Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

158347

…NIK-WALLENTIN

LEHRBUCH DER GEOMETRIE

FÜR DIE

OBEREN CLASSEN DER MITTELSCHULEN

Андреевъ Донейчовъ

WILH. BLANKE, MARBURG

Lehrbuch

der

Geometrie

für die

oberen Classen der Mittelschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Zweiundzwanzigste, im wesentlichen unveränderte Auflage,

bearbeitet von

Dr. Franz Wallentin,

Director der k. k. Staats-Realschule im I. Wiener Gemeindebezirke.

Mit 227 Holzschnitten im Text.

Mit hohem k. k. Ministerial-Erlass vom 4. April 1894, Z. 6380, zum Lehrgebrauche an Mittelschulen mit deutscher Unterrichtssprache allgemein zulässig erklärt.

Preis geheftet 1 fl. 65 kr.; in Leinwandband 1 fl. 80 kr.

Wien und **Prag.**

Verlag von F. Tempsky.

1894.

158347

158347

Übersetzungsrecht vorbehalten.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana
FZC 304/1959

Druck von Rudolf M. Rohrer in Brünn.

Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Seite

Proportionalität der Strecken und Ähnlichkeit der ebenen Gebilde.

Vierter Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen ebenen Gebilde.

Fünfter Abschnitt.

Maßbestimmungen am Kreise.

Anhang zur Planimetrie.

Zweiter Theil.

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im allgemeinen.

Dritter Abschnitt.
Congruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit der Körper.

Vierter Abschnitt.
Größenbestimmung der Körper.

Dritter Theil.
Trigonometrie.
Erster Abschnitt.
Goniometrie.

Zweiter Abschnitt.
Ebene Trigonometrie.

Dritter Abschnitt.
Sphärische Trigonometrie.

Vierter Theil.
Analytische Geometrie.

Einleitung.

§. 1. Ein von allen Seiten begrenzter Raum wird ein Körper genannt.

Die Grenze eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und jeden Theil derselben eine Fläche.

Die Grenze einer Fläche nennt man deren Umfang, und jeden Theil desselben eine Linie.

Die Grenzen einer Linie nennt man Punkte.

Punkte, Linien, Flächen und Körper heißen Raumgebilde.

Die Raumgebilde können durch Bewegung erzeugt werden. Bewegt sich ein Punkt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. Bewegt sich eine Linie, so ist der von ihr zurückgelegte Weg eine Fläche oder wieder eine Linie. Durch die Bewegung einer Fläche wird ein Körper oder wieder eine Fläche, durch die Bewegung eines Körpers wieder ein Körper erzeugt.

Ein Körper hat drei Ausdehnungen (Dimensionen): Länge, Breite und Höhe. Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge. Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

§. 2. Durch die Begrenzung der Ausdehnungen erhalten die Raumgebilde die Eigenschaft der Größe. Körper, begrenzte Flächen und begrenzte Linien werden daher auch Raumgrößen genannt.

Die Bestimmung der Größe (Quantität) eines begrenzten Raumgebildes geschieht durch das Messen. Ein Raumgebilde messen heißt, eine Zahl finden, welche angibt, wie vielmal ein als Einheit angenommenes Raumgebilde derselben Art in dem gegebenen enthalten ist. Diese Zahl heißt die Maßzahl des Raumgebildes.

Die Größe einer begrenzten Linie heißt deren Länge, die Größe einer begrenzten Fläche deren Flächeninhalt, die Größe eines Körpers dessen Cubikinhalt oder Volumen.

§. 3. Außer der Größe kommt an den begrenzten Raumgebilden auch die Gestalt, d. i. die Art der Vereinigung der einzelnen Theile zu einem Ganzen, in Betrachtung.

Zwei Raumgebilde können dieselbe Größe haben, aber in der Gestalt verschieden sein; ebenso können zwei Raumgebilde dieselbe Gestalt und verschiedene Größe haben. Raumgebilde, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; Raumgebilde, welche dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich; Raumgebilde, welche dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, nennt man congruent. Congruente Raumgebilde unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden; sie können so ineinander gelegt werden, dass sie sich decken. Umgekehrt: Können zwei Raumgebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie congruent.

Die Gleichheit zweier Raumgebilde wird durch das Zeichen $=$, die Ähnlichkeit durch $\sim$, und die Congruenz durch $\cong$ ausgedrückt.

§. 4. Die Wissenschaft von den Raumgebilden heißt Geometrie.

Die Geometrie behandelt ihre Lehren nach der mathematischen Methode auf dem Grunde von Erklärungen, Grundsätzen und Forderungssätzen in Lehrsätzen, die bewiesen, in Aufgaben, die gelöst, und in Zu- und Folgesätzen, die jenen angeschlossen werden.

§. 5. Eine Erklärung oder Definition ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffes.

Grundsätze oder Axiome sind Sätze, die man unmittelbar als wahr erkennt, die daher nicht bewiesen zu werden brauchen, aber auch nicht bewiesen werden können. Solche Sätze sind für den Aufbau der mathematischen Wissenschaften unentbehrlich.

Die allgemeinen mathematischen Grundsätze:

1. jede Größe ist sich selbst gleich;
2. Größen, die einander gleich sind, können für einander gesetzt werden;
3. sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich;
4. jede Größe ist gleich der Summe ihrer Theile und größer als nur einige derselben;
5. werden mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vorgenommen, so erhält man wieder gleiche Größen;

haben auch in der Geometrie ihre Geltung.

Ein Lehrsatz (Theorem) ist ein Satz, dessen Wahrheit erst aus anderen schon als wahr erkannten Sätzen durch Zergliederung und Zusammensetzung der Begriffe (logische Schlussfolgerung) abgeleitet werden muss. Ein geometrischer Lehrsatz ist gewöhnlich so gefasst, dass ein Bedingungssatz mit einem Hauptsatze verbunden ist. Der Bedingungssatz enthält die Voraussetzung (Hypothesis), welche den Gegenstand angibt, von dem, und die Bedingungen, unter denen vom Gegenstande im Lehrsatze etwas ausgesagt wird. Der Hauptsatz enthält die Behauptung (Thesis) und spricht die zu beweisende Wahrheit aus. Häufig liegt die Voraussetzung auch in der vorangegangenen Erklärung eines im Lehrsatze gebrauchten Wortes. Jeder Lehrsatz bedarf eines Beweises, d. i. der Darlegung, dass die Wahrheit des Satzes eine nothwendige Folge der Axiome oder anderer bereits als richtig erkannter Sätze ist. Der Beweis ist entweder direct oder indirect. Bei dem directen Beweise wird die im

Lehrsatze aufgestellte Behauptung als Folgerung aus der Voraussetzung und aus schon anerkannten Sätzen durch eine Reihe von Schlüssen abgeleitet; bei dem indirecten Beweise aber wird auf die Wahrheit einer Behauptung geschlossen, indem man nachweist, dass die Annahme der entgegengesetzten Behauptung zu Folgerungen führen würde, welche mit schon als wahr erkannten Sätzen im Widerspruche stehen.

Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten oder einen Theil derselben als Behauptung, und die Behauptung des ersten oder einen Theil derselben als Voraussetzung enthält. Die Umkehrung eines richtigen Satzes ist nicht nothwendig wieder richtig, sie bedarf daher eines besonderen Beweises.

Folgesätze sind Sätze, welche aus einem vorhergehenden Satze unmittelbar oder durch einfache Schlüsse abgeleitet werden können. Ein Zusatz ist ein Satz, durch welchen die Aussage eines vorhergehenden Satzes erweitert oder näher bestimmt wird.

§. **6.** Eine Aufgabe ist die Forderung, etwas herzustellen, das gegebenen Bedingungen genügt. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung.

Die Aufgaben der Geometrie sind entweder Constructions- oder Rechnungsaufgaben; erstere verlangen die Herstellung eines geometrischen Gebildes, letztere haben die Berechnung von Raumgrößen mit Hilfe der Zahl zum Gegenstande.

Erster Theil.

Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Winkel.

I. Die gerade Linie und die ebene Fläche.

§. 7. Die einfachste Linie ist die gerade Linie, auch bloß Gerade. Die gerade Linie läſst sich nicht definieren, ihre Vorstellung muſs als elementar vorausgesetzt werden.

Eine Linie, welche nicht gerade, aber aus geraden Linien zusammengesetzt ist, wird eine gebrochene Linie genannt. Eine Linie, von der kein Theil gerade ist, heißt krumm.

Grundsatz. Durch zwei Punkte kann nur **eine** Gerade gezogen werden.

Folgesätze. a) Die Lage einer Geraden ist durch zwei Punkte bestimmt.

b) Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinsamen Punkt haben. Man sagt, sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt diesen gemeinsamen Punkt ihren Schnittpunkt.

§. 8. Die einfachste Fläche ist die ebene Fläche, auch bloß Ebene. Sie ist, so wie die gerade Linie, eine Grundvorstellung und daher keiner strengen Erklärung fähig.

Eine Fläche, von der kein Theil eben ist, heißt krumm.

Grundsatz. Jede Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinsam hat, liegt ganz in derselben.

Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte kann nur eine Ebene gelegt werden. Denn zieht man durch zwei dieser Punkte eine Gerade und dreht eine Ebene, welche jene zwei Punkte, also auch die durch dieselben gezogene Gerade, in sich enthält, um diese Gerade (wie um eine feste Achse) so lange, bis sie auch durch den dritten Punkt geht, so kann die Ebene weiter keine andere Lage einnehmen, ohne diesen Punkt zu verlassen.

Folgesatz. Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt:

a) durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen;

b) durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben

c) durch zwei sich schneidende Gerade.

§. 9. Jener Theil der Geometrie, welcher von den Raumgebilden handelt, die in einer und derselben Ebene liegen, heißt *Planimetrie*. Raumgebilde, welche nicht als in einer einzigen Ebene liegend gedacht werden können, bilden den Gegenstand der *Stereometrie*.

II. Strahlen und Strecken.

§. 10. Eine unbegrenzte Gerade wird durch jeden ihrer Punkte in zwei halbbegrenzte Gerade getheilt, welche auf beiden *Seiten* des gemeinsamen Grenzpunktes liegen und von diesem aus *entgegengesetzte Richtungen* haben. Jede durch einen Punkt halbbegrenzte Gerade wird ein *Strahl* genannt. Von den beiden Strahlen, in welche eine unbegrenzte Gerade durch einen Punkt getheilt wird, heißt jeder die *Ergänzung* des andern.

Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade heißt eine *Strecke*; die beiden Grenzpunkte heißen ihre *Endpunkte*. Die Strecke zwischen zwei Punkten bestimmt die *Entfernung* oder den *Abstand* derselben.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

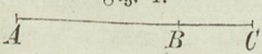
Eine Strecke AB kann von einem sich bewegenden Punkte auf zwei Arten beschrieben werden, entweder in der Richtung von A nach B, oder in der entgegengesetzten Richtung von B nach A. Wird auf diesen Gegensatz der Richtungen Rücksicht genommen, so nennt man AB die Strecke, welche der Punkt in seiner Bewegung von A nach B, und BA die Strecke, welche er in seiner Bewegung von B nach A zurücklegt, und nimmt die eine dieser Strecken als *positiv*, die andere ihr entgegengesetzte als *negativ* an. Hiernach ist $AB = -BA$.

Gewöhnlich wird auf diesen Gegensatz der Richtungen nicht Rücksicht genommen und nur die absolute Länge der Strecken in Betracht gezogen.

§. 11. Legt man zwei Strecken so auf einander, dass ein Paar Endpunkte und die Richtungen zusammenfallen, so sind die Strecken *gleich*, wenn auch die anderen zwei Endpunkte zusammenfallen, und *ungleich*, wenn die anderen Endpunkte nicht zusammenfallen. Im zweiten Falle ist jene Strecke die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Strecke liegt.

Verlängert man eine Strecke AB (Fig. 1) über B hinaus bis C, so heißt die erhaltene Strecke AC die *Summe* der Strecken AB und BC, und umgekehrt die Strecke AB die *Differenz* der Strecken AC und BC.

Fig. 1.



§. 12. Um eine gegebene Strecke zu *messen*, untersucht man, wie vielmal eine andere als *Einheit* angenommene Strecke in derselben enthalten ist.

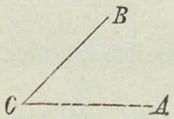
Als *Einheit des Längenmaßes* nimmt man das *Meter* an. Ein Meter (*m*) wird in 10 *Decimeter* (*dm*) à 10 *Centimeter* (*cm*) à 10 *Millimeter* (*mm*) eingetheilt. 1000 Meter sind ein *Kilometer* (*km*), 10.000 Meter sind ein *Myriameter* (*μm*).

III. Winkel.

§. 13. Gehen in einer Ebene von einem Punkte zwei Strahlen aus, so heißt die Größe der Drehung, welche der eine Strahl in dieser Ebene um den gemeinsamen Punkt machen muss, um in die Richtung des zweiten Strahles zu gelangen, der Winkel der beiden Strahlen. Die zwei Strahlen, welche den Winkel bilden, heißen die Schenkel; der gemeinsame Punkt heißt der Scheitel des Winkels. Die zwischen den Schenkeln liegende ebene Fläche, in welcher die Drehung als vollbracht betrachtet wird, heißt die Winkelfläche.

Einen Winkel bezeichnet man entweder durch drei Buchstaben, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen und der am Scheitel stehende immer in die Mitte gesetzt wird, oder durch einen zwischen die Schenkel in der Nähe des Scheitels gesetzten Buchstaben, oder auch durch den Buchstaben am Scheitel allein, wenn dieser Scheitel nur einem einzigen Winkel angehört.

Fig. 2.

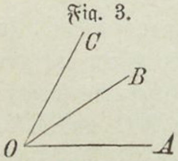


Ein Winkel AOB (Fig. 2) kann von einem Strahle, welcher sich um O dreht, auf zwei Arten beschrieben werden, entweder durch die Drehung aus der Richtung OA in die Richtung OB, oder durch die entgegengesetzte Drehung von OB nach OA. Wird auf diesen Gegensatz der Drehungsrichtungen Rücksicht genommen, so nennt man AOB den Winkel, welchen der Strahl in seiner Drehung von OA nach OB, und BOA den Winkel, welchen er in seiner Drehung von OB nach OA beschreibt, und nimmt den einen dieser Winkel als positiv, den andern als negativ an. Hiernach ist AOB = — BOA.

Meistens nimmt man auf diesen Gegensatz der Drehungsrichtungen keine Rücksicht und betrachtet den Winkel nur als die absolute Größe der zu dessen Entstehung erforderlichen Drehung.

§. 14. Legt man zwei Winkel so auf einander, dass die Scheitel, ein Paar Schenkel und die Drehungsrichtungen zusammenfallen, so sind die Winkel gleich, wenn auch die anderen zwei Schenkel zusammenfallen, und ungleich, wenn die anderen Schenkel nicht zusammenfallen. Im zweiten Falle ist jener Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des andern Winkels fällt.

Fig. 3.



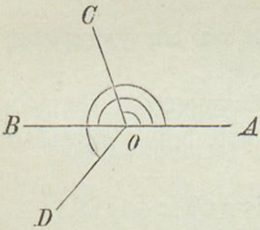
Wird ein Strahl OA (Fig. 3) in einer Ebene um den Punkt O so gedreht, dass er zuerst in die Richtung OB und von da durch weitere Drehung in die Richtung OC gelangt, so heißt der durch die ganze Drehung entstandene Winkel AOC die Summe der Winkel AOB und BOC, und umgekehrt der Winkel AOB die Differenz der Winkel AOC und BOC.

§. 15. Dreht sich ein Strahl um seinen Grenzpunkt in einer Ebene herum, so bildet er nach und nach mit seiner anfänglichen Richtung alle um jenen Punkt möglichen Winkel.

Dreht sich der bewegliche Strahl so weit, bis er wieder in seine ursprüngliche Richtung zurückgekehrt ist, so hat er eine **Umdrehung** gemacht. Der Winkel, welcher durch eine ganze Umdrehung entsteht, heißt ein **voller Winkel**; seine beiden Schenkel fallen zusammen. **Alle vollen Winkel sind einander gleich.**

Kommt der bewegliche Strahl OA (Fig. 4) in die Richtung OB, welche seiner anfänglichen Richtung entgegengesetzt ist, so hat er eine halbe Umdrehung gemacht. Denn die Größe der Drehung, durch die OA in die entgegengesetzte Richtung OB hinübergeführt wird, ist offenbar gleich der Größe der Drehung, durch welche OB bei weiterer Fortsetzung jener Drehung wieder in die ursprüngliche Lage OA zurückgeführt wird.

Fig. 4.



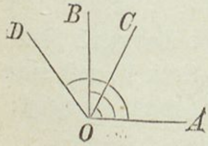
Ein Winkel AOB, welcher durch die halbe Umdrehung des beweglichen Strahles entsteht, heißt ein **gestreckter Winkel**; seine Schenkel liegen auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer Geraden. Ein gestreckter Winkel ist die Hälfte eines vollen Winkels. **Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.**

Ein Winkel AOC, der kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein **hohler**; ein Winkel AOD, der größer als ein gestreckter ist, ein **erhabener** Winkel.

Jedem hohlen Winkel zweier Strahlen entspricht immer auch ein erhabener Winkel derselben; wenn jedoch nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, ist stets der hohle Winkel zu verstehen.

§. 16. Ein Winkel AOB (Fig. 5), welcher die Hälfte eines gestreckten Winkels ist, heißt ein **rechter** Winkel; zu seiner Entstehung wird der vierte Theil einer Umdrehung erfordert. **Alle rechten Winkel sind einander gleich.** Der rechte Winkel wird mit dem Buchstaben R bezeichnet.

Fig. 5.



Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten; ein voller Winkel ist gleich vier Rechten.

Ein Winkel AOC, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein **spitzer**; ein Winkel AOD, welcher größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, ein **stumpfer** Winkel. Spitze und stumpfe Winkel heißen mit einem gemeinsamen Namen **schiefe** Winkel.

Zwei Winkel, deren Summe einen rechten beträgt, heißen **Complementwinkel**; zwei Winkel, deren Summe zwei Rechte beträgt, heißen **Supplementwinkel**.

Zusatz. Wird der bewegliche Strahl nach einer vollen Umdrehung noch weiter gedreht, so kommt er nach und nach wiederholt in die Richtungen, die er schon während der ersten Umdrehung hatte. Die Winkel, die dadurch erzeugt werden, sind gleich so vielmal vier Rechten, als volle Umdrehungen stattfanden, vermehrt um die Winkel, welche der Strahl mit seiner anfänglichen Richtung bei der ersten Umdrehung gebildet hat.

§. **17.** Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinsamen Schenkel haben und in derselben Ebene auf entgegengesetzten Seiten dieses Schenkels liegen, heißen anstoßende Winkel.

Zwei anstoßende Winkel, deren nicht gemeinsame Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen in einer Geraden liegen, heißen Nebenwinkel.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Denn sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel (§§. 14 und 15).

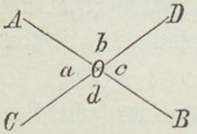
Zusätze. a) Die Summe aller anstoßenden Winkel, welche auf derselben Seite einer durch den gemeinsamen Scheitel gehenden Geraden auf einander folgen, ist gleich zwei Rechten.

b) Die Summe aller anstoßenden Winkel, welche um den gemeinsamen Scheitel herum auf einander folgen, ist gleich vier Rechten.

§. **18.** Zwei Winkel, deren jeder von den Ergänzungen der Strahlen gebildet wird, welche die Schenkel des andern Winkels sind, heißen Scheitelwinkel, wie a und c, oder b und d (Fig. 6).

Lehrsatz. Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Fig. 6.



Voraussf. a und c sind Scheitelwinkel.

Behaupt. $a = c$.

Beweis. $a + b = 2R$ als Nebenwinkel,

$b + c = 2R$ „ „

also $a + b = b + c$, und wenn man beiderseits b subtrahiert, $a = c$.

Ebenso kann man beweisen, dass $b = d$ ist.

Folgesatz. Ist von den Winkeln, welche zwei sich schneidende Gerade mit einander bilden, einer ein rechter, so sind es auch die anderen; ist einer von jenen Winkeln ein schiefer, so sind es auch die anderen.

§. **19.** Zwei sich schneidende Gerade heißen zu einander normal (senkrecht), wenn sie mit einander rechte Winkel, und schief, wenn sie mit einander schiefe Winkel bilden. Dass CD zu AB normal ist, wird angezeigt: $CD \perp AB$.

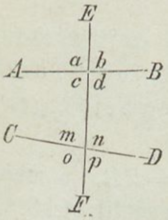
§. **20.** Um die Winkel zu messen, untersucht man, wie vielmal ein als Einheit angenommener Winkel in dem gegebenen Winkel enthalten ist. Als Einheit des Winkelmaßes wird ein Grad (°), d. i. der 360ste Theil eines vollen Winkels angenommen. Einen Grad theilt man in 60 Minuten ('), eine Minute in 60 Secunden (").

IV. Parallele Linien.

§. **21.** Eine Gerade EF (Fig. 7), welche zwei oder mehrere gerade Linien schneidet, wird eine Transversale dieser Geraden genannt.

Werden zwei Gerade AB und CD von einer dritten EF geschnitten, so entstehen an beiden Schnittpunkten acht Winkel.

Fig. 7.



Die Winkel c, d, m, n, welche zwischen den geschnittenen Geraden liegen, heißen innere; die Winkel a, b, o, p dagegen äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Transversale und an verschiedenen Scheiteln heißen Gegenwinkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Transversale und an verschiedenen Scheiteln werden Wechselwinkel genannt; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Transversale und an verschiedenen Scheiteln heißen Anwinkel; wie a und o, b und p, c und m, d und n.

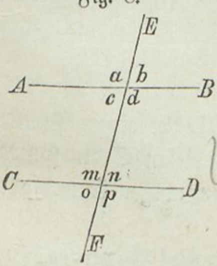
§. 22. Lehrsätze.

1. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass irgend zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Gegenwinkel gleich, b) je zwei Wechselwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel (Fig. 8).

Voraussetzung. a = m.

Erste Behaupt. b = n, c = o, d = p.

Fig. 8.



Beweis. a + b = 2R und m + n = 2R (§. 17), folglich a + b = m + n; aber a = m nach der Voraussetzung, daher auch b = n.

Ebenso wird bewiesen, dass c = o ist.

Endlich ist a = d und m = p (§. 18), also wegen a = m auch d = p.

Zweite Behaupt. a = p, b = o, c = n, d = m.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist a = m, aber m = p (§. 18), folglich auch a = p.

Ebenso zeigt man, dass b = o, c = n, d = m ist.

Dritte Behaupt. a + o = 2R, b + p = 2R,
c + m = 2R, d + n = 2R.

Beweis. a + c = 2R (§. 17), c = o nach der schon bewiesenen ersten Behauptung; folglich auch a + o = 2R.

Ebenso zeigt man, dass b + p = 2R, c + m = 2R und d + n = 2R ist.

2. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel.

Beweis. Es sei c = n. Da c = b als Scheitelwinkel, so ist auch b = n. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so müssen (nach 1.) auch alle übrigen in dem Lehrsatze enthaltenen Behauptungen als bewiesen angesehen werden.

3. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass irgend zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind auch a) je zwei andere Anwinkel Supplementwinkel, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Wechselwinkel gleich.

Beweis. Es sei a + o = 2R. Da auch a + c = 2R, so muss a + c = a + o, daher c = o sein. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so treffen (nach 1.) auch alle übrigen Behauptungen zu.

Folgesatz. Aus den voranstehenden drei Sätzen lässt sich indirect folgern: Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel nicht gleich, oder zwei Anwinkel nicht Supplementwinkel sind, so sind je zwei Gegenwinkel und je zwei Wechselwinkel nicht gleich, und je zwei Anwinkel nicht Supplementwinkel.

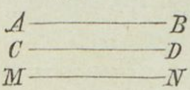
§. **23.** Zwei Gerade, welche in derselben Ebene liegen und, so weit sie auch verlängert werden, in keinem Punkte zusammentreffen, heißen einander parallel. Um zu bezeichnen, dass zwei Gerade AB und CD parallel sind, schreibt man AB || CD.

Grundsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur eine Parallele gezogen werden.

Folgesätze. a) Sind zwei gerade Linien einer und derselben dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

Ist (Fig. 9) AB || MN und CD || MN, so ist auch AB || CD.

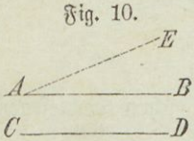
Fig. 9.



Denn wäre die Gerade AB nicht parallel zu CD, so müsste sie hinreichend verlängert CD in einem Punkte schneiden; dann gäbe es aber durch diesen Schnittpunkt zwei Parallele zu MN, was nach dem obigen Grundsatze nicht möglich ist.

b) Eine Gerade AE (Fig. 10), welche eine von zwei Parallelen, AB, schneidet, muss bei gehöriger Verlängerung auch die andere CD schneiden.

Fig. 10.



Denn schnitte sie diese nicht, so wäre sie ihr parallel; dann gäbe es aber durch den Punkt A zwei Parallele zu CD, was dem obigen Grundsatze widerspricht.

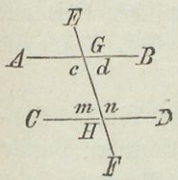
c) Eine Ebene ist durch zwei parallele Gerade bestimmt. (Vergleiche §. 8, Folges.)

§. **24. Lehrsätze.**

1. Werden zwei Gerade von einer Transversale so geschnitten, dass entweder zwei Wechselwinkel oder zwei Gegen-

winkel gleich, oder zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel (Fig. 11).

Fig. 11.



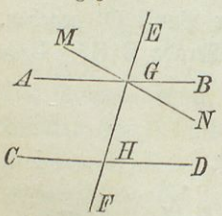
Beweis. Es schneide die Gerade EF die beiden Geraden AB und CD so, dass $c = n$ ist. Da dann auch $d = m$ sein muss, so kann man den auf der einen Seite von EF zwischen BG, GH und HD liegenden Theil der Ebene BGHD durch Drehung so in den auf der andern Seite liegenden Theil CHGA bringen, dass die Strecke GH auf HG und die Strahlen GB und HD bezüglich in die Richtungen HC und GA fallen, dass sich also die beiden Theile der Ebene decken. Die Geraden AB und CD bilden demnach mit der GH zu beiden Seiten der letzteren dasselbe geometrische Gebilde; hätten sie daher einen Punkt auf der einen Seite der GH gemeinsam, so müssten sie auch auf der andern Seite einen solchen gemeinsam haben, also sich in zwei Punkten schneiden, was unmöglich ist (§. 7, b). Die Geraden AB und CD sind also parallel.

Da (§. 22) zwei Wechselwinkel auch gleich sind, wenn zwei Gegenwinkel einander gleich, oder wenn zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so ist der obige Lehrsatz vollständig bewiesen.

2. (Umkehrung des Lehrsatzes 1). Werden zwei parallele Gerade von einer Transversale geschnitten, so sind a) je zwei Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel (Fig. 12).

Man braucht hier nur zu zeigen, dass unter der gegebenen Voraussetzung zwei Wechselwinkel gleich sind, indem dann nach §. 22, 2 auch die übrigen Behauptungen zutreffen.

Fig. 12.



Voraussſ. $AB \parallel CD$.

Behaupt. W. $BGH = CHG$.

Beweis. Wäre BGH nicht $= CHG$, so müsste $BGH > CHG$, oder $BGH < CHG$ sein. Wäre $BGH > CHG$, so ziehe man die Gerade MN so durch G, dass $NGH = CHG$ wird; dann wäre $MN \parallel CD$, was nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung $AB \parallel CD$ ist und durch den Punkt G zu einer Geraden nur eine Parallele gezogen werden kann. Ebenso lässt sich zeigen, dass BGH nicht kleiner als CHG sein kann. Es muss also $BGH = CHG$ sein.

3. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass die Summe der inneren Anwinkel auf einer Seite der Transversale kleiner ist als zwei Rechte, so müssen sich die beiden Geraden bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite der Transversale schneiden (Fig. 12).

Beweis. Es seien MN und CD zwei Gerade, welche von der EF so geschnitten werden, dass $HGN + GHD < 2R$ ist. Zieht man durch G eine Gerade AB so, dass $HGB + GHD = 2R$ wird, so ist (nach 1.) $AB \parallel CD$. Die Gerade MN, welche die AB schneidet, muss daher auch die CD schneiden (§. 23, b). Dies ist aber nur in der Richtung des Strahles GN möglich, da wegen $HGN < HGB$ der Strahl GN zwischen GB und GH, folglich sein Ergänzungsstrahl GM zwischen GA und GE liegt und demnach der letztere mit CD nicht zusammentreffen kann.

Folgesatz. Errichtet man auf den Schenkeln eines hohlen Winkels Normale, so schneiden sich diese in einem zwischen den Schenkeln liegenden Punkte.

Folgt aus 3., wenn man durch die Fußpunkte der Normalen eine Gerade zieht.

§. 25. **Lehrsätze.**

1. Sind zwei Gerade zu einer dritten normal, so sind sie parallel.

Der Beweis wird mit Hilfe von §. 24, 1 geführt.

2. Ist von zwei Parallelen die eine zu einer Geraden normal, so ist auch die andere zu ihr normal.

Beweis mit Zuziehung von §. 24, 2.

3. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur **eine** Normale gezogen werden.

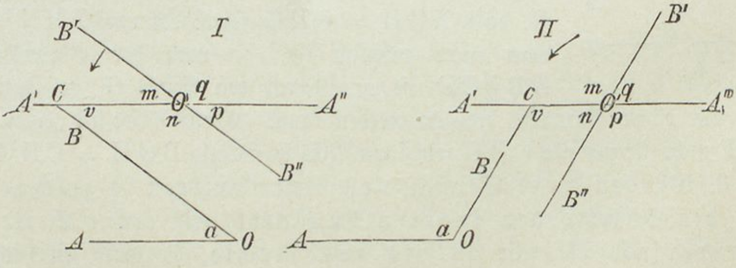
Indirecter Beweis. Ließen sich von dem Punkte zu der Geraden mehrere Normale ziehen, so hätten diese einen Punkt gemeinsam und müssten nach 1. zugleich parallel sein, was einen Widerspruch enthält.

4. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur **eine** Normale errichtet werden.

Beweis wie zu 3.

§. **26.** Es sei der Winkel AOB (Fig. 13) und der Punkt O′ gegeben. Zieht man durch O′ die Gerade A′A″ ∥ AO und die Gerade B′B″ ∥ BO,

Fig. 13.



so sind die Schenkel der um O′ entstehenden vier Winkel mit den Schenkeln des gegebenen Winkels theils in demselben Sinne parallel, wie O′A′ mit OA, oder O′B′ mit OB, theils im entgegengesetzten Sinne parallel, wie O′A″ mit OA, oder O′B″ mit OB.

Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

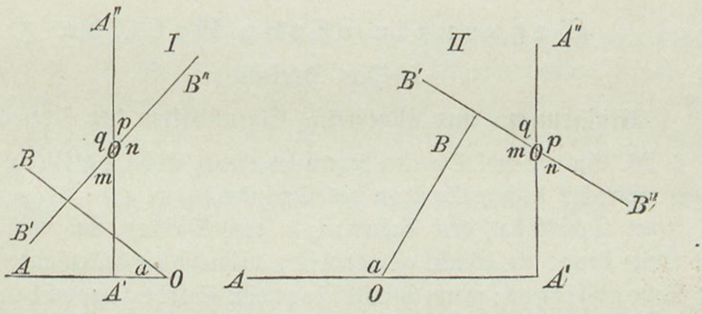
Beweis. a) Verlängert man OB, bis sie A'A" in C schneidet, so ist (nach §. 24, 2) m = v und a = v, folglich auch m = a. — Aus m = a und m = p (§. 18) folgt auch p = a.

b) Nach a) ist m = a, aber n + m = 2R; mithin auch n + a = 2R. Da n = q, so ist auch q + a = 2R.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man den Punkt O' in der Winkelfläche AOB annimmt.

2. Dreht man in der vorhergehenden Fig. 13 die Geraden A'A" und B'B" als eine feste Verbindung um den Punkt O' in einer bestimmten Richtung, die hier der Pfeil anzeigt, um 90°, so kommen dieselben in eine Lage gegen den Winkel AOB, wie sie Fig. 14 darstellt; es wird A'A" ⊥ OA und B'B" ⊥ OB, während dabei die Winkel m, n, p, q ungeändert bleiben.

Fig. 14.



Die Schenkel dieser Winkel heißen in der neuen Lage zu den Schenkeln des Winkels AOB in demselben oder im entgegengesetzten Sinne normal, je nachdem sie vor ihrer Drehung um 90° zu den Schenkeln dieses Winkels in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel waren. So ist O'A' zu OA oder O'B' zu OB in demselben Sinne normal, dagegen O'A" zu OA, oder O'B" zu OB im entgegengesetzten Sinne normal.

Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise zu einander normal sind, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne zu einander normal sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne zu einander normal sind.

Folgt aus dem unter 1. bewiesenen Lehrsatze.

Übungssätze.

§. 27. Beweise folgende Lehrsätze:

1. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel sind zu einander normal.
2. Die zur Halbierungslinie eines Winkels im Scheitel errichtete Normale halbiert den Nebenwinkel.
3. Die Halbierungslinie eines zweier Scheitelwinkel halbiert auch den andern.
4. Die Halbierungslinien zweier Gegen- oder Wechselwinkel an zwei parallelen, von einer Transversale geschnittenen Geraden sind parallel.
5. Die Halbierungslinien zweier Anwinkel an zwei von einer Transversale geschnittenen Parallelen sind zu einander normal.
6. Drei Gerade schneiden sich in einem Punkte; man weise nach, dass je drei nicht aneinander liegende Winkel 180° betragen.
7. Errichtet man im Scheitel eines Winkels auf beiden Schenkeln nach verschiedenen Seiten Normale, so schließen diese einen Winkel ein, welcher zu dem gegebenen Winkel supplementär ist.

Zweiter Abschnitt.

Begrenzte ebene Gebilde.

I. Das Dreieck.

1. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Dreiecke.

§. 28. Ein von drei Strecken begrenztes ebenes Gebilde heißt ein Dreieck. Die drei Strecken heißen Seiten des Dreieckes.

Jedes Dreieck hat drei Eckpunkte, drei Seiten und drei Winkel. Jeder Seite liegt ein Winkel gegenüber, während die beiden anderen Winkel dieser Seite anliegen; jedem Winkel liegt eine Seite gegenüber, während die beiden anderen Seiten ihn einschließen.

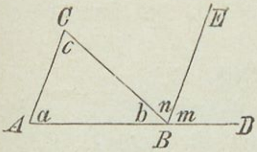
Nimmt man in einem Dreiecke ABC irgend eine Seite AB als Grundlinie an, so heißt die Normale CD, welche von dem gegenüberliegenden Eckpunkte zu dieser Seite gezogen wird, die zugehörige Höhe des Dreieckes.

§. 29. Ein Dreieck, in welchem keine Seite einer andern gleich ist, heißt ungleichseitig; ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig; ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleich sind, heißt gleichseitig.

In einem gleichschenkligen Dreiecke nennt man die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie, und den dieser gegenüberliegenden Eckpunkt den Scheitel des Dreieckes.

§. 30. **Lehrsatz.** Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 15.



Beweis. Verlängert man (Fig. 15) die Seite AB bis D und zieht BE ∥ AC, so ist

$$\left.\begin{array}{l} m = a \\ n = c \end{array}\right\} \text{ nach §. 24, 2;}$$

nun ist $m + n + b = 2R$ (§. 17, Zus. a), folglich auch $a + c + b = 2R$.

Man könnte auch durch C eine zu AB parallele Hilfslinie ziehen. Wie wird dann der Beweis geführt?

Folgesätze. a) Durch zwei Winkel eines Dreieckes oder deren Summe ist auch die Größe des dritten Winkels gegeben.

b) In einem Dreiecke kann nur ein rechter, sowie auch nur ein stumpfer Winkel vorkommen.

§. **31.** Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn alle drei Winkel desselben spitz sind; rechtwinklig, wenn in demselben ein rechter, stumpfwinklig, wenn in demselben ein stumpfer Winkel vorkommt.

In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse, die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, werden Katheten genannt. Das spitz- und das stumpfwinklige Dreieck bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen schiefwinklige Dreiecke.

§. **32.** Unter dem Außenwinkel eines Dreieckes versteht man denjenigen Winkel, welchen eine Dreiecksseite mit der Verlängerung einer andern bildet.

Lehrsatz. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel (Fig. 15).

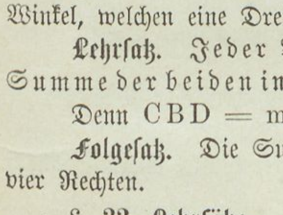
Denn $CBD = m + n = a + c$.

Folgesatz. Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich vier Rechten.

§. **33. Lehrsätze.**

1. Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.
2. Der größeren Seite eines Dreieckes liegt der größere Winkel gegenüber.
3. Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.
4. Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt die größere Seite gegenüber.

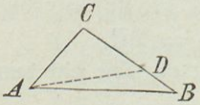
Fig. 16.



Beweis zum 1. Satze (Fig. 16).

Es sei im Dreiecke ABC BC = AC. Man stelle sich das Dreieck I noch einmal, jedoch umgewendet, vor, wie in II, und verschiebe II so auf I, dass sich die gleichen Winkel C decken. Dann müssen wegen BC = AC auch die Punkte B und A des Dreieckes II auf die Punkte A und B des Dreieckes I, und somit die Seite BA des ersteren auf die Seite AB des letzteren fallen; es deckt also der Winkel A des Dreieckes II den Winkel B des Dreieckes I; folglich $A = B$.

Fig. 17.



Beweis zum 2. Satze. (Fig. 17.)

Es sei die Seite $BC > AC$. Man mache $CD = AC$ und ziehe die Strecke AD. Dann ist (nach 1) in dem Dreiecke CAD der Winkel $DAC = ADC$, aber Winkel $BAC > DAC$, folglich auch Winkel $BAC > ADC$. Nun ist ADC als Außenwinkel des Dreieckes ABD größer als der Winkel ABC; somit muss umsomehr Winkel $BAC > ABC$ sein.

Der **Beweis** zum 3. Satze wird **indirect** geführt. Es sei (Fig. 16) der Winkel $A = B$. Wäre die Seite BC nicht $= AC$, so müsste $BA \gtrless AC$ sein. Allein dann wäre nach dem vorhergehenden Satze auch $A \gtrless B$, was der Voraussetzung $A = B$ widerspricht. Es muss daher $BC = AC$ sein.

Beweis zum 4. Satze ebenfalls indirect. Es sei (Fig. 17) der Winkel $BAC > ABC$. Gesetzt es wäre nicht $BC > AC$, so müsste $BC = AC$ oder $BC < AC$ sein. Aus der ersten Annahme würde folgen, dass $BAC = ABC$ ist; aus der zweiten, dass $BAC < ABC$ ist; beides widerstreitet der Voraussetzung $BAC > ABC$. Es muss daher $BC > AC$ sein.

Folgesätze. Aus 1. folgt:

a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind auch die anderen zwei Winkel bestimmt (§. 30).

b) Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie (§. 32).

c) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich, und daher jeder 60^0.

Aus 4. folgt:

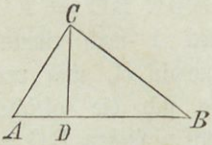
d) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als jede Kathete.

e) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte.

§. 34. **Lehrsätze.** 1. Jede Seite eines Dreieckes ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten.

Beweis. Es sei ABC (Fig. 18) ein Dreieck, dessen größte Seite AB ist.

Fig. 18.



Denkt man sich $CD \perp AB$, so ist (nach §. 33, d)

$$\begin{aligned} AD &< AC \text{ und} \\ BD &< BC, \text{ daher} \\ \hline AD + BD &< AC + BC, \text{ oder} \\ AB &< AC + BC. \end{aligned}$$

Dass $AC < AB + BC$ und $BC < AB + AC$ ist, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

2. Jede Seite eines Dreieckes ist größer als die Differenz der beiden anderen Seiten.

Nach dem vorhergehenden Satze ist:

$$AC + BC > AB \text{ und } AB + AC > BC;$$

folglich ist auch, wenn man Gleiches subtrahiert,

$$BC > AB - AC,\ AC > AB - BC \text{ und } AB > BC - AC.$$

§. 35. Wird von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine normale oder schiefe Gerade gezogen, so heißt ihr Durchschnitt mit der gegebenen Geraden der Fußpunkt der andern Geraden.

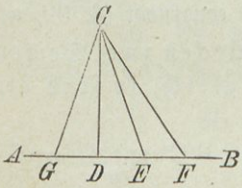
Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine normale und mehrere schiefe Strecken, so ist:

1. die Normale die kürzeste unter allen Strecken;

2. zwei schiefe Strecken, deren Fußpunkte von dem Fußpunkte der Normalen gleiche Abstände haben, sind einander gleich; und

3. von zwei schiefen Strecken, deren Fußpunkte von dem Fußpunkte der Normalen ungleiche Abstände haben, ist die entferntere die größere.

Fig. 19.



Beweis. Es sei (Fig. 19) $CD \perp AB$.

1. Dass CD kürzer als CE, CF, CG ist, folgt aus §. 33, d.

2. Ist $DE = DG$, so muss, wenn man den rechten Winkel CDG um CD umlegt, der Punkt G auf E, also auch CG auf CE fallen; folglich ist $CE = CG$.

3. Im $\triangle CDE$ ist der Winkel CED spitz, daher sein Nebenwinkel CEF stumpf, und somit im $\triangle CEF$ die Seite $CF > CE$.

Aus den Sätzen 2. und 3. folgen indirect auch deren Umkehrungen.

Die von einem Punkte zu einer Geraden gezogene Normale bestimmt den Abstand des Punktes von der Geraden.

Folgesatz. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden können zu dieser immer zwei, aber auch nur zwei gleich lange schiefe Strecken gezogen werden.

2. Congruenz der Dreiecke.

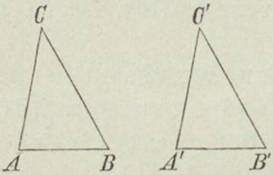
§. 36. Zwei Dreiecke sind congruent (§. 3), wenn sie auf einander gelegt sich vollständig decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sein. Daraus folgt: In congruenten Dreiecken sind die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich, und ebenso sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Da die Seiten und Winkel eines Dreieckes von einander nicht unabhängig sind, so genügen schon weniger als sechs Stücke, um aus ihrer Übereinstimmung in zwei Dreiecken auf deren Congruenz schließen zu können. Die Fälle, in denen dieses stattfindet, sind in den folgenden vier Lehrsätzen über die Congruenz der Dreiecke enthalten.

§. 37. I. **Congruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent (Fig. 20).

Voraussetzung. Seite $AB = A'B'$, Winkel $A = A'$ und $B = B'$.

Fig. 20



Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf ABC, dass die Punkte A' und B' auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, weil $AB = A'B'$ ist. Weil der Winkel $A = A'$ ist, so muss $A'C'$ in die Richtung AC fallen; wegen $B = B'$ muss ebenso $B'C'$ in die Richtung BC fallen. Wenn aber die Geraden $A'C'$ und $B'C'$ in die Richtungen der Geraden AC und BC fallen, so muss auch der Schnittpunkt C' der ersteren auf den Schnittpunkt C der letzteren fallen. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ decken sich also.

Folgesatz. Zwei Dreiecke, welche eine Seite, einen anliegenden und den gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich haben, sind congruent (§. 30, a).

§. 38. II. **Congruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent (Fig. 20).

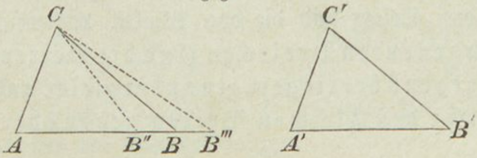
Voraussetzung. Es sei $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $C = C'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, dass C' auf C, $C'A'$ in die Richtung CA, und $C'B'$ in die Richtung CB fällt, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel C' und C gleich sind; wegen $AC = A'C'$ muss auch der Punkt A' auf A, und wegen $BC = B'C'$ der Punkt B' auf B, also die Seite $A'B'$ auf AB fallen; folglich ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§. 39. III. **Congruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 21.



Voraussf. Es sei (Fig. 21) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, ferner $BC > AC$, somit auch $B'C' > A'C'$, endlich der Winkel $A = A'$.

Behaupt. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

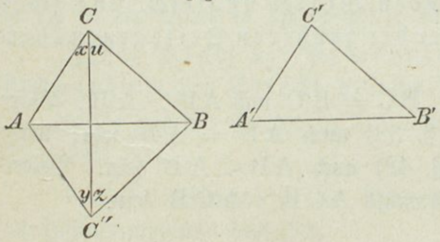
Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf das $\triangle ABC$, dass der Punkt A' auf A, C' auf C und $A'B'$ in die Richtung AB fällt, was wegen $AC = A'C'$ und $A = A'$ möglich ist. Dann muss auch B' auf B fallen. Denn fiele der Punkt B' nicht auf B, so müsste er entweder auf einen Punkt innerhalb der Seite AB, etwa auf B'', oder auf einen Punkt ihrer Verlängerung, etwa auf B''', zu liegen kommen. Würde B' auf B'' fallen, so wäre, wenn man $B''C$ zieht, $\triangle AB''C \cong A'B'C'$ (§. 38), daher $B''C = B'C' = BC$, somit das $\triangle CB''B$ gleichschenklig, es müssten also in demselben die gleichen Winkel $B''BC$ und $BB''C$ spitz sein; dann wäre der Winkel $AB''C$ stumpf und folglich $AC > B''C$ (§. 33, e), somit auch $AC > BC$, was der Voraussetzung widerspricht. — Ebenso würde sich ein Widerspruch ergeben, wenn B auf B''' fiele.

