) $3\cdot473\dots\text{m}$ flächengleich ist!
21. Die Fläche eines Kreises beträgt $4\cdot0115\dots\text{m}^2$. Wie groß ist die Peripherie?
22. Die Fläche f eines Kreisausschnittes und der zugehörige Zentriwinkel m sind gegeben. Man suche den Halbmesser.
Es ist $m r^2 \pi = 360 f$, somit r^2 und r ?
Z. B.: $f = 37\cdot72\dots\text{dm}^2$ und $m = 30^\circ$.
23. Wenn man die Fläche eines Kreises vervierfacht, wie ändert sich der Umfang? Wenn man den Umfang eines Kreises auf die Hälfte verkleinert, was geschieht mit der Fläche?
24. Mit wieviel Kilogramm darf ein vertikal aufgehängter Stahldraht von 3 mm Durchmesser belastet werden, wenn die höchste noch zulässige Belastung für 1 mm^2 70 kg ist?
Die größte noch zulässige Belastung wächst wie der Querschnitt. Wie groß darf also die Belastung sein, wenn der Durchmesser a) $1\frac{1}{2}\text{ mm}$, b) 6 mm ist?

Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes.

§115.

a) Das rechtwinklige Dreieck.

Ist c die Maßzahl der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Maßzahlen a und b haben, so sind a^2 , b^2 , c^2 die Maßzahlen der Inhalte der über den Seiten des rechtwinkligen Dreieckes errichteten Quadrate. Somit erhält der Pythagoreische Lehrsatz, dessen Richtigkeit im geometrischen Sinne in § 100 bewiesen wurde, die Form

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dies ist der arithmetische Ausdruck für den Pythagoreischen Lehrsatz.

Der Schüler zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten 3 cm und 4 cm . Die Messung ergibt für die Hypotenuse 5 cm . Er zeichne die Quadrate über den Seiten und teile sie in Quadratzentimeter. Was ergibt die Vergleichung der Zahl dieser Quadratzentimeter?

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes sind mithin derart voneinander abhängig, daß nur für zwei derselben die Wahl zulässig ist, durch diese aber die dritte schon bestimmt ist.

1. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 36 cm und 160 cm sind?

Da $c^2 = a^2 + b^2$ ist, so ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$a^2 = 36^2 = 1296$$

$$b^2 = 160^2 = 25600, \text{ daher}$$

$$c = \sqrt{26896} = 164. \quad c = 164 \text{ cm} = 1 \text{ m } 6 \text{ dm } 4 \text{ cm}^1).$$

2. Gegeben ist die Hypotenuse c und eine Kathete a ; zu suchen die andere Kathete b .

Aus $b^2 = c^2 - a^2$ erhält man

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Ist z. B. die Hypotenuse 208 cm, eine Kathete 80 cm, so hat man

$$c^2 = 208^2 = 43264$$

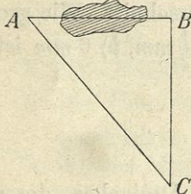
$$a^2 = 80^2 = 6400, \text{ daher}$$

$$b = \sqrt{36864} = 192. \quad b = 192 \text{ cm} = 1 \text{ m } 9 \text{ dm } 2 \text{ cm}.$$

3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind a) 35 m und 12 m, b) 7'23... dm und 3'84... dm. Wie groß ist a) die Hypotenuse, b) der Flächeninhalt, c) die Höhe auf die Hypotenuse?

4. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist a) die Hypotenuse 68 dm, eine Kathete 32 dm; b) die Hypotenuse 5'46... m, eine Kathete 2'72... m. Wie groß ist die andere Kathete, wie groß der Flächeninhalt?

Fig. 141.



5. Eine Leiter von 10 m Länge reicht bis zur oberen Kante einer Mauer. Wie hoch ist diese, wenn der Fuß der Leiter 2'5 m von der Mauer absteht?

6. Den Abstand zweier Punkte A und B (Fig. 141) auf dem Felde zu bestimmen, der sich direkt nicht messen läßt. Man stecke ein rechtwinkliges Dreieck ABC ab, messe AC und BC.

$$AC = 40 \text{ m}, \quad BC = 22 \text{ m}, \quad AB = ?$$

7. Wenn c konstant bleibt, a hingegen zu- oder abnimmt, wie ändert sich b ? (Durch Zeichnung und auch mit der Gleichung $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ zu untersuchen.)

b) Das Quadrat. Es seien a , d und f die Maßzahlen der Seite, der Diagonale und des Flächeninhaltes eines Quadrates,

1. Aus der Seite a eines Quadrates die Diagonale d zu berechnen.

Es ist $d^2 = a^2 + a^2$, oder $d^2 = 2a^2$; mithin $d = \sqrt{2a^2}$ oder $d = a\sqrt{2}$.

2. Gegeben die Diagonale d ; zu suchen die Seite a und der Flächeninhalt f .

$$\text{Da } 2a^2 = d^2, \text{ so ist } a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{2d^2}{4}, \text{ daher } a = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Aus } f = a^2 \text{ folgt dann } f = \frac{d^2}{2}.$$

¹⁾ Der Schüler untersuche stets, wie die gegebenen Stücke beschaffen sein müssen, damit die Aufgabe möglich ist. Die vorliegende Aufgabe ist immer möglich. Wie ist es bei der folgenden?

3. Gegeben der Flächeninhalt f ; gesucht wird a und d .

Aus $a^2 = f$ ergibt sich $a = \sqrt{f}$.

Aus $d^2 = 2 a^2$ folgt ferner $d^2 = 2 f$, somit $d = \sqrt{2 f}$.

4. Die Diagonale eines Quadrates beträgt 1.4 m . Wie groß ist a) die Seite, b) der Flächeninhalt?

5. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist $15.1321 \dots m^2$. Wie groß ist a) die Seite, b) die Diagonale?

6. Wie lang ist die Seite eines Quadrates, welches der Summe zweier Quadrate gleich ist, deren Seiten 2.58 dm und 9.34 cm sind?

7. Wenn die Seite eines Quadrates a) verdoppelt, b) halbiert wird, wie ändert sich a) die Diagonale, b) der Flächeninhalt? (Ähnliche Figuren!)

c) Das Rechteck. Man bezeichne die Maßzahlen der Seiten eines Rechteckes durch a und b , die Maßzahl der Diagonale durch d und die Maßzahl des Flächeninhaltes durch f .

1. Gegeben die Seiten a und b eines Rechteckes; zu suchen d und f .

Es ist $d^2 = a^2 + b^2$, daher $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; $f = ab$.

2. Gegeben ist eine Seite a und die Diagonale d ; man berechne b und f .

Es ist $b = \sqrt{d^2 - a^2}$.

Für den Flächeninhalt hat man $f = ab = a \sqrt{d^2 - a^2}$.

3. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes von 5.6 m Länge und 3.3 m Breite?