Der Punkt B' muss daher auf B fallen; dann ist aber $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Zusatz. Die Schlussfolgerungen des obigen Beweises stützen sich auf die Bedingung, dass der Winkel der größeren der zwei übereinstimmenden Seiten gegenüberliegt. Ist diese Bedingung nicht vorhanden, so können auch nicht jene Schlüsse gemacht werden. Wenn daher in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht gestattet, auf die Congruenz der Dreiecke zu schließen.

§. **40.** IV. **Congruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent (Fig. 22).

Fig. 22.



Voraussetzung. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so an das Dreieck ABC, dass sich die zwei größten Seiten $A'B'$ und AB decken, und dass der Punkt C' auf die entgegengesetzte Seite von AB nach C'' fällt. Dann sind nach der Voraussetzung die Dreiecke ACC'' und BCC'' gleichschenklig, also sind die Winkel an der Grundlinie gleich $x = y$, $u = z$; folglich ist auch $x + u = y + z$, oder $ACB = AC''B = A'C'B'$.

Ist aber $ACB = A'C'B'$, so ist (nach §. 38) $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§. **41.** Da congruente Dreiecke in Größe und Gestalt übereinstimmen, so folgt, dass die Bestandstücke, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken man auf die Congruenz dieser letzteren schließen kann, die Größe und die Gestalt eines Dreieckes unzweideutig bestimmen. Die Bestimmungsstücke eines Dreieckes sind also: 1. eine Seite mit zwei Winkeln; 2. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel; 3. zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel; 4. alle drei Seiten.

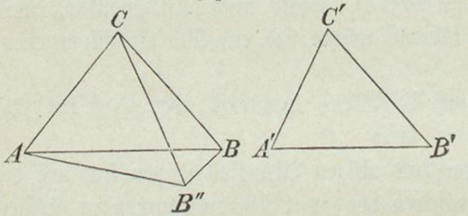
Nichtcongruenz der Dreiecke.

§. **42. Lehrsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüberliegt (Fig. 23).

Voraussf. $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und Winkel $ACB > A'C'B'$.

Behaupt. $AB > A'B'$.

Fig. 23.



Beweis. Man mache den Winkel $ACB'' = A'C'B'$ und die Strecke $CB'' = C'B'$, wobei der Punkt B'' außerhalb des Dreieckes ABC falle. Dann ist, wenn man AB'' und BB'' zieht, $\triangle AB''C \cong A'B'C'$ (§. 38), also $AB'' = A'B'$. Wegen $BC = B''C$ ist nun Winkel $CB''B = CBB''$, also $CB''B > ABB''$ und umsomehr $AB''B > ABB''$; folglich ist (nach §. 33, 4) $AB > AB''$, somit auch $AB > A'B'$.

Hier wurde angenommen, dass der Punkt B'' außerhalb des Dreieckes ABC falle. Derselbe kann auch in die Seite AB, oder innerhalb des Dreieckes ABC zu liegen kommen. Wie stellt sich der Beweis in diesen beiden Fällen?

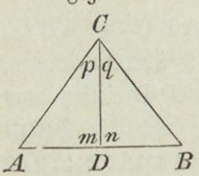
§. **43. Lehrsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar ist derjenige der größere, welcher der größeren Seite gegenüberliegt (Fig. 23).

Beweis. Es sei $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $AB > A'B'$. Wäre $ACB = A'C'B'$, so müsste (nach §. 38) auch $AB = A'B'$ sein; wäre $ACB < A'C'B'$, so müsste (nach §. 42) auch $AB < A'B'$ sein. Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muss $ACB > A'C'B'$ sein.

Anwendung der Congruenzsätze.

§. **44. Lehrsätze.** 1. Die Gerade vom Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes nach der Mitte der Grundlinie ist zur Grundlinie normal und halbiert den Winkel am Scheitel.

Fig. 24.



Voraussf. $AC = BC$, $AD = BD$ (Fig. 24).

Behaupt. $CD \perp AB$ und $p = q$.

Beweis. $\triangle ACD \cong BCD$ (§. 40), daher $m = n$ oder $CD \perp AB$, und $p = q$.

2. Die Normale vom Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie halbiert die Grundlinie und den Winkel am Scheitel (§. 39).

3. Die Gerade, welche den Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes halbiert, halbiert auch die Grundlinie und ist zu ihr normal (§. 38).

4. Die Gerade, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes zu dieser normal errichtet, geht durch den Scheitel.

Folgt aus 1., da die Gerade zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie zu dieser normal ist, durch die Mitte der Grundlinie aber zu derselben nur eine einzige Normale gezogen werden kann.

§. **45.** Zwei Punkte liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn die Strecke, welche sie verbindet, zu dieser Geraden normal ist und durch sie halbiert wird; die Gerade heißt die Symmetrieachse oder Symmetrale. So liegen in Fig. 24 die Punkte A und B symmetrisch in Beziehung auf die Gerade CD, welche die Symmetrale ist.

Zwei ebene Gebilde liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des andern Gebildes entspricht; z. B. die Dreiecke ADC und BDC. Zwei symmetrisch liegende ebene Gebilde können durch Umwendung um die Symmetrale zur Deckung gebracht werden.

Ein ebenes Gebilde heißt symmetrisch, wenn es sich durch eine Gerade (die Symmetrale) in zwei symmetrisch liegende Theile theilen läßt; z. B. das Dreieck ABC.

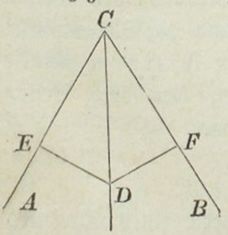
§. **46.** 1. Jede Strecke ist ein symmetrisches Gebilde; ihre Symmetrale ist die in der Mitte zu ihr errichtete Normale.

Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat von den beiden Endpunkten der Strecke gleiche Abstände; und umgekehrt.

Folgt aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke ADC und BDC (Fig. 24).

2. Jeder Winkel ist ein symmetrisches Gebilde; seine Symmetrale ist die Halbierungslinie desselben.

Fig. 25.



Ist CD (Fig. 25) die Symmetrale des Winkels ACB, also ACD = BCD, und ist DE ⊥ AC, DF ⊥ BC, so ergibt sich aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke CED und CFD:

Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche Abstände; und umgekehrt.

§. **47.** 1. Ein gleichschenkliges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf seine Höhe als Symmetrale.

In einem gleichschenkligen Dreiecke fallen die Symmetrale der Grundlinie, die Symmetrale des Winkels am Scheitel und die Höhe in eine Gerade zusammen (§. 44).

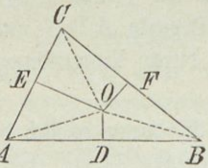
2. Ein gleichseitiges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf jede seiner drei Höhen als Symmetrieachse.

In einem gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

§. 48. **Lehrsätze.**

1. Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte, der von den drei **Eckpunkten** gleiche Abstände hat. (Erster merkwürdige Punkt des Dreieckes.)

Fig. 26.

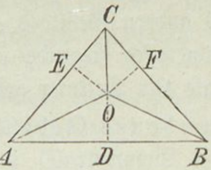


Beweis. Schneiden sich (Fig. 26) die zu den Seiten AB und AC gehörigen Symmetralen DO und EO in dem Punkte O (§. 24, Folges.), so ist O nach §. 46, 1 sowohl von A und B, als auch von A und C gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von B und C gleiche Abstände, so liegt er auch in der Symmetrale der Seite BC.

Der Punkt O liegt innerhalb, auf dem Umfange oder außerhalb des Dreieckes ABC, je nachdem dieses spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist. Der Beweis gilt jedoch unverändert für alle drei Lagen.

2. Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte, der von den drei **Seiten** gleiche Abstände hat. (Zweiter merkwürdige Punkt des Dreieckes.)

Fig. 27.



Beweis. Schneiden sich (Fig. 27) die Symmetralen der Winkel BAC und ABC in dem Punkte O (§. 24, 3), so ist O nach §. 46, 2 sowohl von AB und AC, als auch von AB und BC gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von AC und BC gleiche Abstände, so liegt er auch in der Symmetrale des Winkels ACB.

Zusatz. Ebenso wird bewiesen, daſs sich die Symmetralen des einen inneren Dreieckswinkels und der Nebenwinkel der beiden anderen in einem Punkte schneiden, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

Übungssätze.

§. 49. 1. Zieht man von einem Punkte im Innern eines Dreieckes Strecken zu den Endpunkten einer Seite, so ist a) die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten, und b) der von diesen

Strecken gebildete Winkel größer als der Winkel, den die beiden anderen Seiten einschließen.

Man verlängere eine Strecke bis zum Durchschnitte mit einer Seite und wende §. 34, 1 und §. 32 an.

1a. Ein Winkel eines Dreieckes sei α; wie groß ist der Winkel, welchen die Halbierungslinien der beiden anderen Winkel mit einander bilden?

2. Halbiert man den Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, so ist die Halbierungslinie der Grundlinie parallel.

3. Zieht man durch den Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes eine Parallele zur Grundlinie, so halbiert diese den Außenwinkel.

3a. Der Winkel, welchen die auf einen Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes gefällte Höhe mit der Grundlinie bildet, ist halb so groß wie der Winkel an der Spitze.

3b. Verlängert man die Hypotenuse über ihre Endpunkte je um die anliegende Kathete, so schließen die Verbindungslinien der neuen Endpunkte am Scheitel des rechten Winkels einen Winkel von 135° ein.

4. Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich.

5. Sind in einem Dreiecke zwei Höhen gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

6. Verbindet man zwei beliebige Punkte zweier paralleler Geraden durch eine Strecke und halbiert diese, so wird jede durch den Halbierungspunkt zwischen den Parallelen gezogene Strecke in demselben halbiert.

7. Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke einer der spitzen Winkel doppelt so groß als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die kleinere Kathete.

Legt man an das Dreieck ein congruentes mit der größeren Kathete an, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck.

8. Ist in einem gleichschenkligen Dreiecke ein Basiswinkel doppelt so groß wie der Scheitelwinkel, so wird es durch die Symmetrale des Basiswinkels in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

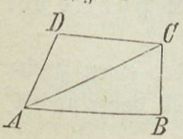
II. Das Viereck.

1. Erklärungen und Lehrsätze.

§. 50. Ein von vier Strecken begrenztes ebenes Gebilde heißt ein Viereck.

Die Strecke AC (Fig. 28), welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Fig. 28.



Ein Viereck hat vier Eckpunkte, vier Seiten, vier Winkel und zwei Diagonalen.

§. 51. Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten.

Beweis. Zerlegt man (Fig. 28) das Viereck durch eine

Diagonale in zwei Dreiecke, so beträgt die Winkelsumme in jedem derselben zwei Rechte, also in beiden zusammen vier Rechte.

§. 52. Mit Rücksicht auf die gegenseitige Lage der Seiten werden die Vierecke in *Trapezoide*, *Trapeze* und *Parallelogramme* eingetheilt.

Ein *Trapezoid* ist ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist; ein Trapez ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind; ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Lehrsätze von den Parallelogrammen.

§. 53. 1. *In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.*

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus §. 26, 1. a).

2. *Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm* (Umkehrung von 1).

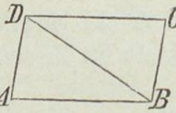
Der Beweis stützt sich auf §. 51 und §. 24, 1.

Folgesatz. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind es auch die anderen; ist ein Winkel ein schiefer, so sind es auch die anderen.

Man unterscheidet daher *rechtwinklige* und *schiefwinklige* Parallelogramme.

§. 54. 1. *In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich.*

Fig. 29.



Vorauss. Es sei ABCD (Fig. 29) ein Parallelogramm, also AB ∥ DC, AD ∥ BC.

Behaupt. AB = DC, AD = BC.

Beweis. Zieht man eine Diagonale BD, so ist △ABD ≌ CDB (§. 24, 2 und §. 37), daher AB = DC, AD = BC.

Den obigen Satz pflegt man auch so auszudrücken: *Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.*

2. *Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm* (Umkehrung von 1).

Beweis. Es sei in dem Vierecke ABCD (Fig. 29) AB = DC und AD = BC. Dann ist △ABD ≌ CDB (§. 40), also sind die Wechselwinkel ABD und CDB, ebenso ADB und CBD gleich; folglich AB ∥ DC und AD ∥ BC (§. 24, 1.)

Folgesätze. a) *Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.*

Ist auch die Umkehrung dieses Satzes richtig?

b) *Sind zwei Gerade parallel, so haben alle Punkte der einen Geraden von der andern gleiche Abstände.*

Denn die Senkrechten, welche die Abstände der Punkte der einen zweier Parallelen von der andern angeben, sind nach §. 25, 1 parallel, daher nach 1. einander gleich.

Die constante Entfernung eines jeden Punktes der einen zweier Parallelen von der andern heißt der Abstand der beiden Parallelen.

Nimmt man in einem Parallelogramm eine der Seiten als Grundlinie an, so heißt ihr Abstand von der gegenüberliegenden Seite die Höhe des Parallelogramms. Unter der Höhe eines Trapezes versteht man den Abstand der zwei parallelen Seiten.

3. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis. In dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 29) sei $AB = DC$ und $AB \parallel DC$. Dann ist $\triangle ABD \cong CDB$ (§. 38), also sind auch die Wechselwinkel ADB und CBD gleich, woraus $AB \parallel BC$ folgt.

§. 55. Sind in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich, so sind es auch die anderen; das Parallelogramm heißt in diesem Falle gleichseitig. Sind dagegen zwei anstoßende Seiten ungleich, so heißt das Parallelogramm ungleichseitig.

Mit Rücksicht auf die Größe der Winkel (§. 53) und auf die Länge der Seiten unterscheidet man vier Arten von Parallelogrammen: 1. das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid; 2. das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder den Rhombus; 3. das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck; 4. das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

Ein Rhomboid ist durch zwei anstoßende Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel, ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel, ein Rechteck durch zwei anstoßende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite bestimmt.

§. 56. 1. Die Diagonalen eines jeden Parallelogramms halbieren einander.

2. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

3. Die Diagonalen eines Rhombus sind zu einander normal.

4. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und zu einander normal.

Beweise aus der Congruenz der Dreiecke.

Alle vier Sätze gelten auch in ihren Umkehrungen.

Zusätze. a) Ein Rechteck ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche zwei Gegenseiten halbiert.

b) Ein Rhombus ist symmetrisch in Beziehung auf jede Diagonale.

c) Ein Quadrat ist symmetrisch sowohl in Beziehung auf jede Gerade, welche zwei Gegenseiten halbiert, als in Beziehung auf jede Diagonale; es hat vier Symmetrieachsen.

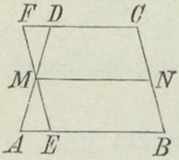
Lehrsätze von den Trapezen.

§. 57. 1. Die Strecke zwischen den Mitten der nichtparallelen Seiten eines Trapezes ist a) den parallelen Seiten parallel und b) gleich der halben Summe derselben.

Beweis. Es sei (Fig. 30) $AB \parallel DC$, $AM = MD$ und $BN = NC$.

a) Zieht man durch M die $EF \parallel BC$ und verlängert CD bis F, so ist $\triangle AEM \cong DFM$, daher $EM = MF$. Wegen $EF = BC$ (§. 54, 1) ist auch $\frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}BC$, d. i. $EM = BN$. BNME ist also ein Parallelogramm (§. 54, 3), folglich $MN \parallel EB$.

Fig. 30.



b) Aus der Congruenz der Dreiecke AEM und DFM folgt $AE = DF$. Nun ist $MN = BE = AB - AE$ und auch $MN = CF = CD + DF$, folglich $2MN = AB + CD$ und $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

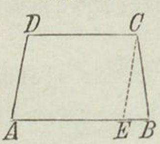
Die Strecke MN heißt die Mittellinie des Trapezes.

2. Zieht man in einem Trapeze durch die Mitte einer der nichtparallelen Seiten eine Parallele mit den zwei Parallelseiten, so halbiert dieselbe auch die andere der nichtparallelen Seiten.

Beweis. Es sei (Fig. 30) $AB \parallel DC$, ferner $AM = MD$ und $MN \parallel AB \parallel DC$. Zieht man durch M die $EF \parallel BC$ und verlängert CD bis F, so ist $\triangle AEM \cong DFM$, daher $EM = MF$; aber $EM = BN$ und $MF = NC$, folglich $BN = NC$.

3. Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden parallelen Seiten gleich, so sind die nichtparallelen Seiten des Trapezes einander gleich.

Fig. 31.



Beweis. Es sei (Fig. 31) $AB \parallel DC$ und $A = B$. Zieht man $CE \parallel DA$, so ist $EC = AD$ und W. $CEB = A = B$, also im $\triangle BEC$, $EC = BC$ (§. 33, 3), mithin auch $AD = BC$.

Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten gleich sind, heißt ein gleichschenkliges Trapez oder ein Antiparallelogramm.

4. Umgekehrt: In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder der parallelen Seiten einander gleich.

Beweis. Es sei (Fig. 31) $AB \parallel DC$ und $AD = BC$. Zieht man $CE \parallel DA$, so ist $EC = AD = BC$, also im $\triangle BEC$ der Winkel $CEB = B$; aber $CEB = A$, folglich auch $A = B$. Da $A + D = B + C = 2R$, so ist auch $D = C$.

5. In einem gleichschenkligen Trapeze ist die Strecke zwischen den Mitten der parallelen Seiten zu diesen normal.

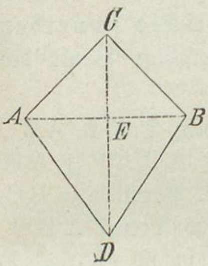
Beweis durch Deckung.

Zusatz. Ein gleichschenkliges Trapez ist symmetrisch; seine Symmetrale geht durch die Mitten der parallelen Seiten.

Das Deltoid.

§. 58. Ein Viereck, das zwei Paare gleicher anstoßender Seiten hat, heißt ein Deltoid.

Fig. 32.



Ist (Fig. 32) $AC = BC$ und $AD = BD$, so ist $ABCD$ ein Deltoid. Dasselbe besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Grundlinie die Diagonale AB ist. Daraus folgt:

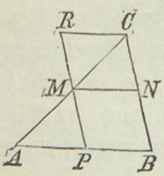
1. Die Diagonalen eines Deltoids sind zu einander normal.

2. Das Deltoid ist symmetrisch; seine Symmetrieachse ist die Diagonale, welche die Scheitel der gleichen Schenkel verbindet.

Lehrsätze von den Parallelen im Dreiecke.

§. 59. 1. Die Strecke zwischen den Mitten zweier Seiten eines Dreieckes ist a) der dritten Seite parallel und b) die Hälfte derselben (Fig. 33).

Fig. 33.



Beweis. Es sei $AM = MC$ und $BN = NC$.

a) Zieht man $CR \parallel BA$ und durch M die $PR \parallel BC$, so ist $\triangle AMP \cong CMR$, daher $MP = MR$. Wegen $PR = BC$ (§. 54, 1) ist auch $\frac{1}{2} PR = \frac{1}{2} BC$, d. i. $PM = BN$; $BNMP$ ist also ein Parallelogramm (§. 54, 3), folglich $MN \parallel PB$.

b) Da $MN \parallel AB$, so ist $\triangle CMN \cong MAP$, daher $MN = AP$; es ist aber auch $MN = PB$, folglich $2MN = AP + PB = AB$, und $MN = \frac{1}{2} AB$.

2. Zieht man in einem Dreiecke durch die Mitte einer Seite eine Parallele zu einer zweiten Seite, so halbiert dieselbe auch die dritte Seite (Fig. 33).

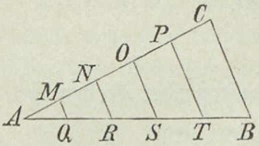
Beweis. Es sei $AM = MC$ und $MN \parallel AB$.

Zieht man $MP \parallel CB$, so ist $\triangle AMP \cong MCN$, daher $PM = NC$; es ist aber auch $PM = BN$, folglich $BN = NC$.

Die voranstehenden zwei Lehrsätze können auch unmittelbar aus den analogen Sätzen vom Trapeze im §. 57, 1 und 2 gefolgert werden, indem man das Dreieck als ein Trapez betrachtet, dessen kleinere Parallelseite Null ist.

3. Wird in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilungspunkt eine Parallele zu einer zweiten Seite gezogen, so wird dadurch auch die dritte

Fig. 34



Seite in ebenso viele gleiche Theile getheilt (Fig. 34).

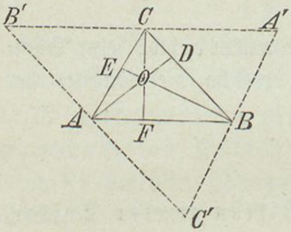
Voraussf. AM = MN = NO = OP = PC und MQ ∥ NR ∥ OS ∥ PT ∥ CB.

Behaupt. AQ = QR = RS = ST = TB.

Beweis. AQ = QR (nach 2.) und QR = RS = ST = TB (nach §. 57, 2).

§. 60. **Lehrsatz.** Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte. (Dritter merkwürdige Punkt des Dreieckes.)

Fig. 35.



Beweis. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 35) AD ⊥ BC, BE ⊥ AC, CF ⊥ AB.

Zieht man durch A, B, C Parallele zu BC, AC, AB, so erhält man das Dreieck A'B'C'. Da AB' = AC' = BC, so ist (§. 54, 1) A die Mitte der Seite B'C'. Ebenso folgt, dass B die Mitte der Seite A'C' und C die Mitte der Seite A'B' ist. Die Höhen AD, BE und CF des Dreieckes ABC sind also Seitensymmetralen des Dreieckes A'B'C' und müssen sich daher als solche (nach §. 48, 1) in demselben Punkte schneiden.

§. 61. **Lehrsatz.** Die drei Schwerlinien eines Dreieckes, d. i. die Strecken, welche von den drei Eckpunkten zu den Mitten der Gegenseiten gezogen werden, schneiden einander in demselben Punkte, welcher jede Schwerlinie so theilt, dass der an einer Ecke liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der andere. (Vierter merkwürdige Punkt des Dreieckes.)

Beweis. Es seien (Fig. 36) D, E und F die Mitten der Seiten BC, AC und AB; O sei der Schnittpunkt der Schwerlinien BE und CF. Zieht man DG und EH parallel zu CF, so werden durch dieselben (nach §. 59, 2) BF und AF halbiert. Es ist demnach BG = GF = FH, daher (nach §. 59, 3) auch BR = RO = OE, somit BO = 2OE. Die Schwerlinie BE wird also von einer zweiten Schwerlinie CF in O so getheilt, dass der an der Ecke B liegende Abschnitt derselben doppelt so groß ist als der andere. Zieht man noch die dritte Schwerlinie AD, so muss auch sie die BE in dieselben zwei Abschnitte theilen und daher durch den Punkt O gehen.

Fig. 36.

Der Schnittpunkt O der drei Schwerlinien eines Dreieckes heißt der Schwerpunkt desselben.

2. Übungssätze.

§. **62.** 1. In jedem Vierecke ist die Summe der Diagonalen größer als die zweier Gegenseiten.

2. Jede in einem Parallelogramme durch den Schnittpunkt der Diagonalen gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbiert.

3. Die Diagonalen eines Rhombus halbieren die Winkel, durch deren Scheitel sie gehen.

4. Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Rhombus hat von den vier Seiten gleiche Abstände.

5. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Diagonalen einander gleich.

6. Sind in einem Trapeze die Diagonalen einander gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

7. Die Halbierungspunkte der Seiten eines Parallelogramms bilden die Eckpunkte eines neuen Parallelogramms (§. 59, 1). Ist das erstere ein Rhombus, so ist das letztere ein Rechteck; ist das erstere ein Rechteck, so ist das letztere ein Rhombus; ist das erstere ein Quadrat, so ist das letztere auch ein Quadrat.

8. Die Halbierungspunkte der Seiten eines gleichschenkligen Trapezes bilden die Eckpunkte eines Rhombus.

9. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Parallelogramms (oder der Außenwinkel desselben) schließen ein Rechteck ein.

10. Zieht man von einem Punkte in der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes zu jedem der Schenkel eine Normale, so ist die Summe derselben gleich der auf einem Schenkel stehenden Höhe des Dreieckes.

11. Verbindet man in einem Parallelogramme die Mitten zweier gegenüberliegender Seiten mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird durch diese Verbindungslinien die andere Diagonale in drei gleiche Theile getheilt.

12. Halbiert man in einem Rhombus die Winkel der Diagonalen, so bilden die Schnittpunkte dieser Halbierungslinien mit den Seiten die Ecken eines Quadrates.

13. Verbindet man die Mitten je zweier aufeinanderfolgender Seiten eines Antiparallelogramms, so entsteht ein gleichseitiges Viereck.

14. Verbindet man in einem Vierecke die Mitten je zweier aufeinanderfolgender Seiten, so entsteht ein Parallelogramm.

15. Verbindet man in einem Vierecke die Mitten zweier gegenüberliegender Seiten mit den Mitten der beiden Diagonalen, so entsteht ein Parallelogramm.

III. Das Vieleck.

1. Erklärungen und Lehrsätze.

§. **63.** Jedes von mehreren Strecken begrenzte ebene Gebilde heißt ein Vieleck oder Polygon.

Ein Vieleck hat so viele Seiten als Winkel und ebenso viele Eckpunkte. Ein Vieleck, dessen alle Winkel hohl sind, heißt hohlwinklig. Nur solche Polygone sollen hier in Betracht gezogen werden.

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten unterscheidet man dreiseitige Vielecke oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, ...nseitige oder n-Ecke.

§. 64. Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte eines Polygons verbindet, heißt eine Diagonale.

Durch ganz einfache Schlüsse wird man auf folgende Sätze geleitet:

1. Von jedem Eckpunkte eines nseitigen Polygons lassen sich n—3 Diagonalen ziehen.

2. Die Anzahl aller möglichen Diagonalen eines n-Eckes ist gleich $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Jedes n-Eck läßt sich durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte aus gezogen werden, in n—2 Dreiecke zerlegen.

§. 65. **Lehrsatz.** Die Summe aller Winkel eines Polygons ist gleich so vielmal zwei Rechten, als die um 2 verminderte Zahl der Seiten anzeigt.

Beweis. Zerlegt man ein nseitiges Vieleck durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte ausgehen, in n—2 Dreiecke, so ist die Winkelsumme derselben und somit auch des n-Eckes (n—2).2R.

Der Beweis könnte auch geführt werden, indem man von einem Punkte im Innern des Polygons zu allen Eckpunkten Strecken zieht.

§. 66. Zwei Vielecke sind congruent, wenn in denselben alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung paarweise gleich sind.

Lehrsätze. 1. Zwei Polygone, welche sich durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in paarweise congruente Dreiecke zerlegen lassen, sind congruent.

Beweis. Legt man die paarweise congruenten Dreiecke der Reihe nach aufeinander, so fallen auch die Eckpunkte der beiden Polygone aufeinander; also sind diese congruent.

2. Umgekehrt: Zwei congruente Polygone werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in paarweise congruente Dreiecke getheilt.

Beweis. Legt man zwei congruente Polygone so aufeinander, dass die entsprechenden Eckpunkte aufeinander fallen, so decken sich auch die übereinstimmend gezogenen Diagonalen, mithin auch die dadurch gebildeten Dreiecke.

§. 67. **Lehrsatz.** Sind in zwei n-Ecken 1) n—2 aufeinander folgende Seiten und die an diesen liegenden n—1 Winkel; 2) n—1 aufeinander folgende Seiten und die von diesen eingeschlossenen n—2 Winkel; 3) alle n-Seiten und n—3 aufeinander folgende Winkel paarweise gleich: so sind die beiden n-Ecke congruent.

Beweis. Zerlegt man die beiden Vielecke durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in je n—2 Dreiecke, so sind je zwei entsprechende Dreiecke congruent, und zwar n—3 Paare derselben in allen drei Fällen nach §. 38, das letzte Paar aber im ersten Falle nach §. 37, im zweiten nach §. 38 und im dritten nach §. 40; dann aber sind nach §. 66, 1 die Vielecke selbst congruent.

Folgesatz. Zur Bestimmung eines n-Eckes sind im allgemeinen 2n—3 von einander unabhängige Stücke erforderlich; die drei nicht gegebenen Stücke dürfen jedoch nicht sämmtlich Seiten sein.

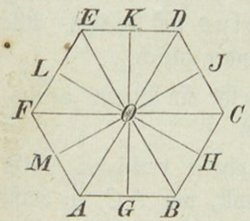
2. Reguläre Polygone.

§. **68.** Ein Polygon, in welchem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind, heißt regelmäßig oder regulär. Unter den Dreiecken ist das gleichseitige Dreieck, unter den Vierecken das Quadrat regulär.

Jeder Winkel eines regulären n-Eckes beträgt $2R - \frac{4R}{n}$ (§. 65).

Lehrsatz. Die Symmetralen zweier anstoßender Seiten eines regulären Polygons schneiden sich in einem Punkte, welcher a) von allen Eckpunkten, b) von allen Seiten des Polygons gleiche Abstände hat.

Fig. 37.



Beweis. Es sei ABCDEF (Fig. 37) ein regelmäßiges Vieleck, GO die Symmetrale der Seite AB, und HO die Symmetrale der Seite BC. Dass sich GO und HO in einem Punkte O schneiden müssen, ergibt sich aus §. 24, Folgesatz. Zieht man nun von O zu allen Eckpunkten des Vieleckes Strecken und fällt von O Normale auf die Seiten CD, DE,..., so ist

$$\triangle AOG \cong BOG \cong BOH \cong COH \ldots,$$

daher $OA = OB = OC = OD = \ldots$

und $OG = OH = OI = OK \ldots$

Der Punkt O heißt der Mittelpunkt des regulären Polygons.

Folgesätze. a) In einem regulären Polygon schneiden sich alle Seitensymmetralen und alle Winkelsymmetralen im Mittelpunkte des Polygons.

b) Verbindet man den Mittelpunkt eines regulären Polygons mit allen Eckpunkten durch Strecken, so wird dadurch das Polygon in so viele congruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat.

Ziehe vom Mittelpunkte eines regulären n-Eckes zu allen Eckpunkten Strecken; wie groß ist a) der Winkel am Scheitel, b) der Winkel an der Grundlinie in jedem der dadurch gebildeten gleichschenkligen Dreiecke?

Berechne diese Winkel insbesondere:

a) für das gleichseitige Dreieck; b) für das Quadrat;
c) für das reguläre Fünfeck; d) für das reguläre Sechseck;
e) für das reguläre Zehneck; f) für das reguläre Zwölfeck.

§. 69. 1. Sowohl jede Seitensymmetrale als jede Winkelsymmetrale eines regulären Polygons ist eine Symmetrieachse desselben.

Von der Richtigkeit überzeugt man sich durch Umwendung um die bezügliche Symmetrale.

2. Ein reguläres n-Eck hat n Symmetrieachsen.

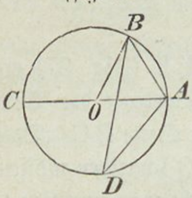
Ist n eine gerade Zahl, so haben immer je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel dieselbe Symmetrale. Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so fallen immer eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale zusammen.

IV. Der Kreis.

1. Allgemeines über den Kreis.

§. 70. Dreht sich in einer Ebene eine Strecke OA (Fig. 38) um den einen Eckpunkt O herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punkt A während dieser Umdrehung eine krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis genannt wird. Der Punkt O heißt der Mittelpunkt oder das Centrum des Kreises.

Fig. 38



Alle Punkte einer Kreislinie sind vom Mittelpunkte derselben gleich weit entfernt. Diese constante Entfernung heißt der Halbmesser oder Radius des Kreises. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.

Jeder Theil der Kreislinie heißt ein Bogen (arcus) und die ganze Kreislinie die Peripherie des Kreises.

Eine Strecke AB, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt Sehne (chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, wie AC, so heißt sie ein Durchmesser (diameter) des Kreises. Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser.

Ein Winkel AOB, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, dessen Schenkel also Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Centriwinkel. Ein Winkel ADB, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel.

Ein Theil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment. Ein Theil der Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sector.

Zu jeder Sehne gehören zwei Centriwinkel, zwei Bogen, wie auch zwei Ausschnitte und zwei Abschnitte, welche im allgemeinen ungleich sind. Wenn jedoch nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, ist stets der hohle Centriwinkel, ferner derjenige Bogen, welcher kleiner ist als die halbe Peripherie, und derjenige Ausschnitt oder Abschnitt, welcher kleiner ist als die halbe Kreisfläche, zu verstehen.

§. **71.** Die Lage eines Punktes in Bezug auf einen Kreis hängt von seinem Centralabstande, d. i. von seinem Abstande vom Mittelpunkte des Kreises ab.

Ein Punkt liegt entweder **außerhalb** eines Kreises, oder **auf der Peripherie** desselben, oder **innerhalb** des Kreises, je nachdem sein Centralabstand größer, oder ebenso groß, oder kleiner ist als der Halbmesser.

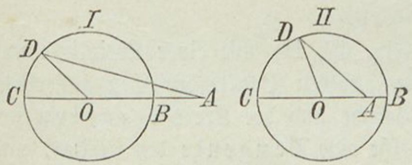
Diese Beziehungen, welche unmittelbar aus der Definition des Kreises in §. 70 folgen, gelten auch in ihren Umkehrungen.

Folgesätze. a) Zwei Kreise mit gleichen Halbmessern sind congruent.

b) Der Kreis ist ein symmetrisches Gebilde; jeder Durchmesser ist eine Symmetrieachse.

§. **72. Lehrsatz.** Von allen Strecken, die sich von einem Punkte an die Peripherie eines Kreises ziehen lassen, ist a) diejenige die größte, in welcher der Mittelpunkt des Kreises liegt, und b) diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

Fig. 39.



Beweis. Ist A (Fig. 39) der gegebene Punkt, und zieht man von demselben durch den Mittelpunkt O des Kreises eine Gerade, welche die Peripherie in B und C schneidet, ferner eine beliebige Strecke AD an die Peripherie, so ist

a) $AD < DO + AO$, d. i. $AD < AC$;

b) $AD > AO - DO$ (in I), oder $AD > DO - AO$ (in II), d. i. $AD > AB$.

2. Die Geraden und die Winkel am Kreise.

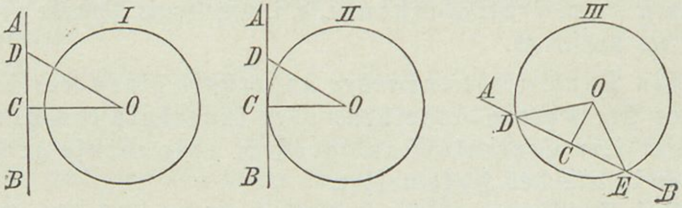
§. **73.** Die Lage einer Geraden in Bezug auf einen Kreis hängt von ihrem Centralabstande, d. i. von ihrem Abstande vom Mittelpunkte des Kreises ab.

Lehrsatz. Eine Gerade hat mit einem Kreise entweder a) **keinen**, oder b) **einen**, oder c) **zwei** Punkte gemeinsam, je nachdem ihr Centralabstand größer, oder ebenso groß, oder kleiner ist als der Halbmesser.

Beweis. a) Ist (Fig. 40, I) die Normale OC vom Mittelpunkte des Kreises auf die Gerade AB größer als der Halbmesser, so liegt schon der

Fußpunkt C der Normalen außerhalb des Kreises, daher auch jeder andere Punkt D der Geraden AB, da OD > OC ist.

Fig 40.



b) Ist (Fig. 40, II) die Normale OC von O auf AB gleich dem Halbmesser des Kreises, so liegt ihr Fußpunkt C auf der Peripherie des Kreises; jeder andere Punkt D der Geraden AB aber muss, da OD > OC ist, außerhalb des Kreises liegen.

c) Ist endlich (Fig. 40, III) die Normale OC von O auf AB kleiner als der Halbmesser, so liegt ihr Fußpunkt C innerhalb des Kreises; die unbegrenzte Gerade AB muss daher, um aus dem Innern des Kreises, welcher eine geschlossene Figur ist, nach außen zu treten, den Kreis auf jeder Seite von C, in den Punkten D und E, treffen. Dann ist OD = OE gleich dem Halbmesser. Einen dritten Punkt kann die Gerade mit der Kreislinie nicht gemeinsam haben, da sich von O zu der Geraden AB nicht mehr als zwei gleiche Strecken ziehen lassen (§. 35, Folges.).

§. 74. Hat eine Gerade AB (Fig. 40, II) mit einer Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam, während alle anderen Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, so sagt man: die Gerade und der Kreis berühren sich in jenem Punkte. Eine solche Gerade heißt eine Tangente des Kreises, und der Punkt, welchen die Tangente mit der Kreislinie gemeinsam hat, der Berührungspunkt.

Hat eine Gerade AB (Fig. 40, III) mit einer Kreislinie zwei Punkte gemeinsam, so sagt man: die Gerade schneidet den Kreis in diesen zwei Punkten. Eine solche Gerade heißt eine Secante des Kreises. Das zwischen den beiden Schnittpunkten liegende Stück DE der Secante ist eine Sehne (§. 70).

Sehnen des Kreises.

§. 75. **Lehrsätze.** 1. Die Strecke aus dem Mittelpunkte des Kreises nach der Mitte einer Sehne ist zu dieser normal.

2. Die Normale aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Sehne halbiert die Sehne.

3. Die Gerade, welche in der Mitte einer Sehne auf diese normal errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt des Kreises, oder: Jede Sehnensymmetrale geht durch den Mittelpunkt des Kreises

Diese drei Lehrsätze ergeben sich unmittelbar aus den Sätzen 1., 2. und 4. in §. 44.

§. **76. Lehrsatz.** *Durch drei Punkte A, B und C, welche nicht in einer Geraden liegen, ist ein Kreis unzweideutig bestimmt.*

Beweis. Der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die Punkte A und B geht, liegt in der Symmetrale der Strecke AB (§. 75, 3); der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch A und C geht, liegt ebenso in der Symmetrale der Strecke AC. Der Mittelpunkt eines durch alle drei Punkte gehenden Kreises ist demnach der Schnittpunkt O dieser beiden Symmetralen (§. 24, Folges.); der Halbmesser desselben ist $OA = OB = OC$.

Da sich die zwei Symmetralen in einem einzigen Punkte O schneiden können, so gibt es auch nur *einen* Kreis, welcher durch die drei Punkte A, B und C geht.

§. **77. Lehrsätze.**

1. *Gleichen Sehnen eines Kreises entsprechen gleiche Centralabstände.*
2. *Der größeren Sehne entspricht ein kleinerer Centralabstand.*
3. *Gleichen Centralabständen entsprechen gleiche Sehnen.*
4. *Dem größeren Centralabstande entspricht eine kleinere Sehne.*

Fig. 41.

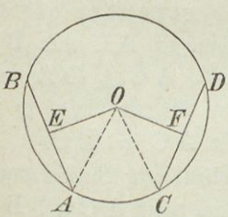
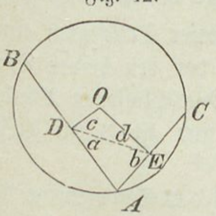


Fig. 42.



Beweis zu 1. Ist (Fig. 41) $AB = CD$ und $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, so ist, wenn man OA und OC zieht, $\triangle AOE \cong CFO$; mithin $OE = OF$.

Beweis zu 2. Es sei (Fig. 42) $AB > AC$, $OD \perp AB$ und $OE \perp AC$, so ist, wenn man DE zieht, in dem Dreiecke ADE der Winkel $b > a$ (§. 33, 2), daher $d < c$ und folglich $OD < OE$.

Beweis zu 3. Es sei (Fig. 41) $OE = OF$. Dann ist $\triangle AEO \cong CFO$, daher ist $AE = CF$, folglich auch $AB = CD$.

Beweis zu 4. Es sei (Fig. 42) $OD < OE$. Wäre $AB \leqq AC$, so müsste bezüglich nach 1. oder 2. $OD \geqq OE$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. *Der Durchmesser ist die größte Sehne des Kreises.*

§. **78. Lehrsätze.** 1. *Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen und gleiche Bogen.*

2. *Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Centriwinkel und gleiche Bogen.*

3. *Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen und gleiche Centriwinkel.*

Die Beweise dieser Sätze durch Deckung.

§. 79. Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, so entspricht jedem derselben ein Centriwinkel von 1 Grad. Man nennt deshalb auch den 360sten Theil der Peripherie einen Grad (Bogengrad) und theilt den Grad (^{0}) in 60 Bogenminuten ($'$), jede Minute in 60 Bogensecunden ($''$). Hiernach drückt die Zahl der Grade, Minuten und Secunden eines Kreisbogens zugleich die Zahl der Grade, Minuten und Secunden des zugehörigen Centriwinkels aus. In diesem Sinne sagt man:

Der Kreisbogen ist das Maß des zugehörigen Centriwinkels.

Tangenten des Kreises.

§. 80. **Lehrsätze.** 1. Die Gerade, welche im Endpunkte eines Halbmessers zu diesem normal ist, ist eine Tangente des Kreises. (Folgt aus §. 73, b.)

2. Der Halbmesser eines Kreises nach dem Berührungspunkte ist zur Tangente normal.

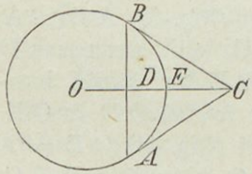
3. Die Normale aus dem Mittelpunkte eines Kreises zur Tangente geht durch den Berührungspunkt.

4. Die zur Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Die Beweise für die Umkehrungen 2., 3., 4. werden indirect geführt.

§. 81. **Lehrsatz.** Die von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Fig. 43.



Beweis. Es seien (Fig. 43) AC und BC Tangenten des Kreises O, also $AC \perp OA$ und $BC \perp OB$. Zieht man die Strecke CO, so ist $\triangle OAC \cong OBC$, mithin $AC = BC$.

Die Sehne AB zwischen den Berührungspunkten des Kreises und der Tangenten AC und BC heißt die Berührungssehne des Punktes C.

Folgesätze. a) Die Gerade vom Schnittpunkte zweier Tangenten eines Kreises nach dem Mittelpunkte desselben halbiert 1. den von den beiden Tangenten gebildeten und den von den beiden Halbmessern eingeschlossenen Winkel, 2. sie halbiert den Bogen und die Berührungssehne und ist 3. zu dieser Sehne normal.

b) Der Winkel zweier Tangenten eines Kreises ist das Supplement des von den Halbmessern der beiden Berührungspunkte gebildeten Winkels.

c) Der Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kreises liegt in der Verlängerung des zur Berührungssehne normalen Halbmessers.

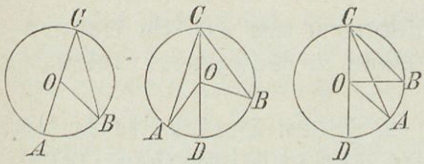
Peripheriewinkel.

§. 82. **Lehrsatz.** Ein Peripheriewinkel ist gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen.

Beim Beweise dieses Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden: Der Mittelpunkt des Kreises liegt entweder 1. auf einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 44, I), oder 2. in der Winkelfläche des Peripheriewinkels (Fig. 44, II), oder 3. außerhalb der Winkelfläche des Peripheriewinkels (Fig. 44, III).

Fig. 44.

I. II. III.



Im ersten Falle ist $AOB = B + C$, aber $B = C$, daher $AOB = 2C$ oder $C = \frac{1}{2} AOB$.

Im zweiten und dritten Falle zieht man von C einen Durchmesser; durch zweimalige Anwendung des ersten Falles und Addition, bezüglich Subtraction der zusammengehörigen Winkel ergibt sich die Behauptung.

Folgesätze. a) Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen eines Kreises aufstehen, sind einander gleich. Denn jeder derselben ist gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen.

b) Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen. (Umkehrung von a.)

c) Zwei Peripheriewinkel, welche über derselben Sehne in den entgegengesetzten Kreisabschnitten stehen, ergänzen sich zu zwei Rechten. Denn die Summe ihrer Entwicklung beträgt vier Rechte.

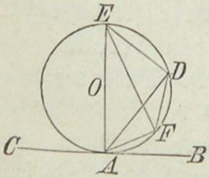
§. 83. Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, heißt ein Winkel im Halbkreise.

Lehrsatz. Ein Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Denn der Centriwinkel auf demselben Bogen ist ein gestreckter.

§. 84. **Lehrsatz.** Der Winkel, den eine Tangente des Kreises mit einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel über dieser Sehne im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Fig. 45.



Beweis. Es sei BC eine Tangente des Kreises im Punkte A. Zieht man den Durchmesser AE, so ist a) $BAD + DAE = R$, und $AED + DAE = R$ (§. 83), daher $BAD = AED$; b) ferner ist $CAD = R + EAD$ und $AFD = R + EFD$, oder $AFD = R + EAD$ (§. 82, a)), mithin $CAD = AFD$.

3. Dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke.

§. 85. Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in dem Umfange des Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke umgeschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben, der Kreis ist dann dem Vielecke eingeschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck nennt man auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

§. 86. **Lehrsatz.**

1. Jedem Dreiecke läſst sich ein Kreis umschreiben.

Beweis. Die Seitensymmetralen eines Dreieckes (Fig. 26) schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei Eckpunkten denselben Abstand OA hat (§. 48, 1). Beschreibt man daher aus O mit OA einen Kreis, so geht er durch alle Eckpunkte des Dreieckes.

2. Jedem Dreiecke läſst sich ein Kreis einschreiben.

Beweis. Die Winkelsymmetralen eines Dreieckes (Fig. 27) schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei Seiten denselben Abstand OD hat (§. 48, 2). Beschreibt man daher aus O mit OD einen Kreis, so berührt er alle drei Seiten des Dreieckes.

Zusatz. Aus dem Zusatze zu §. 48, 2 folgt, daſs es außer dem in 2. angegebenen Kreise auch noch drei Kreise gibt, welche je eine Seite des Dreieckes und die Verlängerungen der beiden anderen berühren. Man nennt diese drei Kreise äußere Berührungskreise des Dreieckes, während der obige Kreis der innere Berührungskreis genannt wird.

§. 87. **Lehrsätze.**

1. In jedem Sehnenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Folgt aus §. 82, c.

2. In jedem Tangentenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Folgt aus §. 81.

§. 88. **Umkehrungen.**

1. Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Sehnenviereck.

Beweis indirect. Würde der durch drei Eckpunkte A, B, C beschriebene Kreis nicht auch durch den vierten D gehen, so müſste er die Seite CD selbst oder ihre Verlängerung in einem Punkte schneiden, durch dessen Verbindung mit A man ein Sehnenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daſs ein Außenwinkel eines Dreieckes einem inneren gegenüberliegenden gleich wäre.

2. Sind in einem hohlwinkligen Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Tangentenviereck.

Beweis indirect. Würde der drei Seiten des Viereckes berührende Kreis nicht auch die vierte berühren, so könnte von dem einen Endpunkte dieser vierten Seite eine Tangente an den Kreis gezogen werden, wodurch man ein Tangentenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daſs eine Seite eines Dreieckes der Differenz der beiden anderen gleich wäre.

§. **89.** **Lehrsätze.** 1. Jedem regulären Vielecke läſst sich ein Kreis um- und einschreiben.

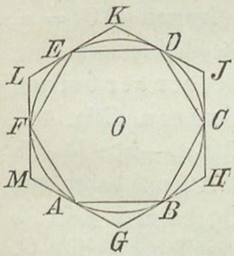
Der Beweis ist in §. 68 enthalten.

Der Abstand des Mittelpunktes des regulären Vieleckes von den Eckpunkten ist der Halbmesser des umgeschriebenen, der Abstand des Mittelpunktes von den Seiten der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

2. Ist die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt, so bilden a) die Sehnen zwischen je zwei benachbarten Theilungspunkten ein eingeschriebenes, und b) die Tangenten durch je zwei benachbarte Theilungspunkte ein umgeschriebenes reguläres n-Eck.

Beweis. Es sei (Fig. 46) der Bogen $AB = BC = CD = \ldots$

Fig. 46.



a) Zieht man die Sehnen AB, BC, CD, ..., so sind in dem Vielecke ABCD... die Seiten AB, BC, CD, ... gleich (§. 78, 3), ferner die Winkel A, B, C, D, ... gleich (§. 82, a); folglich ist das Polygon ABCD... regulär.

b) Zieht man durch A, B, C, D... Tangenten an den Kreis, welche sich in den Punkten G, H, J, K,... schneiden, so sind wegen der Gleichheit der Seiten AB, BC, CD,... und der ihnen anliegenden Winkel (§. 84) die Dreiecke AGB, BHC, CJD,... congruent und gleichschenklig; mithin sind die Summen je zweier Schenkel gleich, also $GH = HJ = JK = \ldots$ Aus der Congruenz der obigen Dreiecke folgt auch die Gleichheit der Winkel G, H, J,...; folglich ist das Polygon GHJK... regulär.

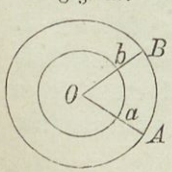
§. **90.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regulären Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises.

Beweis. Zieht man vom Mittelpunkte Strecken zu den Eckpunkten des Sechseckes, so sind die dadurch entstehenden Dreiecke gleichseitig, da jeder Winkel in denselben 60^0 beträgt.

4. Lage zweier Kreise gegen einander.

§. **91.** Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen concentrisch, wie die Kreise in Fig. 47.

Fig. 47.



Die Fläche, welche zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise enthalten ist, wird ein Kreisring, und ein Theil desselben, wie aABb, ein Ringausschnitt genannt. Den Unterschied aA der beiden Halbmesser nennt man die Breite des Ringes oder des Ringausschnittes.

Zwei Kreisbogen oder Kreissectoren, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, heißen homolog; z. B. die Bogen ab und AB oder die Sectoren aOb und AOB

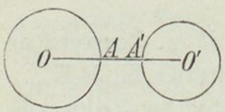
§. **92.** Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man excentrisch, und die Strecke, welche die Mittelpunkte verbindet, die Centrale. Zwei excentrische Kreise haben entweder keinen, oder einen oder zwei Punkte mit einander gemeinsam. Drei Punkte können zwei Kreise nicht gemeinsam haben, da sie sonst (nach §. 76) ganz zusammenfielen.

Haben zwei Kreise nur einen Punkt gemeinsam, so berühren sie sich, und zwar von außen, wenn sie übrigens ganz außerhalb einander liegen; von innen, wenn übrigens der eine Kreis innerhalb des andern liegt. Haben zwei Kreise zwei Punkte gemeinsam, so schneiden sie sich in diesen Punkten. Die gemeinsame Fläche zweier sich schneidender Kreise heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinsamen Stücke ein Mond (lunula).

§. **93.** Die Lage zweier Kreise gegen einander.

Sind R und r, wobei $R > r$ vorausgesetzt wird, die Halbmesser zweier Kreise, deren Mittelpunkte O und O' sind, und ist ihre Centrale $OO' = c$, so finden in Bezug auf die Lage der beiden Kreise folgende Beziehungen statt.

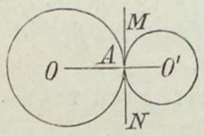
Fig. 48.



1. Ist $c > R + r$, so liegt jeder der beiden Kreise ganz außerhalb des andern. (Fig. 48.)

Beweis. Aus $c > R + r$ folgt $c - r > R$, d. i. $> R$. Es lOA'iegt also der Punkt A', und daher auch jeder andere Punkt der Kreislinie O', da nach §. 72, b sein Abstand von dem Punkte O größer als OA' ist, außerhalb des Kreises O.

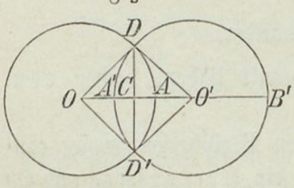
Fig. 49.



2. Ist $c = R + r$, so berühren sich die beiden Kreise von außen. (Fig. 49.)

Beweis. Schneidet der Kreis O' die Centrale in A, ist also $O'A = r$, so muss $OA = OO' - O'A = R + r - r = R$ sein; der Punkt A ist also beiden Kreislinien gemeinsam. Dagegen liegt jeder andere Punkt der Kreislinie O', da nach §. 72, b sein Abstand von dem Punkte O größer als OA ist, außerhalb des Kreises O.

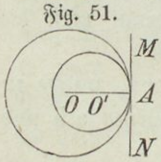
Fig. 50.



3. Ist $R + r > c > R - r$, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten. (Fig. 50.)

Beweis. Der Kreis O' schneide die Centrale in A' und B'. Aus $c < R + r$ folgt $c - r < R$, d. i. $OA' < R$; der Punkt A' liegt also innerhalb des Kreises O. Aus $c > R - r$ folgt $c + r > R$, d. i. $OB' > R$; der Punkt B' liegt also außerhalb des Kreises O. Die beiden von A' nach B' führenden Bogen des Kreises O' müssen daher den Kreis O in zwei Punkten, D und D', schneiden.

Fig. 51.

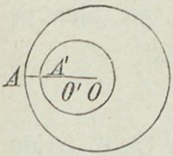


4. Ist $c = R - r$, so berühren sich die beiden Kreise von innen. (Fig. 51.)

Der Beweis wird unter Beiziehung von §. 72, a ähnlich wie zu 2. geführt.

5. Ist $c < R - r$, so liegt der eine der beiden Kreise ganz innerhalb des andern. (Fig. 52.)

Fig. 52.



Beweis mit Rücksicht auf §. 72, a analog wie zu 1.

Zusatz. Da in den vorhergehenden fünf Sätzen alle möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Fälle berücksichtigt sind, welche bezüglich der Centrale im Vergleiche zur Summe und Differenz der Halbmesser der beiden Kreise stattfinden können, so läſst sich indirect leicht beweisen, daſs von diesen Sätzen auch die Umkehrungen richtig sind.

§. **94. Lehrsätze.** 1. Die Centrale zweier sich berührender Kreise geht durch den Berührungspunkt.

Folgt aus den Beweisen zu 2. und 4. in §. 93.

2. Die durch den Berührungspunkt zweier Kreise an den einen gezogene Tangente ist zugleich eine Tangente des andern.

Ist (Fig. 49 und 51) $MN \perp OA$, so ist auch $MN \perp O'A$.

3. Die Centrale zweier sich schneidender Kreise ist zur gemeinsamen Sehne normal und halbiert die Sehne sowie die zugehörigen Centriwinkel beider Kreise. (§. 44)

Zusatz. Unter dem Winkel zweier sich schneidender Kreise versteht man den Winkel der durch einen ihrer Schnittpunkte an sie gezogenen Tangenten.

5. Übungssätze.

§. 95. 1. Von allen Sehnen, die durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gezogen werden können, ist diejenige die kleinste, welche zu dem durch diesen Punkt gezogenen Halbmesser normal ist. (§. 77, 4.)

2. Zwei Sehnen, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, können sich nicht halbieren.

3. Kreisbogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich.

Beweis aus der Gleichheit der Wechselwinkel und §. 82, b.

4. Die Endpunkte zweier gleicher Bogen eines Kreises bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes.

5. Die Endpunkte zweier gleicher und paralleler Sehnen eines Kreises bilden die Eckpunkte eines Rechteckes.

6. Alle einer Tangente eines Kreises parallelen Sehnen werden durch den zum Berührungspunkte gezogenen Durchmesser halbiert.

7. Zieht man durch die Eckpunkte eines in einen Kreis beschriebenen Rechteckes Tangenten an denselben, so schließen diese einen Rhombus ein. (§. 81).

8. In jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenzahl ist

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots,$$

wo α_n den nten Vieleckswinkel bezeichnet.

Man zieht zu den Eckpunkten Halbmesser und wendet §. 82, a an.

9. In jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl ist

$$s_1 + s_3 + s_5 + \ldots = s_2 + s_4 + s_6 + \ldots,$$

wo s_n die nte Vielecksseite bezeichnet.

10. Wenn drei Kreise, welche durch die drei Eckpunkte eines Dreieckes gehen, einander paarweise auf den Seiten desselben schneiden, so gehen sie durch einen gemeinsamen Punkt. (§. 87, 1.)

V. Constructionsaufgaben.

§. 96. Eine geometrische Constructionsaufgabe (§. 6) spricht die Forderung aus, ein geometrisches Gebilde herzustellen, welches gegebenen Bedingungen entspricht. Die Herstellung des bezüglichen Gebildes heißt Construction und das Gebilde selbst eine Figur. Jede Constructionsaufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe und Begründung des Verfahrens, durch welches die Construction der verlangten Figur ausgeführt wird.

Eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn in derselben so viele von einander unabhängige Bedingungen angegeben werden, als zur Bestimmung der gesuchten Stücke hinreichend, aber auch erforderlich sind; enthält eine Aufgabe weniger Bestimmungen, so heißt sie unbestimmt; enthält sie mehr Bedingungen, so heißt sie überbestimmt. Eine bestimmte Aufgabe lässt entweder eine einzige Auflösung oder eine gewisse, genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen zu und heißt dann bezüglich eindeutig bestimmt oder mehrdeutig bestimmt. Eine unbestimmte Aufgabe hat unendlich viele Auflösungen. Eine überbestimmte Aufgabe ist im allgemeinen unlösbar.

Eine Constructionsaufgabe ist als gelöst anzusehen, wenn sie auf Aufgaben zurückgeführt wird, deren Auflösung man als selbstverständlich voraussetzen muss, und die daher Forderungssätze oder Postulate heißen.

Die Forderungssätze der Planimetrie sind:

1. Durch zwei gegebene Punkte eine Gerade von beliebiger Länge zu ziehen.

2. Um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.

Zur wirklichen Ausführung dieser beiden Postulate bedient man sich des Lineals und des Zirkels.

§. 97. Die Auflösung einer Aufgabe ergibt sich manchmal als unmittelbare Folge eines geometrischen Lehrsatzes, meistens aber beruht sie auf der entsprechenden Verbindung mehrerer Lehrsätze. Die Entwicklung des Gedankenganges, durch welchen das zu der verlangten Figur führende Verfahren gefunden wird, heißt Analysis.

Aus der Analysis ergibt sich dann die Construction, wie auch der Beweis, welcher die Richtigkeit der Construction auf Grund der mathematischen Lehren zu zeigen hat.

Zu dem Beweise tritt häufig noch die Determination hinzu, d. i. die Erörterung der Frage, unter welchen Bedingungen die Lösung möglich ist, und ob der Aufgabe nur eine oder mehrere Lösungen genügen.

Die vollständige Auflösung einer geometrischen Constructionsaufgabe enthält demnach im allgemeinen vier Theile: die Analysis, die Construction, den Beweis und die Determination.

Die Analysis bedient sich verschiedener Methoden, von denen die Methode der geometrischen Örter, die der Hilfsfiguren, der ähnlichen Figuren und der algebraischen Analysis besonders wichtig sind.

Von den zwei letzteren Methoden wird erst später die Rede sein können.

1. Fundamental-Aufgaben.

§. **98.** Diejenigen Constructionsaufgaben, welche als die einfachsten am häufigsten Anwendung finden und deren Auflösung bei zusammengesetzteren Aufgaben als bekannt vorausgesetzt wird, bezeichnet man mit dem Namen Fundamental-Aufgaben.

1. Ein Dreieck zu construieren, wenn seine drei Seiten AB, AC und BC gegeben sind.

Analysis. Durch die Seite AB sind zwei Eckpunkte A und B des gesuchten Dreieckes ABC bestimmt. Soll der dritte Eckpunkt C von A den Abstand AC haben, so muss er in der Kreislinie liegen, welche um A mit dem Halbmesser AC beschrieben wird; soll ferner C von B den Abstand BC haben, so muss er auch in der Kreislinie liegen, welche um B mit dem Halbmesser BC beschrieben wird; der Punkt C kann daher nur in dem Durchschnitte dieser beiden Kreislinien liegen.

Construction. Man ziehe eine Strecke AB, welche der einen Seite gleich ist, beschreibe um A einen Kreis mit der zweiten Seite AC als Halbmesser, und um B einen Kreis mit der dritten Seite BC als Halbmesser; der Durchschnitt C der beiden Kreise ist der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreieckes.

Der Beweis liegt unmittelbar in der Construction.

Determination. Damit die beiden um A und B beschriebenen Kreise sich schneiden und dadurch eine Construction des Dreieckes ABC möglich machen, muss (nach §. 93, 3) $AB < AC + BC$ und zugleich $AB > AC - BC$ sein; man erhält in diesem Falle zwei Dreiecke, welche jedoch congruent sind und daher für eine einzige Lösung angesehen werden. Ist $AB \geqq AC + BC$ oder $AB \leqq AB - BC$, so gibt es kein Dreieck.

Besondere Fälle sind die Aufgaben:

a) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construieren, wenn die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind.

b) Ein gleichseitiges Dreieck zu construieren, wenn seine Seite gegeben ist.

2. Ein Dreieck zu construieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

Construction mit Hilfe der drei Seiten des gegebenen Dreieckes nach Aufgabe 1.

3. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte aufzutragen.

Auflösung. Man schneide vom Scheitel des gegebenen Winkels aus von dessen Schenkeln gleiche Stücke ab und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke, wodurch man ein gleichschenkliges Dreieck erhält; dann construiere man (nach Aufg. 2) ein ihm congruentes Dreieck so, dass der Scheitel des neuen Dreieckes in den gegebenen Punkt und ein Schenkel in die gegebene Gerade fällt.

4. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite und die ihr anliegenden Winkel gegeben sind.

Man trage an die gegebene Seite AB in ihren Endpunkten die gegebenen Winkel auf; der Durchschnitt C der beiden Schenkel AC und BC dieser Winkel ist der dritte Endpunkt des gesuchten Dreieckes ABC.

Der Beweis liegt in der Construction.

Determination. Es gibt nur dann ein Dreieck, wenn $A + B < 2R$ ist.

5. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man construiere den gegebenen Winkel, mache dessen Schenkel gleich den gegebenen Seiten und ziehe zwischen den Endpunkten eine Strecke.

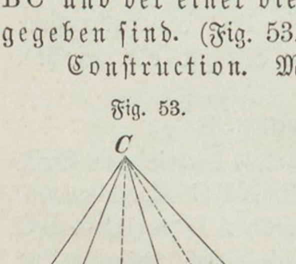
Als specieller Fall:

Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die beiden Katheten gegeben sind.

6. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten AC und BC und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel A gegeben sind. (Fig. 53.)

Construction. Man construiere den gegebenen Winkel A und trage auf dem einen Schenkel die diesem Winkel anliegende Seite AC auf; um den Endpunkt C beschreibe man mit der andern gegebenen, dem Winkel A gegenüberliegenden Seite BC als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den zweiten Schenkel des Winkels A in B schneidet, und ziehe die Strecke BC; ABC ist dann das gesuchte Dreieck.

Fig. 53.



Der Beweis liegt in der Construction.

Determination. Der um C mit BC beschriebene Kreisbogen schneidet den zweiten Schenkel des Winkels A in einem einzigen Punkte B, wenn

$BC > AC$ ist, da der andere Schnittpunkt in die Ergänzung des Strahles AB fällt; in zwei Punkten B' und b', wenn die dem Winkel A gegenüberliegende Seite kleiner als AC, jedoch größer als die von C auf AB gefällte Normale CB''' ist; und gar nicht, wenn die gegenüberliegende Seite $< CB'''$ ist. (§§. 73 und 35) Im ersten Falle genügt nur ein Dreieck ABC; im zweiten Falle ist die Aufgabe zweideutig bestimmt, da die zwei nicht congruenten Dreiecke $AB'C$ und $Ab'C$ entsprechen; im dritten Falle gibt es kein Dreieck. Nur ein Dreieck erhält man auch dann, wenn die dem Winkel A gegenüberliegende Seite $= AC$, oder $= CB'''$ ist.

Ein specieller Fall ist die eindeutig bestimmte Aufgabe:

Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

7. Die Symmetrale einer gegebenen Strecke AB zu construieren.

Man beschreibe um A und B mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in C und D schneiden; diese Punkte haben dann von A und B gleiche Abstände, folglich ist die Gerade CD die Symmetrale der Strecke AB (§. 46, 1).

Dieselbe Construction liefert auch die Lösung für die Aufgabe:

Eine gegebene Strecke zu halbieren.

8. Die Symmetrale eines gegebenen Winkels ABC zu construieren.

Man bestimme auf den Schenkeln durch Beschreibung eines Kreisbogens zwei Punkte M und N, welche vom Scheitel C gleich weit abstehen, und construiere die Symmetrale der Strecke MN; dieselbe ist dann auch die Symmetrale des Winkels MCN oder ACB (§. 47, 1).

Dies ist auch die Lösung für die gleichbedeutende Aufgabe:

Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

9. Zu einer gegebenen Geraden AB von einem außer ihr liegenden Punkte C die Normale zu ziehen.

Man beschreibe aus C einen Kreisbogen, welcher die AB in den Punkten M und N schneidet, und construiere die Symmetrale der Strecke MN.

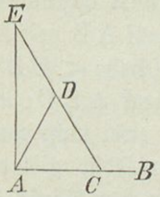
10. Zu einer gegebenen Geraden AB in einem Punkte C derselben die Normale zu errichten.

Man mache auf der Geraden die $CM = CN$ und construiere die Symmetrale der Strecke MN.

11. Zu einer gegebenen Strecke AB in einem Endpunkte A derselben die Normale zu errichten (Fig. 54).

Construction. Man schneide von der gegebenen Strecke ein Stück AC ab, beschreibe darüber das gleichseitige Dreieck ACD, verlängere die Seite CD um ihre eigene Länge bis E und ziehe die Strecke AE; diese ist die gesuchte Normale.

Fig. 54.



Beweis. $CAD = 60^0$ und (§. 33, b) $DAE = \frac{1}{2} ADC = 30^0$; daher $CAE = 90^0$.

12. Zu einer gegebenen Geraden AB durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt C die Parallele zu ziehen.

Auflösung 1. Man ziehe durch C eine Gerade, welche die AB in D schneidet, und trage in C einen Winkel $DCE = ADC$ (nach Aufg. 3) so auf, dass er zu ADC Wechselwinkel wird; der zweite Schenkel CE des construierten Winkels ist die gesuchte Parallele (24, 1).

Auflösung 2. Man fälle von C die $CF \perp AB$ und errichte in C die $CE \perp CF$; dann ist $CE \parallel AB$ (§. 25, 1).

Auflösung 3. Man ziehe durch C eine Gerade, welche die AB in D schneidet, und beschreibe um D mit dem Halbmesser CD einen Kreisbogen, welcher die AB in E schneidet; beschreibt man dann mit demselben Halbmesser um C und E zwei Kreisbogen, welche sich in F schneiden, so ist die Gerade CF der AB parallel (§. 54, 2).

13. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 34) in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe von A unter einem beliebigen Winkel einen Strahl AC, trage auf ihm eine beliebige Strecke so vielmal auf, als gleiche Theile verlangt werden, verbinde den Endpunkt C mit B durch die Strecke CB und ziehe zu dieser auch durch die übrigen Punkte die Parallelen MQ, NR, OS, PT; dadurch wird die gegebene Strecke in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt (§. 59, 3).

§. **99.** 1. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Mittels der Symmetralen zweier nicht paralleler Sehnen nach §. 76.

2. Einen Kreisbogen zu halbieren.

Die Symmetrale der zum Bogen gehörigen Sehne halbiert auch den Centriwinkel, folglich nach §. 78, 1 den Bogen selbst.

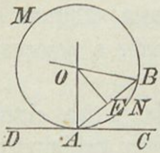
3. Durch einen gegebenen Punkt auf der Peripherie eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen (§. 80, 1).

4. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines Kreises an diesen Tangenten zu ziehen.

Ist C (Fig. 43) der gegebene Punkt und O der Mittelpunkt des Kreises, so ziehe man die Strecke CO, beschreibe über dieser als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten A und B schneidet; die Geraden CA und CB sind die gesuchten Tangenten.

5. Über einer Strecke als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, in welchem jeder Peripheriewinkel über dieser Sehne einem gegebenen Winkel gleich ist.

Fig. 55.



Es sei BAC (Fig. 55) der gegebene Winkel und AB die gegebene Strecke. Man errichte auf AB die Symmetrale EO, ziehe auch $AO \perp AC$, und beschreibe um den Schnittpunkt O der Geraden EO und AO als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AO = BO$ einen Kreis. Dann ist (§. 84) AMB der Kreisbogen, in welchem der gegebene Winkel BAC, und ANB der Kreisbogen, in welchem sein Nebenwinkel BAD als Peripheriewinkel über der Sehne AB liegt.

2. Methode der geometrischen Örter.

§. **100.** Eine Linie oder Fläche von solcher Beschaffenheit, dass alle in ihr liegenden Punkte, aber auch nur diese, einer gewissen gegebenen Bedingung genügeleisten, heißt der geometrische Ort dieser Punkte.

So liegen z. B. alle Punkte einer Ebene, welche von einem gegebenen Punkte denselben gegebenen Abstand haben, in der Kreislinie, welche um jenen Punkt mit dem gegebenen Abstande als Halbmesser beschrieben wird, und gibt es außerdem keinen andern Punkt der Ebene, der dieselbe Bedingung erfüllt. Man drückt dies durch folgenden Satz aus:

1. a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand a haben, ist der um diesen Punkt mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis.

Dieser geometrische Ort enthält die Lösungen der unbestimmten Aufgabe: Einen Punkt zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Ein anderer Ausdruck für denselben geometrischen Ort ist:

1. b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Halbmesser a haben, ist der um diesen Punkt mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis.

Ebenso ergeben sich aus bekannten geometrischen Lehrsätzen folgende geometrische Örter:

2. a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale ihrer Verbindungsstrecke (§. 46, 1).

2. b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, ist die Symmetrale ihrer Verbindungsstrecke.

3. a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale dieses Winkels (§. 46, 2).

3. b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei nichtparallele Gerade berühren, ist die Symmetrale des von den Geraden in ihrem Schnittpunkte gebildeten Winkels (§. 81).

4. a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden auf einer bestimmten Seite derselben einen gegebenen Abstand a haben, ist die zu der Geraden auf derselben Seite in dem Abstande a gezogene Parallele (§. 54, b).

4. b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser a haben und eine gegebene Gerade auf einer bestimmten Seite derselben berühren, ist die zu der Geraden auf derselben Seite in dem Abstande a gezogene Parallele (§. 80).

5. Der geometrische Ort der Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke, welche eine gegebene Hypotenuse haben, ist der über dieser als Durchmesser beschriebene Kreis (§. 83).

6. Der geometrische Ort der Scheitel aller Dreiecke, in welchen einer gegebenen Seite ein gegebener Winkel gegenüberliegt, ist der über der Seite als Sehne beschriebene Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel fasst (§. 84).

Wie man einen solchen Kreisbogen construiert, wurde im §. 99, Aufgabe 5, angegeben.

7. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berühren, ist die in diesem Punkte zu der Geraden errichtete Normale (§. 80).

8. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehende Gerade (§. 94).

9. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis berühren, ist ein mit diesem concentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet (§. 93, 2 und 4).

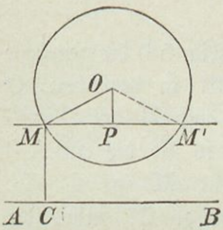
§. **101.** Ist für einen Punkt ein einziger geometrischer Ort gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes nicht bestimmt, da es unzählig viele Punkte gibt, welche in diesem geometrischen Orte liegen. Sind dagegen für einen Punkt zwei geometrische Örter bekannt, so gibt es nur einen, oder eine bestimmte Anzahl von Punkten, welche in beiden geometrischen Örtern liegen.

Die Methode der geometrischen Örter besteht nun darin, dass man bei Aufgaben, deren Lösung von der Bestimmung eines Punktes abhängt, aus den gegebenen Bedingungen zwei Linien (Gerade oder Kreise) als geometrische Örter des Punktes findet, indem man zu diesem Zwecke zunächst nur die eine Bedingung, welche der Punkt erfüllen soll, beachtet und von der andern ganz absieht, hierauf ebenso nur die zweite Bedingung ins Auge fasst und die erste unbeachtet lässt. Die gemeinsamen Punkte der so gefundenen zwei geometrischen Örter sind dann die gesuchten Punkte.

Folgende Aufgaben mögen als Beispiele dienen.

1. Einen Punkt zu bestimmen, der von einer gegebenen Geraden AB (Fig. 56) und von einem gegebenen Punkte O außerhalb der Geraden denselben gegebenen Abstand a hat.

Fig. 56.



Analysis. Es sei M der verlangte Punkt. Da M von AB den Abstand a haben soll, so ist der g. Ort für M die zu AB im Abstande CM = a gezogene Parallele MM' (g. O. 4. a); da ferner M von O den Abstand a haben soll, so ist die um O mit OM = a beschriebene Kreislinie ein zweiter g. Ort für M (g. O. 1. a); also liegt M im Durchschnitte der beiden Örter.

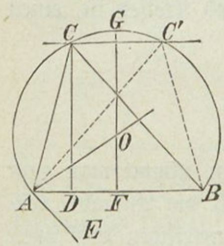
Construction. Man ziehe zu AB in dem Abstande CM = a die Parallele MM' und beschreibe aus O mit dem Halbmesser a einen Kreis, welcher die gezogene Parallele in dem Punkte M (M') schneidet; dieser Punkt ist der gesuchte Punkt.

Beweis. Derselbe folgt unmittelbar aus der Construction.

Determination. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen oder nur eine oder gar keine, je nachdem der um O beschriebene Kreis die Parallele MM' schneidet oder berührt oder gar nicht trifft. Zieht man OP $\perp$ MM', so treten diese drei Fälle ein, je nachdem a $>$ OP oder a = OP oder a $<$ OP ist.

2. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite c, der ihr gegenüberliegende Winkel γ und die Höhe h auf diese Seite gegeben sind.

Fig. 57.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 57) das gesuchte Dreieck, in welchem AB = c, ACB = γ und CD = h ist. Durch die Seite AB sind die Eckpunkte A und B gegeben; somit ist nur noch der Eckpunkt C zu bestimmen. Da ACB = γ sein soll, so ist der g. Ort für C ein über AB als Sehne beschriebener Kreisbogen, der den Winkel γ als Peripheriewinkel fasst (g. O. 6); da ferner die Höhe des Dreieckes, d. i. der Abstand des Scheitels von der Grundlinie = h sein soll, so ist ein zweiter Ort für C die in dem Abstande h zu AB parallel gezogene Gerade (g. O. 4. a); C ist also durch den Durchschnitt dieser Örter gegeben.

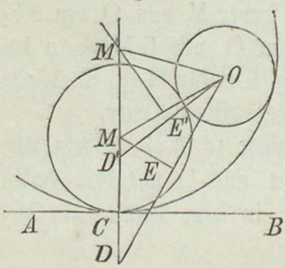
Construction. An AB = c lege man in A einen Winkel BAE = γ, ziehe AO $\perp$ AE und zu AB die Symmetrale FG, welche die Normale AO in O trifft. Beschreibt man nun aus O mit OA als Halbmesser einen Kreisbogen und zieht in dem Abstande CD = h zu AB die Parallele CC', welche den Kreisbogen in C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. In dem Dreiecke ABC ist nach der Construction AB = c der Winkel ACB = γ (§. 84) und die Höhe CD = h.

Determination. Man erhält zwei Dreiecke ABC und ABC', welche jedoch congruent sind, oder nur ein Dreieck oder gar keines, je nachdem $h < FG$ oder $h = FG$ oder $h > FG$ ist.

3. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte und einen gegebenen Kreis mit dem Radius R berührt.

Fig. 58.



Analysis. Ist AB (Fig. 58) die gegebene Gerade, C der gegebene Punkt in derselben, O der Mittelpunkt des gegebenen und M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, so ist die zu AB Normale CM ein g. O. für M (g. O. 7). Zur Auffindung des zweiten g. O. führt die Überlegung, dass der Kreis, welcher mit dem gesuchten concentrisch ist und durch O geht, eine Gerade berührt, die mit AB im Abstande R = CD (CD') parallel ist, je nachdem der gegebene Kreis von innen oder außen berührt wird, dass dann OD (OD') Sehnen dieser concentrischen Kreise sind und die Mittelpunkte dieser Kreise in der Symmetrale dieser Sehnen liegen müssen.

Construction: Man errichtet in C die Normale CM, trägt darauf CD (CD') = R auf und errichtet im Mittelpunkte der Sehne OD (OD') die Normale EM (E'M'), so ist M (M') der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und sein Radius ist MC (M'C). Der Beweis ergibt sich aus der Construction

Determination. Man erhält zwei Kreise, wenn die gegebene Gerade außerhalb des gegebenen Kreises liegt oder eine Secante des Kreises ist, einen Kreis aber, wenn sie eine Tangente ist.

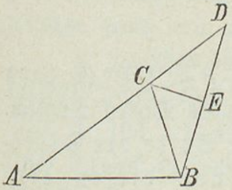
3. Methode der Hilfsfiguren.

§. 102. Bei der Methode der Hilfsfiguren nimmt man zum Zwecke der Analysis eine vorläufige Figur von der durch die Aufgabe verlangten Art an und untersucht unter Anwendung von geometrischen Lehrsätzen den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken, indem man diejenigen gegebenen Bestimmungsstücke, welche in der angenommenen Figur nicht unmittelbar vorkommen, durch entsprechende Hilfslinien mit derselben in Verbindung bringt und dadurch eine construierbare Hilfsfigur ermittelt, aus welcher sich die in der Aufgabe verlangte Figur herleiten läßt.

Als Beispiele sollen folgende Aufgaben durchgeführt werden:

1. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite c, der anliegende Winkel α und die Summe s der beiden anderen Seiten gegeben sind.

Fig. 59.



Analysis. Man nehme vorläufig irgend ein Dreieck BAC (Fig. 59) als das verlangte an, so dass AB = c, BAC = α und BC + AC = s sei. Da zur Auflösung alle gegebenen Stücke zu benützen sind, so muss die Strecke s, welche in der Figur selbst nicht unmittelbar vorkommt, in geeigneter Weise mit ihr in Verbindung gebracht werden. Verlängert man zu diesem Zwecke AC um die der Seite BC gleiche Strecke CD und zieht BD, so erhält man das Hilfsdreieck BAD, in welchem die Seiten CB = c und AD = s, sowie der Winkel BAD = α bekannt sind, und welches daher construiert werden kann. Von diesem Dreiecke aber gelangt man zu dem gesuchten Dreiecke BAC, indem man zu BD die Symmetrale zieht, welche, da das $\triangle$ CBD gleichschenklig ist, die AD im Punkte C trifft.

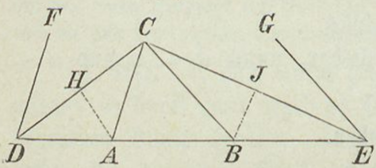
Construction. Man ziehe AB = c, lege in A den Winkel BAD = α an, mache den Schenkel AD = s und ziehe BD. Construiert man nun zu BD die Symmetrale, welche die Seite AD in C schneidet, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Determination. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $\alpha < 180^0$ und $c < s$ ist.

2. Ein Dreieck zu construieren, von welchem der Umfang und zwei Winkel gegeben sind.

Fig. 60.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 60) das verlangte Dreieck, welches den gegebenen Umfang AB + AC + BC = u und die gegebenen Winkel BAC = α und ABC = β hat. Stellt man u so dar, dass man AB nach beiden Seiten verlängert und AD = AC, BE = BC macht, und zieht DC und ED, so entsteht das Hilfsdreieck DEC, welches sich construieren läst, da in demselben DE = u, EDC = $\frac{\alpha}{2}$ und DEC = $\frac{\beta}{2}$ (§. 33, b) gegeben sind. Dadurch ist auch der Eckpunkt C des gesuchten Dreieckes bestimmt. Die beiden anderen Eckpunkte A und B sind die Scheitel zweier gleichschenkliger Dreiecke über den Grundlinien CD und CE und liegen in der Strecke DE; sie sind also die Schnittpunkte der zu CD und CE errichteten Symmetralen (§. 47, 1) und der DE.

Construction. Man mache die Strecke DE = u, trage in D und E die Winkel EDF = α und DEG = β auf, halbiere diese Winkel und verlängere die Halbierungslinien bis zum Schnittpunkte C. Construiert man dann zu den Strecken CD und CE die Symmetralen HA und JB, welche die

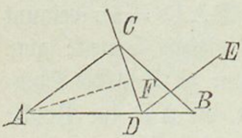
DE in den Punkten A und B schneiden, und zieht AC und BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Der Beweis liegt in der Analysis.

Determination. Es wird vorausgesetzt, dass $\alpha + \beta < 180^0$ ist; dann ist stets, und zwar nur ein einziges der Aufgabe genügendes Dreieck möglich.

3. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite, die Differenz der beiden anderen Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 61.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 61) das verlangte Dreieck, von welchem $BC = a$, $AB - AC = d$ und Winkel $BAC = \alpha$ gegeben ist. Trägt man von AB ein Stück $AD = AC$ ab, so dass $BD = d$ wird, und zieht CD, so ist Winkel $ADC = R - \frac{\alpha}{2}$, d. i. die Hälfte des Nebenwinkels von α. Das Hilfsdreieck BDC, von welchem die Seiten $BC = a$, $BD = d$ und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel $BDC = R + \frac{\alpha}{2}$ bekannt sind, lässt sich also construieren. Dadurch sind auch die Eckpunkte B und C des gesuchten Dreieckes bestimmt. Der dritte Eckpunkt A ergibt sich dann als Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes ACD.

Construction. Man ziehe $BD = d$, mache den Winkel $BDE = \alpha$, halbiere dessen Nebenwinkel ADE durch DC und beschreibe um B mit dem Halbmesser a einen Kreisbogen, welcher DC in C schneidet; sodann ziehe man BC, construiere zu DC die Symmetrale, welche die verlängerte BD in A trifft, und ziehe AC; ABC ist das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ergibt sich aus der Analysis.

Determination. Die Aufgabe ist lösbar, wenn $d < a$ und $\alpha < 180^0$ ist.

4. Übungsaufgaben.

A. Nach der Methode der geometrischen Örter.

§. **103.** 1. Einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist und von einem dritten gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

2. In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei außer ihr gegebenen Punkten gleich weit absteht.

3. In einer gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dass er von einer zweiten gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat.

4. Einen Punkt zu finden, welcher von zwei gegebenen parallelen und einer dritten sie schneidenden Geraden gleich weit absteht.

5. In einer Seite eines gegebenen Dreieckes den Punkt zu bestimmen, welcher von den beiden anderen Seiten gleich weit absteht.

6. Zu einem gegebenen Vierecke den Punkt zu construieren, welcher von zwei bestimmten Eckpunkten desselben, und ebenso von den beiden anderen Eckpunkten gleich weit absteht.

7. Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine gegebene Strecke so einzutragen, dass sie zu dem einen Schenkel normal ist.

§. **104.** 1. Über einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, dessen Scheitel in einer zur Strecke parallelen Geraden liegt.

2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) die Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe; b) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel; c) die Abschnitte, in welche die Hypotenuse durch die Höhe zertheilt wird.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck a) aus der Grundlinie und Höhe, b) aus einem Schenkel und der zugehörigen Höhe zu construieren.

4. Ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) eine Seite, die zugehörige Höhe und ein der Seite anliegender Winkel; b) eine Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Höhe auf eine andere Seite; c) eine Seite, die zugehörige Höhe und Schwerlinie; d) zwei Seiten und die zu einer gehörige Schwerlinie.

5.*) Ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) ein Winkel und die Höhen auf die ihn einschließenden Seiten; b) zwei Seiten und die Höhe auf eine derselben; c) zwei Seiten und die zur dritten Seite gehörige Höhe; d) eine Seite, die zu ihr und die zu einer zweiten Seite gehörige Höhe; e) eine Seite und die Höhen auf die beiden anderen Seiten.

In den Aufgaben d) und e), wo die Seite als festliegend angenommen wird, erhält man als geom. Örter für den Fußpunkt der Höhe auf eine andere Seite den Kreis, welcher um den einen Endpunkt der gegebenen Seite mit der Höhe als Halbmesser beschrieben wird, und die aus dem zweiten Endpunkte an diesen Kreis gezogene Tangente.

§. **105.** 1. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher a) durch zwei gegebene Punkte geht; b) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt; c) eine gegebene Gerade berührt und durch einen außer ihr gegebenen Punkt geht; d) zwei gegebene sich schneidende Gerade berührt.

2. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher a) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt; b) einen gegebenen Kreis berührt und durch einen außerhalb desselben gegebenen Punkt geht; c) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt; d) zwei gegebene Kreise berührt.

3. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und a) eine gegebene Gerade, b) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

*) In den früheren Auflagen hat diese Aufgabe Nummer 4.

4. Einen Kreis zu construieren, welcher zwei gegebene sich schneidende Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.

5. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem bestimmten Punkte berührt.

6. Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und eine gegebene Gerade berührt.

7. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

Sind O und O' die Mittelpunkte der gegebenen Kreise, A der gegebene Berührungspunkt des ersten und M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, so ist die gerade OA ein geom. Ort für M. Den andern geom. Ort erhält man durch eine ähnliche Überlegung wie in Aufgabe 3 des §. 101.

B. **Nach der Methode der Hilfsfiguren.**

§. **106.** Jedes Dreieck wird durch die Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilt, welche als Hilfsfiguren dienen können.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse durch die Höhe in zwei Abschnitte getheilt wird, zu construieren, wenn gegeben sind: a) eine Kathete und die Höhe auf die Hypotenuse; b) die Höhe und ein spitzer Winkel; c) eine Kathete und der ihr anliegende Abschnitt der Hypotenuse; d) die Höhe und ein Abschnitt der Hypotenuse.

2. Ein gleichseitiges Dreieck aus der Höhe zu construieren.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construieren a) aus dem Schenkel und der Höhe, b) aus der Höhe und einem Winkel, c) aus der Basis und der Höhe auf einen Schenkel.

4. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus der Höhe zu construieren.

5. Ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) eine Seite, die Höhe auf eine zweite Seite und der der letzteren Seite gegenüberliegende Winkel; b) eine Seite, die zugehörige Schwerlinie und ein der Seite anliegender Winkel, c) die Höhe auf eine Seite und die dieser anliegenden Winkel; d) die Höhen auf zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel; e) die zu einer Seite gehörige Höhe und Schwerlinie, dann ein dieser Seite anliegender Winkel.

§. **107.** Kommen unter den gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die Summe oder die Differenz zweier Seiten (oder einer Seite und der Höhe) vor, so erhält man durch entsprechende Verlängerung einer Seite oder bezüglich durch Abtragen von derselben als Hilfsfigur ein Dreieck, in welchem die gegebene Summe oder Differenz als Seite erscheint.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) die Hypotenuse und die Summe (Differenz) der beiden Katheten; b) eine Kathete und die Summe (Differenz) der Hypotenuse und der andern Kathete; c) ein spitzer Winkel und die Summe (Differenz) der beiden Katheten; d) die Summe (Differenz) aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel;

e) die Summe (Differenz) der beiden Katheten und die Differenz der ihnen gegenüberliegenden Winkel; f) der Umfang und ein spitzer Winkel.

2. Ein gleichseitiges Dreieck aus der Summe (Differenz) seiner Seite und Höhe zu construieren.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construieren, wenn nebst der Summe (Differenz) der Grundlinie und des Schenkels a) der Winkel an der Grundlinie, b) der Winkel am Scheitel gegeben ist; wenn nebst der Summe (Differenz) des Schenkels und der Höhe c) die Grundlinie, d) der Winkel an der Grundlinie (am Scheitel) gegeben ist.

4. Ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) die Summe (Differenz) zweier Seiten, die dritte Seite und der dieser gegenüberliegende Winkel; b) die Summe (Differenz) zweier Seiten, die dritte Seite und ein dieser anliegender Winkel; c) die Summe (Differenz) zweier Seiten und zwei Winkel.

§. **108.** Die Aufgaben über die Construction der Parallelogramme oder Vierecke überhaupt lassen sich im allgemeinen mit Hilfe der Construction eines der Dreiecke lösen, in welche das Parallelogramm (Viereck) durch eine einzelne Diagonale oder durch die beiden Diagonalen zugleich getheilt wird.

1. Ein Quadrat a) aus der Seite, b) aus der Diagonale, c) aus der Summe (Differenz) der Diagonale und der Seite zu construieren.

2. Ein Rechteck zu construieren, wenn gegeben sind: a) zwei anstoßende Seiten; b) eine Seite und die Diagonale; c) eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der beiden Diagonalen; d) die Diagonale und der Winkel der Diagonalen; e) die Summe (Differenz) zweier Seiten und die Diagonale; f) die Summe (Differenz) zweier Seiten und ein Winkel; g) eine Seite und die Summe (Differenz) der Diagonale und der andern Seite.

3. Einen Rhombus zu construieren, wenn gegeben sind: a) die Seite und ein Winkel; b) die Seite und die Höhe; c) die Seite und eine Diagonale; d) die zwei Diagonalen; e) die Seite und die Summe (Differenz) der Diagonalen; f) die Summe (Differenz) der Seite und der Höhe und ein Winkel.

4. Ein Rhomboid zu construieren, wenn gegeben sind a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; b) zwei Seiten und eine Diagonale; c) eine Seite und die beiden Diagonalen; d) die Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel; e) zwei Seiten und die Höhe auf eine derselben; f) die Summe (Differenz) zweier Seiten, ein Winkel und eine Diagonale; g) die Summe (Differenz) der Diagonalen, eine Seite und der von den beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel.

5. Ein Deltoid zu construieren, wenn gegeben sind: a) zwei ungleiche Seiten und eine Diagonale; b) die beiden Diagonalen und eine Seite.