4. Die Diagonale eines Rechteckes ist 7.3 dm , eine Seite desselben 4.8 dm . Wie groß ist die Seite eines flächengleichen Quadrates?

d) Das gleichseitige Dreieck. Es sei in dem gleichseitigen Dreiecke ABC (Fig. 142) die Seite $AB = BC = AC = a$, die Höhe $CD = h$ und f die Maßzahl des Flächeninhaltes.

1. Gegeben sei die Seite a ; zu suchen h und f .

Es ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, daher $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$f = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Wie viele variable und wie viele konstante (unveränderliche) Größen kommen in dieser Gleichung vor?

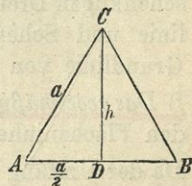
2. Gegeben die Fläche, zu suchen a und h .

Es ist $f = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$, $a^2 \sqrt{3} = 4f$, $a^2 = \frac{4f}{\sqrt{3}} = \frac{4f\sqrt{3}}{3}$, daher $a = \sqrt{\frac{4f\sqrt{3}}{3}}$.

3. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 8 dm . Wie groß ist a) die Höhe, b) der Flächeninhalt?

4. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, das mit einem Quadrate von 15 dm Seitenlänge flächengleich ist?

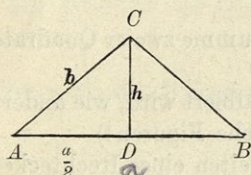
Fig. 142.



5. Wenn die Seite eines gleichseitigen Dreieckes *a*) verdoppelt, *b*) halbiert wird, wie ändert sich *a*) die Höhe, *b*) der Flächeninhalt? (Ähnliche Figuren!)

e) Das gleichschenklige Dreieck. Es sei in dem gleichschenkligen Dreiecke *ABC* (Fig. 143) die Grundlinie $AB = a$, der Schenkel $AC = BC = b$ und die Höhe $CD = h$; die Maßzahl des Flächeninhaltes sei *f*.

Fig. 143.



1. Aus der Grundlinie *a* und dem Schenkel *b* die Höhe *h* und den Flächeninhalt *f* zu berechnen.

$$\text{Man hat (Fig. 143)} \quad h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$\text{daher } h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}; \text{ sodann } f = \frac{ah}{2}.$$

2. Gegeben die Höhe *h* und der Schenkel *b*; zu suchen *a* und *f*.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2, \text{ daher } \frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2} \text{ und } a = 2\sqrt{b^2 - h^2} \text{ und damit } f = \frac{ah}{2}.$$

3. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4.8 dm und jeder Schenkel 2.5 dm . Wie groß ist *a*) die Höhe, *b*) der Flächeninhalt?

4. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 3.36 m und die Höhe 4.25 m . Wie groß ist ein Schenkel?

5. Bei einem gewöhnlichen Hausdache ist der Dachstuhl 14 m breit. Wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn der Dachstuhl 6 m hoch sein soll?

6. Die alten Ägypter machten die Landvermessungen mit Hilfe von gleichschenkligen Dreiecken, deren Inhalt sie durch das halbe Produkt von Grundlinie und Schenkel bestimmten. Welcher Fehler wurde dabei bei einer Grundlinie von 20 m und einem Schenkel von 60 m gemacht?

f) Das regelmäßige Sechseck. 1. Aus der Seite *a* eines regelmäßigen Sechseckes den Flächeninhalt *f* zu bestimmen.

Da der Umfang des regelmäßigen Sechseckes $6a$, der Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite aber die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit

der Seitenlänge *a* und daher gleich $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ist, so erhält man:

$$f = \frac{6a \cdot a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seitenlänge 4.24 dm ?

3. Ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck haben gleichen Umfang, nämlich 2.4 m . Um wieviel ist der Flächeninhalt des Quadrates kleiner als der des Sechseckes?

4. Die in § 111 für die Berechnung des Abstandes des Mittelpunktes eines regelmäßigen Sechsecks von einer Seite angegebene Zahl zu ermitteln.

g) Sehnen eines Kreises. 1. Der Halbmesser eines Kreises sei r , die Länge einer Sehne s und ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises a ; infolge der Abhängigkeit dieser Größen voneinander läßt sich aus zweien die dritte berechnen. (§ 115, a.)

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{s^2}{4}}, \quad s = 2\sqrt{r^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Aus den letzten zwei Ausdrücken ergibt sich:

1. Zwei Sehnen eines Kreises, welche vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, sind einander gleich.

2. Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die größere, welche einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

3. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

4. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Beispiele.

1. Gegeben $s = 24 \text{ cm}$, $a = 7 \text{ cm}$; zu suchen r .

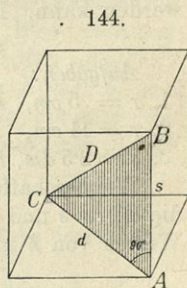
2. „ $r = 29 \text{ cm}$, $a = 21 \text{ cm}$; „ „ s .

3. „ $r = 35 \text{ cm}$, $s = 28 \text{ cm}$; „ „ a .

h) Der Würfel. Ist die Seite des Würfels, so ist die Diagonale einer Fläche $d = s\sqrt{2}$.

Unter der Diagonale des Würfels versteht man die Strecke zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten.

Da die Kante AB (Fig. 144) senkrecht auf der Grundfläche des Würfels steht, so bildet sie auch einen rechten Winkel mit jeder Geraden, die durch ihren Fußpunkt A in der Grundfläche gezogen wird, daher auch mit der Diagonalen d der Grundfläche. Man überzeuge sich davon mit Hilfe eines Winkelhakens von 90° oder des Winkelbrettchens, indem man den einen Schenkel des rechten Winkels in die Verlängerung von AB , den andern in eine der beiden Grundflächen bringt. Mithin ist (Fig. 144)



$$BC = D = \sqrt{s^2 + d^2} = \sqrt{s^2 + 2s^2} = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3}.$$

i) Der Quader. Drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten seien a , b , c (Fig. 145).

Wieviel verschiedene Flächendiagonalen kommen vor? Sie zu berechnen. Für die Diagonale D' des Quaders erhält man

$$D'^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \text{daher } D' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Fig. 145.

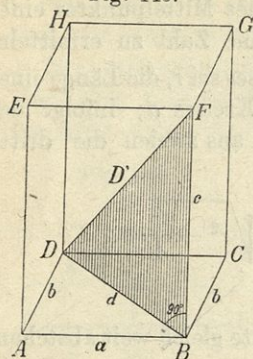
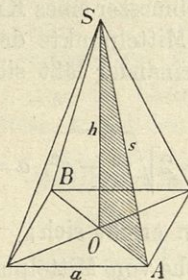


Fig. 146.



Was geschieht mit D' , wenn a, b, c verdoppelt werden?

k) Die Pyramide.

1. Die Höhe h einer geraden quadratischen Pyramide aus der Grundkante a und der Seitenkante s zu berechnen.

Da (Fig. 146) $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, so folgt aus dem rechtwinkligen

Dreiecke SOA : $h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$.

2. Ist a die Grundkante einer geraden Pyramide mit einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche und s eine Seitenkante, so ist zu zeigen, daß $h = \sqrt{s^2 - a^2}$ ist.

Aufgaben:

1. Die Kante eines Würfels ist $2\text{ m } 3\text{ dm}$. Die Diagonale desselben zu berechnen.
2. Die Kanten eines Quaders sind: $2\text{ dm}, 3\text{ dm}, 4\text{ dm}$. Die Diagonale zu berechnen.
3. Die Diagonale eines Würfels ist $1{,}5\text{ m}$. Zu berechnen a) die Kante, b) die Oberfläche.
4. Die Grundkante einer geraden quadratischen Pyramide ist 4 dm , die Höhe 7 dm . Wie groß ist eine Seitenkante?
5. Die Grundkante einer geraden Pyramide mit einer regelmäßigen sechsseitigen Grundfläche ist 2 dm , eine Seitenkante 7 dm . Wie groß ist die Höhe?

l) Der Kegel. Die Maßzahlen des Radius r der Grundfläche, der Seite s und der Höhe h eines senkrechten Kegels sind nach dem Pythagoreischen Lehrsatz so voneinander abhängig, daß aus je zweien die dritte berechnet werden kann. Man hat:

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}, \quad h = \sqrt{s^2 - r^2}, \quad r = \sqrt{s^2 - h^2}.$$

Aufgaben:

1. $r = 5\text{ cm}, h = 12\text{ cm}; s = ?$
2. $r = 11\text{ cm}, s = 61\text{ cm}; h = ?$
3. $s = 2{,}5\text{ dm}, h = 2{,}4\text{ dm}; r = ?$

Wie beschaffen müssen in der Aufgabe 2 die Werte s und h , in der Aufgabe 3 die Werte s und h sein, damit die Aufgabe möglich ist? Wie ist es mit den Werten von h und r in der Aufgabe 1?

Vierzehnter Abschnitt.

1. Berechnung der senkrechten Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel.

§116. Berechnung des senkrechten Prismas.

a) Die Oberfläche.

Die Oberfläche eines senkrechten Prismas besteht aus der doppelten Grundfläche und der Summe der Seitenflächen, dem Mantel. Ist u der Umfang der Grundfläche und s eine Seitenkante, so ist der Mantel $M = us$.

Der Schüler bestätige die Richtigkeit der Formel durch Abwickeln des Mantels in eine Ebene. Welche Figur ergibt sich?

b) Das Volumen.

Ein Quader und ein senkrecht z. B. fünfseitiges Prisma, welches mit dem Quader gleiche Grundfläche und Höhe hat, stehen auf derselben Ebene. Man legt zu dieser Ebene durch die beiden Körper in gleichen unendlich kleinen Abständen parallele Ebenen. Durch diese werden die beiden Körper in unendlich dünne Platten von gleichen Grundflächen und Höhen zerlegt, welche daher gleiches Volumen besitzen. Daher ist auch das mehrseitige Prisma gleich dem Quader.

Von der Richtigkeit kann man sich auch experimentell überzeugen:

1. Durch Wägung der beiden Körper, wenn sie aus demselben Materiale bestehen.

2. Durch das gleich hohe Ansteigen von Wasser in einem kubisierten Gefäße, wenn man beide Körper nach einander in die Flüssigkeit versenkt. Es gilt daher der Satz:

Jedes senkrechte Prisma ist mit einem Quader von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich.

Durch diesen Satz ist die Berechnung des Volumens eines jeden senkrechten Prismas auf die eines Quaders von derselben Grundfläche und Höhe zurückgeführt.

Das Volumen eines senkrechten Prismas ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche g und der Höhe h ; mithin ist $v = gh$ und $g = \frac{v}{h}$, $h = \frac{v}{g}$.

Sind die Kanten eines Quaders a , b , c , so ist $v = abc$.

Für den Würfel ist $v = s^3$, wenn s die Seite desselben ist, und $s = \sqrt[3]{v}$.

Wie ändert sich das Volumen eines senkrechten Prismas, wenn die Grundfläche mit 2, 3, 4, ... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird? Wenn man dasselbe mit der Höhe macht? Wenn man es an beiden Größen ausführt? Wie ändert sich das Volumen eines Quaders, wenn a) eine Kante, b) zwei Kanten, c) alle drei Kanten einer Ecke mit m multipliziert oder durch m dividiert werden? (Anwendung von c) auf den Würfel.) (Die erhaltenen Würfel sind ähnlich!)

Aufgaben:

1. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Seite a) 12 dm, b) 2 m 3 dm, c) 0.575 ... m, d) 2.478 ... m ist?
2. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 398.535 cm². Wie groß ist eine Kante desselben? Wie groß der Kubikinhalt? Wie schwer ist er, wenn die Dichte des Materials 2.4 ist?
3. Eine Seitenfläche eines Würfels beträgt 3 m² 61 dm². Wie groß ist der Kubikinhalt?
4. Der Kubikinhalt eines Würfels ist 6434.856 ... cm³. Wie groß ist dessen Oberfläche?
5. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0.38 m Kantenlänge angefertigt werden. Wieviel Quadratmeter Kupferblech braucht man?

6. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 dm innere Weite. Wie viel Liter faßt es?
7. Wie schwer ist ein Würfel mit der Seite 3 dm 7 cm, wenn 1 dm³ des Materiales 0·86 kg wiegt?
8. Ein Würfel von 2 dm Seitenlänge wiegt 16 kg. Wieviel wiegt ein anderer Würfel aus demselben Materiale von 6 dm Seitenlänge?
9. Es soll ein Würfel gemacht werden, welcher der Summe zweier Würfel gleich ist, deren Kanten 5·4 dm und 4·9 dm sind. Welche Länge muß man einer Kante desselben geben?
10. Das Gewicht eines Würfels ist 1 kg 23 g. Wie groß ist eine Seite desselben, wenn die Dichte des Materiales 8·4 ist?
11. Wenn ein hohler Würfel 20 kg Wasser faßt, wie groß ist eine Seite desselben?
12. Wenn man das Volumen eines Würfels achtmal so groß macht, wie ändert sich die Oberfläche?
13. Wenn man das Volumen eines Würfels auf ein Achtel verkleinert, wie ändert sich die Oberfläche?
14. Wie groß ist der Kubikinhalt eines senkrechten Prismas, dessen Grundfläche 5 dm² 46 cm² und dessen Höhe 2 dm 9 cm ist?
15. Die Grundflächen eines 2·4 dm hohen senkrechten Prismas sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 0·5 dm und 1·2 dm. Berechne a) die Oberfläche, b) den Kubikinhalt.
16. Der Inhalt eines senkrechten Prismas ist 5·85 m³, die Höhe 1·3 m. Wie groß ist die Grundfläche?
17. Die Höhe eines senkrechten Prismas ist h , die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a . Man berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt.