§. **109.** Ein Trapez ist durch jedes der Dreiecke, welche durch eine Diagonale abgeschnitten werden, nebst einem davon unabhängigen Stücke des andern dieser Dreiecke, ein gleichschenkliges Trapez schon durch eines dieser Dreiecke bestimmt.

Sind die beiden Parallelseiten gegeben, so zieht man durch einen Eckpunkt eine Parallele zu einer der nichtparallelen Seiten und erhält dadurch als Hilfsfigur ein Dreieck, dessen eine Seite der Differenz der Parallelseiten gleich ist.

1. Ein gleichschenkliges Trapez zu construieren, wenn gegeben sind: a) eine Parallelseite, die nichtparallele Seite und die Diagonale; b) eine Parallelseite, die nichtparallele Seite und die Höhe c) die zwei Parallelseiten und die Höhe; d) die zwei Parallelseiten und die nichtparallele Seite; e) die nichtparallele Seite, die Diagonale und die Höhe; f) eine Parallelseite, ein Winkel und die Höhe; g) die Summe (Differenz) einer parallelen und der nichtparallelen Seite, die Diagonale und ein Winkel.

2. Ein Trapez zu construieren, wenn gegeben sind: a) alle vier Seiten; b) drei Seiten und die Höhe; c) drei Seiten und ein Winkel; d) eine Parallelseite, die ihr anliegenden Winkel und eine Diagonale; e) die Parallelseiten, eine nichtparallele Seite und eine Diagonale; f) die beiden nichtparallelen Seiten, eine Diagonale und die Höhe; g) die Summe (Differenz) einer parallelen und einer nichtparallelen Seite, die beiden anderen Seiten und die dem Winkel, welchen diese einschließen, gegenüberliegende Diagonale; h) die Summe (Differenz) einer parallelen und einer nichtparallelen Seite, die der Parallelseite anliegenden Winkel und die Höhe.

C. Aufgaben ohne Beziehung auf eine bestimmte Methode.

§. **110.** 1. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Man construiere (Fig. 54) das gleichseitige $\triangle$ ACD und halbiere den Winkel CAD

2. In einer gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dass die Strecken, welche von ihm nach zwei gegebenen Punkten außerhalb der Geraden gezogen werden, mit dieser gleiche Winkel bilden.

Fällt man von dem einen Punkte auf die Gerade die Normale, verlängert diese um sich selbst über den Fußpunkt hinaus und verbindet den Endpunkt mit dem zweiten gegebenen Punkte, so schneidet diese Verbindungsstrecke die Gerade in dem gesuchten Punkte.

3. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass sie mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

Man trage den gegebenen Winkel an die gegebene Gerade auf und ziehe zu dem zweiten Schenkel durch den gegebenen Punkt eine Parallele.

4. Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, dass das von den Schenkeln begrenzte Stück derselben in dem gegebenen Punkte halbiert wird.

Man ziehe durch den Punkt P eine Parallele zu dem einen Schenkel AC, welche von dem andern Schenkel eine Strecke AD abschneidet, verlängere diese letztere um sich selbst (AD = AE) und ziehe durch den Endpunkt E und den gegebenen Punkt P eine Gerade. (§. 59, 3.)

5. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass sie von den Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt eine Normale zur Winkelsymmetrale.

6. Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine Gerade von gegebener Länge so zu legen, dass sie von den Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

7. In einem gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge so zu legen, dass sie einer gegebenen Geraden parallel wird.

8. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dass die von ihm nach einem gegebenen Kreise gezogene Tangente eine gegebene Länge habe.

Man ziehe an den Kreis eine beliebige Tangente von der gegebenen Länge und beschreibe durch ihren Endpunkt einen mit dem gegebenen concentrischen Kreis; der Schnittpunkt dieses Kreises mit der gegebenen Geraden ist der gesuchte Punkt.

§. **111.** 1. Ein Vieleck zu construieren, das mit einem gegebenen Vielecke congruent ist.

2. Ein n-Eck aus den in §. 67 angegebenen Bestimmungsstücken zu construieren.

3. Ein regelmäßiges n-Eck zu construieren, wenn eine Seite desselben gegeben ist.

4. Die Peripherie eines Kreises a) in 2, 4, 8,..., b) in 3, 6, 12... gleiche Theile zu theilen.

5. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben sind: a) zwei Seiten; b) eine Seite und ein ihr anliegender Winkel; c) zwei Winkel; d) eine Seite und die zugehörige Höhe; e) eine Seite und die zugehörige Schwerlinie; f) eine Seite und die Höhe auf eine andere Seite.

Bei c) construiere man zuerst 2α als Centriwinkel, so hat man die Sehne und sonach die Aufgabe b.

6. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben sind: a) zwei Winkel; b) eine Seite und ein ihr anliegender Winkel; c) eine Seite und die Höhe auf eine andere Seite.

Hier kommt §. 81, b) in Anwendung.

7. Ein Sehnenviereck zu construieren aus dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und a) drei Seiten, b) zwei gegenüberliegenden Seiten nebst einem Winkel, c) einer Seite mit den zwei anliegenden Winkeln.

8. Ein Tangentenviereck zu construieren aus dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und a) zwei anstoßenden Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, b) einer Seite mit den Winkeln, welche einer anstoßenden Seite anliegen.

Dritter Abschnitt.

Proportionalität der Strecken und Ähnlichkeit der ebenen Gebilde.

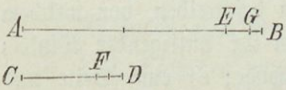
I. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

§. **112.** Eine Raumgröße heißt ein Maß einer andern gleichartigen Raumgröße, wenn die zweite aus gleichen Theilen besteht, deren jeder der ersten Raumgröße gleich ist. Ist z. B. A = aM, wo a irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist M ein Maß von A. Ist M sowohl ein Maß von A als von B, so heißt es ein gemeinsames Maß von A und B.

Um ein gemeinsames Maß zweier Raumgrößen zu finden, nehme man von der größeren A die kleinere B so oft weg, als es möglich ist; hierauf in gleicher Weise den Rest C von der kleineren Größe B so oft, als es angeht; dann den neuen Rest D von dem vorigen Reste C, u. s. f. Kommt man bei diesem Verfahren einmal auf einen Rest R, welcher ein Maß des nächst vorhergehenden ist, so ist R ein gemeinsames, und zwar, wie aus der Arithmetik bekannt ist, das größte gemeinsame Maß von A und B.

Wir wollen dieses Verfahren an zwei Strecken AB und CD (Fig. 62) veranschaulichen.

Fig. 62.



Man trägt die kleinere Strecke CD auf die größere AB so oft auf, als es angeht, hier 2mal; den Rest EB trägt man auf die kleinere Strecke CD (2mal) auf, den Rest FD auf den vorigen Rest EB (1mal), den neuen Rest GB wieder auf den früheren FD, in welchem er genau 2mal enthalten sei. Man hat dann

$$\begin{aligned} FD &= 2\,GB \\ EB &= FD + GB = 3\,GB, \\ CD &= 2\,EB + FD = 8\,GB, \\ AB &= 2\,CD + EB = 19\,GB. \end{aligned}$$

Es haben demnach AB und CD das größte gemeinsame Maß GB, und zwar ist dieses in AB 19mal, in CD 8mal enthalten.

§. **113.** Kommt man bei dem im §. 112 angeführten Verfahren, soweit auch das wiederholte Wegnehmen der Reste fortgesetzt wird, auf keinen Rest = 0, so haben die beiden gegebenen Größen kein gemeinsames Maß.

Zwei Größen, welche ein gemeinsames Maß haben, heißen commensurabel; zwei Größen, welche kein gemeinsames Maß haben, incommensurabel.

Ein Beispiel zweier incommensurabler Größen bieten die Hypotenuse und die Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes.

§. **114.** Unter dem Verhältnis A:B zweier gleichartiger Raumgrößen versteht man den Quotienten ihrer Maßzahlen, d. i. der unbenannten Zahlen, durch welche die beiden Raumgrößen in Beziehung auf dasselbe Maß ausgedrückt sind. So ist in Fig. 62

$$AB : CD = 19\,GB : 8\,GB = 19 : 8.$$

Lehrsätze. 1. Das Verhältnis zweier commensurabler Größen ist entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch, somit rational (Arithmetik, §. 118, 1).

2. Das Verhältnis zweier incommensurabler Größen kann a) weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein, es lässt sich jedoch b) als Grenzwert eines veränderlichen Bruches mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annäherungsweise bestimmen; das Verhältnis ist somit irrational (Arithmetik, §. 118, 2).

3. Zwei irrationale Verhältnisse, welche Grenzwerte desselben veränderlichen Bruches sind, sind gleich. (Arithmetik, §. 114.)

§. **115.** Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine Proportion. Eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proportion, z. B. A : B = B : C; das mittlere Glied wird die mittlere Proportionale (das geometrische Mittel) zwischen den beiden äußeren Gliedern, und das vierte Glied die dritte stetige Proportionale zu dem ersten und dem mittleren Gliede genannt.

Sind zwei Arten von Größen so von einander abhängig, dass, wenn A und B zwei zusammengehörige Werte derselben sind, für ein beliebiges m zu mA auch mB gehört, dass sich also zwei Größen der einen Art wie die zugehörigen Größen der andern Art verhalten, so sagt man: die beiden Arten von Größen sind gerade proportioniert, auch bloß proportioniert; gehört dagegen zu mA der Wert $\frac{B}{m}$, so dass sich zwei Größen der einen Art umgekehrt wie die zugehörigen Größen der andern Art verhalten, so sagt man: die beiden Arten von Größen sind verkehrt proportioniert.

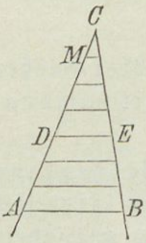
Lehrsatz. Sind zwei Arten von Größen für je zwei commensurable Werte der einen Art gerade oder verkehrt proportioniert, so sind sie es auch für je zwei incommensurable Werte derselben (Arithmetik, §. 122).

II. Proportionalität der Strecken.

§. **116.** Mehrere durch einen Punkt gehende Gerade bilden einen Strahlenbüschel; der gemeinsame Punkt heißt sein Scheitel. Liegen die Geraden in einer Ebene, so heißt der Strahlenbüschel ein ebener. Jede Gerade, welche die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels schneidet, heißt eine Transversale desselben (§. 21).

Lehrsatz. Zwei Strahlen werden von je zwei parallelen Transversalen proportioniert geschnitten.

Fig. 63.



Voraussetzung. Es sei DE || AB (Fig. 63).

Behauptung. $CD : DA = CE : EB$,
$CA : DA = CB : EB$,
$CA : CD = CB : CE$.

Beweis. Es seien die Strecken CD und DA commensurabel, CM ein gemeinsames Maß derselben, und zwar $CD = m . CM$, $DA = n . CM$; dann ist $CD : DA = m : n$. Theilt man nun die CD in m und die DA in n gleiche Theile und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele zu AB, so wird dadurch (§. 59, 3) auch CE in m und EB in n gleiche Theile getheilt; es ist also $CE : EB = m : n$, sonach $CD : DA = CE : EB$.

Aus dieser Proportion ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proportionen. Man hat

$(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB$ oder $CA : DA = CB : EB$,
$(CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE$ oder $CA : CD = CB : CE$.

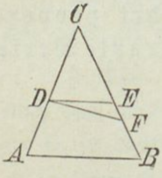
Diese Proportionen sind nach §. 115 auch dann giltig, wenn die Strecken CD und DA incommensurabel sind.

Auf gleiche Weise kann auch die Erweiterung des obigen Lehrsatzes für den Fall, dass die eine der parallelen Transversalen die Ergänzungen der beiden Strahlen schneidet, bewiesen werden.

Folgesatz. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden anderen Seiten proportioniert geschnitten.

§. **117. Lehrsatz.** Werden zwei Strahlen von zwei Transversalen proportioniert geschnitten, so sind die beiden Transversalen parallel (Umkehrung des Lehrsatzes in §. 116).

Fig. 64.

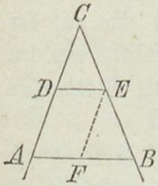


Beweis. Es sei (Fig. 64) $CA : CD = CB : CE$. Schnitte die durch D parallel mit AB gezogene Gerade die CB im Punkte F, so wäre (nach §. 116) $CA : CD = CB : CF$. Dann aber muss mit Rücksicht auf die Voraussetzung $CF = CE$, d. h. der Punkt F mit E identisch sein. Folglich ist die DE || AB.

Folgesatz. Werden zwei Seiten eines Dreieckes von einer Transversale proportioniert geschnitten, so ist diese zur dritten Seite parallel.

§. **118. Lehrsatz.** Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten, so sind die Abschnitte der beiden

Fig. 65.



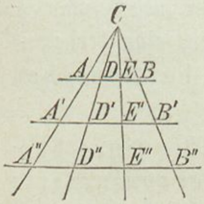
Transversalen den Abschnitten eines jeden Strahles proportioniert (Fig. 65).

Beweis. Ist $DE \parallel AB$, so ist $CA : CD = CB : CE$ (§. 116). Zieht man $EF \parallel CA$ und betrachtet B als Scheitel, mithin EF und CA als Transversalen, so ist auch $AB : AF = CB : CE$, oder weil $AF = DE$ ist, $AB : DE = CB : CE$. Man hat daher

$$AB : DE = CA : CD = CB : CE.$$

§. **119. Lehrsatz.** Wird ein ebener Strahlenbüschel von zwei oder mehreren parallelen Transversalen geschnitten, so sind a) je zwei Abschnitte des einen Strahles den entsprechenden Abschnitten jedes anderen Strahles, und b) je zwei Abschnitte einer Transversale den entsprechenden Abschnitten jeder anderen Transversale proportioniert (Fig. 66).

Fig. 66.



Vorauss. $AB \parallel A'B' \parallel A''B'' \ldots$

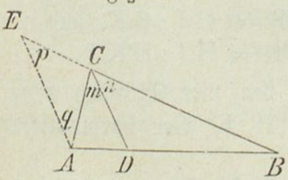
Behaupt. a) $CA : CA' : CA'' \ldots$
$= CD : CD' : CD'' \ldots$
$= CE : CE' : CE'' \ldots$
b) $AD : A'D' : A''D'' \ldots$
$= DE : D'E' : D''E'' \ldots$
$= EB : E'B' : E''B' \ldots$

Beweis folgt aus §§. 116 und 118.

§. **120.** 1. Die Symmetrale eines Dreieckswinkels theilt die Gegenseite in zwei Abschnitte, welche den ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes proportioniert sind.

Vorauss. Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 67) der Winkel C durch die Gerade CD halbiert, so dass $m = n$ wird.

Fig. 67.



Behaupt. $AD : BD = AC : BC$.

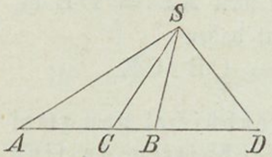
Beweis. Man verlängere BC und ziehe durch A zu DC eine Parallele, welche die Verlängerung der BC in E schneidet. Es ist nun $m = q$, $n = p$, und wegen $m = n$ auch $q = p$, folglich $EC = AC$. In dem Dreiecke ABE ist $CD \parallel EA$, daher findet die Proportion $AD : BD = EC : BC$ statt, woraus dann $AD : BD = AC : BC$ folgt.

2. Die Symmetrale eines Außenwinkels eines Dreieckes theilt die verlängerte Gegenseite in einem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten jener Seite den beiden anderen Dreiecksseiten proportioniert sind (Beweis analog wie zu 1).

III. Harmonische Theilung der Strecken.

§. 121. Liegt von zwei Punkten C und D (Fig. 68) der eine auf der Strecke AB, der andere auf der Verlängerung so, dass ihre Abstände von den Endpunkten dieser Strecke gerade proportioniert sind, dass also die Proportion

Fig. 68.



$$AC : BC = AD : BD$$

stattfindet, so sagt man: die Strecke AB ist durch die Punkte C und D harmonisch getheilt.

Aus $AC : BC = AD : BD$ folgt auch

$$CB : DB = CA : DA.$$

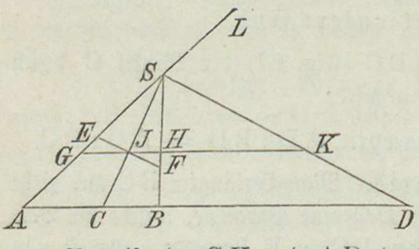
Ist daher die Strecke AB durch die Punkte C und D harmonisch getheilt, so ist auch die Strecke CD durch die Punkte B und A harmonisch getheilt.

Die Punkte A, C, B, D heißen vier harmonische Punkte. Die Punkte C und D nennt man in Bezug auf die Strecke AB einander conjugiert; ebenso sind B und A in Bezug auf die Strecke CD einander conjugiert.

Vier Strahlen, welche von einem Punkte S aus durch vier harmonische Punkte gehen, heißen harmonische Strahlen, und zwar nennt man je zwei Strahlen, welche durch zwei conjugierte Punkte gehen, einander conjugiert. Alle vier Strahlen zusammen bilden einen harmonischen Strahlenbüschel.

§. 122. Lehrsätze. 1. Zieht man zu einem Strahle eines harmonischen Büschels eine Parallele, so halbiert der conjugierte Strahl das zwischen den beiden anderen Strahlen liegende Stück der Parallelen.

Fig. 69.



Beweis. Es seien (Fig. 69) SA, SC, SB, SD die Strahlen eines harmonischen Büschels, und $EF \parallel SD$. Zieht man durch J die $GK \parallel AD$, so ist mit Rücksicht auf §§. 116 und 118.

$$JE : KS = GJ : GK, \text{ und}$$
$$JF : KS = HJ : HK.$$

Nun ist, da GK und AD (nach §. 119) von den vier Strahlen proportioniert geschnitten werden, und also auch G, J, H, K vier harmonische Punkte sind,

$$GJ : HJ = GK : HK, \text{ oder } GJ : GK = HJ : HK; \text{ folglich ist auch}$$
$$JE : KS = JF : KS, \text{ und somit } JE = JF.$$

2. Ein harmonischer Strahlenbüschel wird von jeder Transversale in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Beweis. Es seien (Fig. 69) SA, SC, SB, SD die Strahlen eines harmonischen Büschels und GK eine beliebige Transversale derselben. Zieht man durch J die EF ∥ SD, so ist mit Rücksicht auf §§. 116 und 118

$$GJ : GK = JE : KS \text{ und } HJ : HK = JF : KS.$$

Nun ist JE = JF (nach 1.), folglich auch

$$GJ : GK = HJ : HK, \text{ oder } GJ : HJ = GK : HK;$$

d. h. G, J, H, K sind vier harmonische Punkte.

§. 123. **Lehrsatz.** Die Symmetralen eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels theilen die Gegenseite des Dreieckes harmonisch.

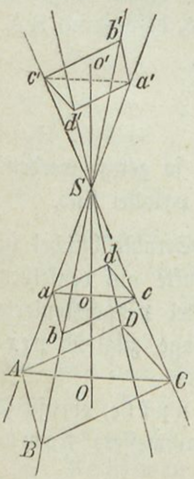
Beweis. Es sei in einem Dreiecke ABS (Fig. 69) W. ASC = BSC und W. BSD = LSD. Man hat

AC : BC = AS : BS und AD : BD = AS : BS (§. 120, 1. und 2.); folglich auch AC : BC = AD : BD.

IV. Ähnlichkeit der ebenen Gebilde.

§. 124. **Lehrsätze.** 1. Werden die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels (Fig. 70) vom Scheitel S aus in den Punkten A und a, B und b, C und c,... proportioniert geschnitten, so sind in den Gebilden ABCD... und abcd... die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Schnittpunkten proportioniert und die von diesen Strecken gebildeten Winkel paarweise gleich.

Fig. 70.



Beweis. Es sei SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc =...

Aus dieser Voraussetzung folgt (§. 117) unmittelbar AB ∥ ab, AC ∥ ac, BC ∥ bc,..., somit (§. 118)

AB : ab = SB : Sb und BC : bc = SB : Sb,

daher auch AB : ab = BC : bc; u. s. w.

Dass ferner W. ABC = abc, W. BAC = bac, W. BCD = bcd,... ist, folgt aus §. 26, 1.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn von je zwei entsprechenden Schnittpunkten der eine auf einem Strahle des Strahlenbüschels, der andere auf dessen Ergänzung liegt, wie in den Gebilden ABCD.... und a'b'c'd'...; nur sind in diesem Falle je zwei entsprechende Strecken im entgegengesetzten Sinne parallel.

Zusatz. Sind A, B, C, D,... Umfangspunkte eines Kreises, so sind auch a, b, c, d... Umfangspunkte eines Kreises. Denn ist O der Mittelpunkt des durch A, B, C,... gehenden Kreises, und o der Punkt, welcher auf dem Strahle SO dem Punkte O entspricht, so hat man AO : ao = BO : bo = CO : co =...; allein AO = BO = CO =..., somit auch ao = bo = co =..., d. h. die Punkte a, b, c,... liegen in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt o ist.

2. Umgekehrt: Zwei ebene Gebilde, in denen die entsprechenden Strecken nach der Ordnung proportioniert und die entsprechenden Winkel paarweise gleich sind, lassen sich immer auf einem Strahlenbüschel in eine solche Lage bringen, dass ihre entsprechenden Punkte auf denselben Strahlen oder deren Ergänzungen liegen und vom Scheitel proportionierte Abstände haben (Fig. 70).

Beweis. Es sei $AB : ab = AC : ac = BC : bc = ..$, und

$$W.\ ABC = abc,\ BAC = bac,\ BCD = bcd, ..$$

Legt man die beiden Gebilde so gegeneinander, dass zwei in einem Punkte sich schneidende Strecken des einen Gebildes den entsprechenden Strecken des andern in demselben Sinne parallel sind, so müssen, da die Strecken nach der Ordnung proportioniert und die Winkel paarweise gleich sind, auch je zwei andere entsprechende Strecken in demselben Sinne parallel sein.

Liegen aber zwei Gebilde so gegeneinander, dass je zwei entsprechende Strecken derselben parallel sind, so müssen sich die durch je zwei entsprechende Punkte derselben gezogenen Geraden in einem gemeinsamen Punkte schneiden. Es sei S der Punkt, in welchem sich Aa und Bb schneiden. Würde Cc nicht durch S gehen, sondern die Bb in S′ schneiden, so wäre (§. 118) $AB : ab = SB : Sb$ und $BC : bc = S'B : S'b$, daher wegen $AB : ab = BC : bc$ auch $SB : Sb = S'B : S'b$, woraus $(SB - Sb) : (S'B - S'b) = SB : S'B$, oder $Bb : Bb = SB : S'B$, mithin $S'B = SB$ folgt. Der Punkt S′ muss also mit S identisch sein, d. h. die Cc muss durch den Punkt S gehen. Ebenso folgt, dass auch die Gerade Dd durch S gehen muss, dass somit SA, SB, SC, SD, .. die Strahlen eines Strahlenbüschels sind.

Dann ergibt sich aus §. 116

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = ..$$

Der Beweis bleibt sich gleich, wenn die beiden Gebilde so gelegt werden, dass die entsprechenden Strecken im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

§. **125.** Zwei ebene Gebilde, welche sich auf einem Strahlenbüschel in eine solche Lage bringen lassen, dass ihre entsprechenden Punkte auf denselben Strahlen oder deren Ergänzungen liegen und vom Scheitel proportionierte Abstände haben, heißen ähnlich ($\sim$), und in dieser Lage zugleich perspectivisch liegend.

Je zwei entsprechende Punkte heißen homologe Punkte, ebenso je zwei entsprechende Strecken (Seiten, Diagonalen, Höhen, Halbmesser) homologe Strecken.

In zwei perspectivisch liegenden ähnlichen Gebilden sind zwei homologe Strecken entweder in demselben, oder im entgegengesetzten Sinne parallel.

Der Punkt, in welchem sich in zwei perspectivisch liegenden ähnlichen Gebilden die durch je zwei entsprechende Punkte gezogenen Geraden schneiden, heißt der Ähnlichkeitspunkt der Gebilde, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem die homologen Punktpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten dieses Punktes liegen.

Das constante Verhältnis der Abstände zweier homologer Punkte vom Ähnlichkeitspunkte heißt Ähnlichkeitsexponent oder Modulus der ähnlichen Figuren. Ist der Modulus = 1, so sind die Gebilde congruent.

Folgesätze. a) In zwei ähnlichen Gebilden sind die homologen Strecken proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich.

b) Je zwei Kreise sind ähnlich und zugleich perspectivisch liegend.

Zusatz. Die hier begründete Erklärung ähnlicher Gebilde enthält zugleich die genaueren Merkmale des in §. 3 aufgestellten Begriffes der Ähnlichkeit, als der Übereinstimmung der Gestalt.

Ähnlichkeit der Dreiecke.

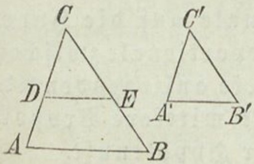
§. **126.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.

Lehrsatz. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich (Fig. 71).

Beweis. Die Proportionalität der Seiten beider Dreiecke folgt aus §. 118, die Gleichheit der Winkel aus §. 24, 2.

§. **127.** I. **Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke ähnlich (Fig. 71).

Fig. 71.



Vorauss. A = A' und C = C'.

Behaupt. $\triangle$ ABC $\sim$ A'B'C'.

Beweis. Man mache CD = C'A' und ziehe DE $\parallel$ AB, so ist W. CDE = A = A', daher $\triangle$ DEC $\cong$ A'B'C' (§. 37). Nun ist $\triangle$ ABC $\sim$ DEC (§. 126), mithin auch $\triangle$ ABC $\sim$ A'B'C'.

Folgesatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten paarweise parallel oder zu einander normal sind (§. 26).

§. **128.** II. **Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten den einen zweien Seiten des andern proportioniert und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich (Fig. 71).

Es sei AC : A'C' = BC : B'C' und C = C'.

Macht man CD = C'A' und zieht DE $\parallel$ AB, so ist AC : CD = BC : CE, oder AC : A'C' = BC : CE. Allein nach der Voraussetzung ist AC : A C' = BC : B'C'; folglich CE = B'C', und daher $\triangle$ DEC $\cong$ A'B'C' (§. 38); nun ist $\triangle$ ABC $\sim$ DEC, also auch $\triangle$ ABC $\sim$ A'B'C'.

§. **129.** III. **Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten den einen zweien Seiten des andern proportioniert und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich (Fig. 71).

Der Beweis ist unter Beziehung auf §. 39 demjenigen in §. 128 analog.

§. **130.** IV. **Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen den drei Seiten des andern proportioniert, so sind die Dreiecke ähnlich (Fig. 71).

Es sei $AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

Macht man $CD = C'A'$ und zieht $DE \parallel AB$, so ist

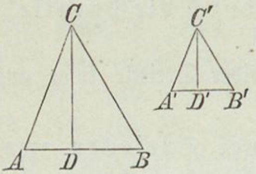
$AC : CD = AB : DE$ und $AC : CD = BC : CE$, oder

$AC : A'C' = AB : DE$ und $AC : A'C' = BC : CE$.

Vergleicht man diese zwei Proportionen mit den in der Voraussetzung enthaltenen, so folgt $DE = A'B'$ und $CE = B'C'$, somit $\triangle CDE \cong A'B'C'$ (§. 40); nun ist $\triangle ABC \sim CDE$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **131.** **Lehrsatz.** In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die homologen Höhen wie zwei homologe Seiten.

Fig. 72.

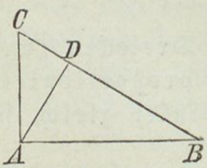


Beweis. Es sei (Fig. 72) das $\triangle ABC \sim A'B'C'$, CD die Höhe auf die Seite AB und $C'D'$ die Höhe auf die homologe Seite $A'B'$.

Die Dreiecke ACD und $A'C'D'$ haben zwei Winkel wechselseitig gleich, sind also ähnlich; mithin ist $CD : C'D' = AC : A'C'$, daher auch $CD : C'D' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

§. **132.** **Lehrsatz.** Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels die Normale auf die Hypotenuse, so ist 1. jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse, 2. die Normale die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 73.



Beweis. Es sei (Fig. 73) der Winkel BAC ein rechter und $AD \perp BC$.

In den Dreiecken ABC und ACD ist der Winkel $C = C$, $BDC = ADC = R$, es ist daher auch der dritte Winkel $B = CAD$ und das $\triangle ABC \sim DAC$. Ebenso ist $\triangle ABC \sim DBA$, und folglich auch $\triangle DAC \sim DBA$.

1. Da $\triangle ABC \sim DAC$ ist, so folgt $BC : AC = AC : CD$; da $\triangle ABC \sim DBA$, so ist auch $BC : AB = AB : BD$.
2. Da $\triangle DAC \sim DBA$ ist, so folgt $CD : AD = AD : BD$.

§. **133.** Ist (Fig. 73) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CD = p$, $BD = q$, $AD = h$, wo a, b, c, p, q, h die Maßzahlen der bezüglichen Strecken bedeuten, so ergibt sich aus den in §. 132 aufgestellten Proportionen

$$a : b = b : p, \quad a : c = c : q, \quad p : h = h : q; \text{ daher}$$
$$b^2 = ap, \quad c^2 = aq, \quad h^2 = pq \text{ und}$$
$$b = \sqrt{ap}, \quad c = \sqrt{aq}, \quad h = \sqrt{pq}.$$

Aus $ap = b^2$ und $aq = c^2$ folgt noch $ap + aq = b^2 + c^2$, allein es ist $ap + aq = a\,(p + q) = a \cdot a = a^2$; folglich

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist also das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der beiden Katheten. (Pythagoräischer Lehrsatz.)

Zusatz. Wird unter dem Producte zweier Strecken das Product ihrer Maßzahlen, also unter dem Quadrate einer Strecke das Quadrat ihrer Maßzahl verstanden, so kann der Pythagoräische Lehrsatz kürzer auch so ausgedrückt werden:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

In demselben Sinne kann man dann auch schreiben:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Ähnlichkeit der Vielecke.

§. 134. Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.

Aus dieser Erklärung und §. 124 ergeben sich folgende Sätze:

1. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die homologen Diagonalen wie die homologen Seiten.

2. Ähnliche Vielecke werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

3. Vielecke, welche sich auf übereinstimmende Weise in gleich viel ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, sind ähnlich.

4. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ihre homologen Seiten.

Ist der Modulus q, so hat man

$$AB = A'B' \cdot q, \quad BC = B'C' \cdot q \ldots;$$
$$\text{daher } AB + BC + \ldots = (A'B' + B'C' + \ldots)\, q \text{ und}$$
$$(AB + BC + \ldots) : (A'B' + B'C' + \ldots) = AB : A'B' = BC : B'C' = \ldots$$

5. Reguläre Vielecke von gleicher Seitenanzahl sind ähnlich.

6. In regulären Vielecken von gleicher Seitenanzahl verhalten sich die Halbmesser der ihnen ein- oder umgeschriebenen Kreise (§. 89, 1) wie die homologen Seiten.

7. Die Umfänge regulärer Vielecke von gleicher Seitenanzahl verhalten sich wie die Habmesser der den Vielecken ein- oder umgeschriebenen Kreise.

V. Anwendungen der Ähnlichkeitssätze auf den Kreis.

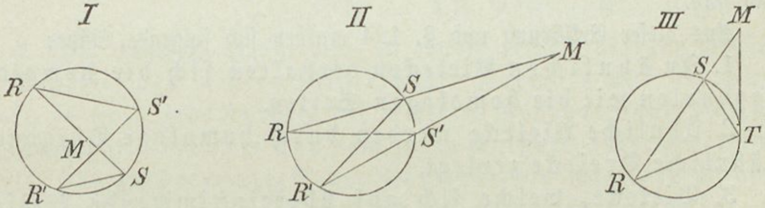
§. 135. **Lehrsatz.** Zieht man von einem Punkte eines Kreises Sehnen zu den Endpunkten eines Durchmessers und die Normale auf diesen, so ist 1. jede Sehne die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem jener Sehne anliegenden Abschnitte desselben; 2. die Normale die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers. (Folgt aus §§. 83 und 132.)

§. 136. Zieht man durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises zu diesem eine Secante, so nennt man die Strecken zwischen diesem Punkte und den Schnittpunkten mit dem Kreise die beiden Abschnitte der Secante.

Lehrsätze. 1. Gehen durch einen Punkt zu einem Kreise zwei Secanten, so bilden die vier Abschnitte derselben eine Proportion, in welcher die Abschnitte der einen Secante äußere, die der andern innere Glieder sind.

2. Gehen von einem Punkte zu einem Kreise eine Secante und eine Tangente, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Secante.

Fig. 74.



Beweis zu 1. Zieht man (Fig. 74, I und II) die Strecken RS' und R'S, so ist der Winkel MRS' = MR'S (§. 82, a), daher $\triangle$ MRS' $\sim$ MR'S, und folglich MR : MR' = MS' : MS.

Zu 2. Zieht man (Fig. 74, III) die Strecken RT und ST, so ist W. MRT = MTS (§. 84), daher $\triangle$ MRT $\sim$ MTS, und folglich MR : MT = MT : MS.

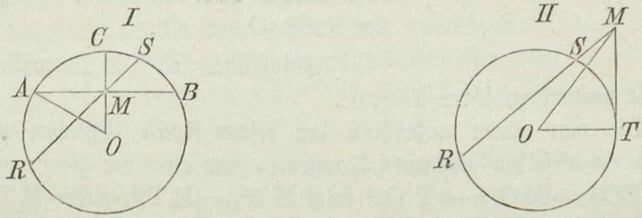
§. 137. Zieht man durch einen Punkt beliebige Secanten an einen Kreis, so hat das Product der beiden Abschnitte für jede Secante denselben Wert, und zwar ist dasselbe

a) gleich dem Quadrate der halben kleinsten Sehne des gegebenen Punktes, wenn dieser innerhalb des Kreises liegt, dagegen

b) gleich dem Quadrate der Tangente des gegebenen Punktes, wenn dieser außerhalb des Kreises liegt.

Beweis. a) Es sei (Fig. 75, I) M ein Punkt innerhalb des Kreises, und RS eine beliebige, durch diesen Punkt gehende Secante. Zieht man durch M den Halbmesser OC und die kleinste, d. i. die zur OC normale Sehne AB, so ist $MR : MA = MB : MS$ (§. 136, 1), somit (§. 133, Zus.) $MR . MS = MA . MB$; allein $MB = MA$, folglich $MR . MS = MA^2$.

Fig. 75.



b) Ist dagegen (Fig. 75, II) M ein Punkt außerhalb des Kreises, MSR eine beliebige Secante und MT eine Tangente des Kreises durch diesen Punkt, so ist $MR : MT = MT : MS$ (§. 136, 2), und somit $MR . MS = MT^2$.

§. 138. Das constante Product MR.MS (Fig. 75) der beiden Abschnitte der durch den gegebenen Punkt M gezogenen Secante heißt die Potenz des Punktes M in Beziehung auf den gegebenen Kreis.

Die Potenz eines Punktes für einen Kreis ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrate des Centralabstandes dieses Punktes und zwischen dem Quadrate des Halbmessers.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke AMO in Fig. 75, I folgt $MA^2 = OA^2 - MO^2$; daher ist $MR . MS = MA^2 = OA^2 - MO^2$.

In dem rechtwinkligen Dreiecke MTO in Fig. 75, II ist $MT^2 = MO^2 - OT^2$; folglich ist $MR . MS = MT^2 = MO^2 - OT^2$.

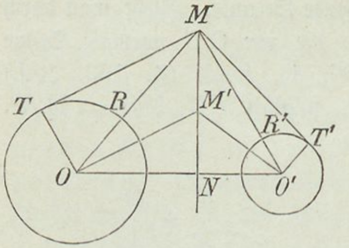
§. 139. Ein Punkt hat in Beziehung auf zwei Kreise dieselbe Potenz, wenn die Differenz der Quadrate seiner Abstände von den Mittelpunkten beider Kreise der Differenz der Quadrate der Halbmesser gleich ist.

Denn die Potenz des Punktes M (Fig. 76) in Bezug auf den Kreis O ist $MO^2 - RO^2$, die Potenz desselben Punktes in Bezug auf den Kreis O′ ist $MO'^2 - R'O'^2$. Ist nun $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$, so ist auch $MO^2 - RO^2 = MO'^2 - R'O'^2$, d. h. M hat für beide Kreise gleiche Potenzen.

Lehrsatz. Hat ein Punkt M für zwei Kreise O und O′ dieselbe Potenz und zieht man durch denselben eine Normale zu der Centrale OO′, so hat auch jeder Punkt dieser Normalen für beide Kreise dieselbe Potenz.

Es sei $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$, und $MN \perp OO'$. Man hat $MO^2 = ON^2 + MN^2$ und $MO'^2 = O'N^2 + MN^2$, daher $MO^2 - MO'^2 = ON^2 - O'N^2$. Ebenso erhält man für irgend einen Punkt M′ in MN,

Fig. 76.



$M'O^2 - M'O'^2 = ON^2 - O'N^2$, mithin ist $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$.

Der geometrische Ort aller Punkte, die für zwei gegebene Kreise gleiche Potenzen haben, heißt die Potenzlinie der beiden Kreise. Die Gerade MN ist daher die Potenzlinie der Kreise O und O'.

Folgesätze. a) Die Potenzlinie zweier Kreise steht normal zu ihrer Centrale.

b) Die von einem außerhalb der beiden Kreise liegenden Punkte der Potenzlinie an dieselben gezogenen Tangenten sind einander gleich. Denn aus $MO^2 - TO^2 = MO'^2 - T'O'^2$ folgt $MT^2 = MT'^2$, daher $MT = MT'$.

c) Sind die von einem Punkte außerhalb zweier Kreise an diese gezogenen Tangenten gleich, so liegt der Punkt in der Potenzlinie dieser Kreise. Denn aus $MT^2 = MT'^2$ folgt $MO^2 - TO^2 = MO'^2 - T'O'^2$.

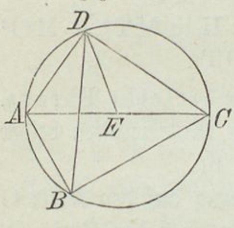
d) Schneiden sich zwei Kreise, so ist ihre Potenzlinie die Secante, welche durch die beiden Schnittpunkte geht (§. 94, 3).

e) Berühren sich zwei Kreise, so ist ihre Potenzlinie die gemeinsame Tangente beider Kreise im Berührungspunkte (§. 94, 1 und 2).

§. **140.** **Lehrsatz.** In jedem Sehnenvierecke ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte je zweier gegenüberliegenden Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz.) (Fig. 77.)

Beweis. Macht man den Winkel $CDE = ADB$, so ist, da auch der

Fig. 77.



W. $ACD = ABD$ ist (§. 82, a), das $\triangle ECD \sim ABD$, daher

$EC : CD = AB : BD$, oder $EC \,.\, BD = AB \,.\, CD$.

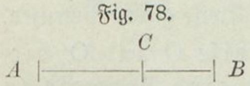
Ebenso ist $\triangle AED \sim BCD$, daher

$EA : AD = BC : BD$ oder $AE \,.\, BD = AD \,.\, BC$.

Folglich $EC . BD + AE \,.\, BD = AB \,.\, CD + AD . BC$ oder $(EC + AE) \,.\, BD = AC . BD = AB . CD = AD . BC$.

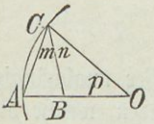
§. **141.** Eine Strecke heißt nach stetiger Proportion, oder im mittleren und äußeren Verhältnisse getheilt, wenn der größere Abschnitt derselben die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitte ist, wenn also die Proportion $AB : AC = AC : BC$ besteht. (Goldener Schnitt.)

Fig. 78.



Lehrsätze. 1. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regulären Zehneckes ist gleich dem größeren Abschnitte des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers.

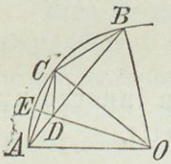
Fig. 79.



Beweis. Es sei AC (Fig. 79) die Seite des eingeschriebenen regulären Zehneckes. Zieht man die Halbmesser OA und CO, so ist $AOC = 36^0$, und daher in dem gleichschenkligen Dreiecke ACO der Winkel $ACO = 72^0$. Halbiert man nun den Winkel ACO, so dass $m = n = p$ wird, so ist das $\triangle ACO \sim ABC$, daher $AO : AC = AC : AB$, oder weil $AC = BC = BO$ ist, auch $AO : BO = BO : AB$.

2. Das Quadrat der Seite des einem Kreise eingeschriebenen regulären Fünfeckes ist gleich der Summe aus den Quadraten des Halbmessers und der Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regulären Zehneckes.

Fig. 80



Beweis. Es seien (Fig. 80) OA der Halbmesser, AB und AC die Seiten des eingeschriebenen regulären Fünfeckes und Zehneckes. Zieht man OC, welche den Centriwinkel AOB des Fünfeckes halbiert, und halbiert auch den Centriwinkel AOC des Zehneckes durch OD, deren Verlängerung OE senkrecht auf der Mitte von AC steht, so ist W. $BAO = BOD = 54^0$, daher $\triangle ABO \sim OBD$; folglich $AB : BO = BO : BD$, oder $AB.BD = BO^2$.. I.

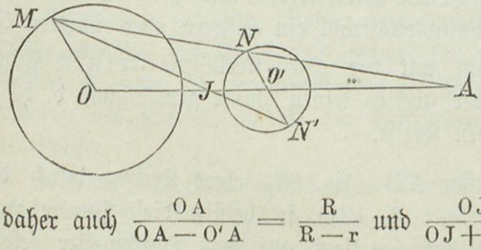
Zieht man noch CD, so ist das $\triangle ACD$ gleichschenklig, daher W. $ACD = CAD = ABC$, und $\triangle ABC \sim ACD$, folglich $AB : AC = AC : AD$, oder $AB.AD = AC^2$.. II, mithin aus I und II:

$$AB\,(BD + AD) = AB^2 = BO^2 + AC^2.$$

§. 142. **Lehrsatz.** Zieht man in zwei Kreisen durch die Endpunkte je zweier Halbmesser, welche entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel sind, gerade Linien, so schneiden sich diese alle bezüglich in einem Punkte auf der Verlängerung der Centrale oder in einem Punkte der Centrale selbst.

Dieser Satz folgt schon aus §. 124; er soll jedoch hier noch besonders bewiesen werden.

Fig. 81.



Es sei OM (Fig. 81) zu $O'N$ in demselben Sinne, zu $O'N'$ im entgegengesetzten Sinne parallel, so ist, wenn man $OM = R$, $O'N = O'N' = r$ und $OO' = c$ setzt (nach §. 118),

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{R}{r} \text{ und } \frac{OJ}{O'J} = \frac{R}{r},$$

daher auch $\dfrac{OA}{OA - O'A} = \dfrac{R}{R - r}$ und $\dfrac{OJ}{OJ + O'J} = \dfrac{R}{R + r}$, also

$$OA = \frac{cR}{R - r} \text{ und } OJ = \frac{cR}{R + r},$$

somit, da $O'A = OA - c$ und $O'J = c - OJ$ ist,

$$O'A = \frac{cr}{R - r} \text{ und } O'J = \frac{cr}{R + r}.$$

Da diese Ausdrücke von der Lage der parallelen Halbmesser unabhängig und somit constant sind, so folgt, dass sich in A alle Geraden, welche die Endpunkte je zweier in demselben Sinne paralleler Halbmesser verbinden, und in J alle Geraden, welche durch die Endpunkte zweier im entgegengesetzten Sinne paralleler Halbmesser gehen, schneiden.

A ist der äußere und J der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Jede durch einen Ähnlichkeitspunkt gezogene Gerade heißt Ähnlichkeitsstrahl, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem sie durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

Zusatz. Aus den obigen Ausdrücken folgt:

$$OJ : O'J = OA : O'A,$$

d. h. die Centrale zweier Kreise wird durch den inneren und den äußeren Ähnlichkeitspunkt harmonisch getheilt.

§. 143. Hat ein Ähnlichkeitsstrahl zweier Kreise mit der einen Kreislinie einen Punkt gemeinsam, so hat er auch mit der anderen Kreislinie einen Punkt gemeinsam.

Es habe (Fig. 81) der äußere Ähnlichkeitsstrahl AM mit der Kreislinie O den Punkt M gemeinsam. Man ziehe OM und damit O'N in demselben Sinne parallel. Die Gerade MN geht dann (nach §. 142) durch den Punkt A; die Punkte M, N, A liegen also in einer geraden Linie, d. h. die AM hat auch mit der Kreislinie O' einen Punkt N gemeinsam.

Ebenso wird der Beweis für einen inneren Ähnlichkeitsstrahl JM geführt.

Folgesätze. a) Hat ein Ähnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie zwei Punkte gemeinsam, so hat er auch mit der andern zwei Punkte gemeinsam, d. h. er ist eine gemeinsame Secante der beiden Kreise.

b) Hat ein Ähnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam, so hat er auch mit der andern nur einen Punkt gemeinsam, d. h. er ist eine gemeinsame Tangente beider Kreise, und zwar eine äußere oder innere, je nachdem der Ähnlichkeitsstrahl ein äußerer oder innerer ist.

c) Hat ein Ähnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie keinen Punkt gemeinsam, so hat er auch mit der zweiten keinen Punkt gemeinsam, d. h. er liegt ganz außerhalb der beiden Kreise.