Der Umfang der Grundfläche des dreiseitigen Prismas ist $3a$, der Flächeninhalt $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; daher ist $o = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 3ah = a \left(\frac{a \sqrt{3}}{2} + 3h \right)$.

Für den Kubikinhalt hat man $v = \frac{a^2 h \sqrt{3}}{4}$.

18. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt eines senkrechten dreiseitigen Prismas, wenn jede Kante 3 dm beträgt?
19. Die Höhe eines senkrechten Prismas ist h , die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a . Man bestimme die Oberfläche und den Kubikinhalt.
20. Die Grundfläche eines senkrechten Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck, die Höhe gleich 1 m 8 dm. Wie groß ist die Seitenoberfläche, wenn eine Seite der Grundfläche 1 m 1 dm ist?
21. Ein Würfel ist inhaltsgleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 5 cm ist. Wie groß ist die Kante des Würfels, wenn die Seitenkante des Prismas 8 cm beträgt?
22. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges senkrecht Prisma, dessen Grundfläche 5·6 m zur Grundlinie, 5 m zur Höhe hat und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 m beträgt. Wieviel Kilogramm Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 m³ Heu 114 kg wiegt?
23. Ein prismatischer Balken ist 5 m lang und hat zu Grundflächen Trapeze, in denen die Paralleelseiten 40 cm und 30 cm sind und die Höhe 15 cm beträgt. Wie groß ist der Inhalt?

24. Die Seitenoberfläche einer 4·2 m hohen senkrechten Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 0·4 m ist, soll einen Ölanstrich erhalten. Wieviel kostet derselbe, wenn für das Quadratmeter $1\frac{1}{2}$ K gezahlt werden?
25. Genügt ein 8 m langes, 5·5 m breites, 3·8 m hohes Zimmer für 40 Schüler, wenn auf einen Schüler 2·9 m³ Luftraum kommen sollen?
26. Ein Quader aus Granit hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 18 cm, eine Seitenkante ist 36 cm lang. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Granites, wenn das Gewicht des Quaders 32·7 kg beträgt?
27. Wie schwer ist eine Platte aus Gußeisen, welche 1·9 m lang, 0·2 m breit und 0·04 m dick ist, wenn die Dichte des Gußeisens 7·21 ist?
28. Die Bodenfläche eines senkrechten prismatischen Gefäßes von 1 m Länge und 5 dm Breite kann nur einen Druck von 170 kg aushalten. Bis zu welcher Höhe kann dieses Gefäß mit Öl ($d = 0·92$) gefüllt werden?
29. Die Größe des Luftdruckes auf eine Fläche ist gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche jene Fläche und deren Höhe der jeweilige Barometerstand ist. Wie groß ist der Luftdruck auf eine Fläche von 1 dm² bei einem Barometerstande von 742 mm?
30. Wie groß ist die Wassermenge, welche a) in einer Sekunde, b) in einer Minute durch das Querprofil (des Flusses Fig. 139) strömt, wenn die Geschwindigkeit des Wassers 1·3 m in der Sekunde beträgt?
31. Wie schwer ist ein massiver Würfel von 2·9 dm Seite, wenn er 2·4 dm tief in Wasser einsinkt? Wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

Berechnung des senkrechten Zylinders.

§117.

a) Die Oberfläche.

Der Schüler prüfe an dem Netze eines senkrechten Zylinders die Richtigkeit des Satzes:

Die Maßzahl der Mantelfläche eines senkrechten Zylinders ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen des Umfanges der Grundfläche und der Höhe. Es ist daher $m = 2 r \pi h$.

Ist o die ganze Oberfläche, so ist mithin: $o = 2 r^2 \pi + 2 r \pi h = 2 r \pi (r + h)$.

Der Schüler leite daraus die Formeln für den gleichseitigen Zylinder ab:

$$m = 4 r^2 \pi, \quad o = 6 r^2 \pi.$$

Was geschieht mit dem Mantel eines senkrechten Zylinders, wenn a) r mit 2, 3, 4, ... multipliziert oder durch diese Zahlen dividiert wird; b) wenn dasselbe mit h geschieht; c) wenn beides ausgeführt wird und wie im letzteren Falle die Oberfläche?

b) Das Volumen.

Da der senkrechte Zylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so folgt:

Die Maßzahl des Volumens eines senkrechten Zylinders ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe; mithin ist $v = r^2 \pi h$. Für den gleichseitigen Zylinder ist die Formel abzuleiten:

$$v = 2 r^3 \pi.$$

Wie ändert sich das Volumen eines senkrechten Zylinders, wenn *a*) der Radius, *b*) die Höhe verdoppelt wird? Wie, wenn beides geschieht?

Wie ändert sich *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen eines gleichseitigen Zylinders, wenn der Radius *a*) verdoppelt, *b*) verdreifacht wird?

(Die erhaltenen gleichseitigen Zylinder sind ähnliche Körper!)

Die Mantelflächen zweier senkrechter Zylinder mit gemeinschaftlicher Achse begrenzen mit den beiden zugehörigen Kreisringen eine zylindrische Röhre. Ihr Volumen ist $v = \pi h (R^2 - r^2)$.

Suche in den obigen Formeln für *m*, *o* und *v* die Zahl der variablen und der konstanten Größen auf!

Aufgaben:

1. Berechne 1. die Oberfläche, 2. den Kubikinhalt folgender senkrechter Zylinder:
 - a) Durchmesser der Grundfläche 23 dm, Höhe 14 dm;
 - b) Halbmesser der Grundfläche 8.25 dm, Höhe 5.24 dm!
2. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Zylinders, in welchem die Seite 3 dm 4 cm und der Umfang der Grundfläche 7 dm 8 cm beträgt?
3. Der Durchmesser eines gleichseitigen Zylinders ist 2.43 ... dm. Wie groß ist der Kubikinhalt?
4. Die Mantelfläche eines senkrechten Zylinders beträgt 7 m² 4 dm², der Umfang der Grundfläche 1.76 m. Wie groß ist der Kubikinhalt des Zylinders?
5. Die Mantelfläche eines senkrechten Zylinders ist 62.84 ... dm², der Durchmesser der Grundfläche 4.2 ... dm. Wie groß ist die Höhe?
6. Wie schwer ist ein gleichseitiger Zylinder, dessen Radius 7 cm 8 mm mißt, wenn 1 dm³ des Materiales 8.4 kg wiegt?
7. Wie groß ist der Halbmesser eines gleichseitigen Zylinders, wenn *a*) dessen Mantelfläche 10 dm², *b*) dessen Inhalt 10 cm³ beträgt?
8. Ein Brunnen hat eine zylindrische Form mit 14 dm im Durchmesser; wenn nun das Wasser 3 m hoch steht, wieviel Hektoliter sind es?
9. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von 20 a ganz überwalzt werden soll und die Walze 1.6 m lang ist und 0.3 m im Durchmesser hat?
10. Ein zylindrisches Gefäß soll 1 l halten. Wie hoch muß es sein, wenn der innere Durchmesser 108 mm beträgt?
11. Wie groß ist der Durchmesser eines zylindrischen Gefäßes, das 5.03 dm hoch ist und 1 hl hält?
12. Eine Feuerspritze hat 2 Zylinder (Stiefel), deren innerer Durchmesser 1.8 dm beträgt; die Hubhöhe des Kolbens ist in jedem 2.3 dm und jeder Kolben steigt während einer Minute 25 mal hinauf. Wieviel Hektoliter Wasser wird diese Feuerspritze während einer Stunde unausgesetzter Wirksamkeit verspritzen?
13. Der innere Durchmesser eines runden Turmes ist 4.2 m, die Mauer ist 1.2 m dick. Wieviel Kubikmeter enthält die Mauer, wenn die Höhe des Turmes 14.5 m beträgt?
14. Eine gußeiserne Walze von 1.2 m Länge und 11 cm Durchmesser wird so weit abgedreht, daß der Durchmesser nur 9.5 cm beträgt. Um wieviel ist die abgedrehte Walze kleiner als die frühere?

15. Zu einer Wasserleitung von 84 m Länge braucht man Röhren von Blei, welche 6 cm dick sind und deren Weite im Lichten 4 cm beträgt. Wieviel kostet das Blei, wenn 1 dm³ desselben 11.35 kg wiegt und das Kilogramm Blei mit 60 h bezahlt wird?
16. Eine Walze aus Messing soll 32 kg wiegen und 3 dm lang sein. Welchen Durchmesser muß man der Walze geben? ($d = 8.4$.)
17. Es soll ein gleichseitiger Zylinder aus Gußeisen vom Gewichte 1 kg gegossen werden. Welchen Durchmesser muß er haben?
18. Der Ring eines Schwungrades aus Gußeisen ($d = 7.2$) hat die Form eines senkrechten Hohlzylinders. Wie schwer ist er, wenn seine Halbmesser 2 m und 2.4 m sind und die Höhe 0.34 m mißt?
19. Ein senkrechtes zylindrisches Gefäß mit dem Radius der Grundfläche 4 cm ist bis zu der Höhe von 12 cm mit Quecksilber ($d = 13.6$) gefüllt. Wie groß ist das Gewicht des Quecksilbers? Wie groß der Boden- und Seitendruck?
20. Man bringt einen unregelmäßig geformten Stein in Wasser, welches in einem senkrechten Zylinder von 5 cm Halbmesser sich befindet und sieht, daß das Wasser um 8 cm steigt. Welchen Raum nimmt der Stein ein?
21. Ein gleichseitiger Zylinder mit dem Radius der Grundfläche = 1.2 dm wiegt 21.704 kg. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Materiales?
22. Wie ändert sich das Volumen einer zylindrischen Röhre, wenn h verdoppelt wird? Wenn R und r verdoppelt werden? Wenn R und r verdoppelt, hingegen h viermal so klein gewählt wird?

Berechnung der senkrechten Pyramide.

§118.

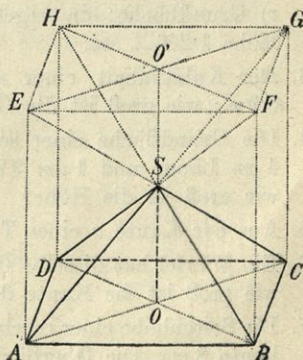
a) Oberfläche.

Die Oberfläche einer senkrechten Pyramide ist die Summe aus der Grundfläche und dem Mantel. Der letztere besteht aus soviel gleichschenkligen Dreiecken als die Grundfläche Kanten hat. Da diese Dreiecke in allgemeinen voneinander verschieden sind, so muß jedes einzeln berechnet werden, die Summe ihrer Inhalte gibt den Mantel. Bei einer regelmäßigen Pyramide sind alle Seitendreiecke kongruent (Kongruenzsatz?). Die Maßzahl des Mantels einer regelmäßigen Pyramide ist daher dem Produkte aus der Maßzahl des Inhaltes einer Seitenfläche und der Zahl derselben gleich.

b) Volumen.

1. Das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Zieht man (Fig. 147) die vier Diagonalen des Würfels und legt durch je zwei aufeinander folgende eine Ebene, so wird der Würfel in sechs kongruente regelmäßige vierseitige Pyramiden zerschnitten. Die Grundfläche einer derselben z. B. $ABCD$ ist eine Fläche des Würfels, ihre Höhe SO ist der halben Würfelhöhe gleich, da OO' ein Durchmesser des Parallelogrammes $DBFH$ ist. Mithin ist das Volumen

Fig. 147.



der Pyramide $SABCD = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{3} \cdot h$, wenn a die Würfelkante

und h die Höhe der vierseitigen Pyramide bedeutet.

d. h. *das Volumen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist dem dritten Teile des Produktes aus ihrer Grundfläche und Höhe gleich.*

2. Das Volumen einer senkrechten Pyramide.

Die Pyramide sei z. B. eine fünfseitige. Sie ist inhaltsgleich mit einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe. Denn stellt man beide auf dieselbe Ebene, so müssen sie nach der Entstehungsweise der Pyramide (§ 93) mit jeder zu dieser Ebene parallel gelegten Ebene paarweise gleiche Schnittfiguren ergeben. (Modell!) Man kann mithin beide Pyramiden in gleich viele sehr dünne paarweise inhaltsgleiche Platten zerlegen. Es müssen daher die beiden Pyramiden selbst inhaltsgleich sein. Eine experimentelle Bestätigung des Satzes könnte wie in § 116 b ausgeführt werden.

Es gilt folglich der Satz:

Eine jede senkrechte Pyramide ist einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich.

Sind v , g und h beziehungsweise das Volumen, die Grundfläche und die

Höhe einer senkrechten Pyramide, so ist $v = \frac{g h}{3}$.

Ferner $3 v = g h$ und

$$g = \frac{3 v}{h}, \quad h = \frac{3 v}{g}.$$

Aufgaben:

1. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 6 dm Seitenlänge, die Seitenhöhe ist 12·37 dm; wie groß ist die Oberfläche?
2. Berechne den Kubikinhalt folgender senkrechten Pyramiden:
 - a) Grundfläche: ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 2·34 ... m; Höhe 4·82 ... m;
 - b) Grundfläche: ein Quadrat mit der Seite 4·34 ... m; Höhe 2·45 ... m;
 - c) Grundfläche: ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 0·837 ... m; Höhe 1·246 ... m.
3. Der Kubikinhalt einer senkrechten Pyramide ist 0·6264 m³, die Höhe 0·9 m; wie groß ist die Grundfläche?
4. Die Grundfläche einer senkrechten Pyramide ist ein Rechteck von 3 dm 4 cm Länge und 1 dm 9 cm Breite, der Kubikinhalt ist 17 dm³ 955 cm³; wie groß ist die Höhe?
5. Aus der Kante a eines Tetraeders die Oberfläche zu berechnen.
6. Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Tetraeder mit der Kante 1 dm; wie groß ist die Kante des Würfels?
7. Die Seitenhöhe einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist 5 cm, die Grundkante 8 cm. Die Oberfläche und den Inhalt zu berechnen.