§. 144. Ist der Durchmesser AB (Fig. 82) eines Kreises durch die Punkte C und D harmonisch getheilt (§. 121), so heißen diese Punkte zwei conjugierte Pole des Kreises; der eine liegt auf dem Durchmesser selbst, der andere auf seiner Verlängerung.

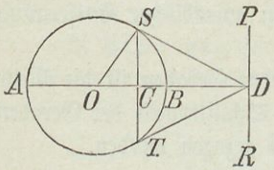


Fig. 82.

Eine Gerade heißt in Beziehung auf einen Kreis die **Polare** eines Punktes, und dieser Punkt der **Pol** der Geraden, wenn die Gerade durch den dem Punkte conjugierten Pol geht und zu der Verbindungsstrecke der beiden Punkte normal ist. Sind ST und PR normal zu CD, so ist ST die Polare des Punktes D, und D der Pol der Geraden ST; ebenso ist PR die Polare des Punktes C und C der Pol der Geraden PR in Beziehung auf den Kreis.

Folgesätze. a) Das Product der Abstände eines jeden Punktes und seiner Polare von dem Mittelpunkte des Kreises ist constant und gleich dem Quadrate des Halbmessers.

Denn die Proportion $AC : BC = AD : BD$ kann auch so ausgedrückt werden: $(OB + OC) : (OB - OC) = (OD + OB) : (OD - OB)$ und weil sich die Summe aus dem ersten und zweiten Gliede zur Differenz dieser Glieder verhält wie die Summe aus dem dritten und vierten Gliede zur Differenz dieser Glieder, so ist $OB : OC = OD : OB$, woraus $OC . OD = OB^2$ folgt.

b) Umgekehrt: Ist für zwei Punkte C und D des Durchmessers $OC . OD = OB^2$, so geht die Polare des Punktes C durch D, und die Polare des Punktes D durch C.

Denn gienge die Polare des einen Punktes, z. B. C, nicht durch den andern Punkt D, sondern schnitte sie die AB in D', so müsste (nach a) $OC . OD' = OB^2$ sein; dann ist aber mit Rücksicht auf die Voraussetzung $OD' = OD$, d. h. der Punkt D' ist mit D identisch

§. **145.** Zieht man von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Kreises an diesen zwei Tangenten, so ist die Berührungssehne die Polare des gegebenen Punktes.

Beweis. Zieht man von D (Fig. 82) die Tangenten DS und DT, ferner die Berührungssehne ST und den Halbmesser OS, so ist $OC : OS = OS : OD$ (§. 132), daher wegen $OS = OB$ auch $OC : OB = OB : OD$, also $OC . OD = OB^2$; die Berührungssehne ST, die in C auf CD normal steht, ist also (nach §. 144, b) die Polare des Punktes D.

Folgesätze. a) Die Polare eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes schneidet den Kreis und entfernt sich umsomehr von dem Mittelpunkte desselben, je mehr sich der Punkt dem Kreise nähert. Liegt der Punkt in der Peripherie des Kreises, so ist die durch den Punkt selbst gehende Tangente seine Polare.

b) Der Pol jeder Sehne eines Kreises ist der Schnittpunkt der durch ihre Endpunkte gezogenen Tangenten.

c) Die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes liegt außerhalb des Kreises und entfernt sich umsomehr von dem Kreise, je mehr sich der gegebene Punkt dem Mittelpunkte des Kreises nähert. Fällt der Punkt mit dem Mittelpunkte zusammen, so liegt seine Polare in unendlicher Entfernung vom Kreise.

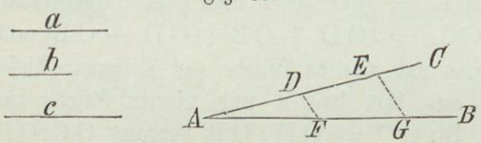
d) Der Pol einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden ist die Mitte der Berührungssehne der Tangenten, welche von dem Schnittpunkt der Geraden mit dem zu ihr normalen Durchmesser an den Kreis gezogen werden.

VI. Constructionsaufgaben.

1. Fundamentalaufgaben.

§. **146.** 1. *Zu drei gegebenen Strecken a, b und c die vierte Proportionale zu finden.*

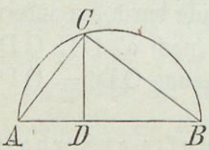
Fig. 83.



Man construiere einen willkürlichen Winkel BAC (Fig. 83), mache AD = a, DE = b, AF = c, ziehe DF und damit parallel die EG; dann ist FG die vierte Proportionale zu a, b, c.

2. *Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte stetige Proportionale zu construieren.*

Fig. 84.



Auflös. 1. Nach Aufg. 1, indem man dort c = b setzt.

Auflös. 2. Man ziehe (Fig. 84) DC ⊥ AB, mache DA = a, DC = b, ziehe ferner AC und normal darauf CB bis zur Verlängerung der AD; dann ist DA : DC = DC : DB (§. 132), oder a : b = b : DB, folglich DB die dritte stetige Proportionale zu a und b.

Auflös. 3. Ist a > b, so kann man folgende einfachere Construction anwenden: Man mache AB = a, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis und um A mit dem Halbmesser b einen Bogen, welcher jenen Kreis in C schneidet; zieht man dann CD ⊥ AB, so ist AB : AC = AC : AD (§. 135), oder a : b = b : AD.

3. *Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere Proportionale zu construieren.*

Auflös. 1. Man mache (Fig. 84) AD = a, DB = b, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte in D die DC ⊥ AB; dann ist DC die mittlere Proportionale zwischen AD und DB (§. 135).

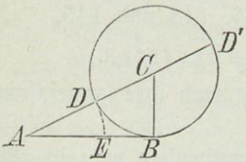
Auflös. 2. Man mache AB gleich der größeren Strecke a, und AD = b, beschreibe über AB einen Halbkreis und ziehe DC ⊥ AB; dann ist die Sehne AC die gesuchte mittlere Proportionale zu a und b (§. 135).

4. *Eine gegebene Strecke AB in Theile zu theilen, die sich wie m : n : p... verhalten.*

Man ziehe durch A einen willkürlichen Strahl AX, trage auf demselben von A aus Strecken auf, welche sich wie m : n : p ... verhalten, und verfahre dann wie bei der Aufgabe 13 in §. 98.

5. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 85) nach stetiger Proportion (im mittleren und äußeren Verhältnisse) zu theilen.

Fig. 85.



Man ziehe BC ⊥ AB, mache BC = ½ AB, beschreibe um C mit CB einen Kreis und ziehe durch A und C die Secante AD'. Macht man nun AE = AD, so ist AB im Punkte E nach stetiger Proportion getheilt.

Denn AD' : AB = AB : AD (§. 136, 2), daher auch

$$AB : (AD' - AB) = AD : (AB - AD).$$

Nun ist $AD' - AB = AD' - DD' = AD = AE$,

$$AB - AD = AB - AE = BE; \text{ mithin}$$

$$AB : AE = AE : BE.$$

6. Ein Dreieck zu construieren, welches einem gegebenen Dreiecke ABC (Fig. 71) ähnlich ist.

Die Construction kann, entsprechend den Ähnlichkeitssätzen, auf vier Arten geschehen, am einfachsten jedoch, wenn man auf einer beliebigen Strecke A'B' in den Endpunkten die Winkel A und B aufträgt, deren Schenkel sich in C' schneiden; dann ist △ A'B'C' ∾ △ ABC.

Die Aufgabe ist unbestimmt. Erst wenn zu den zwei Bedingungen, die in dem Begriffe der Ähnlichkeit liegen, noch eine dritte Bestimmung hinzutritt, z. B. dass die Strecke A' B' eine gegebene Länge haben soll, wird die Aufgabe eine bestimmte.

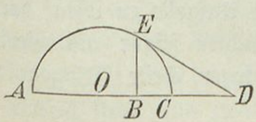
7. An zwei gegebene Kreise eine gemeinsame Tangente zu ziehen.

Man bestimme den äußeren und den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise (§. 142) und ziehe aus denselben Tangenten an den einen Kreis (§. 99, Aufgabe 4); diese sind dann zugleich Tangenten des zweiten Kreises (§. 143, b).

Determination. Liegt der eine Kreis ganz außerhalb des andern, so gibt es vier gemeinsame Tangenten, zwei äußere und zwei innere; berühren sich die beiden Kreise von außen, so gibt es zwei äußere und nur eine innere Tangente; schneiden sie sich, so sind nur die beiden äußeren Tangenten möglich; berühren sie sich von innen, so gibt es nur eine äußere Tangente; liegt der eine Kreis ganz innerhalb des andern, so ist keine gemeinsame Tangente möglich.

§. **147.** 1. Gegeben ist eine Strecke und auf derselben oder ihrer Verlängerung ein Punkt; es soll der dazu harmonisch conjugierte Punkt gesucht werden (Fig. 86).

Fig. 86.



a) Es sei zu der Strecke AC und dem Punkte B der äußere conjugierte Punkt D zu suchen.

Man beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte in B die Normale BE und in E eine Tangente an den Kreis; der Schnittpunkt D der Tangente mit der verlängerten AC ist der gesuchte conjugierte Punkt.

b) Es sei zu der Strecke AC und dem Punkte D der conjugierte Punkt B zu suchen.

Man ziehe von D aus eine Tangente an den Kreis, fälle vom Berührungspunkte E eine Normale auf AC, so ist B der gesuchte conjugierte Punkt.

Der Beweis gründet sich in beiden Fällen auf §§. 144 und 145.

2. Die Potenzlinie zweier Kreise zu construieren.

a) Wenn sich die beiden Kreise schneiden, so ziehe man ihre gemeinsame Sehne (§. 139, d).

b) Wenn sich die beiden Kreise berühren, so construiere man im Berührungspunkte ihre gemeinsame Tangente (§. 139, e).

c) Wenn sich die beiden Kreise O und O' weder schneiden noch berühren, so beschreibe man einen Hilfskreis M, welcher die zwei gegebenen schneidet. Die gemeinsame Sehne von O und M ist ihre Potenzlinie, ebenso ist die gemeinsame Sehne von O' und M die Potenzlinie derselben, daher der Schnittpunkt beider Sehnen ein Punkt der gesuchten Potenzlinie von O und O'. Zieht man dann von diesem Punkte die Normale auf die Centrale der zwei gegebenen Kreise, so ist diese Normale die gesuchte Potenzlinie.

3. Ein Kreis und ein Punkt sind gegeben, zu dem Punkte ist die Polare zu construieren.

Nach §. 145. Der gegebene Punkt kann außerhalb oder innerhalb des Kreises liegen.

4. Ein Kreis und eine Gerade sind gegeben, zu der Geraden ist der Pol zu finden.

Nach §. 145. Die gegebene Gerade kann den Kreis schneiden oder außerhalb desselben liegen.

2. Methode der ähnlichen Figuren.

§. **148.** Ist durch einige der zur Construction einer Figur gegebenen Bestimmungsstücke die Gestalt der Figur bestimmt, so dass alle Figuren, welche in diesen Stücken übereinstimmen, einander ähnlich sind, so kann bei der Lösung die Methode der ähnlichen Figuren angewendet werden. Dabei zeichnet man zunächst mit den die Gestalt bestimmenden Stücken eine der gesuchten ähnliche Hilfsfigur von beliebiger Größe und construiert in ihr auch die Strecke, welche der in der Aufgabe gegebenen, aber bei der Construction der Hilfsfigur nicht benützten Strecke homolog ist; das Verhältnis dieser beiden Strecken gibt auch das Verhältnis je zweier anderer homologen Strecken der gesuchten und der Hilfsfigur an. Um die Aufgabe zu lösen, darf man daher nur jede Seite (Diagonale, Höhe) der gesuchten Figur als vierte Proportionale zu jenen beiden Strecken und der homologen Seite (Diagonale, Höhe) der Hilfsfigur construieren.

Die Gestalt eines Dreieckes ist bestimmt durch zwei Winkel, durch das Verhältnis zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder durch die Verhältnisse der drei Seiten.

Es ist zur Anwendung dieser Methode nicht nöthig, dass sich zu der gesuchten Gesammtfigur eine ähnliche construieren lasse; es genügt häufig, dass dies für einen Theil der letzteren möglich sei, sofern durch diesen Theil ein oder mehrere Bestimmungsstücke der ganzen Figur gefunden werden, durch deren Benützung die Aufgabe auf eine bereits bekannte zurückgeführt wird.

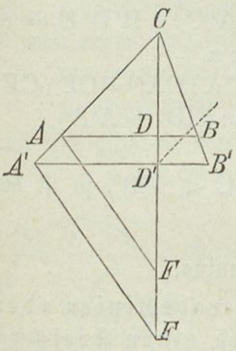
Durch das Verhältnis einer Höhe zu einer anliegenden Seite, oder durch einen Winkel an der Grundlinie ist die Gestalt eines Theildreieckes des gesuchten Dreieckes bestimmt.

Durch nachstehend durchgeführte Aufgaben soll die Methode näher erläutert werden.

1. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Winkel α und β und die Summe s der vom Scheitel des dritten Winkels ausgehenden Höhe und einer anliegenden Seite gegeben sind.

Analysis. Durch die gegebenen Winkel ist die Gestalt des gesuchten Dreieckes bestimmt, d. h. jedes beliebige, mit diesen Winkeln construierte Dreieck ist dem gesuchten ähnlich. Construiert man nun zu einem solchen ähnlichen Hilfsdreiecke die Summe seiner vom Scheitel des dritten Winkels ausgehenden Höhe und einer anliegenden Seite, so muss diese Summe sich zu der gegebenen verhalten, wie jede Seite des Hilfsdreieckes zu der homologen Seite des gesuchten. Man kann daher irgend eine Seite des letzteren als vierte Proportionale zu drei bekannten Strecken, und dann aus ihr und den Winkeln das gesuchte Dreieck construieren.

Fig. 87.



Construction. Man zeichne eine beliebige Strecke A'B' (Fig. 87) und in ihren Endpunkten A' und B' die gegebenen Winkel α und β, so dass das Dreieck A'B'C entsteht. Dann ziehe man in diesem Dreiecke die Höhe CD', verlängere sie um D'F' = A'C und trage auf CF' die Strecke CF gleich der gegebenen Summe s auf. Zieht man nun F'A', ferner durch F die FA $\parallel$ F'A' und durch den Punkt A die AB $\parallel$ A'B', so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Da AB $\parallel$ A'B', so ist der Winkel BAC = B'A'C = α und ABC = A'B'C = β. Ferner hat man CD : CD' = AC : A'C, also auch (CD + AC) : (CD' + A'C) = AC : A'C = CF : CF', folglich, da CD' + A'C = CF' und CF = s ist, (CD + AC) : CF' = s : CF', woraus CD + AC = s folgt.

Determination. Durch die gegebenen Stücke ist das gesuchte Dreieck stets, und zwar eindeutig bestimmt.

2. Ein Dreieck aus dem Verhältnisse der Höhe zu einer anliegenden Seite ($h : a$), dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel (α) und der Summe der Höhe und der Grundlinie ($h + c = s$) zu construieren (Fig. 87).

Analysis. Durch das gegebene Verhältnis ist die Gestalt des die Seite $BC = a$ und die Höhe $CD = h$ enthaltenden rechtwinkligen Theildreieckes BDC bestimmt und man erhält somit durch Construction eines diesem Dreiecke ähnlichen den Winkel $ABC = \beta$ des gesuchten Dreieckes. Dann sind von letzterem zwei Winkel bekannt; man kann daher wieder ein diesem ähnliches Dreieck construieren und es muss sich dann die Summe der Höhe und der Grundlinie des ähnlichen Dreieckes zu der gegebenen des gesuchten verhalten, wie irgend eine Seite des ähnlichen Dreieckes zu der homologen Seite des gesuchten.

Es ergibt sich hiernach folgende

Construction. Man zeichne zwei beliebige Strecken h' und a', welche zu einander in dem gegebenen Verhältnisse $h : a$ stehen, errichte auf einer Strecke $CD' = h'$ in D' die Normale, beschreibe um C mit dem Halbmesser a' einen Kreisbogen, welcher die Normale in B' schneidet, und ziehe CB'. Sodann lege man an $B'D'$ etwa in D' einen Winkel $B'D'E = \alpha$ an, ziehe $CA \parallel ED'$, verlängere CD' und $D'F' = A'B'$ und trage auf CF' die Strecke CF gleich der gegebenen Summe s auf. Zieht man nun $F'A'$, ferner durch F die $FA \parallel F'A'$ und durch den Punkt A die $AB \parallel A'B'$, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist $BAC = B'A'C = B'D'E = \alpha$

Ferner ist $CD : CA = CD' : CA' = h' : a' = h : a$.

Endlich hat man $(CD + AB) : (CD' + A'B') = CA : CA' = CF : CF'$

oder $(CD + AB) : (CD' + A'B') = s : (CD' + A'B')$,

folglich $CD + AB = s$.

Determination. Ist $h < a$ und $\alpha = ABC < 180^0$, so ist die Lösung stets, und zwar auf eine einzige Art möglich.

3. Das Berührungsproblem des Apollonius.

§. 149. **Aufgabe.** Wenn einzelne Punkte, gerade Linien oder Kreise, zusammen drei Elemente, gegeben sind, einen Kreis zu construieren, welcher durch die gegebenen Punkte geht und die gegebenen Geraden oder Kreise berührt.

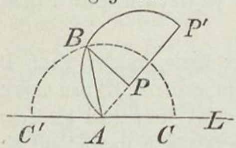
Dieses Problem umfasst folgende zehn Aufgaben:

1. Einen Kreis zu construieren, welcher durch drei gegebene Punkte geht (P, P', P'').

Die Lösung dieser Aufgabe ist im §. 76 enthalten. Sie führt auf einen einzigen Kreis. Liegen aber die gegebenen Punkte in einer Geraden, so gibt es keinen Kreis.

2. Einen Kreis zu construieren, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt (P, P', L).

Fig. 88.



Da P, P' gegeben sind, so ist auch der Schnittpunkt A der durch P P' gelegten Geraden und der Geraden L bestimmt. Ist x die Länge der von A aus an den Kreis gezogenen Tangente, so ist nach §. 136, 2 $x^2 = AP.AP'$ und nach §. 146, 2 erhält man $x = AB$. Trägt man nun AB von A aus nach rechts und links auf L ab, so erhält man C und C' als dritten Peripheriepunkt des gesuchten Kreises und dadurch ist diese Aufgabe auf die Aufgabe 1 zurückgeführt. Es genügen zwei Kreise, die durch P, P', C und P, P', C' bestimmt sind.

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn $PP' \parallel L$ oder $PP' \perp L$ ist?

3. Einen Kreis zu construieren, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt (P, P', K).

Legt man durch P, P' einen Hilfskreis, der den gegebenen Kreis in Q, Q' schneidet, und verlängert die Secanten PP' und QQ', bis sie sich in A schneiden, so ist $AQ.AQ' = AP.AP'$. Bezeichnet man die von A aus an den Kreis K gezogene Tangente mit AB, so ist nach §. 136, 2 $AB^2 = AQ.AQ'$, aber auch $AB^2 = AP.AP'$, daher ist AB auch eine Tangente an den Kreis, welche durch P, P' geht und den Kreis K berührt. Bestimmt man somit aus $AB^2 = AQ.AQ'$ AB und beschreibt damit aus A einen Kreis, so schneidet derselbe den gegebenen Kreis K in zwei Punkten C und C', welche mit P und P' zwei Kreise bestimmen. Der eine Kreis (P, P', C) berührt den gegebenen Kreis von außen, der andere Kreis (P, P', C') aber von innen.

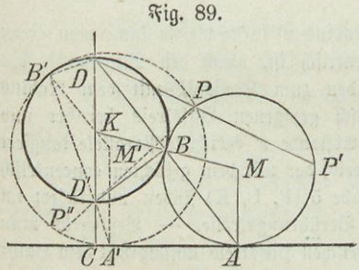
4. Einen Kreis zu construieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Gerade berührt (P, L, L').

Der Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene Gerade berührt, liegt in der Symmetrale des von diesen Geraden gebildeten Winkels (g. Ort 3, b). Zieht man zur Symmetrale von dem gegebenen Punkte die Normale und verlängert diese um ihre eigene Länge, so ist der Endpunkt derselben ein zweiter Punkt des gesuchten Kreises. Die Aufgabe ist somit auf die Aufgabe 2 zurückgeführt und gibt, wie diese, zwei Auflösungen.

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn die zwei gegebenen Geraden parallel sind?

5. Einen Kreis zu construieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt (P, L, K).

Fig. 89.

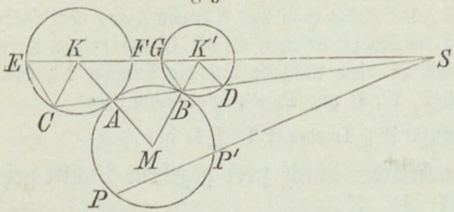


M sei ein Kreis, welcher durch P geht, die Gerade in A und den Kreis K in B von außen berührt (Fig. 89). Fällt man von K die Normale KC auf L und verlängert es bis D, fällt man ferner die Normale MA auf L, so sind MA und KD im entgegengesetzten Sinne parallel, daher muss AD durch den inneren Ähnlichkeitspunkt (§. 142) gehen. Zieht man noch BD', so ist $\triangle DBD' \sim DCA$, daher $DD' : DB = DA : DC$ oder $DD'.DC = DB.DA$. Zieht man noch DPP', so ist auch $DB.DA = DP.DP'$, somit $DD'.DC = DP.DP'$, wodurch der Punkt P' bestimmt und die Aufgabe auf die Aufgabe 2 reduciert ist. — Für einen Kreis M', welcher durch P geht, die Gerade L und den Kreis K von innen berührt, gibt ebenso die Gerade, welche durch P und den an L näheren Endpunkt D' des Durchmessers DD' gezogen wird, einen zweiten Bestimmungspunkt P''.

Man erhält im allgemeinen vier Kreise, von denen zwei den gegebenen Kreis von außen, zwei von innen berühren.

6. Einen Kreis zu construieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt (P, K, K').

Fig. 90.



M sei der Kreis, welcher durch P geht und die beiden Kreise K, K' von außen in A und B berührt. Zieht man die Centrale KK' und verbindet K und K' mit M, so schneidet die verlängerte AB den Kreis K in C, den Kreis K' in D und die verlängerte Centrale im äußeren Ähnlichkeitspunkt S. Da die Winkel KAC und K'DB gleich sind, so ist KA ∥ K'D, KC ∥ K'B und Winkel KEC = K'GB daher ist △SEC ∾ SGB und SG : SE = SB : SC oder SG : SB = SE : SC . . . I. Bezüglich des Kreises K ist SA : SF = SE : SC . . II. Aus I und II folgt SA : SF = SG : SB . . III. Legt man nun durch P und S eine Gerade, so ist auch SA : SP = SP' : SB . . . IV. Aus III und IV folgt nun SF . SG = SP . SP', wodurch P' bestimmt und die Aufgabe auf die Aufgabe 3 (P, P', K) zurückgeführt ist.

Wie durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise K und K' der Punkt P', so wird durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Punkt P'' der Peripherie des gesuchten Kreises bestimmt. Es ergeben sich sonach im allgemeinen vier Lösungen.

7. Einen Kreis zu construieren, welcher drei gegebene Gerade berührt (L, L', L'').

Im allgemeinen genügen vier Kreise (§. 86).

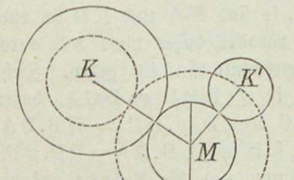
8. Einen Kreis zu construieren, welcher zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt (L, L', K).

Der Kreis, welcher mit dem gesuchten concentrisch ist und durch den Mittelpunkt von K geht, berührt die Geraden, welche zu L und L' im Abstande r (Radius des gegebenen Kreises) parallel gezogen werden. Diesen concentrischen Kreis lehrt die Aufgabe 4 finden. Durch die doppelte Lage der Parallelen auf beiden Seiten von L und L' ergeben sich im allgemeinen acht Lösungen.

9. Einen Kreis zu construieren, welcher eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt (L, K, K').

Hat der Kreis K den Radius r und K' den Radius r' (r > r'), so kann man einen Kreis construieren, welcher mit dem gesuchten concentrisch ist, durch den Mittelpunkt des Kreises K' geht, den zum Kreise K mit dem Radius (r — r') concentrisch gezogenen Hilfskreis berührt und auch die zu L im Abstande r' errichtete Parallele tangiert (Fig. 91). Den Kreis, der mit dem gesuchten concentrisch ist, lehrt die Aufgabe 5 (P, L, K) finden und liefert im allgemeinen vier Berührungskreise. — Beschreibt man den mit K concentrischen Hilfskreis anstatt mit dem Halbmesser r — r' mit dem Halbmesser r + r', so erhält man auf ähnliche Weise vier weitere Kreise, welche der Aufgabe genügen.

Fig. 91.



10. Einen Kreis zu construieren, welcher drei gegebene Kreise berührt (K, K', K'').

Haben die Kreise K, K', K'' die Radien r, r', r'' und ist r > r'', r' > r'', so kann man einen Kreis construieren, welcher mit dem gesuchten concentrisch ist, durch den Mittelpunkt des Kreises K'' geht und die beiden zu K und K' mit den Radien r—r'', r' — r'' gezogenen concentrischen Hilfskreise berührt, somit auf die Aufgabe 6 (P, K, K') führt und vier Lösungen liefert. Beschreibt man die Hilfskreise mit r + r'', r' + r'', so erhält man noch vier weitere Lösungen.

Zusatz. Die neuere Geometrie liefert für das Apollonische Tactionsproblem eine allgemeine Lösung.

VII. Übungssätze und Übungsaufgaben.

§. 150. Lehrsätze.

1. Die Höhen eines Dreieckes sind den Seiten, zu denen sie normal sind, verkehrt proportioniert.

2. Je zwei Höhen eines Dreieckes schneiden einander so, dass das Product aus den Abschnitten der einen dem Producte aus den Abschnitten der andern gleich ist.

3. Werden zwei Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleicher Höhe durch eine der Grundlinie parallele Transversale geschnitten, so sind die innerhalb der Dreiecke liegenden Abschnitte dieser Transversale einander gleich.

4. Die Diagonalen eines Trapezes schneiden sich gegenseitig proportioniert.

5. Ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes durch die Höhe nach stetiger Proportion getheilt, so ist eine der Katheten gleich dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; und umgekehrt (§. 132).

6. Ist eine Seite eines Dreieckes nach stetiger Proportion getheilt und zieht man durch den Theilungspunkt die Parallele zu einer zweiten Seite, so theilt diese Parallele auch die dritte Seite nach stetiger Proportion.

7. Zieht man an zwei Kreise, welche sich von außen berühren, die innere und eine äußere gemeinsame Tangente, so bilden die drei Berührungspunkte die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreieckes (§§. 82 und 84).

§. 151. Constructionsaufgaben.

1. Den Kreisumfang in 5, 10, 20, 40, .. gleiche Theile zu theilen (§. 141 und §. 146, Aufg. 5).

2. Die Peripherie eines Kreises in 15, 30, 60, .. gleiche Theile zu theilen $\left(\frac{p}{15} = \frac{p}{6} - \frac{p}{10}\right)$.

3. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

4. Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine von diesen begrenzte Gerade so zu ziehen, dass sie in jenem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse m : n getheilt wird.

Mit Hilfe einer Parallelen.

5. Ein Vieleck zu construieren, das mit einem gegebenen Vielecke ähnlich ist und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Vieleckes ein bestimmtes Verhältnis m : n haben.

6. Einen tausendtheiligen Maßstab zu construieren.

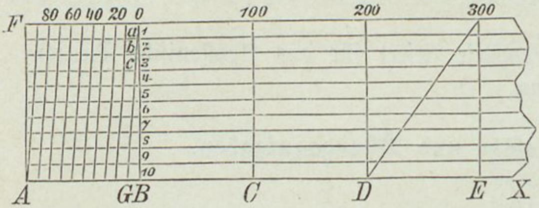


Fig. 92.

Man trage (Fig. 92) an eine Gerade AX 10 gleiche Theile auf, errichte in A, B und den folgenden Theilungspunkten Normale auf AX und ziehe zu AX 10 Parallele in gleichen Abständen. Nun theile man sowohl die AB als die ihr gegenüberstehende Strecke F 0 in 10 gleiche Theile, zu deren leichteren Bestimmung man in irgend einer Abtheilung eine Diagonale D 300 zieht. Endlich ziehe man noch Transversalen durch G und 0, sowie durch je zwei folgende Theilungspunkte der AB und F0. Stellen die auf AX aufgetragenen 10 Strecken dieses Transversal-Maßstabes 1000 gleiche Theile vor, so enthält A B 100, B G 10, a 1 1, b 2 2 u. s. w. solche Theile. Nimmt man die Länge der ganzen Strecke A X z. B. für ein Meter an, so stellt A B ein Decimeter, B G ein Centimeter, a 1 ein Millimeter dar.

Der Beweis beruht auf der Ähnlichkeit der Dreiecke.

7. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn ein spitzer Winkel und außerdem a) die Summe der Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe, b) die Schwerlinie zur Hypotenuse gegeben ist.

Diese und die folgenden Constructionsaufgaben sind nach der Methode der ähnlichen Figuren aufzulösen.

8. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn das Verhältnis beider Katheten und außerdem a) die Hypotenuse, b) die Höhe auf die Hypotenuse gegeben ist.

9. Ein gleichschenkliges Dreieck aus einem Winkel und der Summe der Grundlinie und der Höhe zu construieren.

10. Ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind: a) zwei Winkel und die Summe einer gegenüberliegenden Seite und der Höhe auf dieselbe; b) das Verhältnis zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und die Summe (Differenz) der dritten Seite und der Höhe auf dieselbe; c) eine Seite und ihre Verhältnisse zu den anderen Seiten.

11. Ein Viereck zu construieren, wenn eine Diagonale und die vier Winkel, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet, gegeben sind.

12. Ein Dreieck mit Hilfe von Theildreiecken zu construieren, wenn die Verhältnisse der Höhe zu den beiden anliegenden Seiten und außerdem a) die dritte Seite; b) die Schwerlinie zu der dritten Seite gegeben sind.

13. Ein Dreieck zu construieren, wenn das Verhältnis der Höhe zu einer anliegenden Seite, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel und a) eine der zwei anderen Seiten, b) die Summe dieser Seiten gegeben sind.

14. Ein Rechteck aus dem Verhältnisse einer Seite zur Diagonale und aus der Summe der andern Seite und der Diagonale zu construieren.

15. Ein Rechteck aus dem Verhältnisse zweier Seiten zu construieren, wenn außerdem a) die Diagonale, b) die Summe (Differenz) der Diagonale und einer Seite gegeben ist.

16. Ein Parallelogramm aus dem Verhältnisse zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zu construieren, wenn außerdem a) die Höhe, b) die Summe der Diagonale und einer Seite, c) die Summe beider Diagonalen gegeben ist.

§. **152.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem rechtwinkligen Dreiecke bezeichnen b und c die Katheten, a die Hypotenuse; man berechne aus je zweien dieser Größen die dritte (§. 133).

2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und das Verhältnis der beiden Katheten gegeben; man bestimme die Katheten.

3. Aus einer Kathete und dem Verhältnisse der Hypotenuse zur andern Kathete die Hypotenuse und die zweite Kathete zu berechnen.

4. Es seien p und q die den Katheten b und c anliegenden Abschnitte der Hypotenuse a, in welche diese durch die zugehörige Höhe h getheilt wird; a) aus b und p, b) aus p und q, c) aus p und h die übrigen Größen zu berechnen.

5.* In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und a) die Summe, b) die Differenz der beiden Katheten gegeben; wie groß ist jede Kathete?

Diese und die weiterhin mit einem Sternchen * bezeichneten Aufgaben werden, da sie auf quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten oder auf eine gemischte quadratische Gleichung führen, hier vorläufig zu übergehen und erst später bei der Wiederholung des gesammten Übungsstoffes vorzunehmen sein.

6. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete und a) die Summe, b) die Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben; man suche die Hypotenuse und die zweite Kathete.

7. In einem gleichseitigen Dreiecke ist a die Seite und h die Höhe; aus einer dieser Größen die andere zu bestimmen.

8. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist a, der Schenkel b, die Höhe h; aus je zweien dieser Größen die dritte zu finden.

9. In einem Quadrate ist a die Seite und d die Diagonale; aus einer dieser Größen die andere zu bestimmen.

10.* In einem Quadrate ist die Summe aus der Seite und der Diagonale gegeben; man suche die Seite und die Diagonale.

11. Von einem Punkte, dessen kürzester Abstand von einem Kreise a ist, sei an diesen eine Tangente gezogen; wie groß ist der Halbmesser des Kreises, wenn die Tangente die Länge t hat?

12. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche sieht auf derselben so weit, als die Tangente angibt, welche vom Auge nach der Erdkugel gezogen wird; wie groß ist die Gesichtsweite w, oder wie lang ist die

Tangente, wenn h die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und r den Halbmesser der Erde bezeichnet?

13. Wie weit erstreckt sich die Fernsicht von der Spitze eines 48 *m* hohen Thurmes? (r = 858·474 g. Meilen, 1 g. Meile = 7420·44 *m*.)

Vierter Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen ebenen Gebilde.

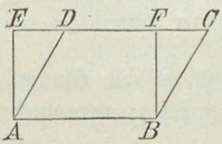
§. **153.** Um den Flächeninhalt eines ebenen Gebildes, d. i. die Größe der von ihm begrenzten Fläche, zu bestimmen, untersucht man, wie vielmal eine als Einheit angenommene Fläche in dem gegebenen Gebilde enthalten ist. Als Flächeneinheit wird die Fläche eines Quadrates angenommen, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist. Nimmt man z. B. das Meter als Längeneinheit an, so ist das Quadratmeter (m^2) die Flächeneinheit.

Zwei begrenzte Flächen, welche gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

I. Flächengleichheit.

§. **154. Lehrsatz.** Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist flächengleich einem Rechtecke, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 93.



Beweis. Es sei ABCD (Fig. 93) ein schiefwinkliges Parallelogramm. Zieht man AE $\perp$ AB und BF $\perp$ AB, so hat das Rechteck ABFE mit ABCD dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe. Da nun $\triangle$ ADE $\cong$ BCF ist, so ist auch ABFD + ADE = ABFD + BCF, d. i. ABFE = ABCD.

Folgesatz. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

§. **155. Lehrsatz.** Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Folgt aus §. 54, a.

Folgesatz. Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

§. **156. Lehrsatz.** Jedes Trapez ist flächengleich einem Parallelogramme, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich ist der halben Summe der parallelen Seiten des Trapezes.

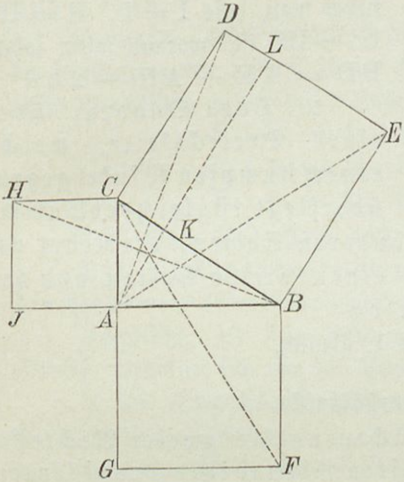
Der Beweis beruht auf §. 57, 1.

§. 157. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Beweis. Es sei das $\triangle BAC$ (Fig. 94) in A rechtwinklig; zu beweisen ist, dass das Quadrat BCDE über BC der Summe aus den Quadraten ABFG und ACHJ über AB und über AC gleich ist, was wir so schreiben wollen:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Fig. 94.



Fällt man von A auf BC die Normale AK und verlängert sie bis L, so sind die Rechtecke BL und CL den Quadraten AF und AH gleich.

Denn zieht man AE und CF, so ist $\triangle ABE = \frac{BL}{2}$ und $\triangle BCF = \frac{AF}{2}$ (§. 155); nun ist $\triangle ABE \cong BCF$, also auch $BL = AF$.

Zieht man ferner AD und BH, so ist ebenso $\triangle ACD = \frac{CL}{2}$, $\triangle BCH = \frac{AH}{2}$, und, da $\triangle ACD \cong BCH$ ist, auch $CL = AH$.

Es ist somit

$$BL + CL = AF + AH, \text{ oder } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

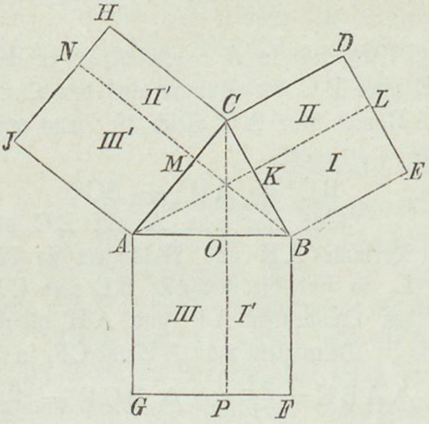
Die Richtigkeit dieses Satzes im arithmetischen Sinne ist schon im §. 133 nachgewiesen worden.

§. 158. Zieht man von einem Punkte auf eine Gerade eine Normale, so heißt der Fußpunkt der Normalen die Projection des Punktes auf die Gerade. Unter der Projection einer Strecke auf eine Gerade versteht man die Strecke zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte auf diese Gerade. Ist in Fig. 95 $AL \perp ED$ und $CD \perp ED$, so ist LD die Projection der Strecke AC auf ED; ebenso ist, wenn $CO \perp AB$ ist, AO die Projection der Strecke AC auf AB.

Lehrsätze. 1. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe.

Beweis. Es seien (Fig. 95) BCDE, ABFG, ACHJ die über den Seiten BC, AB, AC des Dreieckes ABC, worin A ein spitzer Winkel ist, construierten Quadrate

Fig. 95.



Zieht man zu BC, AC, AB die Normalen AK, BM, CO und verlängert sie bis L, N, P, so wird dadurch jedes der Quadrate in zwei Rechtecke getheilt, die wir durch I, II, III, I', II', III' bezeichnen wollen.

Durch ähnliche mittelst Hilfslinien geführte Beweise, wie in §. 157, findet man, dass I = I', II = II', III = III' ist, woraus sofort folgt: $BD = AF + AH - 2AP$.

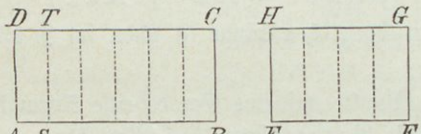
2. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, welche einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe.

Der Beweis ist dem früheren in 1. ähnlich.

II. Flächenverhältnisse.

§. **159. Lehrsätze.** 1. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Fig. 96.



Beweis. Es seien in den Rechtecken ABCD und EFGH (Fig. 96) die Höhen AD und EH gleich und die Grundlinien AB und EF commensurabel.

Ist in diesem Falle AS ein gemeinsames Maß der Grundlinien, und zwar $AB = m.AS$ und $EF = n.AS$, so hat man $AB:EF = m:n$. Theilt man die AB in m und die EF in n Theile, deren jeder gleich AS ist, und errichtet in den Theilungspunkten auf die Grundlinien Senkrechte, so wird dadurch das Rechteck ABCD in m und das Rechteck EFGH in n Rechtecke zerlegt, deren jedes mit ASTD congruent ist; es ist daher

$$ABCD = m.ASTD \text{ und } EFGH = n.ASTD,$$

somit $ABCD:EFGH = m:n$, und folglich

$$ABCD:EFGH = AB:EF.$$

Sind die Grundlinien AB und EF incommensurabel, so folgt aus §. 115, dass die letzte Proportion auch für diesen Fall Giltigkeit hat.

2. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

Folgt aus 1., da man in den Rechtecken ABCD und EFGH auch AD und EH als die Grundlinien, AB und EF als die Höhen betrachten kann.

Folgesätze. a) Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

b) Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

§. **160. Lehrsatz.** Die Flächeninhalte je zweier Rechtecke verhalten sich wie die Producte der Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

Beweis. Sind G und g die Maßzahlen der Grundlinien, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier Rechtecke R und r, so sei R' ein Rechteck, dessen Grundlinie g und dessen Höhe H zur Maßzahl hat. Dann ist (§. 159)

$$R : R' = G : g,$$
$$R' : r = H : h; \text{ daher durch Multiplication}$$
$$R : r = G\,.\,H : g\,.\,h.$$

Den obigen Satz pflegt man (§. 133, Zus.) gewöhnlich so auszudrücken:

Die Flächeninhalte je zweier Rechtecke verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen.

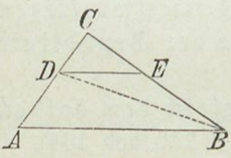
Folgesätze. a) Die Flächeninhalte je zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen.

b) Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

§. **161. Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel gemeinsam haben, verhalten sich wie die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Beweis. Die Dreiecke ABC und DEC (Fig. 97) haben Winkel C gemeinsam. Zieht man BD, so ist

Fig. 97.



$$\triangle ABC : DBC = AC : CD \text{ und}$$
$$\triangle DBC : DEC = BC : CE,$$

daher durch Multiplication

$$\triangle ABC : DEC = AC\,.\,BC : CD\,.\,CE.$$

Folgesatz. Zwei Dreiecke, welche einen Winkel gemeinsam haben, sind flächengleich, wenn die Producte der diesen Winkel einschließenden Seiten gleich sind.

§. **162. Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Beweis. Es sei $\triangle ABC \sim A'B'C'$ und $BC = a$, $AC = b$, $B'C' = a'$, $A'C' = b'$. Dann hat man, da W. $C = C'$ ist, nach §. 161

$$\triangle ABC : A'B'C' = a\,.\,b : a'\,.\,b' = (a : a')\,(b : b').$$

Nun ist nach der Voraussetzung $b : b' = a : a'$, daher durch Substitution $\triangle ABC : A'B'C' = (a : a')\,(a : a') = a^2 : a'^2$.

§. 163. **Lehrsätze.** 1. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Folgt aus §. 134, 2 und §. 162.

2. Die Flächeninhalte zweier regulärer Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser der diesen Vielecken ein- und umgeschriebenen Kreise.

Folgt aus 1. mit Rücksicht auf §. 134, 6.

III. Bestimmung des Flächeninhaltes.

§. 164. **Lehrsatz.** Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Beweis. Es sei R ein Rechteck, das G zur Grundlinie und H zur Höhe hat, und M die Flächeneinheit, d. i. ein Quadrat, dessen Seite m die Längeneinheit ist. Nach §. 160 hat man

$$\frac{R}{M} = \frac{G \cdot H}{m \cdot m} = \frac{G}{m} \cdot \frac{H}{m}.$$

Es bedeutet nun $\frac{R}{M}$ die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit M in dem gegebenen Rechtecke enthalten ist; $\frac{G}{m}$ und $\frac{H}{m}$ aber sind die Zahlen, welche angeben, wie oft die entsprechende Längeneinheit m bezüglich in der Grundlinie G und in der Höhe H jenes Rechteckes enthalten ist.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes ist also gleich dem Producte der auf die entsprechende Längeneinheit sich beziehenden Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe desselben.

Dieser Satz wird kürzer in der obigen Form ausgedrückt.

Folgesatz. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

§. 165. **Lehrsätze.** 1. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe (§. 154 und 164).

2. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe (§. 155 und 164).

3. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist a) gleich dem Producte aus der halben Summe der Parallelseiten und der Höhe (§. 156); oder b) gleich dem Producte aus der Mittellinie und der Höhe (§. 57, 1).

4. Der Flächeninhalt eines regulären Vieleckes ist gleich dem halben Producte aus dem Umfange desselben und dem Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Beweis. Es seien s, r und f bezüglich die Maßzahlen einer Seite, der vom Mittelpunkte zu einer Seite gezogenen Normalen und des Flächeninhaltes eines regulären n-Eckes. Zieht man vom Mittelpunkte zu allen Eckpunkten Strecken, so wird dadurch das n-Eck (nach §. 68, b) in n congruente Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt eines solchen Dreieckes ist $\frac{s\,r}{2}$, daher

$$f = n \,.\, \frac{s.r}{2} = \frac{ns.r}{2},$$

wo n s die Maßzahl des Umfanges des Vieleckes ist.

Zusatz. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes wird bestimmt, indem man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, die Flächeninhalte derselben sucht und die erhaltenen Dreiecksflächen addiert.

IV. Constructions- und Rechnungsaufgaben.

§. **166.** Verwandlung geradliniger Gebilde.

Ein Gebilde verwandeln heißt, ein anderes dem gegebenen flächengleiches Gebilde construieren, das gewissen Bedingungen genügeleistet.

1. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, das eine Seite des gegebenen Dreieckes zur Grundlinie hat.

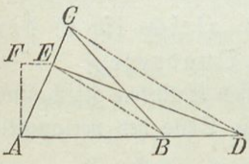
Auflösung mittelst der geometrischen Örter.

2. Ein Dreieck mit Beibehaltung einer Seite in ein anderes zu verwandeln, das an dieser Seite einen gegebenen Winkel α hat.