8. Die Grundfläche einer senkrechten, 1.4 m hohen Pyramide ist ein Rechteck mit den Seiten 6 dm und 8 dm; man berechne die Seitenkante und die Oberfläche der Pyramide.
9. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche $1 \text{ m}^2 15 \text{ dm}^2$ und deren Höhe 2 m beträgt, aus Eisen gegossen werden; wieviel wird sie wiegen, wenn 1 dm^3 Eisen 7.21 kg wiegt?
10. Wie groß ist das Gewicht einer senkrechten Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 m und eine Seite der quadratischen Grundfläche 5 dm beträgt und 1 dm^3 Marmor 2.72 kg wiegt?

Berechnung des senkrechten Kegels.

§ 119.

a) Die Oberfläche.

Die Oberfläche eines Kegels findet man, indem man die Summe aus der Grundfläche und dem Mantel bildet.

Da der Mantel eines senkrechten Kegels abgewickelt einen Kreisausschnitt gibt, dessen Bogen und Radius beziehungsweise dem Umfange der Grundfläche und der Seite des Kegels gleich sind, so ist $M = 2 r \pi \cdot \frac{s}{2} = \pi r s$, wenn M , r und s die Maßzahlen des Mantels, des Halbmessers der Grundfläche und der Seite des Kegels sind.

Ist der Kegel ein gleichseitiger, so ist $s = 2 r$ und

$$M = r \pi \cdot 2 r = 2 r^2 \pi.$$

Die ganze Oberfläche O eines senkrechten Kegels ist

$$O = r \pi s + r^2 \pi = r \pi (r + s).$$

Ist der Kegel gleichseitig, so ist $O = 3 r^2 \pi$.

b) Das Volumen.

Da ein senkrechter Kegel als eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Die Maßzahl für das Volumen eines senkrechten Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels, so ist das Volumen

$$v = \frac{r^2 \pi h}{3};$$

$$\text{daher } 3 v = r^2 \pi h \text{ und } h = \frac{3 v}{r^2 \pi}, \quad r = \sqrt{\frac{3 v}{\pi h}}.$$

Ist statt der Höhe h die Seite s eines senkrechten Kegels gegeben, so ist

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher

$$v = \frac{r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}}{3}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $h = r\sqrt{3}$, und

$$v = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}.$$

$$3v = r^3 \pi \sqrt{3}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi \sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{3v \sqrt{3}}{3\pi}}.$$

Wie ändert sich das Volumen eines senkrechten Kegels, wenn man a) den Radius, b) die Höhe verdoppelt, c) beides macht?

Wie die Oberfläche und das Volumen eines gleichseitigen Kegels bei Verdoppelung des Halbmessers? (Die beiden gleichseitigen Kegel sind ähnliche Körper!)

Aufgaben:

1. Suche die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, dessen Grundfläche 11.8 cm zum Halbmesser hat, und dessen Seite 15.5 cm beträgt!
2. Berechne den Kubikinhalt folgender senkrechter Kegel:

a)	Halbmesser der Grundfläche	6.2 dm ,	Höhe	7.5 dm ;
b)	„ „ „	$14\frac{1}{2} \text{ cm}$,	„	$23\frac{2}{3} \text{ cm}$;
c)	„ „ „	$1 \text{ m } 1 \text{ dm } 8 \dots \text{ cm}$,	„	$2 \text{ m } 4 \text{ dm } 6 \dots \text{ cm}$!
3. Der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels ist 12 cm , die Höhe 35 cm ; wie groß ist die Oberfläche und das Volumen?
4. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Kegels ist 7.5 dm ; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt?
5. Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels ist 2530 cm^2 ; wie groß ist dessen Kubikinhalt?
6. Der Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels ist 0.16 m^3 ; berechne dessen Oberfläche!
7. Der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels ist 1.5 m , die Seite 1.8 m ; eine Pyramide hat mit dem Kegel denselben Scheitel und zur Grundfläche ein der Grundfläche des Kegels eingeschriebenes Quadrat; wie groß ist die Differenz der Kubikinhalte beider Körper?
8. Der Umfang der Grundfläche eines kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufens beträgt $8 \text{ m } 5 \text{ dm}$, die Höhe 1 m ; wieviel Hektoliter Getreide enthält der Haufen?
9. Ein Heuschaber hat 2.6 m Durchmesser und 4.5 m Höhe; wieviel Kilogramm Heu enthält er, wenn das Kubikmeter Heu 114 kg wiegt?
10. Ein messingener Kegel ist 21 cm hoch und hat eine Grundfläche von 10.5 cm Durchmesser; wie groß ist das Gewicht desselben, wenn 1 dm^3 Messing $8\frac{2}{3} \text{ kg}$ wiegt?
11. Wie groß ist die Seite eines Würfels, der mit einem Kegel inhaltsgleich ist, wenn der Durchmesser der Grundfläche 0.85 m und die Höhe 1.08 m ist?
12. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefülltem Gefäße von 21 cm Durchmesser und 15 cm Höhe wird das Wasser in ein zylindrisches Gefäß von 12 cm Durchmesser gegossen; wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen?

13. In Figur 122 ist die Seite des Kegels dreimal so groß als der Radius des Grundkreises. Prüfe die Richtigkeit des Zentriwinkels ASB der Zeichnung! (Der Bogen des Sektors muß dem Umfange des Grundkreises gleich sein!)

2. Die Kugel.

Die Entstehung und Erklärung der Kugel ist in § 23 enthalten.

§ 120.

Der Abstand irgend eines Punktes vom Mittelpunkt einer Kugel heißt der *Zentralabstand des Punktes*. Ein Punkt liegt auf der Kugelfläche, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Zentralabstand gleich dem Halbmesser der Kugel, kleiner oder größer als dieser ist.

Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte einer Kugel heißt der *Zentralabstand der Geraden*. Ist der Zentralabstand einer Geraden größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Gerade mit der Kugelfläche *keinen* Punkt gemeinschaftlich. Ist der Zentralabstand der Geraden gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur *einen* Punkt gemeinschaftlich, während alle anderen Punkte außerhalb der Kugel liegen; sie heißt eine *Tangente* der Kugelfläche. Ist endlich der Zentralabstand der Geraden kleiner als der Halbmesser, so *schneidet* sie die Kugelfläche in *zwei* Punkten.

Der Abstand einer Ebene vom Mittelpunkt einer Kugel heißt der *Zentralabstand der Ebene*. Ist der Zentralabstand einer Ebene größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Ebene mit der Kugelfläche *keinen* Punkt gemeinschaftlich. Ist der Zentralabstand der Ebene gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur *einen* Punkt gemeinschaftlich und heißt eine *Berührungs-* oder *Tangentialebene*; sie enthält alle Tangenten, welche im Berührungspunkte an die Kugel gelegt werden können. Ist der Zentralabstand der Ebene kleiner als der Halbmesser, so *schneidet* die Ebene die Kugelfläche.

Es besteht mithin eine Abhängigkeit der Lage eines Punktes, einer Geraden, einer Ebene gegen eine Kugel von dem Zentralabstande. Vergleich mit dem Kreise!

Aus der Entstehung einer Kugel folgt der Satz: Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Normale vom Kugelmittelpunkte auf die Schnittebene ist. Dieser Schnittkreis (z. B. DNR , Fig. 148) wird ein Kugelkreis genannt.

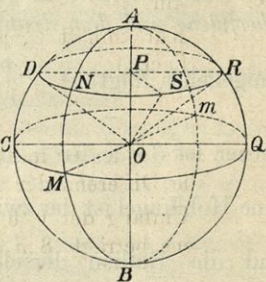
Zwischen dem Halbmesser $OD = r$ der Kugel, dem Halbmesser $PD = \varrho$ des Kugelkreises und dem Zentralabstande $OP = a$ des letzteren bestehen, da das Dreieck DPO rechtwinklig ist, die Beziehungen:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + a^2}, \quad \varrho = \sqrt{r^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

Daraus folgt: 1. Zu gleichen Zentralabständen gehören gleiche Kugelkreise; und umgekehrt.

2. Zum kleineren Zentralabstande gehört ein größerer Kugelkreis; und umgekehrt.

Fig. 148.



3. Am größten wird ein Kugelkreis, wenn er durch den Mittelpunkt der Kugel geht; er heißt deshalb geradezu ein *größter Kugelkreis* oder auch ein *Hauptkreis*; jeder andere Kugelkreis heißt ein *Nebenkreis*.

Der Halbmesser eines Hauptkreises ist gleich dem Halbmesser der Kugel. Alle Hauptkreise sind daher einander gleich.

Zur eindeutigen Bestimmung eines Hauptkreises sind außer dem Kugelmittelpunkte noch zwei mit ihm nicht in gerader Linie liegende Punkte erforderlich.

Durch die Endpunkte eines Durchmessers kann man unzählig viele Hauptkreise, durch zwei Punkte, welche nicht Endpunkte eines Durchmessers sind, nur einen einzigen Hauptkreis legen.

Aufgabe:

Wie groß ist der Radius des Parallelkreises der Erde unter a) 30° , b) 45° , c) 60° geographischer Breite? (Erdradius 6378 km.)

§ 121. Berechnung der Kugel.

Bezeichnen r , o , v den Radius, die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, so ist, wie hier nicht bewiesen werden soll, $o = 4 r^2 \pi$, $v = \frac{4 r^3 \pi}{3}$.

Da $v = \frac{4 r^3 \pi}{3} = 4 r^2 \pi \cdot \frac{r}{3}$, so ist $v = o \cdot \frac{r}{3}$.

Diese Gleichungen enthalten folgende Sätze:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalt eines Hauptkreises. Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Oberfläche und dem dritten Teile des Radius derselben.

Umgekehrt folgt $r^2 = \frac{o}{4 \pi}$, daher $r = \sqrt{\frac{o}{4 \pi}}$.

Ferner ist $3 v = 4 r^3 \pi$, $r^3 = \frac{3 v}{4 \pi}$ und $r = \sqrt[3]{\frac{3 v}{4 \pi}}$.

Eine Hohlkugel ist der zwischen zwei konzentrischen Kugeln liegende Raum; sind die Radien derselben R und r , so ist $V = \frac{4 R^3 \pi}{3} - \frac{4 r^3 \pi}{3} = \frac{4 \pi}{3} (R^3 - r^3)$.

Wie ändert sich die Oberfläche und das Volumen einer Kugel, wenn der Halbmesser derselben verdoppelt oder halbiert wird? (Die drei Kugeln sind ähnliche Körper!)

Umgekehrt: Wie ist a) die Oberfläche, b) das Volumen einer Kugel abzuändern, wenn der Radius doppelt so groß werden soll?

Aufgaben:

1. Der Halbmesser einer Kugel ist

a) 0.36 m , b) $48\frac{4}{5} \text{ dm}$, c) 1.32 dm ; $0.847 \dots \text{ m}$.

wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt der Kugel?

2. Der größte Kreis einer Kugel hat 4.8 dm im Umfange; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt der Kugel?
3. Die Oberfläche einer Kugel beträgt a) 0.15 m^2 , b) 12.76 cm^2 , c) 66 dm^2 3 cm^2 ; wie groß ist der Durchmesser?
4. Der Kubikinhalt einer Kugel ist a) 4 dm^3 , b) 0.357 m^3 , c) 4 dm^3 875 cm^3 ; wie groß ist die Oberfläche?
5. Ein Kugelkreis, welcher 9 cm vom Mittelpunkte der Kugel absteht, hat 454.74 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt dieser Kugel?
6. Von zwei Kugeln hat die erste 6 dm , die zweite 5 dm im Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Inhalt gleich ist der Summe der Volumina dieser zwei Kugeln?
7. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche so groß ist als ein Würfel, dessen Seite 1.11 m beträgt?
8. Suche die Seite eines Würfels, der an Inhalt gleich ist einer Kugel von 1 m 2 dm Durchmesser!
9. Der Radius einer Kugel ist 13 cm , ein Nebenkreis hat den Zentralabstand 12 cm ; die Peripherie und der Inhalt desselben zu berechnen.
10. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 6378 km beträgt? ($\pi = 3.141593 \dots$) Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt des Erdmondes, wenn der Halbmesser der Erde $3.66 \dots$ mal so groß ist als der des Mondes?
11. Wie groß ist der Durchmesser einer Kanonenkugel von 15 kg Gewicht, wenn 1 dm^3 Eisen 7.2 kg wiegt?
12. Ein zylindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist 1 m weit und 4 m lang, so daß die Länge des Zylinders 3 m beträgt; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt des Kessels, c) das Gewicht, wenn 1 dm^3 Eisen 7.2 kg wiegt und die Wandstärke 1.4 cm ist?
13. Der Umfang des äußeren größten Kreises einer Halbkugel ist 1.2 m , die Wandstärke 2 cm ; wie groß ist der Inhalt der Kugelschale?
14. Wenn man den Durchmesser der Erde $= 12756 \text{ km}$ und die Höhe ihrer Luftschichte $= 84 \text{ km}$ setzt, wie groß ist der Inhalt der Luftschichte?
15. Wie groß ist der Gewichtsverlust einer Kugel mit dem Radius 6 cm a) in Wasser, b) in Quecksilber?
16. Das Vergolden einer Kugel kostet $a \text{ K}$; wieviel kostet das Vergolden einer Kugel, deren Durchmesser a) dreimal so groß ist, b) den dritten Teil beträgt?
17. Eine Kugel mit dem Radius r wiegt 10 kg ; wie schwer sind die Kugeln aus gleichem Materiale mit den Radien a) $10r$, b) $\frac{r}{10}$? Was für ein Gewicht gehört zu den Radien $2r$ und $\frac{r}{2}$?
18. Wenn man über der Basis einer Halbkugel einen geraden Kegel errichtet, wann ist der Winkel am Achsenschnitte a) ein stumpfer, b) ein rechter, c) ein spitzer? (Figuren!)