Trägt man in einem Endpunkte der gemeinsamen Seite den Winkel α auf und zieht dann zu dieser Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt die Parallele, so ist der Schnittpunkt der Parallelen und des zweiten Schenkels von α der gesuchte dritte Eckpunkt.

3. Ein Dreieck ABC (Fig. 98) unter Beibehaltung eines Winkels A in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie c hat.

Fig. 98.



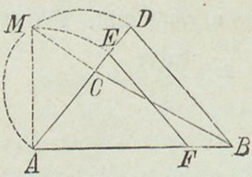
Man trage c auf AB bis D auf, ziehe CD, und zu ihr parallel BE; verbindet man D und E durch eine Strecke, so ist ADE das verlangte Dreieck. Denn $\triangle$ ADE = ABC, da beide das $\triangle$ ABE gemeinsam haben und $\triangle$ BED = BEC ist.

4. Ein Dreieck ABC (Fig. 98) unter Beibehaltung eines Winkels A in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Errichtet man AF = h normal zu AB, zieht FE ∥ AB, CD ∥ EB und verbindet E und D durch eine Strecke, so ist $\triangle$ ADE = ABC.

5. Ein Dreieck ABC (Fig. 99) unter Beibehaltung eines Winkels A in ein anderes zu verwandeln, in welchem die diesem Winkel gegenüberliegende Seite einer gegebenen Geraden BD parallel ist.

Fig. 99

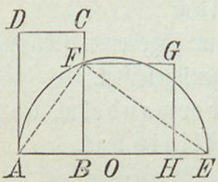


Analysis. Ist AFE das gesuchte Dreieck, also EF ∥ DB, so hat man AB : AF = AD : AE. Damit △ ABC = AFE sei, muss auch (nach §. 161, Folges.) AB.AC = AF.AE oder AB : AF = AE : AC sein. Man hat also AD : AE = AE : AC, d. i. AE ist die mittlere geometrische Proportionale zu AD und AC.

Construction. Man suche zu AD und AC die mittlere geometrische Proportionale AM (nach §. 146, Aufg. 3, Aufl. 2), mache AE = AM und ziehe EF ∥ DB; AFE ist das verlangte Dreieck.

6. Ein Rechteck ABCD (Fig. 100) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 100.

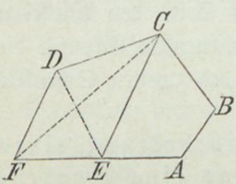


Man verlängere AB bis E, so dass BE = BC wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher die BC in F schneidet. Das über BF construierte Quadrat BFGH ist dem gegebenen Rechtecke flächengleich.

Denn zieht man AF und EF, so ist AB : BF = BF : BE (§. 135) oder AB : BF = BF : BC, folglich BF^2 = AB.BC.

7. Ein Vieleck ABCDE (Fig. 101) in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Fig. 101.



Man schneide durch eine Diagonale CE von dem gegebenen Vielecke ein Dreieck CDE ab, lege durch D zu CE die Parallele DF, welche die verlängerte Seite AE in F schneidet, und ziehe CF; dann ist das Vieleck ABCDE = Vieleck ABCF, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

Durch Wiederholung dieser Construction kann jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden.

8. Ein Quadrat zu construieren, das gleich ist a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Quadrate.

a) Man construiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind den Seiten der beiden Quadrate; die Hypotenuse ist die Seite des verlangten Quadrates (§. 157).

b) Die Auflösung beruht ebenfalls auf §. 157.

9. Ein Quadrat zu construieren, welches der Summe dreier oder mehrerer Quadrate gleich ist.

Man vereinige nach der Aufgabe 8. a) zuerst zwei Quadrate mit einander, das gefundene mit dem dritten u. s. w.

§. **167.** Theilung geradliniger Gebilde.

1. Ein gegebenes Dreieck durch Gerade, welche von einem Eckpunkte ausgehen, a) in gleiche Theile, b) in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

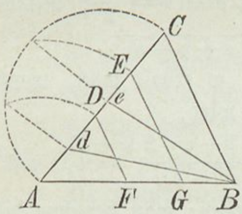
Man theile die Gegenseite a) in gleiche Theile, b) nach dem gegebenen Verhältnisse, und ziehe von dem Eckpunkte Strecken nach den Theilungspunkten (§. 154, Folges. oder §. 159, a).

2. Ein Dreieck ABC durch Gerade, welche von einem auf einer Seite AB liegenden Punkte M ausgehen, in drei Theile zu theilen, welche sich wie m : n : p verhalten.

Man theile das Dreieck (nach 1) durch die Geraden CD und CE nach dem gegebenen Verhältnisse und verwandle (nach Aufg. 3 in §. 166) die Dreiecke ADC und BEC in zwei Dreiecke über den Grundlinien AM und BM.

3. Ein Dreieck ABC (Fig. 102) durch Gerade, welche einer Seite BC parallel sind, in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse m : n : p stehen.

Fig. 102.



Theilt man AC in den Punkten d und e nach dem Verhältnisse m : n : p, so haben die Dreiecke ABd, dBe und eBC die verlangte Größe. Man verwandelt nun die Dreiecke ABd und ABe mit Beibehaltung des Winkels A (nach §. 166, Aufg. 5) in die Dreiecke AFD und AGE, in denen die Gegenseiten FD und GE der Seite BC parallel sind; FD und GE sind dann die gesuchten Theilungslinien.

Ist m = n = p, so wird das $\triangle$ ABC in gleiche Theile getheilt.

4. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Seite parallel sind, a) in gleiche Theile, b) nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Die Auflösung ergibt sich aus §. 154 oder §. 159, a.

5. Ein Trapez durch gerade Linien, welche die beiden Parallelseiten schneiden, a) in gleiche Theile, b) nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Die Auflösung ist jener der vorhergehenden Aufgabe analog.

5. Ein Trapez durch Gerade, welche den Parallelseiten parallel sind, in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Durch die Verlängerung der nichtparallelen Seiten bis zu deren Schnittpunkte ist die vorstehende Aufgabe auf die Aufgabe 3 zurückgeführt.

§. **168.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem gleichseitigen Dreiecke ist 1) die Seite a, 2) die Höhe h gegeben; wie groß ist der Flächeninhalt f?

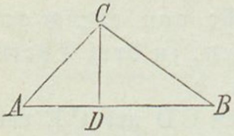
1) $f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, 2) $f = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}$.

2. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist a die Grundlinie, b der Schenkel; man suche den Flächeninhalt f.

$$f = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

3. In einem Dreiecke sind die drei Seiten gegeben; man berechne die zu einer Seite gehörige Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 103.



Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 103) die Seite $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, die Höhe CD $= h$ und die Strecke $AD = x$. Nach §. 158, 1 ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, daher $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

Nun ist $h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$, oder

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c},$$

daher $h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$.

Drückt f den Flächeninhalt des Dreieckes ABC aus, so ist $f = \frac{c.h}{2}$; mithin

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

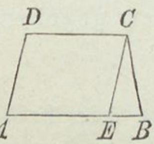
Setzt man nun den Umfang $a + b + c = 2s$, so erhält man, wenn von dieser Gleichung folgeweise 2a, 2b, 2c subtrahiert wird,

$$b + c - a = 2(s-a),\quad a - b + c = 2(s-b),\quad a + b - c = 2(s-c),$$

folglich ist $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

2. In einem Trapeze sind die vier Seiten gegeben; man berechne die Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 104.



Es sei (Fig. 104) $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$ und $BC = d$, die Höhe h und der Flächeninhalt f. Zieht man $CE \parallel DA$, so sind in dem Dreiecke BEC die Seiten $BE = a - b$, $BC = d$ und $CE = c$, daher (nach Aufg. 3) die zu BE gehörige Höhe

$$h = \frac{1}{2(a-b)} \cdot \sqrt{(c+d+a-b)(c+d-a+b)(a-b+c-d)(a-b-c+d)}.$$

Da nun h zugleich die Höhe des Trapezes, und der Flächeninhalt desselben $f = \frac{a+b}{2} \cdot h$ ist, so folgt

$$f = \frac{a+b}{4(a-b)} \cdot \sqrt{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+d-b-c)(a+c-b-d)}.$$

V. Übungssätze und Übungsaufgaben.

§. 169. Übungssätze.

1. Die Summe der drei Normalen von einem Punkte im Innern eines gleichseitigen Dreieckes auf die Seiten ist gleich der Höhe des Dreieckes.

2. Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gezogene Gerade halbiert dasselbe.

3. Zieht man durch die vier Eckpunkte eines Viereckes Parallele zu den Diagonalen, so ist das von ihnen gebildete Parallelogramm doppelt so groß als das Viereck.

4. Zieht man in einem Parallelogramme durch irgend einen Punkt einer Diagonale Parallele zu den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht durchschnittenen Parallelogramme flächengleich (§. 54, a).

5. Zieht man von der Mitte einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes Strecken zu den Endpunkten der andern, so ist das dadurch bestimmte Dreieck gleich der Hälfte des Trapezes.

6. Beweise mit Hilfe entsprechender Constructionen, dass die folgenden arithmetischen Formeln auch im geometrischen Sinne richtig sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

7. Die Summe der Quadrate über zwei Seiten eines Dreieckes ist doppelt so groß als die Summe aus dem Quadrate über der halben dritten Seite und über der dieser dritten Seite zugehörigen Schwerlinie (§. 158, 1 und 2).

8. Die vierfache Summe der Quadrate über den Schwerlinien eines Dreieckes ist gleich der dreifachen Summe der Quadrate über den Seiten.

9. In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen.

10. Construiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes als homologen Seiten ähnliche Vielecke, so ist das Vieleck über der Hypotenuse gleich der Summe der Vielecke über den Katheten (§. 163, 1 und §. 157).

11. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Umfange ist das gleichschenklige das größtmögliche (ein Maximum).

Es sei a die Grundlinie, s die Summe der beiden anderen Seiten, und, wenn diese ungleich sind, $\frac{s}{2} + x$ die größere, $\frac{s}{2} - x$ die kleinere Seite; dann ist der Flächeninhalt

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(s + a)(s - a)(a - 2x)(a + 2x)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{({}^2s - a^2)(a^2 - 4x^2)}.$$

Je kleiner x ist, desto größer ist f, und am größten, wenn $x = 0$ wird, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

12. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Flächeninhalte ist der Umfang des gleichschenkligen der kleinstmögliche (ein Minimum).

Aus $f = \frac{1}{4}\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)}$ folgt $s = \sqrt{\frac{16f^2}{a^2 - 4x^2} + a^2}$.

s und daher auch der Umfang $u = a + s$ erhält also den kleinsten Wert, wenn $x = 0$ wird, d. i. für das gleichschenklige Dreieck.

13. Unter allen n-Ecken von gleichem Umfange hat das reguläre den größten Flächeninhalt.

Das größte n-Eck von gegebenem Umfange muss gleichseitig sein. Denn wären zwei Seiten AB und BC ungleich, so könnte man das Vieleck, ohne den Umfang zu ändern, dadurch vergrößern, dass man statt des $\triangle$ ABC über der Grundlinie AC ein gleichschenkliges Dreieck construiert, worin jeder Schenkel $\frac{1}{2}(AB + BC)$ ist (Satz 11). Lässt sich aber das ungleichseitige Vieleck ohne Änderung des Umfanges vergrößern, so ist es nicht das größtmögliche.

14. Unter allen n-Ecken von gleichem Flächeninhalte hat das reguläre den kleinsten Umfang.

Ist p ein reguläres n-Eck von dem Umfange u, P ein nicht reguläres n-Eck mit demselben Flächeninhalte und dem Umfange U, ferner p' ein reguläres n-Eck mit dem Umfange U, so ist $P < p'$ (nach 13), also da $p = P$ ist, auch $p < p'$; dann muss aber, da $p \sim p'$ ist, $u < U$ sein.

§. 170. Constructionsaufgaben.

1. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist a) die Grundlinie, b) ein Schenkel.

2. Ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein rechtwinkliges zu verwandeln (Aufg. 5 in §. 166).

3. Ein Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist a) eine Kathete, b) die Hypotenuse.

4. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln (Aufg. 2 und 5 in §. 166).

5. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist (Aufg. 5 in §. 166).

6. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches a) einen gegebenen Winkel, b) eine gegebene Seite, c) einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat.

7. Ein Dreieck durch eine Gerade, welche zu einer Seite normal ist, zu halbieren (Aufg. 1 in §. 167 und die obige Aufg. 2).

§. 171. Rechnungsaufgaben.

1. In einem rechtwinkligen Dreiecke sind gegeben a) die Hypotenuse und eine Kathete, b) eine Kathete und die zur Hypotenuse gehörige Höhe; berechne den Flächeninhalt.

2.* Den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn gegeben sind:

a) die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten;

b) eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete.

3.* In einem rechtwinkligen Dreiecke sind der Flächeninhalt und die zur Hypotenuse gehörige Höhe gegeben; bestimme die drei Seiten.

4.* In einem rechtwinkligen Dreiecke sind die Hypotenuse und der Flächeninhalt gegeben; bestimme die beiden Katheten.

5.* Aus dem Umfange und dem Flächeninhalte eines rechtwinkligen Dreieckes dessen Seiten zu berechnen.

6. Aus der Diagonale d (36 *cm*) eines Quadrates den Flächeninhalt f zu berechnen.

7. Aus einer Seite a (7·2 *m*) und der Diagonale d (12·5 *m*) eines Rechteckes den Flächeninhalt f zu bestimmen.

8.* Aus dem Umfange und dem Flächeninhalte des Rechteckes dessen Seiten zu berechnen.

9. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Flächeninhalt $2\,m^2$ beträgt?

10.* Den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes aus der Summe der Seite und der Höhe zu bestimmen.

11. Aus der Grundlinie a ($2 \cdot 34\,m$) und dem Flächeninhalte f ($3\ 76\,m^2$) eines gleichschenkligen Dreieckes den Schenkel b zu berechnen.

12.* Den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn gegeben sind:

a) die zur Grundlinie und zu einem Schenkel gehörigen Höhen;

b) die Grundlinie und die zu einem Schenkel gehörige Höhe;

c) der Umfang und die zur Grundlinie gehörige Höhe.

13. In einem Dreiecke sind zwei Seiten a, b und die zur dritten Seite gehörige Höhe h gegeben; berechne den Flächeninhalt f.

14. In einem Dreiecke sind zwei Seiten a, b und die Schwerlinie m der dritten gegeben; berechne f.

Verlängere im $\triangle ABC$ die Schwerlinie CD um ihre eigene Länge bis E und ziehe AE; dann ist $\triangle ABC = AEC$, daher nach §. 168, 3

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)\,(b+2m-a)\,(a+2m-b)\,(a+b-2m)}.$$

15. In einem Dreiecke sind die drei Schwerlinien m, m', m'', gegeben berechne f.

Da (Fig. 36 und §. 61) $\triangle ABC = 3\,AOB$ ist, so erhält man nach Aufg. 14

$$f = \tfrac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')\,(m'+m''-m)\,(m+m''-m')\,(m+m'-m'')}.$$

16. In einem Dreiecke sind die drei Höhen h, h', h'' gegeben; bestimme f

$$f = \frac{1}{\sqrt{(p+p'+p'')\,(p'+p''-p)\,(p+p''-p')\,(p+p'-p'')}},$$

wenn $\frac{1}{h} = p$, $\frac{1}{h'} = p'$, $\frac{1}{h''} = p''$ gesetzt wird.

17. Die Diagonalen eines Deltoids sind D ($45\,cm$) und d ($32\,cm$). Bestimme den Flächeninhalt.

18. Den Flächeninhalt eines Rhombus zu berechnen, wenn a) beide Diagonalen, b) die Seite und eine Diagonale gegeben sind.

19. Welche Beziehung findet zwischen den Seiten a, b und den Diagonalen D, d eines Parallelogramms statt?

Unter Anwendung von §. 158, 1 und 2 erhält man $D^2 + d^2 = 2\,(a^2 + b^2)$.

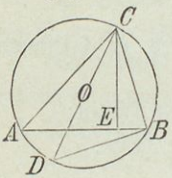
Fünfter Abschnitt.

Maßbestimmungen am Kreise.

I. Berechnung der Sehnen- und Tangentenvielecke.

§. **172.** Das Sehnen- und Tangentendreieck.

Fig. 105.



1. Es sei O (Fig. 105) der Mittelpunkt, CD ein Durchmesser des dem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kreises und $CE \perp AB$, ferner $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CE = h$ und $OC = R$. Da $\triangle CBD \sim CEA$, so ist $CD : CA = CB : CE$, oder $2R : b = a : h$; mithin

$$2hR = ab, \text{ und } 2chR = abc, \text{ oder}$$
$$4fR = abc,$$

wenn f den Flächeninhalt des Dreieckes ABC bezeichnet.

Man hat daher

$$f = \frac{abc}{4R}, \text{ und } R = \frac{abc}{4f} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \text{ (§. 168, 3),}$$

wo $2s = a + b + c$ ist.

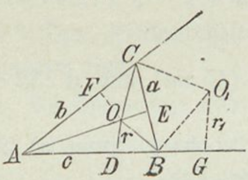
Für das eingeschriebene gleichseitige Dreieck ist $a = b = c$, daher

$$f = \frac{a^3}{4R}, \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ und } a = R\sqrt{3}.$$

2. Es sei O (Fig. 106) der Mittelpunkt, $OD = OF = OE = r$ der Halbmesser des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises und f der Flächeninhalt dieses Dreieckes. Man hat

$$f = \triangle BOC + AOC + AOB, \text{ oder}$$
$$f = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c).$$

Fig. 106.



Wenn $a + b + c = 2s$ gesetzt wird, ist

$$f = rs, \text{ und } r = \frac{f}{s} \text{ oder}$$
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \text{ (§. 168, 3).}$$

Für das umgeschriebene gleichseitige Dreieck, dessen Seite a ist, hat man

$$f = \frac{3ar}{2}, \; r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ und } a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}.$$

Zusatz. Ist O_1 der Mittelpunkt eines äußeren Berührungskreises (§. 86, Zusatz) und O_1G dessen Radius, so ist

$$f = ABC + BO_1C - BO_1C = ABO_1 + ACO_1 - BCO_1 = \frac{cr_1}{2} + \frac{br_1}{2} - \frac{ar_1}{2}, \text{ somit}$$

$$f = \frac{r_1}{2}(b + c - a) = \frac{r_1}{2} . 2(s - a) = r_1(s - a) \text{ und } r_1 = \frac{f}{s - a}.$$

Auf gleiche Weise findet man bezüglich der beiden anderen äußeren Berührungskreise $r_2 = \frac{f}{s-b}$, $r_3 = \frac{f}{s-c}$.

Daraus ergibt sich $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s-a+s-b+s-c}{f} = \frac{s}{f} = \frac{1}{r}$ und $r_1 r_2 r_3 = \frac{f^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{f^3}{r^2 s} = \frac{f^2}{r^2} \cdot \frac{f}{s} = \frac{f^2}{r}$, somit $r r_1 r_2 r_3 = f^2$.

§. 173. Das ein- und das umgeschriebene Quadrat.

Heißen s_4 und S_4 die Seiten des ein- und des umgeschriebenen Quadrates und r der Halbmesser des Kreises, so ist

$$s_4 = r\sqrt{2},\ S_4 = 2r;\ \text{und umgekehrt}$$
$$r = \frac{s_4}{2}\sqrt{2} = \frac{S_4}{2}.$$

§. 174. Das ein- und das umgeschriebene reguläre Sechseck.

Ist (Fig. 107) $OA = r$ der Halbmesser des Kreises, $AE = s_6$ die Seite des eingeschriebenen, $HK = S_6$ die Seite des umgeschriebenen regulären Sechseckes und $OL \perp HK$, so hat man

$$s_6 = r \text{ (§. 90).}$$

Ferner ist $HK : AE = OL : OG$, also $S_6 : r = r : \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$, oder

$$S_6 : r = r : \frac{r}{2}\sqrt{3},\ \text{daher}$$
$$S_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

§. 175.* Die einem Kreise eingeschriebenen regulären Zehn- und Fünfecke.

1. Nach §. 141, 1 ist $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$, also $s^2_{10} + r s_{10} = r^2$, woraus sich ergibt

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

2. Ferner ist nach §. 141, 2

$$s^2_5 = s^2_{10} + r^2 = \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) + r^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5});\ \text{daher}$$
$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Zusatz. Mit Rücksicht auf den Ausdruck $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ erhält man, wenn r den Halbmesser des dem regulären Fünfecke von der Seitenlänge s_5 umgeschriebenen, r' den Halbmesser des diesem Fünfecke eingeschriebenen Kreises und d die Diagonale des Fünfeckes bezeichnet,

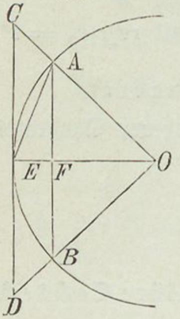
$$r = \frac{s_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}},\quad r' = \frac{s_5}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}},\quad d = \frac{s_5}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

§. 176. Aus der Seite s_n eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regulären Vieleckes die Seite S_n des dem-

selben Kreise umgeschriebenen regulären Vieleckes von gleicher Seitenzahl zu bestimmen.

Ist (Fig. 107) $OA = r$ der Halbmesser des Kreises und $AB = s_n$ die Seite des eingeschriebenen regulären n-Eckes, so ist, wenn $OE \perp AB$, und die Tangente durch E von den Halbmessern OA und OB in C und D geschnitten wird, $CD = S_n$ die Seite des umgeschriebenen regulären n-Eckes. Da dann $\triangle\, CDO \sim ABO$ ist, so folgt

Fig. 107.



$$CD : AB = OE : OF, \text{ oder}$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ daher}$$

$$S_n = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

§. **177.** Aus der Seite s_n eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regulären Vieleckes die Seite s_{2n} des demselben Kreise eingeschriebenen regulären Vieleckes von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Haben r und s_n die ihnen im §. 176 beigelegte Bedeutung und zieht man (Fig. 107) $OE \perp AB$, so ist die Sehne $AE = s_{2n}$ die Seite des eingeschriebenen regulären 2n-Eckes. Man hat nun nach §. 135, 1

$$2r : AE = AE : EF, \text{ oder, da } EF = OE - OF = r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} \text{ ist,}$$

$$2r : s_{2n} = s_{2n} : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right), \text{ daher } s_{2n}^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right),$$

und
$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}.$$

II. Bestimmung der Peripherie und des Flächeninhaltes eines Kreises.

§. **178. Lehrsätze.** 1. Die Peripherie eines Kreises liegt für jede Seitenzahl des ihm ein- und des ihm umgeschriebenen Vieleckes zwischen den Umfängen dieser Vielecke.

Beweis. Zieht man in einem Kreise, dem ein Vieleck eingeschrieben ist, von je zwei aufeinander folgenden Eckpunkten desselben zu einem Punkte des von ihnen begrenzten Bogens Sehnen, so erhält man ein neues eingeschriebenes Vieleck von doppelter Seitenzahl, dessen Umfang größer ist als der Umfang des früheren (§. 34, 1). Fährt man auf diese Art mit der Vermehrung der Seitenzahl der eingeschriebenen Vielecke fort, so wächst mit der Seitenanzahl auch der Umfang derselben, ohne jedoch je mit der Peripherie des Kreises zusammenfallen zu können, da alle Vielecksseiten als Sehnen des Kreises stets innerhalb desselben liegen.

Zieht man an einen Kreis, dem ein Vieleck umgeschrieben ist, zwischen je zwei aufeinander folgenden Seiten desselben eine Tangente, so entsteht ein neues umgeschriebenes Vieleck von doppelter Seitenzahl, dessen Umfang kleiner ist als der Umfang des früheren (§. 34, 1). Bei so fortgesetzter Vermehrung der Seitenzahl der umgeschriebenen Vielecke nimmt der Umfang derselben fortwährend ab; er kann jedoch nie mit der Peripherie des Kreises zusammenfallen, da alle Vielecksseiten als Tangenten des Kreises stets außerhalb desselben liegen.

2. Der Unterschied zwischen den Umfängen des einem Kreise um- und des ihm eingeschriebenen regulären Vieleckes wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl unendlich klein.

Beweis. Sind CD und AB (Fig. 107) die Seiten, U_n und u_n die Umfänge des einem Kreise um- und des ihm eingeschriebenen regulären n-Eckes, so ist nach §. 134, 7

$U_n : u_n = OE : OF$, daher $(U_n - u_n) : U_n = (OE - OF) : OE$, und

$$U_n - u_n = \frac{U_n}{OE} \cdot (OE - OF).$$

Mit dem Wachsen von n nimmt nun U_n, folglich, da OE constant ist, auch $\frac{U_n}{OE}$ ab; $OE - OF = EF$ ist kleiner als die Seite AE des regulären 2n-Eckes, diese Seite aber nimmt unendlich ab, wenn n ohne Ende zunimmt: mithin nimmt auch $U_n - u_n$ mit dem wachsenden n unendlich ab.

§. **179.** **Lehrsätze.** 1. Die Fläche eines Kreises ist größer als die Fläche irgend eines ihm eingeschriebenen, und kleiner als die Fläche irgend eines ihm umgeschriebenen Vieleckes.

Denn die Fläche des eingeschriebenen Vieleckes ist ein Theil der Kreisfläche, und dieser wieder ein Theil der Fläche des umgeschriebenen Vieleckes.

2. Der Unterschied zwischen den Flächeninhalten des einem Kreise um- und des ihm eingeschriebenen regulären Vieleckes wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl unendlich klein.

Beweis. Sind CD und AB (Fig. 107) die Seiten, F_n und f_n die Flächeninhalte des einem Kreise um- und des ihm eingeschriebenen regulären n-Eckes, so ist (nach §. 163, 2) $F_n : f_n = OE^2 : OF^2$, daher

$$(F_n - f_n) : F_n = (OE^2 - OF^2) : OE^2, \text{ und}$$

$$F_n - f_n = \frac{F_n}{OE^2} (OE^2 - OF^2).$$

Mit dem wachsenden n nimmt nun F_n, daher auch $\frac{F_n}{OE^2}$ ab, und $OE^2 - OF^2 = OA^2 - OF^2 = AF^2$ wird unendlich klein; also wird auch der Unterschied $F_n - f_n$ bei fortgesetzter Vermehrung der Seitenzahl unendlich klein.

§. **180.** Ist einem Kreise ein reguläres Vieleck eingeschrieben und ein anderes umgeschrieben, so folgt aus §. 178, 1 und 2, dass sich bei unendlich wachsender Seitenzahl die Umfänge beider Vielecke, und zwar der Umfang des eingeschriebenen bei fortgesetztem Wachsen, der des umgeschriebenen bei fortgesetztem Abnehmen, demselben gemeinsamen Grenzwerte, nämlich der Peripherie des Kreises nähern. Die analoge Beziehung findet nach §. 179, 1 und 2, zwischen den Flächeninhalten der ein- und umgeschriebenen regulären Vielecke und der Kreisfläche statt.

Hierauf beruhen folgende Definitionen:

Die Länge der Peripherie eines Kreises ist der gemeinsame Grenzwert der Umfänge der dem Kreise ein- und umgeschriebenen regulären Vielecke mit wachsender Seitenzahl; der Flächeninhalt des Kreises ist der gemeinsame Grenzwert der Flächeninhalte derselben Vielecke.

§. **181.** **Lehrsatz.** Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Durchmesser.

Folgt unter Anwendung des Grenzbegriffes aus §. 134, 7.

Folgesätze. a) Drücken p und P die Peripherien zweier Kreise aus, deren Halbmesser r und R, deren Durchmesser d und D sind, so ist $p : P = r : R$ und $p : P = d : D$. Aus der zweiten Proportion folgt $p : d = P : D$, d. h. das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser ist in allen Kreisen ein constantes. Dieses constante Verhältnis bezeichnet man durch die Zahl π, so dass $\frac{p}{d} = \frac{p}{2r} = \pi$ ist.

b) Aus den letzten Ausdrücken folgt: $p = d\pi$ oder $p = 2r\pi$, d. h. die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser und der Zahl π.

c) Für $r = 1$ ist $p = 2\pi$, also $\pi = \frac{p}{2}$. Die Zahl π kann demnach auch als die Maßzahl der halben Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, betrachtet werden.

§. **182.** Berechnung der Zahl π.

Nach §. 171, c ist 2π die Maßzahl für die ganze Peripherie eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 1$. Um diese näherungsweise zu bestimmen, berechnet man die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen regulären n-Eckes für $r = 1$ und für ein so großes n, dass der Wert, um welchen die beiden Umfänge differieren, vernachlässigt werden darf. Die Decimalen, in denen die Umfänge übereinstimmen, gelten dann auch für die gesuchte Peripherie des Kreises.

Es soll z. B. die Zahl π auf 4 Decimalstellen genau bestimmt werden. Geht man bei der Berechnung, wie es am bequemsten ist, von dem eingeschriebenen regulären Sechsecke aus, in welchem die Seite $s_6 = r = 1$ und der Umfang $u_6 = 6$ ist, so erhält man (§. 174) für das umgeschriebene Sechseck die Seite $S_6 = 1{\cdot}1547005..$ und den Umfang $U_6 = 6{\cdot}928203..$ Aus u_6 und U_6 berechnet man nach §§. 176 und 177 U_{12} und u_{12}, aus diesen wieder

U_{24} und u_{24} u. s. w., bis man auf $U_{1536} = 6\cdot283194..$ und $u_{1536} = 6\cdot283181..$ kommt. Da sich diese Umfänge erst in der fünften Decimale von einander unterscheiden, so ergibt sich auf 4 Decimalen genau $2\pi = 6\cdot2832$, daher
$$\pi = 3\cdot1416.$$

Nach demselben Verfahren erhält man auf 20 Decimalen genau
$$\pi = 3\cdot14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Die Zahl π ist zuerst von Archimedes bestimmt worden, welcher $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ fand. Die erste Zahl wird häufig gebraucht, wo es nicht auf große Genauigkeit ankommt; sie ist genauer als der ebenfalls oft gebrauchte Näherungswert $3\cdot14$.

Ludolf von Ceulen berechnete π auf 35 Decimalstellen; nach ihm wird π auch die Ludolf'sche Zahl genannt.

§. 183. **Lehrsätze.** 1. Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

2. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Producte aus der Peripherie und dem Halbmesser.

Die Richtigkeit der beiden Sätze ergibt sich nach dem Grenzbegriffe aus §. 163, 2 und 165, 4.

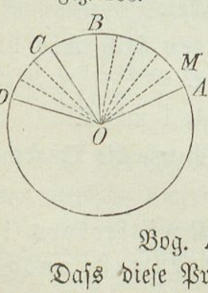
Folgesatz. Drückt r den Halbmesser, p die Peripherie und f den Flächeninhalt eines Kreises aus, so ist $f = p.\frac{r}{2}$, oder, da $p = 2r\pi$ ist,
$$f = r^2\pi,$$
d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Zahl π.

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich dem Producte aus der Summe der beiden Kreisumfänge und der halben Breite des Ringes.

III. Bestimmung der Kreisbogen und Kreissectoren.

§. 184. **Lehrsätze.** 1. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisbogen wie die zugehörigen Centriwinkel.

Fig. 108.



Beweis. Es seien die Bogen AB und CD (Fig. 108) commensurabel; AM sei ihr gemeinsames Maß, und zwar AB = m.AM, CD = n.AM; somit AB : CD = m : n. Zieht man zu jedem Theilungspunkte der beiden Kreisbogen Halbmesser, so ist auch W. AOB = m.AOM, W. COD = n.AOM (§. 78, 3), folglich W. AOB : W. COD = m : n; und somit
$$\text{Bog. } AB : \text{Bog. } CD = \text{W. } AOB : \text{W. } COD.$$

Dass diese Proportion auch dann stattfindet, wenn AB und CD incommensurabel sind, folgt aus §. 115.

2. Zwei homologe Kreisbogen verhalten sich wie die zugehörigen Peripherien (Fig. 47).

Beweis. Heißen P und p die Peripherien zweier Kreise, deren Halbmesser OA und Oa sind, und sind AB und ab zwei Bogen, welche in diesen Kreisen zu dem Centriwinkel α gehören, so hat man (nach 1) Bogen $AB : P = \alpha : 360$, und Bogen $ab : p = \alpha : 360$; daher Bogen $AB : P =$ Bogen $ab : p$, oder Bogen $AB :$ Bogen $ab = P : p$.

Folgesatz. Zwei homologe Kreisbogen verhalten sich wie ihre Halbmesser (§. 181).

§. **185.** Länge eines Kreisbogens.

1. Ist b die Länge eines Kreisbogens, der zu dem Centriwinkel α gehört, und r der Halbmesser des Kreises, so hat man nach §. 184, 1

$$b : 2r\pi = \alpha : 360, \text{ daher } b = r.\frac{\alpha\pi}{180}.$$

2. Für $r = 1$ ist $b = \frac{\alpha\pi}{180}$. Der Ausdruck $\frac{\alpha\pi}{180}$ gibt also die Länge des Bogens von α Grad für den Halbmesser 1 an; wir wollen diesen Ausdruck kürzer durch arc α bezeichnen.

3. Aus $b = r.\frac{\alpha\pi}{180} = r.\text{arc}\,\alpha$ folgt: Die Länge eines Kreisbogens ist gleich der Länge des homologen Bogens für den Halbmesser 1 multipliciert mit dem Halbmesser des ersteren.

4. Das Längenmaß eines Bogens für den Halbmesser 1 wird häufig auch als Maß des zugehörigen Winkels selbst angenommen und hiernach 2π für den vollen Winkel, π für den gestreckten, $\frac{\pi}{2}$ für den rechten Winkel, allgemein arc α für den Winkel α gesetzt. Dies ist jedoch, da Längen und Winkel als ungleichartige Größen im eigentlichen Sinne nicht durch einander gemessen werden können, stets nur in dem Sinne zu verstehen, dass aus der Bogenlänge für den Halbmesser 1 unzweideutig auch auf die Anzahl Grade des zugehörigen Centriwinkels geschlossen werden kann.

§. **186. Lehrsätze.** 1. In demselben Kreise verhalten sich die Kreissectoren wie die zugehörigen Centriwinkel.

2. Zwei homologe Kreissectoren verhalten sich wie die Flächeninhalte der zugehörigen ganzen Kreise.

Die Beweise sind analog den Beweisen zu §. 184, 1 und 2.

Folgesatz. Zwei homologe Kreissectoren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser (§. 183, 1).

§. **187. Lehrsatz.** Der Flächeninhalt eines Kreissectors ist gleich dem halben Producte aus dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen und dem Halbmesser.

Beweis. Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreissectors, der für den Halbmesser r dem Centriwinkel α entspricht, und b die Länge des zugehörigen Bogens, so hat man (nach §. 186, 1) $f : r^2\pi = \alpha : 360$, daher $f = \frac{r^2\alpha\pi}{360}$, oder da $\frac{r\alpha\pi}{180} = b$ ist (§. 185, 1),

$$f = \frac{br}{2}.$$

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreissegmentes ist, je nachdem dasselbe kleiner oder größer als der Halbkreis ist, gleich der Differenz oder der Summe aus der Fläche des zugehörigen Kreissectors und der Dreiecksfläche zwischen der Sehne und den beiden Halbmessern.

IV. Übungsaufgaben.

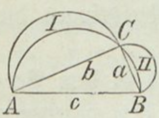
§. 188. Übungssätze.

1. Die Diagonalen eines Sehnenviereckes verhalten sich wie die Summen der Producte der in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Seiten.

Man bestimmt die Flächeninhalte der zwei Dreiecke, in welche das Viereck durch die eine Diagonale zerlegt wird, mit Rücksicht auf §. 172, 1, aus den drei Seiten und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, dann ebenso die Flächeninhalte der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die zweite Diagonale zerlegt wird, und setzt die Summe der ersteren gleich der Summe der letzteren.

2. Beschreibt man über den Katheten eines in einen Halbkreis eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieckes Halbkreise, so ist die Summe der dadurch gebildeten Monde (§. 92) gleich der Fläche des rechtwinkligen Dreieckes. (Lehrsatz des Hippokrates.)

Fig. 109.



Der Flächeninhalt des Dreieckes und der beiden kleinen Halbkreise ist gleich dem Flächeninhalte des großen Halbkreises und der beiden Monde, somit $\frac{ab}{2} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{a^2\pi}{8} = \frac{c^2\pi}{8} + \mathrm{I} + \mathrm{II}$, somit ist wegen $a^2 + b^2 = c^2$ auch $\frac{ab}{2} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$.

3. Errichtet man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes als homologen Seiten ähnliche Figuren, so ist die Figur über der Hypotenuse flächengleich mit den beiden Figuren über den Katheten. (Allgemeiner Pythagoräischer Lehrsatz.)

Seien die über den Seiten a, b, c (Fig. 109) errichteten ähnlichen Figuren mit A, B, C bezeichnet, so ist nach §. 163

$$A : B : C = a^2 : b^2 : c^2 \text{ und } (A + B) : C = (a^2 + b^2) : c^2; \text{ wegen}$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ist somit auch } A + B = C.$$

4. Der Kreis hat einen größeren Flächeninhalt als irgend ein Vieleck von gleichem Umfange.

Es sei p der Flächeninhalt eines regulären n-Eckes, das mit einem Kreise vom Halbmesser r gleichen Umfang $2r\pi$ hat. Beschreibt man in das Vieleck einen Kreis, so hat dieser einen Halbmesser $\varrho < r$, weil (nach §. 178, 1) $2\varrho\pi < 2r\pi$ ist. Setzt man daher $\varrho = r - d$, so ist (nach §. 165, 4) $p = 2r\pi \, . \, \frac{r - d}{2} = r^2\pi - dr\pi$. Der Flächeninhalt $r^2\pi$ des Kreises ist also größer als der Flächeninhalt p des regulären n-Eckes, folglich nach §. 169, 13, umsomehr größer als der Flächeninhalt eines unregelmäßigen n-Eckes von gleichem Umfange.

5. Der Kreis hat einen kleineren Umfang als irgend ein Vieleck von gleichem Flächeninhalte.

Es seien k und u der Flächeninhalt und der Umfang eines Kreises, p und U der Flächeninhalt und der Umfang irgend eines Vieleckes und $k = p$. Ist K der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Umfange U, so ist $p < K$ (nach 4), also auch $k < K$, und, da der kleinere Kreis den kleineren Umfang hat, $u < U$.

§. 189. Rechnungsaufgaben.

1. In einem Kreise ist r der Halbmesser, p die Peripherie, f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

Gegeben: a) $r = 5{\cdot}28\ m$; b) $p = 17{\cdot}75\ m$; c) $f = 4{\cdot}0115\ dm^2$.

2. Die Länge eines Bogens von α^0 für den Halbmesser r ist b, der Flächeninhalt des zugehörigen Kreissectors f; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

3. Wie lang ist arc 1^0, arc $1'$, arc $1''$? (185, 2.)

4. Bestimme das Gradmaß ϱ^0 eines Kreisbogens, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist.

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57{\cdot}29578^0.$$

5. Berechne die Fläche eines Kreissegments, dessen Halbmesser $= r$ und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist.

6. Der Flächeninhalt eines Kreissegments, dessen Sehne a die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes ist, zu berechnen.

7. Aus dem Flächeninhalte f und der Breite b eines Kreisringes die Halbmesser der beiden Kreise zu berechnen.

8. Der Durchmesser eines Kreises vom Halbmesser r wird in dem Verhältnisse $m : n$ getheilt und durch den Theilungspunkt ein mit dem gegebenen concentrischer Kreis beschrieben; wie groß ist der Flächeninhalt des dadurch gebildeten Kreisringes?

9. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringausschnittes, dessen Bogen $0{\cdot}5\ m$ und $0{\cdot}4\ m$ zu Halbmessern haben und zu einem Centriwinkel von 48^0 gehören?

10. Aus den Seiten eines Sehnenviereckes die beiden Diagonalen zu berechnen (§. 140 und §. 188, 1).

11. In einen Kreis mit dem Halbmesser r ist ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite a ist; wie groß ist sein Flächeninhalt?

12.* Der Halbmesser eines Kreises ist r; wie groß ist der Flächeninhalt des diesem Kreise eingeschriebenen regulären Sechzehneckes? ($4r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.)

13. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier gleichseitiger Dreiecke, wenn der dem einen umgeschriebene Kreis flächengleich ist dem dem andern eingeschriebenen?

14. In den Quadranten eines Kreises vom Halbmesser r wird ein Kreis beschrieben, welcher die Schenkel und den Bogen des Quadranten berührt; bestimme den Flächeninhalt eines dritten Kreises, dessen Halbmesser der Summe aus den Halbmessern des Quadranten und des ihm eingeschriebenen Kreises gleich ist ($2r^2\pi$).

15. Ein Rechteck hat die Seite des einem Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes zur Grundlinie und die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen regulären Sechseckes zur Höhe; wie groß ist der Umfang eines Kreises, welcher mit diesem Rechtecke flächengleich ist? ($2r\sqrt{2\pi}$.)

Anhang zur Planimetrie.

Lösung von Constructionsaufgaben nach der Methode der algebraischen Analysis.

1. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke.

§. 190. Drückt man gegebene Strecken durch ihre Maßzahlen aus, so erhält man auch für andere Strecken, die von jenen auf eine vorgeschriebene Art abhängen, bestimmte Zahlenausdrücke. Sind z. B. a und b die Maßzahlen der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ der Zahlenausdruck für die Hypotenuse. Umgekehrt kann ein Zahlenausdruck von der Form $\sqrt{a^2 + b^2}$ wieder in seiner geometrischen Bedeutung hergestellt werden, indem man ihn als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes construiert, dessen Katheten a und b Längeneinheiten enthalten.

Die Construction einer Strecke, deren Maßzahl x durch einen algebraischen Ausdruck bestimmt ist, läßt sich auf einen der nachstehenden Hauptfälle zurückführen:

1. Ist $x = a + b$ zu construieren, so trägt man auf einer gegebenen Geraden $AB = a$ und dann in derselben Richtung weiter $BC = b$ auf, wodurch die Summe $a + b$ als eine einzige Strecke AC erscheint.

2. Um $x = a - b$ zu construieren, trägt man auf einer gegebenen Geraden von A aus in einer bestimmten Richtung $AB = a$, und dann von B aus in der entgegengesetzten Richtung $BC = b$ auf; die Strecke AC stellt dann die Differenz $a - b$ dar.

Ist $b > a$, also x negativ, so erscheint AC von A aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist.

3. Der Ausdruck $x = \frac{bc}{a}$, entstanden aus der Proportion $a:b = c:x$, wird als vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken a, b, c nach §. 146, 1, construiert.

4. $x = \frac{b^2}{a}$ führt zu der Proportion $a:b = b:x$, und bildet die dritte stetige Proportionale zu a und b. Die Construction erfolgt nach §. 146, 2.

5. $x = \sqrt{ab}$, entstanden aus $x^2 = ab$, oder aus der Proportion $a:x = x:b$, ist die mittlere Proportionale zwischen den Strecken a und b und wird als solche nach §. 146, 3, construiert.

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den gegebenen Katheten a und b construiert. Für $b = a$ erhält man $x = a\sqrt{2}$ als die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes mit der Kathete a.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist als die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem a die Hypotenuse und b die andere Kathete ist, zu construieren. Für $b = \frac{a}{2}$ erhält man $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ als die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ist.

§. 191. Beispiele.

1. $x = a - b + c$. Construiere $m = a - b$, und dann $x = m + c$.

2. $x = \frac{abc}{df}$. Construiere $m = \frac{ab}{d}$, und dann $x = \frac{mc}{f}$.

3. $x = \frac{ab + cd}{f}$. Construiere $m = \frac{ab}{f}$, $n = \frac{cd}{f}$, und dann $x = m + n$.

4. $x = 2a - a\sqrt{2}$. Construiere $m = a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$, und dann $x = 2a - m$.

5. $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ als Seite des einem Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenen regulären Zehneckes (§. 175, 1).

$$\text{Construction: } x = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}.$$

6. $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Construiere $m = \sqrt{bc}$, und dann

$$x = \sqrt{a^2 + m^2}.$$

7. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$. Construiere zunächst $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann $n = \sqrt{m^2 - c^2}$, und endlich $x = \sqrt{n^2 + d^2}$.

8. $x = a\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{2}}$. Construiere $m = a\sqrt{2}$, $n = \sqrt{a.m}$, und dann $x = \sqrt{m^2 - n^2}$.

2. Algebraische Lösung geometrischer Constructionsaufgaben.

§. **192.** Ist die Lösung einer geometrischen Constructionsaufgabe von dem Auffinden einer Strecke abhängig, so kann dabei die Methode der algebraischen Analysis angewendet werden, welche darin besteht, dass man für die Maßzahl der zu bestimmenden Strecke den entsprechenden algebraischen Ausdruck sucht und diesen sodann geometrisch construiert.

Zu diesem Zwecke müssen zunächst die Bedingungen der Aufgabe in die algebraische Zeichensprache übersetzt werden; man drückt die gesuchte Strecke durch x aus, wählt die Bezeichnungen für die als bekannt zu benützenden Größen und leitet aus den Beziehungen zwischen x und den bekannten Größen durch Anwendung entsprechender geometrischer Lehrsätze eine Gleichung ab. Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man für x einen algebraischen Ausdruck, welcher sodann wieder auf seine geometrische Bedeutung zurückzuführen, d. i. geometrisch zu construieren ist.