Inhalt.

	Seite		Seite
1. Abschnitt.		9. Abschnitt.	
Der Würfel und der Quader	3	Der Kreis	58
2. Abschnitt.		10. Abschnitt.	
Gerade Linien und die Winkel	7	Geometrische Örter	65
3. Abschnitt.		11. Abschnitt.	
Kugel, Kreis, Anwendungen auf die Winkel	15	Die senkrechten Formen des Prismas, des Zylinders, der Pyramide und des Kegels	67
4. Abschnitt.		12. Abschnitt.	
Das Dreieck	24	Flächengleichheit, Verwandlung und Teilung ebener Figuren	71
5. Abschnitt.		13. Abschnitt.	
Ausmessung des Quadrates und Recht- eckes, des Würfels und Quaders	26	Berechnung der ebenen Figuren; An- wendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes	76
6. Abschnitt.		14. Abschnitt.	
Parallele und normale Gerade	30	1. Berechnung der senkrechten Pris- men, Zylinder, Pyramiden und Kegel	92
7. Abschnitt.		2. Die Kugel	101
Die Symmetrie ebener und körperlicher Gebilde	34		
8. Abschnitt.			
1. Das Dreieck (Ergänzung)	38		
2. Das Viereck	48		
3. Das Vieleck	54		

Schriftarten.

Rondschrift.

ab cd de f g b i j k l m n o p q r s t
 ſ t u v w x y z, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

A B C D E F G H I J K L M N O
 P Q R R S T U V W X Y Z.

Steinschrift.

A B C D E F G H I J K

L M N O P Q R S T U

1 2 3 4 5 V W X Y Z 6 7 8 9

P R A G

Nadel-oder Skelettschrift

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
 ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
 ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

I II III IV V VI VII VIII IX X,

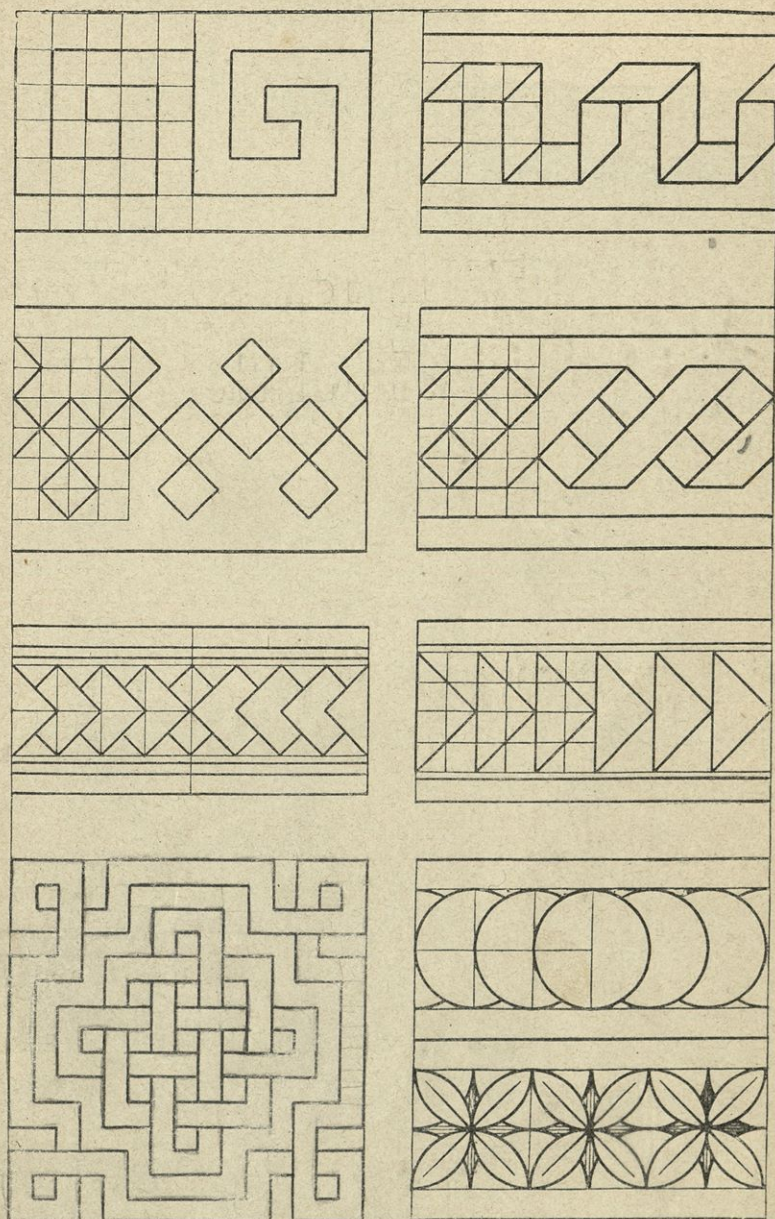
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

A B C D E F G H I J K L

M N O P Q R S T U V

W X Y Z

WIEN



NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA

COBISS



00000390020

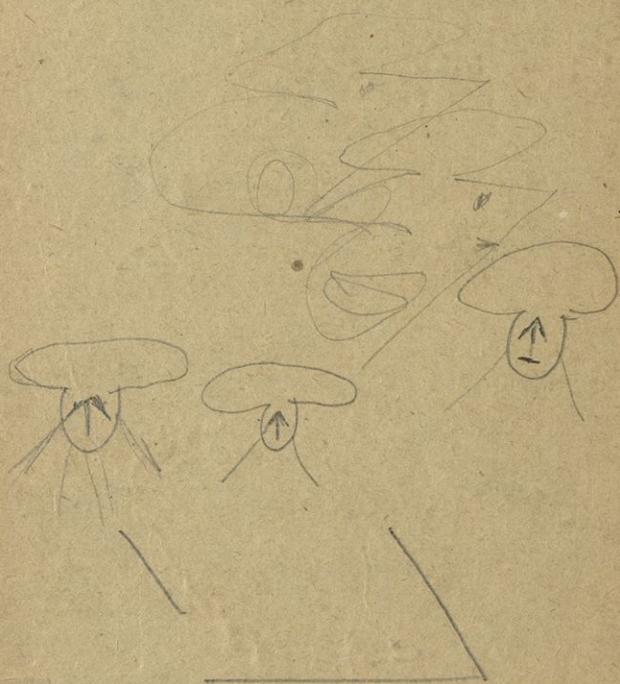
H. Kl

1940/11

abstrakte

Schularbeiten

Kollektionen



NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIZNICA

579 123

COBISS S