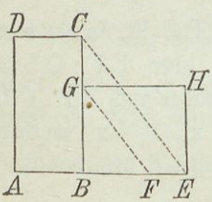
Der Beweis für die Richtigkeit der Auflösung ist schon in der Analysis enthalten. Die Determination lehnt sich an die geometrische Deutung des gefundenen Zahlenausdruckes an.

Ausgeführte Beispiele.

§. **193. Aufgabe.** Ein gegebenes Rechteck ABCD (Fig. 110) in ein anderes, von dem eine Seite gegeben ist, zu verwandeln.

Algebraische Analysis. Die Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn die Länge der zweiten Seite des verlangten Rechteckes gefunden ist.

Fig. 110.



Bezeichnet man daher diese unbekannte Länge durch x und die bekannte Seite BE durch a, setzt ferner in dem gegebenen Rechtecke AB = b und BC = c, so ist, da die beiden Rechtecke flächengleich sein sollen,

$$ax = bc,$$

und, wenn man diese Gleichung auflöst,

$$x = \frac{bc}{a}.$$

x ist also die vierte Proportionale zu a, b und c.

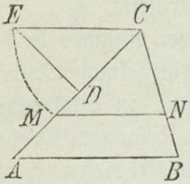
Construction. Man mache BF = AB = b, ziehe die Strecke EC und zu ihr die Parallele FG, welche die BC in G schneidet. Dann ist BE : BF = BC : BG, oder a : b = c : BG; also x = BG und BEHG das verlangte Rechteck.

Determination. Die vorstehende Auflösung ist stets und nur auf eine Art möglich.

§. **194. Aufgabe.** Ein Dreieck ABC (Fig. 111) durch eine Gerade MN, welche zu einer Seite AB parallel ist, in zwei gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Hier handelt es sich nur um die Auffindung des Punktes M, durch welchen $MN \parallel AB$ gezogen werden soll, also um die Bestimmung der Strecke CM, die wir durch x ausdrücken wollen. Setzt man $AC = a$, so ist, da $\triangle CMN \sim CAB$ ist, (nach §. 162) $\triangle CMN : CAB = x^2 : a^2$.

Fig. 111.



Soll nun $\triangle CMN = \frac{CAB}{2}$ sein, so muss auch

$$x^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2}{4}, \text{ daher}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

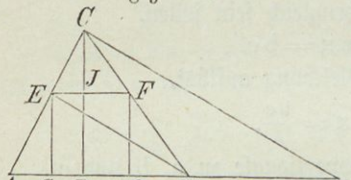
sein; x ist also die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes mit der Kathete $\frac{a}{2}$.

Construction. Man errichte im Halbierungspunkte D der AC zu dieser die Normale und trage auf ihr $DE = DC$ auf; dann ist $CE^2 = CD^2 + DE^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$, also $CE = \frac{a}{2}\sqrt{2} = x$. Macht man daher $CM = CE$ und zieht $MN \parallel AB$, so ist $\triangle CMN = ABNM$.

§. **195. Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 112) ein Quadrat einzuschreiben.

Analysis. Zur Festlegung des verlangten Quadrates EFGH handelt es sich offenbar nur darum, in der Seite AC den Punkt E zu bestimmen, durch welchen die zu AB parallele Strecke EF gezogen werden soll, damit $EF = EG$ werde. Man setze also die unbekannte Strecke $AE = x$, ferner $AC = b$, $AB = c$ und die Höhe $CD = h$.

Fig. 112.



Da $\triangle ABC \sim EFC$ ist, so hat man $AB : CD = EF : CJ$; aber $EF : CJ = EG : CJ = AE : CE$, daher auch $AB : CD = AE : CE$, oder $c : h = x : (b - x)$, woraus $x = \frac{bc}{c + h}$ folgt.

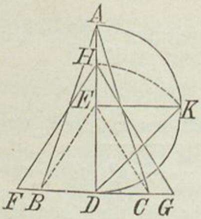
x ist also die vierte Proportionale zu $c + h$, b und c.

Construction. Man verlängere AB um $BK = CD$, ziehe KC und $BE \parallel KC$; dann ist $AK : AC = AB : AE$, oder $(c + h) : b = c : AE$, also $AE = x$ und EFHG das verlangte Quadrat.

§. **196. Aufgabe.** Ein gleichschenkliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Analysis. Es sei ABC (Fig. 113) ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie BC und der Höhe AD; ferner sei EBC ein gleichseitiges Dreieck

Fig. 113.



über der Seite BC und HFG das gesuchte gleichseitige Dreieck. Zur Bestimmung dieses Dreieckes kommt es nur darauf an, den Punkt H zu finden. Setzen wir daher $DH = x$, ferner $AD = m$ und $DE = n$, so ist

$$\triangle BDE : FDH = n^2 : x^2, \text{ oder}$$
$$\triangle BDE : BDA = n^2 : x^2;$$

es ist aber auch

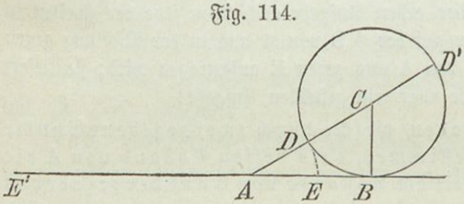
$$\triangle BDE : BDA = n : m,$$

daher $n^2 : x^2 = n : m$, und folglich $x = \sqrt{mn}$. x ist also die mittlere Proportionale zu m und n.

Construction. Man beschreibe über AD einen Halbkreis und errichte $EK \perp AD$; dann ist $DK = \sqrt{AD.DE} = \sqrt{mn} = x$. Macht man daher $DH = DK$ und zieht $HF \parallel EB$ und $HG \parallel EC$, so ist HFG das verlangte gleichseitige Dreieck.

§. 197.* **Aufgabe.** Eine gegebene Strecke AB (Fig. 114) nach stetiger Proportion zu theilen.

Fig. 114.



Analysis. Ist $AB = a$ die gegebene Strecke und x der größere Abschnitt derselben, so ist (§. 141)

$$a : x = x : (a - x), \text{ oder}$$
$$x^2 = a^2 - ax \text{ und}$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Der erste dieser zwei Werte $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ ist positiv und kleiner als a; er bestimmt also einen zwischen A und B liegenden Theilungspunkt E. Die Wurzelgröße in diesem Ausdrucke ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten $\frac{a}{2}$ und a. Um x zu erhalten, muss man von jener Hypotenuse noch eine Strecke gleich $\frac{a}{2}$ abschneiden.

Construction. Man errichte auf AB in B die Normale $CB = \frac{a}{2}$, ziehe AC und beschreibe um C mit dem Halbmesser $CB = \frac{a}{2}$ einen Kreis, welcher die AC in D schneidet; dann ist

$$AD = AC - CD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = x.$$

Man macht nun $AE = AD$, so ist

$$AB : AE = AE : BE.$$

Determination. Die Aufgabe hat eine einzige Lösung. Der zweite Wert $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ ist negativ und absolut genommen größer als a, daher für die obige Aufgabe nicht verwendbar.

Der negative Wert von x führt aber, wenn man das Vorzeichen von x ändert, auf die Lösung einer andern verwandten Aufgabe. Denn $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ geht aus der Proportion $a : x = x : (a + x)$ hervor; diese aber enthält die algebraische Auflösung der Aufgabe: Eine gegebene Strecke a so zu verlängern, dass die Verlängerung die mittlere Proportionale zwischen der gegebenen und der verlängerten Strecke sei.

Um diesen Wert von x zu construieren, darf man nur $AE' = AD'$ machen; dann ist

$$AE' = AD' = CD' + AC = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = x, \text{ und daher}$$

$$AB : AE' = AE' : BE'.$$

Hieraus ergibt sich, dass die beiden hier angeführten Aufgaben durch eine und dieselbe geometrische Construction gelöst werden; dass sich ferner der Wert von x in der zweiten Aufgabe unmittelbar aus dem negativen Werte von x in der ersten Aufgabe, für deren Lösung er nicht brauchbar war, herleiten läst, wenn man nur das Vorzeichen ändert. Es enthält somit die algebraische Auflösung der ersten Aufgabe auch schon jene der zweiten in sich, sobald man den negativen Wert von x auf der AB von A aus in der Richtung gegen E' aufträgt, während der positive auf AB von A aus gegen E aufgetragen wird; sie liefert also die Auflösungen der in folgender Weise allgemein gestellten Aufgabe:

Auf einer unbegrenzten Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte A und B geht, einen Punkt so zu bestimmen, dass dessen Abstand von A die mittlere Proportionale zwischen seinem Abstande von B und der gegebenen Strecke AB sei.

Aus der Durchführung dieser Aufgabe ist ersichtlich, dass die negativen Werte dazu dienen, die Beschränkung aufzuheben, die in eine Aufgabe gelegt wurde, und dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

3. Übungsaufgaben.

§. 198. Construiere folgende Ausdrücke:

1. $x = \frac{ab}{a-b}$. 2. $x = \frac{abc^2}{def}$. 3. $x = \frac{a^2+b^2}{c}$.

4. $x = \frac{b^2+bc}{a}$. 5. $x = \frac{ab+bc}{a-b}$. 6. $x = \frac{b^2+b^2-a^2}{2c}$.

7. $x = \sqrt{ab + cd - ef}$. 8. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab}$.

9. $x = \sqrt{\frac{a^2b + c^2d}{f+g}}$. 10. $x = \sqrt{\left\{a^2 - a\sqrt{a^2-b^2}\right\}}$.

§. 199. Löse mit Hilfe der algebraischen Analysis folgende Aufgaben:

1. Ein Rechteck zu construieren, wenn die Summe s zweier Seiten und ihre Differenz d gegeben sind.

2. Die größere Seite eines Rechteckes so zu theilen, dass die Differenz der Quadrate der Abschnitte dem Flächeninhalte des Rechteckes gleich wird.

3. Um jeden Eckpunkt eines gegebenen Dreieckes einen Kreis so zu beschreiben, dass jeder dieser Kreise die beiden anderen von außen berührt.

4. Über einer Seite eines Dreieckes ein Rechteck zu construieren, welches dem Rechtecke aus den beiden anderen Seiten flächengleich ist.

5. In einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele zu ziehen, welche einer gegebenen Strecke gleich ist.

6. In einem gegebenen Dreiecke ABC zu der Seite BC eine Parallele MN so zu ziehen, dass der eine obere Abschnitt AM dem andern unteren NC gleich sei.

7. Zu einem gegebenen Rechtecke ein Quadrat so zu construieren, dass die Umfänge beider Figuren sich zu einander verhalten wie ihre Flächeninhalte.

8. Eine Strecke a in zwei Theile so zu theilen, dass die Differenz der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate m^2 gleich wird.

9. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn eine Kathete a und die Summe s der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben ist.

10. Ein Rechteck aus einer Seite und der Summe der Diagonale und der andern Seite zu construieren.

11. Ein Rechteck ab in ein Quadrat x^2 zu verwandeln.

12. Ein Parallelogramm, dessen Seiten a und b sind, in einen Rhombus zu verwandeln, welcher mit dem Parallelogramme einen Winkel gemeinsam hat (§. 161, Folges.)

13. Von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkte eine Secante so zu ziehen, dass sie durch den Kreisumfang halbiert wird (§. 136, 2).

14. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Ist x die Seite des eingeschriebenen Dreieckes und r der Halbmesser des Kreises, so erhält man

$$x = \sqrt{3r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}.$$

15. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a in ein Quadrat x^2 zu verwandeln.

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}.$$

16. Ein Rechteck xy aus der Diagonale d und der Differenz m zweier Seiten zu construieren.

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} + \frac{m}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} - \frac{m}{2}.$$

17.* Eine gegebene Sehne a eines Kreises so zu verlängern, dass die vom Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gezogene Tangente die Länge b habe (§. 136, 2).

$$\text{Verlängerung } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

18.* Ein Quadrat mit der Seite a in einen Rhombus zu verwandeln, in welchem die Summe der Diagonalen dem Umfange des Quadrates gleich ist.

Sind $2x$ und $2y$ die Diagonalen des Rhombus, so erhält man

$$x = a + \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ und } y = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

19.* Ein Quadrat x^2 zu construieren, wenn die Summe s der Seite und der Diagonale gegeben ist.

$$x = -s + s\sqrt{2}.$$

20.* Ein Rechteck xy zu construieren, wenn der Umfang u und der Flächeninhalt a^2 gegeben ist.

$$x = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}, \text{ und } y = \frac{u}{4} \mp \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}.$$

21.* Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn der Umfang u gegeben ist.

$$x = u - \frac{u}{2}\sqrt{2}, \text{ wo } x \text{ die Kathete bezeichnet.}$$

22*. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Summe s der beiden Katheten und die Höhe h auf die Hypotenuse gegeben ist.

Man erhält $x = -h + \sqrt{s^2 + h^2}$, wo x die Hypotenuse bezeichnet.

23.* Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Differenz d der Katheten und der Höhe h auf die Hypotenuse zu construieren.

24.* Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Summen a und b der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

Bezeichnet man die Hypotenuse durch z, die Katheten durch x und y, so dass $x = a - z$, $y = b - z$ ist, so hat man $z^2 = (a - z)^2 + (b - z)^2$, woraus $z = a + b - \sqrt{2ab}$, daher $x = \sqrt{2ab} - b$ und $y = \sqrt{2ab} - a$ folgt.

25.* Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Differenzen a und b der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

26.* In den Quadranten eines Kreises vom Halbmesser r einen Kreis zu beschreiben, welcher die beiden Schenkel und den Bogen des Quadranten berührt.

Heißt x der Abstand des Mittelpunktes des gesuchten Kreises vom Bogen des Quadranten, gezählt auf der Halbierungslinie des rechten Winkels, so ist

$$x = -r \pm r\sqrt{2}.$$

Welche Deutung läßt sich dem negativen Werte von x geben?

Zweiter Theil.

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. **200.** Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben. Liegen sie in derselben Ebene, so sind sie entweder parallel, oder schneiden sich hinreichend verlängert in einem Punkte. Liegen sie nicht in derselben Ebene, so können sie weder parallel sein, noch sich schneiden; die eine geht über oder neben der andern vorbei. Solche Gerade nennt man sich kreuzende oder windschiefe Gerade.

Folgesätze. a) Durch einen Punkt im Raume kann mit einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gezogen werden (§. 23, Grunds.).

b) Wenn mehrere parallele Gerade dieselbe Gerade schneiden, so liegen sie unter einander und mit dieser in einer Ebene.

§. **201. Lehrsätze.** 1. Eine Gerade, welche nicht in einer Ebene liegt, kann diese Ebene nur in **einem** Punkte treffen.

Denn träfe die Gerade die Ebene noch in einem zweiten Punkte, so müsste sie ganz in die Ebene fallen (§. 8, Grunds.).

Der Punkt, in welchem eine Gerade eine Ebene schneidet, heißt der Fußpunkt dieser Geraden in der Ebene.

2. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so ist ihre Schnittlinie eine Gerade.

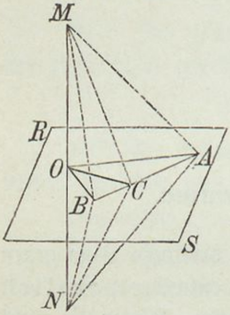
Wäre die Schnittlinie nicht gerade, so müsste es in derselben drei Punkte geben, die nicht in gerader Linie liegen. Dann müssten die drei Punkte in beiden Ebenen liegen, und daher diese gegen die Voraussetzung eine einzige Ebene bilden (§. 8).

I. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

§. **202.** Eine Gerade des Raumes kann gegen eine Ebene in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fällt die Gerade ganz in die Ebene; oder es schneidet die hinreichend verlängerte Gerade die Ebene in einem Punkte, sie ist gegen die Ebene **geneigt**; oder es trifft die unbegrenzt verlängerte Gerade mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammen, die Gerade ist mit der Ebene **parallel**.

203. **Lehrsatz.** Ist eine Gerade zu zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, normal, so ist sie auch zu jeder andern durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden normal.

Fig. 115.



Beweis. Es seien (Fig. 115) OA und OB zwei Gerade in der Ebene RS, und MO $\perp$ OA, MO $\perp$ OB; ferner sei OC eine dritte in dieser Ebene durch O willkürlich gezogene Gerade. Man verlängere die Gerade MO über den Fußpunkt O, mache die Verlängerung ON = OM und ziehe AB, welche die OC in C schneidet, ferner MA und NA; dann ist $\triangle$MOA $\cong$ NOA, folglich MA = NA. Zieht man MB und NB, so ist ebenso $\triangle$MOB $\cong$ NOB, daher MB = NB. Dann ist aber auch $\triangle$MAB $\cong$ NAB, daher W. MAB = NAB. Zieht man noch MC und NC, so ist auch $\triangle$MAC $\cong$ NAC, daher MC = NC; folglich OC $\perp$ MN (§. 44, 1), oder MO $\perp$ OC.

§. 204. Ist eine Gerade zu jeder durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Geraden normal, so sagt man, die Gerade und die Ebene stehen zu einander **normal** oder **senkrecht**; im entgegengesetzten Falle sagt man, die Gerade und die Ebene stehen zu einander **schief**.

Folgesatz. Ist eine Gerade zu zwei sich schneidenden Geraden normal, so ist sie auch zu der durch dieselben bestimmten Ebene normal (§. 203).

§. 205. **Lehrsätze.** 1. In einem Punkte einer Ebene kann zu dieser nur **eine** Normale errichtet werden.

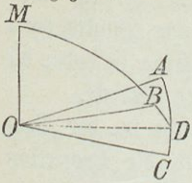
Ließen sich zwei Normale errichten, so wären, wenn man durch beide eine Ebene legt, aus demselben Punkte auf einer Geraden in einer Ebene zwei Gerade normal, was nicht möglich ist. (§. 25, 4.)

2. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann zu dieser nur **eine** Normale gezogen werden.

Ließen sich zwei Normale ziehen, so müßten diese mit der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden.

§. 206. **Lehrsatz.** Steht eine Gerade auf drei anderen Geraden in ihrem gemeinsamen Schnittpunkte normal, so liegen diese in einer Ebene.

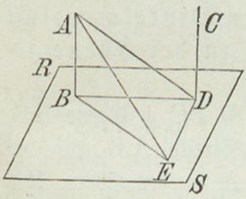
Fig. 116.



Beweis. Es sei (Fig. 116) OM normal zu den Geraden OA, OB und OC. Man lege durch OA und OC die Ebene AOC. Würde OB nicht in dieser Ebene liegen, so müsste, wenn eine durch OM und OB gelegte Ebene die Ebene AOC in OD schneidet, der Winkel MOD = R sein (§. 203). Nach der Annahme ist aber auch MOB = R; es wäre also MOD = MOB, was ein Widerspruch ist.

§. **207. Lehrsätze.** 1. *Sind zwei Gerade zu einer Ebene normal, so sind sie parallel.*

Fig. 117.



Beweis. Es sei (Fig. 117) AB $\perp$ Ebene RS und CD $\perp$ Ebene RS. Verbindet man die Fußpunkte B und D der beiden Normalen, so ist Winkel ABD + CDB = 2R, mithin sind AB und CD parallel, da diese Geraden auch in *einer* Ebene liegen. Um letzteres nachzuweisen, zieht man von einem beliebigen Punkte A der AB die Strecke AD, ferner in der Ebene RS die DE $\perp$ BD. Macht man DE = AB und zieht AE und BE, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ BDE, also AD = BE; dann ist $\triangle$ ADE $\cong$ EBA, also W. ADE = EBA = R. Da sonach ED $\perp$ AD und auch ED $\perp$ BD und ED $\perp$ CD ist, so liegt (nach §. 206) CD mit AD und BD, somit auch mit AB in *einer* Ebene; dann ist aber CD $\parallel$ AB (§. 25, 1).

Zusatz. In der Stereometrie lautet die Definition für zwei parallele Gerade: Zwei Gerade sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und beliebig verlängert einander nicht schneiden. In der Planimetrie war es nicht nothwendig, die erstere Bedingung anzuführen, da dort eben nur geometrische Gebilde in einer Ebene betrachtet werden.

2. *Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer Ebene normal, so ist es auch die andere.*

Beweis. Es sei (Fig. 117) AB $\parallel$ CD und AB $\perp$ Ebene RS. Wäre CD nicht $\perp$ RS, so sei es C′D. Dann müsste nach 1. in der durch AB und D gelegten Ebene C′D $\parallel$ AB sein. In derselben Ebene ist aber nach der Voraussetzung CD $\parallel$ AB; also gäbe es zu AB durch denselben Punkt zwei Parallele, was dem Grundsatze in §. 23 widerspricht.

Folgesatz. Alle Normalen von verschiedenen Punkten einer Geraden auf eine Ebene liegen in einer einzigen Ebene, daher alle ihre Fußpunkte in einer und derselben Geraden.

§. **208.** Zieht man von einem Punkte im Raume eine *Normale* zu einer Ebene, so heißt der Fußpunkt der Normalen die *Projection* (Normalprojection) *des Punktes* auf die Ebene, und die Ebene heißt die *Projectionsebene.*

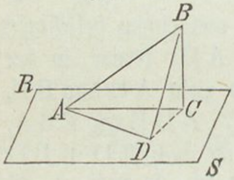
Unter der Projection einer Linie auf eine Ebene versteht man diejenige Linie dieser Ebene, welche die Projectionen sämmtlicher Punkte jener Linie enthält. Die Projection einer Strecke auf eine Ebene ist daher die Strecke zwischen den Projectionen der Endpunkte der gegebenen Strecke.

Die Projection eines Punktes oder einer Geraden, welche in der Projectionsebene liegen, ist der Punkt oder die Gerade selbst, und die Projection einer auf der Projectionsebene normalen Geraden ist ein Punkt.

Die Projection eines ebenen Gebildes auf eine Ebene ist das Gebilde, welches von den Projectionen der Grenzlinien des gegebenen Gebildes begrenzt wird.

§. **209. Lehrsatz.** Der Winkel einer Strecke mit ihrer Projection auf eine Ebene ist der kleinste von allen Winkeln, welche diese Strecke mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet.

Fig. 118.



Beweis. Es sei (Fig. 118) BC $\perp$ Ebene RS, also AC die Projection der Strecke AB auf die Ebene RS. Zieht man durch A in der Ebene RS irgend eine andere Gerade AD, macht AD = AC und zieht noch CD und BD, so ist BC $<$ BD (§. 35, 1). In den Dreiecken BAC und BAD ist dann auch der Winkel BAC $<$ BAD (§. 43).

Der Winkel, welchen eine Strecke mit ihrer Projection auf eine Ebene bildet, wird als Maß für die Neigung der Strecke gegen die Ebene angenommen und heißt der Neigungswinkel derselben.

§. **210. Lehrsatz.** Ist eine Strecke zu einer in einer Ebene liegenden Geraden normal, so ist auch die Projection der Strecke zu derselben Geraden normal.

Beweis. Es sei (Fig. 117) AB $\perp$ Ebene RS, daher BD die Projection der AD auf RS; ferner sei AD normal zu der in der Ebene RS liegenden Geraden DE. Macht man DE = AB und zieht AE und BE, so ist $\triangle$ EDA $\cong$ ABE, also DA = BE; dann ist auch $\triangle$ BDE $\cong$ DBA, also W. BDE = BDA = R, und somit BD $\perp$ DE.

Auf gleiche Weise ergibt sich auch die Umkehrung dieses Satzes.

§. **211. Lehrsatz.** Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser eine normale und mehrere schiefe Strecken, so ist

1. die Normale die kürzeste unter diesen Strecken;

2. zwei Schiefe, welche gleiche Projectionen auf die Ebene haben, sind einander gleich; und

3. von zwei Schiefen, welche ungleiche Projectionen auf die Ebene haben, ist diejenige die größere, welche die größere Projection hat.

Der Beweis wird, wenn man durch die Strecken Ebenen legt, ähnlich wie in §. 35 geführt.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgen indirect auch deren Umkehrungen.

Die Normale von einem Punkte auf eine Ebene gibt den Abstand dieses Punktes von der Ebene an.

Folgesätze. a) Die Fußpunkte aller gleichen Strecken, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogen werden, liegen in einer Kreislinie, welche den Fußpunkt der Normalen zum Mittelpunkte hat.

b) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten des Raumes gleich weit abstehen, ist die Normale, die im Mittelpunkte des durch jene drei Punkte gehenden Kreises auf die Ebene desselben errichtet wird.

§. **212.** **Lehrsatz.** Zwei Gerade, deren jede einer dritten Geraden im Raume parallel ist, sind auch einander parallel.

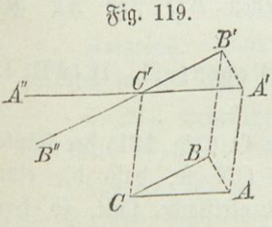
Denkt man sich eine Ebene, zu welcher die dritte Gerade normal steht, so müssen nach §. 207, 2 auch die beiden ersten Geraden zu dieser Ebene normal stehen, folglich nach §. 207, 1 einander parallel sein.

§. **213.** **Lehrsatz.** Zwei Winkel im Raume, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Beweis. a) Es sei (Fig. 119) $AC \parallel A'A''$ und $BC \parallel B'B''$.

Macht man $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$, und zieht die Strecken AA', BB', CC', AB und $A'B'$, so ist AA' gleich und parallel mit CC' (§. 54, 3), ebenso BB' gleich und parallel mit CC', mithin auch AA' gleich und parallel mit BB' (§. 212); folglich ist auch $AB = A'B'$ (§. 54, 3). Dann ist aber $\triangle ACB \cong A'C'B'$, daher Winkel $ACB = A'C'B'$. Wegen W. $A'C'B' = A''C'B''$ ist auch W. $ACB = A''C'B''$.

Fig. 119.



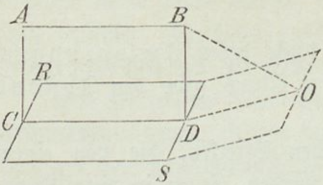
b) Nach a) ist $ACB = A'C'B'$, aber $A'C'B' + A''C'B' = 2R$, folglich auch $ACB + A''C'B' = 2R$.

§. **214.** **Lehrsatz.** Zwei parallele Gerade, welche eine Ebene schneiden, bilden mit dieser gleiche Neigungswinkel.

Denn sie bilden mit den von je einem ihrer Punkte auf die Ebene gefällten Normalen gleiche Winkel (§. 207, 1 und §. 213).

§. **215.** **Lehrsätze.** 1. Ist eine Gerade außerhalb einer Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie auch mit der Ebene selbst parallel.

Fig. 120.



Beweis. Es sei (Fig. 120) AB || CD. Hätte AB mit der Ebene RS einen Punkt O gemeinsam, so müsste derselbe, wenn man durch AB und CD eine Ebene ABCD legt, zugleich in dieser Ebene liegen; O wäre also beiden Ebenen gemeinsam, d. h. er wäre ein Punkt ihrer Schnittlinie CD, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet, so ist die Gerade auch mit der Schnittlinie beider Ebenen parallel.

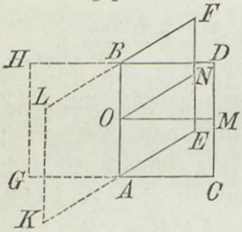
Der Beweis wird ebenfalls indirect geführt.

II. Lage der Ebenen gegen einander.

§. 216. Zwei Ebenen können gegen einander in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fallen die zwei Ebenen ganz zusammen; oder schneiden sich die hinreichend erweiterten Ebenen in einer geraden Linie, sie sind gegen einander geneigt; oder es treffen die beiden Ebenen, so weit man sie auch erweitern mag, nie zusammen, sie sind parallel.

§. 217. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so heißt die Größe der Drehung, welche die eine Ebene um die gemeinsame Schnittlinie machen muss, um in die Lage der anderen Ebene zu gelangen, der Flächenwinkel oder Keil der beiden Ebenen; die gemeinsame Schnittlinie nennt man die Scheitellinie oder Kante und die beiden Ebenen selbst Schenkelflächen oder Seiten des Keiles.

Fig. 121.



In Fig. 121 sind AB die Kante, AD und AF die Seiten des von den Ebenen AD und AF gebildeten Keiles D (AB) F.

F (AB) H heißt der Nebenkeil, H (AB) L der Scheitelkeil von D (AB) F.

§. 218. Errichtet man in irgend einem Punkte O (Fig. 121) der Kante eines Keiles auf dieselbe zwei Normale OM und ON so, dass die eine Normale in die eine, die zweite in die andere Schenkelfläche fällt, so hat der Winkel MON dieselbe Größe, in welchem Punkte der Kante man auch die Normalen errichten mag, da je zwei solche Winkel parallele Schenkel haben. Dieser constante Winkel heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen, welche den Keil bilden.

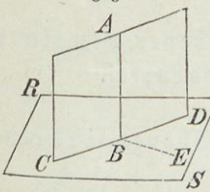
Lehrsatz. Zu gleichen Keilen gehören gleiche Neigungswinkel, und umgekehrt. (Beweis durch Deckung.)

Man nimmt daher die Größe des Neigungswinkels der Seiten eines Keiles als Maß für die Größe des Keiles an.

§. **219.** Zwei Ebenen heißen zu einander **normal** oder **senkrecht**, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist.

Lehrsätze. 1. Ist eine Gerade zu einer Ebene normal, so ist auch jede durch die Gerade gelegte Ebene zu der ersteren Ebene normal.

Fig. 122.



Es sei (Fig. 122) AB $\perp$ RS, so muss auch die Ebene ACD $\perp$ RS sein. Zieht man in der Ebene RS die BE $\perp$ CB, so ist ABE der Neigungswinkel der Ebenen ACD und RS; allein ABE = R, da AB $\perp$ RS; folglich ACD $\perp$ RS.

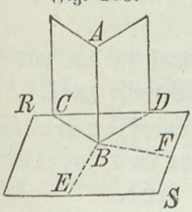
2. Sind zwei Ebenen zu einander normal, und zieht man in der einen eine Normale zu der Schnittlinie, so ist diese Normale auch zu der zweiten Ebene normal.

Es sei ACD $\perp$ RS und AB $\perp$ CD. Zieht man BE $\perp$ CD, so ist ABE = R, weil ACD $\perp$ RS; folglich steht AB auf CD und BE, und daher auch auf der Ebene RS normal.

Folgesatz. Sind von drei sich in einem Punkte schneidenden Geraden je zwei zu einander normal, so sind auch je zwei der durch sie gelegten Ebenen zu einander normal. (Folgt aus 1.)

§. **220. Lehrsatz.** Sind zwei sich schneidende Ebenen zu einer dritten normal, so ist auch ihre Schnittlinie zu der dritten Ebene normal.

Fig. 123.



Es sei (Fig. 123) AC $\perp$ RS und AD $\perp$ RS. Zieht man BE $\perp$ BC und BF $\perp$ BD, so ist (§. 219, 2) BE $\perp$ AC, daher auch BE $\perp$ AB; ferner ist BF $\perp$ AD, daher auch BF $\perp$ AB; folglich AB $\perp$ RS.

Folgesatz. Sind von drei sich schneidenden Ebenen je zwei zu einander normal, so sind auch je zwei ihrer Schnittlinien zu einander normal.

§. **221. Lehrsätze.** 1. Zwei Ebenen, zu denen dieselbe Gerade normal ist, sind einander parallel.

Würden sich die beiden Ebenen schneiden, so müssten die Normale und die Verbindungsstrecken ihrer Fußpunlte mit irgend einem Punkte der Schnittlinie beider Ebenen ein Dreieck bilden, worin zwei rechte Winkel vorkämen.

2. Ist eine Gerade zu einer von zwei parallelen Ebenen normal, so ist sie es auch zu der andern.

Wird ebenfalls indirect bewiesen.

§. **222. Lehrsätze.** 1. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

Denn errichtet man auf die dritte Ebene eine Normale, so muss diese

(§. 221, 2) auch zu den beiden ersteren Ebenen normal sein, folglich sind diese (§. 221, 1) einander parallel.

2. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann nur eine zu dieser parallele Ebene gelegt werden.

Folgt indirect aus 1.

§. 223. **Lehrsätze.** 1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

Beweis indirect.

2. Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich. (Beweis folgt aus 1. und §. 54, 1.)

Folgesatz. Alle Normalen zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich. Die constante Länge einer solchen Normalen gibt den Abstand der beiden parallelen Ebenen an.

§. 224. **Lehrsätze.** 1. Eine Gerade, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

Zieht man von einem Punkte der Geraden eine Normale zu der einen Ebene, so steht dieselbe auch zu der andern Ebene normal. Legt man nun durch die Normale und die gegebene Gerade eine Ebene, so bilden ihre parallelen Schnittlinien in der Ebene mit der gegebenen Geraden die Neigungswinkel, welche als Gegenwinkel gleich sind.

2. Eine Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

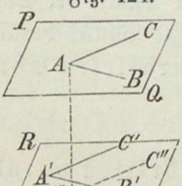
Man ziehe in der schneidenden Ebene eine Gerade normal zu den parallelen Schnittlinien und verfahre dann analog wie bei dem Beweise zu 1.

§. 225. **Lehrsatz.** Zwei Keile, deren Seiten paarweise parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Seitenpaare in demselben oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Man verlängere eine Seite des einen Keiles, so dass sie eine Seite des andern Keiles schneidet, und wende dann §. 224, 2 an.

Folgesatz. Zwei gleiche Keile lassen sich, wenn man ihre Kanten parallel stellt, immer in eine solche Lage bringen, dass beide Paare ihrer Seiten in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Fig. 124.

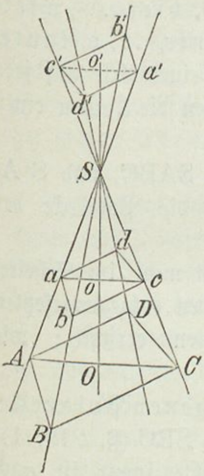


§. 226. **Lehrsatz.** Die Ebenen zweier Winkel im Raume, deren Schenkel parallel sind, sind einander parallel.

Es sei (Fig. 124) AB ∥ A′B′ und AC ∥ A′C′. Zieht man AA″ ⊥ RS, ferner A″B″ ∥ A′B′ und A″C″ ∥ A′C′, so ist AA″ normal zu A″B″ und A″C″. Nun ist (§. 212) A″B″ ∥ AB und A″C″ ∥ AC; folglich ist auch AA″ normal zu AB und AC, mithin auch zu PQ; folglich ist PQ ∥ RS (§. 221, 1).

§. 227. **Lehrsätze.** 1. Die Strahlen eines Strahlenbüschels im Raume werden durch je zwei parallele Ebenen proportioniert geschnitten.

Fig. 125.



Es sei Ebene ABCD ‖ abcd (Fig. 125). Da SA und SB in derselben Ebene liegen, so ist (§. 116) SA : Sa = SB : Sb; ebenso ist SB : Sb = SC : Sc; folglich SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = . .

2. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei Ebenen proportioniert geschnitten, so sind die beiden Ebenen parallel.

Ist SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = . ., so ist (§. 117) AB ‖ ab, BC ‖ bc; daher sind die durch die Winkel ABC und abc gelegten Ebenen ABCD und abcd parallel (§. 226).

3. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei parallelen Ebenen geschnitten, so sind die von den entsprechenden Verbindungsstrecken der Schnittpunkte begrenzten Gebilde ähnlich.

Ist Ebene ABCD ‖ abcd, so ist (nach 1) SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = . . ., daher (§. 117) AB ‖ ab, BC ‖ bc, CD ‖ cd, . . . Daraus folgt (§. 118) AB : ab = SA : Sa, und BC : bc = SA : Sa, daher auch AB : ab = BC : bc. Ebenso folgt BC : bc = CD : cd, u. s. w. Ferner ist W. A = a, W. B = b, W. C = c, u. s. w.; somit ABCD $\sim$ abcd.

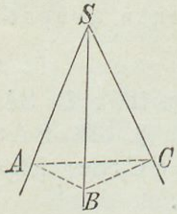
III. Körperliche Ecken.

§. 228. Gehen von einem Punkte drei oder mehrere Strahlen aus, welche nicht in derselben Ebene liegen, so wird durch die zwischen je zwei benachbarten Strahlen liegenden Winkelflächen der unbegrenzte Raum in zwei halbbegrenzte Räume getheilt, welche man körperliche oder Raumecken, auch bloß Ecken nennt.

Der Punkt, von welchem die Strahlen ausgehen, heißt der Scheitel; die Strahlen selbst nennt man die Kanten; die Winkel je zweier aufeinander folgender Kanten die Kantenwinkel oder Seiten und ihre Winkelflächen die Seitenflächen; endlich die Neigungswinkel je zweier benachbarter Seitenflächen die Flächenwinkel, auch bloß Winkel der Ecke.

Im Folgenden soll unter einer Ecke stets nur eine solche verstanden werden, deren Flächenwinkel hohl sind.

Fig. 126



Ist (Fig. 126) S der Scheitel der Ecke und sind SA, SB, SC deren Kanten, so bezeichnet man die Ecke durch SABC; die Seiten bezeichnet man entweder, wie die ebenen Winkel, durch ASB, ASC, BSC, oder auch durch (AB), (AC), (BC).

Eine Ecke hat so viele Seiten als Kanten. Nach der Anzahl derselben unterscheidet man drei-, vier-, ..-, n-seitige Ecken, oder Dreikante, Vierkante, .., n Kante.

§. **229.** Zieht man von einem beliebigen Punkte in einer Ecke auf jede Seitenfläche derselben eine Normale, so bilden diese Normalen die Kanten einer neuen Ecke, welche die Polarecke der gegebenen heißt.

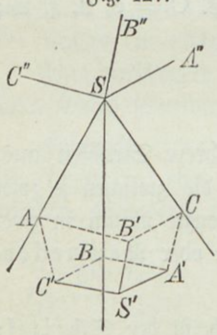
Ist (Fig. 127) S′ ein Punkt im Innern der Ecke SABC, und S′A′ $\perp$ SBC, S′B′ $\perp$ SAC, S′C′ $\perp$ SAB, so ist S′A′B′C′ die Polarecke der Ecke SABC.

Am bequemsten wird die Polarecke construiert, indem man im Scheitel der gegebenen Ecke auf deren Seitenflächen Normale nach den entgegengesetzten Seiten der den Seitenflächen gegenüberliegenden Kanten errichtet; wie SA″B″C″.

Lehrsätze. 1. Jede Ecke ist Polarecke zu ihrer eigenen Polarecke.

Da S′A′ $\perp$ SBC, so ist auch die Ebene S′A′CB′ $\perp$ SBC (§. 219, 1); da S′B′ $\perp$ SAC, so ist auch die Ebene S′A′CB′ $\perp$ SAC; somit ist auch die Schnittlinie SC der Ebenen SBC und SAC normal zur Ebene S′A′CB′ (§. 220). Ebenso folgt, dass die Kante SB $\perp$ S′A′BC′ und SA $\perp$ S′B′AC′ ist.

Fig. 127.



2. Sind zwei Ecken Polarecken zu einander, so sind die Seiten der einen Supplemente der Winkel der andern.

Der Seite BSC der Ecke SABC entspricht der Winkel an der Kante S′A′ der Polarecke S′A′B′C′. Das Maß dieses Winkels ist BA′C, da S′A′ normal zu der Ebene SBC, daher auch normal zu A′C und A′B ist. Nun sind, da SC $\perp$ S′A′CB′ und SB $\perp$ S′A′BC′ ist, in dem Vierecke SBA′C die W. SCA′ und SBA′ rechte Winkel; daher ist auch BSC + BA′C = 2 R. Ebenso folgt, dass ASC + AB′C = 2 R und ASB + AC′B = 2 R ist.

§. **230.** Wenn man alle Kanten einer Ecke über den Scheitel hinaus verlängert, so heißt die Ecke, welche die Verlängerungen zu Kanten hat, die Scheitelecke der ersteren.

Zwei Scheitelecken SABC und SA′B′C′ (Fig. 128) haben nach der Ordnung paarweise gleiche Seiten und gleiche Winkel; diese folgen jedoch in den beiden Ecken im entgegengesetzten Sinne der Drehung aufeinander.

§. **231.** Zwei Ecken heißen congruent, wenn sie sich so in einander legen lassen, dass sich alle ihre Kanten und Seitenflächen decken. Sollen zwei Ecken zur Deckung gebracht werden können, so müssen in denselben nicht nur alle Seiten und Winkel paarweise gleich sein, sondern diese auch in demselben Sinne der Drehung aufeinander folgen.

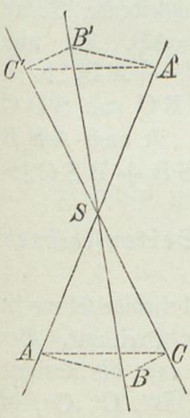
Zwei Ecken, welche paarweise gleiche Seiten und Winkel haben, in denen aber diese im entgegengesetzten Sinne aufeinander folgen, können 1. im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden; sie lassen sich jedoch 2. auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene in eine solche Lage bringen, dass die Strecke zwischen je zwei entsprechenden Punkten der beiden Ecken zu jener Ebene normal ist und durch sie halbiert wird.

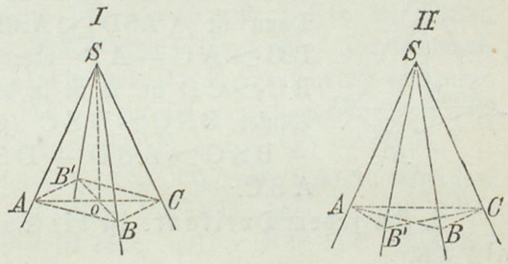
Beweis. Es seien die Scheitelecken SABC und SA'B'C' (Fig. 128).

1. Legt man (Fig. 128, I) die Seite (A'C') so auf die ihr gleiche Seite (AC), dass SA' auf SA, SC' auf SC fällt, so kommen die Kanten SB' und SB auf entgegengesetzten Seiten der Ebene SAC zu liegen; es kann also auf diese Art eine Deckung nicht stattfinden.

Legt man aber (Fig. 128, II) die gleichen Seiten (A'C') und (AC) so aufeinander, dass SA' auf SC und SC' auf SA fällt, so kommen die Kanten SB' und SB zwar auf derselben Seite der Ebene SAC, jedoch neben einander zu liegen; es können daher die Ecken auch in dieser Lage nicht zur Deckung gebracht werden, wenn nicht zufällig die Flächenwinkel B(AS)C und A(CS)B, folglich auch B'(A'S)C' und A'(C'S)B' einander gleich sind.

Fig. 128.





2. Man lege (Fig. 128, I) die Ecken SABC und SA B'C' so an einander, dass sie eine Seite (AC) = (A'C') gemeinsam haben und sie selbst auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen. Macht man dann SB = SB' und zieht BA und B'A' normal zur Kante SA, so ist $\triangle$ SAB $\cong$ SA'B', daher SA = SA', d. i. A' ist mit A identisch; ferner ist auch AB = AB'. Zieht man BB', welche die gemeinsame Seitenfläche SAC in O schneidet, so ist, da SA $\perp$ Ebene BAB' ist, auch SA $\perp$ AO. Der Winkel BAO ist also das Maß des Flächenwinkels B(AS)O und der Winkel B'AO das Maß des Flächenwinkels B'(AS)O, somit W.

$BAO = B'AO$; man hat dann $\triangle BAO \cong B'AO$, folglich $BO = B'O$ und W. $AOB = AOB'$, d. i. $BB' \perp AO$. Es ist aber in dem gleichschenkligen Dreiecke SBB', dessen Grundlinie in O halbiert wird, auch $BB' \perp SO$, somit $BB' \perp$ Ebene SAC. Die Strecke BB' zwischen den Punkten B und B' steht also zur Ebene SAC normal und wird durch sie halbiert.

Was von den Punkten B und B' bewiesen wurde, kann auch von je zwei anderen entsprechenden Punkten der beiden Ecken gezeigt werden.

Zwei solche Ecken heißen symmetrisch.

Zwei symmetrische Ecken in der hier angegebenen Lage stehen, wenn man ihre gemeinsame Seitenfläche als eine Spiegelfläche annimmt, in derselben Beziehung zu einander, wie ein Gegenstand und sein Spiegelbild.

Folgesätze. a) Jede Ecke ist ihrer Scheitelecke symmetrisch.

b) Zwei Ecken, welche einer dritten symmetrisch sind, sind unter einander congruent.

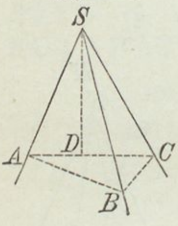
c) Ist von zwei congruenten Ecken die eine einer dritten symmetrisch, so ist es auch die andere.

Eigenschaften der Dreikante.

§. 232. **Lehrsätze.** 1. In jedem Dreikante ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte (Fig. 129).

Beweis. Ist (AC) die größte Seite, so ziehe man in der Ebene ASC die Gerade SD so, dass $ASD = ASB$ wird, mache $SD = SB$ und lege durch B und D eine beliebige, die Kanten SA und SC in A und C schneidende Ebene. Dann ist $\triangle ASD \cong ASB$, also $AD = AB$. Da nun $BC > AC - AB$ oder $BC > AC - AD$, d. i. $BC > CD$ ist, so ist in den Dreiecken SBC und SDC Winkel $BSC > DSC$ (§. 43); mithin ist auch $ASB + BSC > ASD + DSC$, oder $ASB + BSC > ASC$.

Fig. 129.



2. In jedem Dreikante ist die Summe aller Seiten kleiner als $4R$.

Beweis. Schneidet man die drei Kanten durch eine beliebige Ebene in den Punkten A, B, C, so sind diese die Scheitel dreier neuer Dreikante. Bezeichnet man die Winkel des Dreieckes ABC mit A, B, C, und die übrigen Kantenwinkel der neu erhaltenen Dreikante mit A', A'', B', B'', C', C'', so ist nach 1 $\quad A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' > A + B + C$,
oder $\quad A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' > 2R$.

Nun ist

$$ASB + ASC + BSC + A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' = 6R,$$

daher, wenn man von dieser Gleichung die letzte Ungleichung subtrahiert,

$$ASB + ASC + BSC < 4R.$$

Zusatz. Auf gleiche Weise läſst sich auch der folgende allgemeine Satz beweisen:

In jeder Ecke ist die Summe aller Seiten kleiner als 4R.

§. 233. **Lehrsatz.** In jedem Dreikante ist die Summe aller Winkel größer als 2R und kleiner als 6R.

Beweis. Sind A, B, C die Winkel eines Dreikants und a′, b′, c′ die entsprechenden Seiten seines Polardreikants, so ist nach §. 229, 2

$A + a' = 2R$, $B = b' = 2R$, $C + c' = 2R$, daher

$A + B + C + a' + b' + c' = 6R$; aber nach §. 232, 2 ist

$a' + b' + c' < 4R$, folglich $A + B + C > 2R$.

Auch folgt aus $A + B + C + a' + b' + c' = 6R$, daſs $A + B + C < 6R$ sein müſse.

§. 234. **Lehrsätze.**

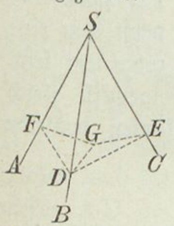
1. Gleichen Winkeln eines Dreikants liegen gleiche Seiten gegenüber.

2. Dem größeren Winkel eines Dreikants liegt eine größere Seite gegenüber.

3. Gleichen Seiten eines Dreikants liegen gleiche Winkel gegenüber.

4. Der größeren Seite eines Dreikants liegt ein größerer Winkel gegenüber.

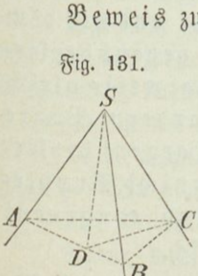
Fig. 130.



Beweis zu 1. Es sei (Fig. 130) A(SC)B = B(SA)C. Man ziehe von einem Punkte D in der Kante SB die DG ⊥ ASC, DE ⊥ SC und DF ⊥ SA und ziehe ferner GE und GF; dann ist (§. 210) GE ⊥ SC und GF ⊥ SA, also sind DEG und DFG die Winkel, welche nach der Voraussetzung gleich sind. Die rechtwinkligen Dreiecke DGE und DGF sind demnach congruent, daher DE = DF; somit ist auch $\triangle$ SED $\cong$ SFD, also Winkel DSE = DSF, d. i. (DE) = (DF).

Beweis zu 2. Es sei (Fig. 131) A(SC)B > B (SA) C. Man lege durch SC eine Ebene CSD so, daſs sie mit ASC einen Flächenwinkel bilde, welcher B(SA)C gleich ist; dann hat die dreiseitige Ecke SACD zwei gleiche Flächenwinkel, also sind nach 1. auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten (AD) und (CD) gleich. Nun ist in der dreiseitigen Ecke SBCD, (BD) + (CD) > (BC); folglich ist auch (BD) + (AD) > (BC), oder (AB) > (BC).

Fig. 131.



Der Beweis zu 3. wird indirect mit Zuziehung von 2. geführt.

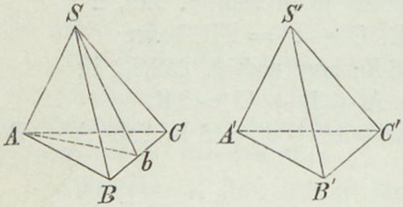
Beweis zu 4. indirect mit Zuziehung von 1. und 2.

§. 235. **Lehrsätze** über die Congruenz und die Symmetrie der Dreikante.

1. Zwei Dreikante, in denen zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch.

2. Zwei Dreikante, in denen zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch.

Fig. 132.



Beweis zu 1. Es sei (Fig. 132) (AB) = (A'B'), (BC) = (B'C') und A (SB) C = A' (S'B') C'. Man lege die beiden Dreikante so in einander, dass die Scheitel S' und S, die Kanten S'B' und SB, und die Seiten (A'B') und (AB) auf einander fallen; dann muss wegen der Gleichheit der Flächenwinkel auch die Seitenfläche B'S'C' auf BSC, und weil die Seiten (B'C') und (BC) gleich sind, S'C' auf SC, und endlich auch A'S'C' auf ASC fallen, da durch zwei sich schneidende Gerade nur eine Ebene möglich ist. Folglich decken sich die beiden Dreikante.

Folgen die gleichen Bestandstücke im entgegengesetzten Sinne aufeinander, so ist das eine Dreikant mit dem Scheiteldreikant des andern congruent und daher (§. 231 a und c) mit dem andern symmetrisch.

Beweis zu 2. Denkt man sich zu beiden Dreikanten die Polardreikante construiert, so müssen in diesen (§. 229, 2) zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich, folglich nach 1. sie selbst congruent sein. Dann sind aber in denselben alle entsprechenden Bestandstücke folgeweise gleich und es muss daher (§. 229, 2) auch in den gegebenen Dreikanten dasselbe der Fall sein; mithin sind diese congruent.

Der Beweis für die Symmetrie, wie bei 1.

3. Zwei Dreikante, in denen zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel paarweise gleich und die dem andern Paare gleicher Seiten gegenüberliegenden Winkel nicht Supplemente sind, sind congruent oder symmetrisch.

4. Zwei Dreikante, in denen zwei Winkel und die dem einen Winkel gegenüberliegende Seite paarweise gleich und die dem andern Paare gleicher Winkel gegenüberliegenden Seiten nicht Supplemente sind, sind congruent oder symmetrisch.

Beweis zu 3. Es sei (Fig. 132) (AB) = (A'B'), (AC) = (A'C'), A(SC) B = A' (S'C') B' und A (SB) C + A' (S'B') C' $\gtrless$ 2 R. Legt man die beiden Dreikante so in einander, dass S' auf S, S'C' auf SC und (A'C') auf (AC) fällt, so wird wegen der Gleichheit der Flächenwinkel auch die Seitenfläche C'S'B' auf CSB fallen. Dann muss aber auch die Kante S'B' auf SB fallen. Denn fiele S'B' nicht auf SB, sondern etwa auf Sb, so wäre (nach 1.) das Dreikant SAbC $\cong$ S'A'B'C', daher A (Sb) C = A' (S'B') C' und (Ab) = (A'B') = (AB), somit (nach §. 234, 3) auch A (SB) b = A (Sb) B; da nun A (Sb) B + A (Sb) C = 2R (als Nebenkeile), so wäre auch A (SB) b + A' (S'B') C' = 2R oder A (SB) C + A' (S'B') C' = 2R, was der Voraussetzung widerspricht. Es müssen demnach S'B' und SB aufeinanderfallen und daher die Dreikante congruent sein.

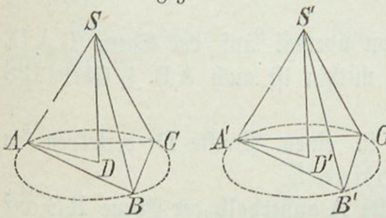
Der Beweis für die Symmetrie, wie bei 1.

Beweis zu 4. mittelst der Polardreikante, wie bei 2., mit Zuziehung von 3.

5. Zwei Dreikante, in denen alle drei Seiten paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch.

6. Zwei Dreikante, in denen alle drei Winkel paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch.

Fig 133.



Beweis zu 5. Es sei (Fig. 133) (AB) = (A'B'), (AC) = (A'C') und (BC) = (B'C'). Macht man SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C' und legt durch die Punkte A, B, C, und A', B', C' die Ebenen ABC und A'B'C'; zieht ferner SD $\perp$ ABC, S'D' $\perp$ A'B'C' und beschreibt um die Dreiecke ABC und A'B'C' Kreise, so fallen deren Mittelpunkte in die Fußpunkte D, D' der Normalen SD und S'D' (§. 211, a). Da nun $\triangle$ ASB $\cong$ A'S'B', so ist AB = A'B'; ebenso folgt AC = A'C' und BC = B'C', und somit sind die Dreiecke ABC und A'B'C' congruent; daher müssen auch die um dieselben beschriebenen Kreise gleich sein, folglich der Halbmesser AD = A'D'. Aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke ADS und A'D'S' folgt endlich DS = D'S'.

Legt man nun das Dreikant S'A'B'C' so in das Dreikant SABC, dass sich die Dreiecke A'B'C' und ABC decken, so werden auch die um sie beschriebenen Kreise, folglich auch ihre Mittelpunkte D' und D aufeinander fallen; da ferner in D auf ABC nur eine Normale möglich ist, so fällt D'S' in die Richtung DS und wegen D'S' = DS auch der Punkt S' in S; folglich fallen auch die Kanten und Seitenflächen der Dreikante aufeinander.

Der Beweis für die Symmetrie, wie bei 1.

Beweis zu 6. mittelst der Polardreikante, wie bei 2., mit Zuziehung von 5.

IV. Aufgaben.

§. **236.** Constructionsaufgaben.

1. (Forderungssatz.) Durch drei gegebene Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene zu legen.

2. Von einem gegebenen Punkte im Raume zu einer gegebenen Geraden die Normale zu ziehen.

Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und fälle in derselben von dem gegebenen Punkte die Normale auf die gegebene Gerade.

3. Durch einen gegebenen Punkt im Raume mit einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen.

Die Auflösung ist der früheren analog.

4. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden zu dieser die normale Ebene zu legen (§. 204, Folges.).

5. Von einem Punkte A außerhalb einer Ebene zu dieser die Normale zu ziehen (Fig. 117).

Man ziehe in der Ebene RS eine beliebige Gerade DE, fälle in der durch A und DE gelegten Ebene von A auf DE die Normale AD; in D errichte man in der Ebene RS auf DE die Normale DB und ziehe darauf in der durch den Winkel BAD gelegten Ebene von A aus die Normale AB; diese ist dann normal zur Ebene RS.

Denn DE steht nach der Construction normal auf der Ebene BAD, daher ist Ebene RS $\perp$ ABD (§. 219, 1), mithin ist auch AB $\perp$ Ebene RS (§. 219, 2).

6. Auf eine Ebene RS (Fig. 117) in einem Punkte D derselben die Normale zu errichten.

Man fälle von einem beliebigen Punkte A außerhalb der Ebene RS auf diese die Normale AB (Aufg. 5), lege durch AB und D eine Ebene und ziehe in dieser durch D die DC $\parallel$ AB; DC ist dann die gesuchte Normale (§. 207, 2).

7. Durch eine gegebene Gerade in einer Ebene die zu dieser normale Ebene zu legen (Aufg. 6 und §. 219, 1).

V. Übungssätze und Übungsaufgaben.

§. 237. Übungssätze.

1. Die Projection einer schiefen Strecke auf einer Ebene ist um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel ist.

2. Jeder Punkt der Halbierungsebene eines Keiles hat von den Seiten desselben gleiche Abstände.

4. Verbindet man die Schnittpunkte, in denen zwei parallele Ebenen von parallelen Geraden geschnitten werden, durch entsprechende Strecken, so erhält man zwei congruente Vielecke.

§. 238. Constructionsaufgaben.

1. Von einem gegebenen Punkte einer Ebene zu dieser eine Gerade unter einem gegebenen Neigungswinkel zu ziehen.

Man errichte in einem beliebigen andern Punkte der Ebene auf dieselbe die Normale, lege durch diese und den gegebenen Punkt eine Ebene und construiere in derselben an den gegebenen Punkt den gegebenen Neigungswinkel so, dass der eine Schenkel in der gegebenen Ebene liegt; der zweite Schenkel ist die verlangte schiefe Gerade.

2. Eine Ebene unter einem gegebenen Neigungswinkel gegen eine gegebene Ebene zu construieren.

Man errichte auf eine Gerade AB der Ebene in einem beliebigen Punkte C die Normale in dieser Ebene und dann eine zweite Normale auf die Ebene, lege durch diese beiden Normalen eine Ebene und construiere in derselben an C den gegebenen Neigungswinkel so, dass der eine Schenkel in die gegebene Ebene fällt; die durch den zweiten Schenkel und die Gerade AB gelegte Ebene ist die verlangte Ebene.

3. Durch einen Punkt außerhalb zweier sich schneidenden Ebenen eine dritte Ebene zu legen, welche zu den beiden ersteren normal ist (§. 219, 1).

4. Aus den drei Seiten eines Dreikants einen Winkel desselben durch Construction in einer Ebene zu finden.

Vergl. Construction zu §. 234, 1.

5. Aus den drei Winkeln eines Dreikants eine Seite desselben zu construieren.

Die Construction ist mit Hilfe des Polardreikants nach §. 229 auf die Aufg. 4 zurückzuführen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im allgemeinen.

I. Ebenflächige Körper.

§. 239. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger Körper oder ein Polyeder. Zur Begrenzung eines Polyeders sind wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen heißen die Flächen des Polyeders und bilden zusammen dessen Oberfläche; die Schnittlinien der Flächen heißen die Kanten und die von den Flächen gebildeten Ecken die Ecken des Polyeders.

1. Die Pyramide.

§. 240. Wird eine drei- oder mehrseitige Ecke durch eine alle Kanten derselben treffende Ebene geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder eine Pyramide. Die Schnittfläche heißt die Grundfläche, die anderen Grenzflächen heißen die Seitenflächen, die Schnittlinien der letzteren mit einander die Seitenkanten, und die mit der Grundfläche die Grundkanten der Pyramide. Den gemeinsamen Schnittpunkt der Seitenkanten nennt man den Scheitel, und den Abstand des Scheitels von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt der Pyramide.

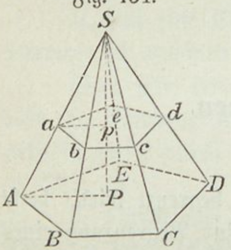
Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche theilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein. Die dreiseitige Pyramide ist das einfachste Polyeder; sie wird von vier Dreiecken begrenzt und heißt daher auch das Tetraeder.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, heißt gerade, jede andere schief. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenvieleck, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Höhe ist (§. 211, Folges. a); die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke.

Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein reguläres Polygon ist, heißt regelmäßig oder regulär. Ihre Seitenflächen sind congruente gleichschenklige Dreiecke; die Höhe eines jeden derselben heißt die Seitenhöhe der regulären Pyramide.

§. 241. Lehrsätze. 1. Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich und b) die Flächeninhalte beider verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Fig. 134.



Beweis. Es sei (Fig. 134) abcde $\parallel$ ABCDE.

a) Folgt unmittelbar aus §. 227, 3.

b) Ist $SP \perp ABCDE$, also auch $Sp \perp abcde$, und legt man durch ASP eine Ebene, welche die beiden Vielecke in den Geraden ap und AP schneidet, so ist $ap \parallel AP$, daher $ab : AB = Sa : SA = Sp : SP$. Nun ist $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$ (§. 163, 1), folglich auch $abcde : ABCDE = Sp^2 : SP^2$.

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Flächen liegende Theil der Pyramide ein Pyramidenstumpf, der zwischen der Schnittfläche und dem Scheitel liegende Theil aber die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und so vielen Trapezen als Seitenflächen begrenzt, als jedes der Vielecke Seiten hat. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Ist die Pyramide eine gerade oder eine reguläre, so ist es auch der Pyramidenstumpf. In einem geraden Pyramidenstumpfe sind alle Seitentrapeze gleichschenklig, in einem regulären zugleich congruent. In dem letzteren heißt die Höhe eines jeden Seitentrapezes die Seitenhöhe des regulären Pyramidenstumpfes.

2. Werden zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in gleichen Abständen vom Scheitel durch Ebenen

geschnitten, welche zu den Grundflächen parallel sind, so sind die Schnittflächen flächengleich.

Es seien P und P′ zwei Pyramiden über den Grundflächen $g = g'$ mit den Höhen $h = h'$, f und f' ihre Schnittflächen in den Abständen $d = d'$ vom Scheitel. Dann ist (nach 1) $f : g = d^2 : h^2$, und $f' : g' = d'^2 : h'^2 = d^2 : h^2$; daher $f : g = f' : g'$ und, da $g = g'$ ist, auch $f = f'$.

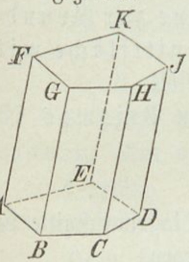
3. Jeder durch den Scheitel und die Grundfläche einer Pyramide geführte ebene Schnitt ist ein Dreieck.

Folgesatz. Jede vielseitige Pyramide läſst sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden von der Höhe der ganzen Pyramide zerlegen.

2. Das Prisma und das Prismatoid.

§. 242. Werden drei oder mehrere Ebenen, welche sich in parallelen Geraden schneiden, durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder ein Prisma. Die zwei parallelen Schnittflächen nennt man die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen die Seitenflächen, die Schnittlinien der letzteren mit einander die Seitenkanten, und die mit den Grundflächen die Grundkanten des Prismas. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

Fig. 135.



Der Körper ABCDEFGHIK (Fig. 135) ist ein Prisma, wenn AF ∥ BG ∥ CH ∥ DI ∥ EK, und die Ebene ABCDE ∥ FGHIK ist.

Folgesätze. 1. Die beiden Grundflächen eines Prismas sind congruente Vielecke (§§. 223, 54 und 213).

2. Alle Seitenflächen des Prismas sind Parallelogramme.

3. Alle Seitenkanten des Prismas sind einander gleich.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt des Prismas.

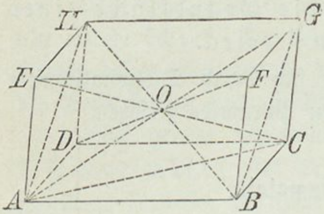
§. 243. Nach der Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man drei-, vier- oder mehrseitige Prismen. Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen heißt ein Prisma gerade oder schief, je nachdem die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht oder schief stehen.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten gleich sind, heißt ein Cubus oder Würfel; jede Kante heißt auch Seite des Cubus. Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Cubus von sechs Quadraten begrenzt.

§. **244.** Unter der Diagonale eines Parallelepipeds versteht man die Verbindungsstrecke der Scheitel zweier Ecken, welche keine gemeinsame Seitenfläche haben. Ein Parallelepiped hat vier Diagonalen.

Lehrsätze. 1. In jedem Parallelepiped schneiden sich die Diagonalen in demselben Punkte und halbieren einander.

Fig. 136.



Beweis. Legt man durch die Kanten AB und HG (Fig. 136) eine Ebene, so ist die Schnittfläche ABGH ein Parallelogramm (§. 54, 3); es müssen sich also in demselben die Diagonalen AG und BH in einem Punkte O halbieren (§. 56, 1). Ebenso lässt sich beweisen, dass sich BH und CE, dann CE und DF, endlich DF und AG in demselben Punkte O halbieren.

2. In jedem rechtwinkligen Parallelepiped ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate der drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten (Fig. 136).

Es sei das Parallelepiped ABCDEFGH rechtwinklig. Dann ist

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2$$
$$= AB^2 + BC^2 + BF^2.$$

§. **245. Lehrsätze.** 1. Wird ein Prisma durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit der Grundfläche congruent.

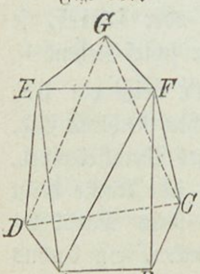
2. Jeder Diagonalschnitt eines vielseitigen Prismas ist ein Parallelogramm.

Beide Sätze beruhen auf §. 223.

Folgesatz. Jedes vielseitige Prisma lässt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen von der Höhe des ganzen Prismas zerlegen.

§. 246. Ein Körper, welcher von zwei beliebigen parallelen Vielecken als Grundflächen, und im allgemeinen von Dreiecken, welche mit je einer Grundfläche eine Seite, und mit der andern einen Eckpunkt gemeinsam haben, als Seitenflächen begrenzt wird, heißt ein Prismatoid (Fig. 137).

Fig. 137.



Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen ABCD und EFG heißt die Höhe des Prismatoids; die Schnittlinien der Seitenflächen mit einander und mit den Grundflächen heißen bezüglich die Seitenkanten oder die Grundkanten.

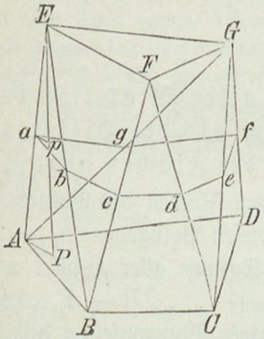
Sind zwei gegenüberliegende Seiten der beiden Grundflächen (wie AB und EF) parallel, so fallen zwei Seitendreiecke (ABF und AEF) in ein Trapez (ABFE), und, wenn die parallelen Seiten auch gleich sind,, in ein Parallelogramm zusammen. Unter den Seitenflächen eines Prismatoids können daher auch Trapeze oder Parallelogramme vorkommen.

Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoids gleich viele Seiten und sind außerdem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so heißt das Prismatoid insbesondere ein *Obelisk*, und zwar nach der Zahl der Seitenflächen ein *drei-*, *vier-* oder *mehrseitiger*. Der dreiseitige Obelisk ist entweder ein dreiseitiger Pyramidenstumpf oder ein dreiseitiges Prisma.

Ein Prismatoid, dessen eine Grundfläche sich auf eine Kante reduciert, heißt ein *Sphenisk* (Keil).

Zusatz. Das Prismatoid faßt in der Form des Obelisken für besondere Annahmen seiner Grundflächen alle bisher betrachteten Körperformen in sich. Sind die gegenüberliegenden Seiten der Grundflächen eines Obelisken nicht nur parallel, sondern auch gleich, so wird der Obelisk zu einem Prisma; sind die parallelen Seiten proportioniert, so stellt er einen Pyramidenstumpf vor; läßt man endlich die kleinere Grundfläche immer mehr abnehmen, bis sie in einem Punkt verschwindet, so geht der Obelisk in die Pyramide über.

Fig. 138.



§. **247. Lehrsatz.** *Legt man durch die Mitte a einer Seitenkante AE des Prismatoids (Fig. 138) eine zu den Grundflächen parallele Schnittfläche, so halbiert dieselbe a) auch alle übrigen Seitenkanten und b) die Höhe.*

Es sei $Ea = Aa$ und $abcdefg \parallel ABCD$.

a) Da die Schnittlinien ab, bc, cd, ... der Ebene abcdefg mit den Seitenflächen zu den Grundkanten AB EF, BC, ... parallel sind, so folgt aus $Ea = Aa$ auch $Eb = Bb$, $Fc = Bc$, ...

b) Wird die Höhe EP des Prismatoids von der Ebene abcdefg in p geschnitten, so ist $ap \parallel AP$, daher $Ep : Pp = Ea : Aa$; aber $Ea = Aa$, daher auch $Ep = Pp$.

Die Schnittfläche abcdefg heißt der *Mittelschnitt* des Prismatoids.

3. Polyeder überhaupt und die regulären insbesondere.

§. **248.** Ein Polyeder, welches nur hohle Flächenwinkel hat, heißt *convex*. Nur von solchen Polyedern ist in dem Nachfolgenden die Rede.

Lehrsätze. 1. *In jedem Polyeder ist die Anzahl W aller Kantenwinkel doppelt so groß als die Anzahl K aller Kanten.*

Denn jedes Polyeder hat so viele Winkel, als die Anzahl der Seiten aller Flächen beträgt; diese Anzahl ist aber doppelt so groß als die Anzahl Kanten, da jede Kante in zwei anliegenden Flächen als Seite vorkommt; folglich

$$W = 2K.$$

2. *In jedem Polyeder ist die dreifache Anzahl E der Ecken, ebenso die dreifache Anzahl F der Flächen höchstens gleich der doppelten Anzahl K der Kanten.*

Denn an jeder Ecke, ebenso in jeder Fläche, kommen mindestens drei Winkel vor; somit ist 3E, und ebenso 3F entweder gleich oder kleiner als die Anzahl aller Winkel; diese beträgt aber 2K (nach 1), folglich ist

$$3E \leqq 2K \quad \text{und} \quad 3F \leqq 2K.$$

§. **249. Lehrsätze.** 1. *In jedem Polyeder ist die Summe aller Winkel an der Oberfläche gleich sovielmal 4 Rechten, als die um 2 verminderte Anzahl E der Ecken anzeigt.*

Beweis. Projiciert man alle Flächen des Polyeders auf eine Ebene, welche zu keiner Kante normal ist, so ist die Projection jeder Fläche wieder ein Polygon von derselben Seitenanzahl und daher die Summe S aller Winkel an der Oberfläche des Polyeders gleich der Summe der Vieleckswinkel aller Projectionsflächen. Fallen nun die Projectionen von e_1-Ecken des Polyeders auf den Umfang der Projectionsfigur und die Projectionen von e_2-Ecken in das Innere derselben, so geben die Vieleckswinkel aller Projectionsflächen zusammen die doppelte Winkelsumme eines e_1-Eckes und e_2 volle Winkel; folglich ist

$$S = 2(e_1 - 2) \,.\, 2R + e_2 \,.\, 4R = (e_1 + e_2 - 2) \,.\, 4R,$$

oder, da $e_1 + e_2 = E$ ist,

$$S = (E - 2) \,.\, 4R.$$

2. In jedem Polyeder ist die Summe aller Winkel an der Oberfläche auch gleich sovielmal 4 Rechten, als die Differenz der Anzahl K der Kanten und der Anzahl F der Flächen anzeigt.

Beweis. Ist die Zahl der Seiten der einzelnen Flächen des Polyeders $n_1, n_2, n_3, \ldots$, so sind die Summen der Winkel in diesen Polygonen $(n_1 - 2)$ $2R$, $(n_2 - 2) \,.\, 2R$, $(n_3 - 2) \,.\, 2R$, .. daher die Summe aller Winkel auf der Oberfläche des Polyeders $S = (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots) \,.\, 2R - F \,.\, 4R$. Nun ist $n_1 + n_2 + n_3 \ldots = 2K$, da jede Kante zwei Polygonseiten bildet; daher $S = K \,.\, 4R - F \,.\, 4R$, oder

$$S = (K - F) \,.\, 4R.$$

§. **250. Lehrsatz.** In jedem Polyeder ist die Summe der Anzahl E der Ecken und der Anzahl F der Flächen um 2 größer als die Anzahl K der Kanten (Euler'scher Satz).

Beweis. Nach §. 249 ist die Winkelsumme an der Oberfläche $S = (E - 2) \,.\, 4R$ und auch $S = (K - F) \,.\, 4R$. Hieraus folgt $E - 2 = K - F$, oder

$$E + F = K + 2.$$

Die Gleichung $E + F = K + 2$ sowie die in §. 248 abgeleiteten Ungleichungen $3E \leqq 2K$ und $3F \leqq 2K$ sind in Beziehung auf E und F symmetrisch, d. h. sie bleiben richtig, wenn man in denselben E und F mit einander vertauscht.

Folgesätze. 1. Aus $E + F = K + 2$ folgt:

Hat ein Polyeder eine gerade Anzahl Kanten, so ist die Anzahl der Ecken und die der Flächen zugleich gerade oder ungerade; hat dagegen das Polyeder eine ungerade Anzahl Kanten, so muss, wenn die Zahl der Ecken gerade oder ungerade ist, die Zahl der Flächen ungerade oder gerade sein.

2. Subtrahiert man von $2E + 2F = 2K + 4$ die Ungleichungen

$3F \leqq 2K$ und $3E \leqq 2K$, so erhält man

$$2E \geqq F + 4 \text{ und } 2F \geqq E + 4.$$

Die doppelte Zahl aller $\left\{\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Flächen}\end{matrix}\right\}$ eines Polyeders ist also mindestens um 4 größer als die Zahl der $\left\{\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Flächen}\end{matrix}\right\}$.

3. Subtrahiert man von $3E + 3F = 3K + 6$ die Ungleichungen $3F \leqq 2K$ und $3E \leqq 2K$, so ergibt sich

$$3E \geqq K + 6 \quad \text{und} \quad 3F \geqq K + 6.$$

Die dreifache Zahl aller $\left\{\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Flächen}\end{matrix}\right\}$ eines Polyeders ist also mindestens um 6 größer als die Zahl aller Kanten.

4. In einem Polyeder kann nicht jede $\left\{\begin{matrix}\text{Ecke}\\ \text{Fläche}\end{matrix}\right\}$ mehr als fünf Kanten haben.

Denn würden in jeder Ecke sechs Kanten zusammenstoßen, so wäre, da jede Kante zu zwei Ecken gehört, $6E = 2K$, also $3E = K$, was nach 3. nicht möglich ist. Wären alle Flächen von sechs Kanten begrenzt, so müsste, da jede Kante zu zwei anstoßenden Flächen gehört, $6F = 2K$, also $3F = K$ sein, was ebenfalls dem Satze 3. widerstreitet.

§. 251. Ein Polyeder, dessen Flächen congruente reguläre Vielecke sind und congruente Ecken bilden, heißt ein *regelmäßiges* oder *reguläres Polyeder*.

Lehrsatz. *Es kann nicht mehr als fünf reguläre Polyeder geben.*

Beweis. Es seien die Flächen eines regulären Polyeders Vielecke von m Seiten, deren je n eine Ecke bilden, E sei die Anzahl der Ecken, F die Zahl der Flächen und K die Zahl der Kanten des Polyeders. Dann ist die Gesammtzahl der Seiten aller Flächen 2K, da jede Kante als Seite zweier zusammenstoßenden Flächen vorkommt; sie ist aber, da in jeder Ecke n Seiten zusammenstoßen, auch nE und, da jede Fläche m Seiten hat, auch mF; es ist mithin $nE = 2K$ und $mF = 2K$, oder

$$E = \frac{2K}{n} \quad \text{und} \quad F = \frac{2K}{m}.$$

Nun ist (nach §. 250) $E + F = K + 2$, daher $\frac{2K}{n} + \frac{2K}{m} = K + 2$, und folglich

$$K = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}.$$

Damit K positiv werde, kann man m und n nur solche Werte beilegen, für welche $2(m+n) > mn$ wird. Hienach ist die Bildung regulärer Polyeder nur für folgende Werte von m und n möglich:

1.	$m = 3,$	$n = 3,$	woraus	$K = 6,$	$E = 4,$	$F = 4;$
2.	$m = 4,$	$n = 3,$	„	$K = 12,$	$E = 8,$	$F = 6;$
3.	$m = 3,$	$n = 4,$	„	$K = 12,$	$E = 6,$	$F = 8;$
4.	$m = 5,$	$n = 3,$	„	$K = 30,$	$E = 20,$	$F = 12;$
5.	$m = 3,$	$n = 5,$	„	$K = 30,$	$E = 12,$	$F = 20.$

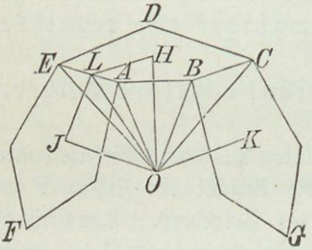
Die hiedurch bestimmten Körper heißen: 1. das reguläre *Tetraeder*, 2. das reguläre *Hexaeder* (der Cubus), 3. das reguläre *Octaeder*, 4. das reguläre *Dodekaeder* und 5. das reguläre *Ikosaeder*.

Das Hexaeder und das Octaeder haben gleiche Kantenzahl, die Zahl der Ecken des einen ist gleich der Zahl der Flächen des andern, und die Seitenzahl jeder Fläche des einen ist gleich der Kantenzahl jeder Ecke des andern. Man nennt deshalb diese zwei regulären Polyeder einander zugeordnet. Aus demselben Grunde sind das Dodekaeder und das Ikosaeder einander zugeordnet. Das Tetraeder ist sich selbst zugeordnet.

§. 252. **Lehrsatz.** Jedes reguläre Polyeder hat einen Punkt, der a) von allen Seitenflächen, und b) von allen Eckpunkten gleich weit absteht.

Beweis. a) Es seien (Fig. 139) AEC, AEF,... Seitenflächen eines regulären Polyeders und H, J,... ihre Mittelpunkte. Zieht man aus H und J zu der Mitte L der Kante AE die Strecken HL und JL, so stehen diese zu AE normal, daher ist HLJ der Neigungswinkel der Ebenen AEC und AEF, und es sind diese Ebenen zu der durch den Winkel HLJ gelegten Ebene normal (§. 219, 1). Werden daher auf AEC und AEF in H und J Normale errichtet, so müssen sie in der Ebene HLJ liegen (§. 219, 3) und sich in einem Punkte O schneiden. Zieht man nun OL, so ist $\triangle OHL \cong OLJ$, daher $OH = OJ$; d. h. der Punkt O hat von den zwei Seitenflächen gleiche Abstände. Was von AEC und AEF gilt, gilt auch von den übrigen Seitenflächen. Der Punkt O hat also von allen Seitenflächen des regulären Polyeders gleiche Abstände.

Fig. 139.



b) Da ferner OH, OJ, OK,... zu den Seitenflächen AEC, AEF, BCG,... normal sind und durch die Mittelpunkte H, J, K,... derselben gehen, so müssen (nach §. 211) alle schiefen Strecken aus O nach den Eckpunkten der Seitenflächen gleiche Länge haben. Der Punkt O hat also auch von allen Eckpunkten des Polyeders gleiche Abstände.

Der Punkt O heißt der Mittelpunkt des regulären Polyeders.

Auf dem vorstehenden Lehrsatze und der in §. 251 nachgewiesenen dualen Zuordnung der regulären Polyeder beruhen folgende Sätze über die Umgestaltung dieser Körper:

1. Werden alle Flächen eines regulären Polyeders durch ihre Mittelpunkte als Ecken ersetzt, so sind diese die Ecken eines zugeordneten regulären Polyeders.

2. Werden alle Ecken eines regulären Polyeders durch ebene, zu ihren Kanten gleichgeneigte Flächen ersetzt, so sind diese die Flächen eines zugeordneten regulären Polyeders.

II. Krummflächige Körper.

§. 253. Körper, welche ganz oder theilweise von krummen Flächen begrenzt werden, heißen krummflächige Körper.

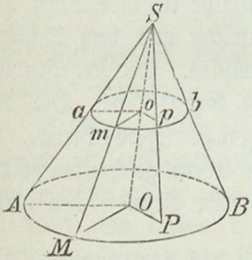
1. Der Kegel.

§. 254. Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene einer Kreislinie geht, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine krumme Fläche, die man eine *konische Fläche* nennt. Die gegebene Kreislinie heißt die *Leitlinie*, und der gegebene feste Punkt der *Scheitel* der konischen Fläche.

Lehrsatz. *Jeder zur Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer konischen Fläche ist ein Kreis.*

Beweis. Es sei S (Fig. 140) der Scheitel und der Kreis AMB die Leitlinie der konischen Fläche, ferner Ebene amb || AMB. Zieht man von S zu dem Mittelpunkte O der Leitlinie die Strecke SO, welche die Schnittfläche in o schneidet, und legt durch SO und einen willkürlichen Punkt m der Schnittlinie eine Ebene, welche die konische Fläche in der Geraden SmM schneidet, so ist om || OM; daher hat man om : OM = So : SO. Ebenso ist oa : OA = So : SO, und folglich om : OM = oa : OA, woraus wegen OM = OA auch om = oa folgt. Es sind also alle Punkte im Umfange des Schnittes von o gleich weit entfernt, mithin ist der Schnitt ein Kreis.

Fig. 140.



§. 255. Wird eine konische Fläche durch eine zur Ebene der Leitlinie parallele Ebene geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein *Kegel*. Die ebene Schnittfläche ist eine Kreisfläche (§. 254) und heißt die *Grundfläche*, die sie begrenzende konische Fläche wird der *Mantel* des Kegels genannt. Die Strecke, welche den Scheitel und den Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt die *Achse*, und jede Strecke, in welcher der Mantel von einer durch die Achse gelegten Ebene geschnitten wird, eine *Seite* des Kegels. Den Abstand des Scheitels von der Grundfläche des Kegels nennt man die *Höhe* desselben.

Ist die Achse zur Grundfläche normal, so heißt der Kegel ein *gerader*, sonst ein *schiefer*. Einen geraden Kegel kann man sich durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten als Achse entstanden denken. In einem geraden Kegel sind alle Seiten gleich, und die Achse stellt zugleich die Höhe vor. In einem schiefen Kegel gibt es eine kürzeste und eine längste Seite; dieselben liegen in einer durch die Achse und ihre Projection auf die Grundfläche gehenden Ebene.

Ein gerader Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt *gleichseitig*.

Geht durch einen Umfangspunkt der Grundfläche eines Kegels eine Tangente zu dieser und eine Seite, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seite mit der Kegelfläche gemeinsam; sie heißt eine *Berührungsebene* des Kegels.

§. 256. **Lehrsätze.** 1. Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) der Schnitt ein Kreis, und es verhalten sich b) die Flächeninhalte der Schnittfläche und der Grundfläche wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände vom Scheitel des Kegels.

Beweis. Es sei (Fig. 140) die Ebene $amb \parallel AMB$.

a) Folgt aus §. 254.

b) Ist $SP \perp AMB$, also auch $Sp \perp amb$, und legt man durch OSP eine Ebene, welche die beiden Kreise in OP und op schneidet, so ist $op \parallel OP$, daher $ao : AO = So : SO = Sp : SP$. Nun ist $amb : AMB = ao^2 : AO^2$ (§. 183, 1), folglich auch $amb : AMB = Sp^2 : SP^2$.

Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegende Theil des Kegels ein Kegelstumpf, der zwischen der Schnittfläche und dem Scheitel liegende Theil aber der Ergänzungskegel des Stumpfes. Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen ungleichen Kreisflächen als Grundflächen und der zwischen ihnen enthaltenen konischen Mantelfläche begrenzt. Jede Strecke, in welcher der Mantel von einer durch die Achse gehenden Ebene geschnitten wird, heißt Seite des Kegelstumpfes. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Kegelstumpfes.

Ein Kegelstumpf ist, wie der Kegel selbst, gerade oder schief.

2. Jeder Achsenschnitt eines Kegels ist ein Dreieck.

Denn jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einem Durchmesser und die Mantelfläche in zwei Strecken.

In einem geraden Kegel sind alle Achsenschnitte gleichschenklige, congruente und zur Grundfläche normale Dreiecke. In einem schiefen Kegel ist nur eines der Dreiecke gleichschenklig, und nur eines, und zwar dasjenige, welches durch die Projection der Achse auf die Grundfläche geht, zu dieser letzteren normal; diese beiden Dreiecke stehen aufeinander normal.

3. Jeder Achsenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez.

Denn jede durch die Achse gehende Ebene schneidet die Grundflächen in zwei parallelen Durchmessern und die Mantelfläche in zwei nicht parallelen Strecken.

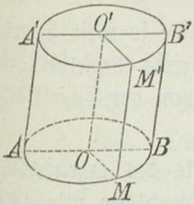
In einem geraden, wie in einem schiefen Kegelstumpfe gilt von den Trapezen als Achsenschnitten dasselbe, was bei den Achsenschnitten des Kegels von den Dreiecken angeführt wurde.

2. Der Cylinder.

§. 257. Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets einer festen, die Ebene einer Kreislinie in ihrem Mittelpunkte schneidenden Geraden parallel bleibt, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine krumme Fläche, die man eine cylindrische Fläche nennt. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie, und die durch ihren Mittelpunkt gehende feste Gerade die Achse der cylindrischen Fläche.

Lehrsatz. Jeder zur Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer cylindrischen Fläche ist ein Kreis, welcher mit der Leitlinie gleichen Halbmesser hat.

Fig. 141.



Beweis. Es sei der Kreis ABM (Fig. 141) die Leitlinie der cylindrischen Fläche, und eine zu diesem Kreise parallele Ebene A'B'M' schneide die Achse OO' in O'. Legt man durch OO' und einen beliebigen Punkt M' der Schnittlinie eine Ebene, welche die cylindrische Fläche in der Geraden MM' schneidet, so ist $OO' \parallel MM'$ und $O'M \parallel OM$; daher ist $OO'M'M$ ein Parallelogramm und folglich $O'M' = OM$. Es ist also der Abstand eines jeden Punktes der Schnittlinie von O' dem Halbmesser der Leitlinie gleich, d. h. der Schnitt ist ein mit der Leitlinie congruenter Kreis.

§. 258. Wird eine cylindrische Fläche durch zwei zur Ebene der Leitlinie parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Cylinder. Die zwei ebenen Schnittflächen sind congruente Kreisflächen (§. 257) und heißen die Grundflächen; die sie begrenzende cylindrische Fläche nennt man den Mantel des Cylinders. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte beider Kreise heißt die Achse, und jede Schnittlinie des Mantels mit einer durch die Achse gelegten Ebene eine Seite des Cylinders. Der Abstand der beiden Grundflächen wird die Höhe des Cylinders genannt.

Alle Seiten des Cylinders sind parallel und einander gleich.

Steht die Achse zu den Grundflächen normal, so heißt der Cylinder ein gerader, sonst ein schiefer. Einen geraden Cylinder kann man sich auch durch Drehung eines Rechteckes um eine Seite als Achse entstanden denken. In einem geraden Cylinder stellt die Achse zugleich die Höhe vor.

Ein gerader Cylinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird gleichseitig genannt.

Geht durch einen Umfangspunkt der Grundfläche eines Cylinders eine Tangente zu dieser und eine Seite, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seite mit der Mantelfläche gemeinsam; eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Cylinders.

§. 259. Lehrsätze. 1. Wird ein Cylinder durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein mit der Grundfläche congruenter Kreis.

Folgt aus §. 257.

2. Jeder Achsenschnitt eines Cylinders ist ein Parallelogramm.

Denn in dem erhaltenen Vierecke sind die Schnittlinien der Ebene mit der Mantelfläche als Seiten des Cylinders parallel und gleich.

In einem geraden Cylinder sind alle Achsenschnitte congruente Rechtecke und stehen zur Grundfläche normal. In einem schiefen Cylinder sind die Achsenschnitte ungleiche Parallelogramme und steht nur einer, und zwar derjenige, welcher durch die Projection der Achse auf die Grundfläche geht, zur Grundfläche normal.

3. Die Kugel.

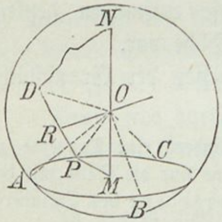
§. **260.** Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser so weit herum, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt derselbe eine krumme Fläche, welche Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt Kugel.

Jeder Punkt der Kugelfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gleich weit entfernt; dieser Punkt heißt darum auch der Mittelpunkt der Kugel. Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Kugeloberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; ebenso alle Durchmesser. Die Endpunkte eines Durchmessers werden Gegenpunkte der Kugelfläche genannt.

Folgesatz. Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand r haben, ist die um diesen Punkt mit dem Halbmesser r beschriebene Kugelfläche.

§. **261. Lehrsatz.** Durch vier Punkte A, B, C und D (Fig. 142), welche nicht in einer Ebene liegen, ist eine Kugel unzweideutig bestimmt.

Fig. 142.



Der geometrische Ort eines Punktes, der von A, B, C gleich weit absteht, ist die im Mittelpunkte M des durch die drei Punkte gehenden Kreises auf diesen errichtete Normale MN (§. 211, b). Jeder Punkt dieser Normalen ist dann von allen Punkten der Peripherie jenes Kreises gleich weit entfernt. Legt man daher durch MN und den vierten außerhalb der Kreisebene liegenden Punkt D eine Ebene, welche die Peripherie des Kreises in P schneidet, und errichtet in dieser letzteren Ebene auf die Verbindungsstrecke DP in ihrer Mitte R die Normale, welche die MN in O trifft, so ist O nicht nur von D und P gleich weit entfernt (§. 46, 1), sondern steht auch von D und den drei Punkten A, B, C, gleich weit ab; O ist somit der Mittelpunkt der durch A, B, C, D gehenden Kugelfläche.

Da es nur einen Punkt O gibt, welcher den obigen Bedingungen entspricht, so kann es auch nur eine einzige Kugelfläche geben, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht.

Die Gerade und die Kugel.

§. **262.** Je nachdem der Centralabstand einer Geraden, d. i. ihr Abstand vom Mittelpunkte einer Kugel, kleiner, ebenso groß, oder größer ist als deren Halbmesser, schneidet die Gerade die Kugel in zwei Punkten, oder berührt sie dieselbe in einem Punkte, oder liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

1. Jede gerade Berührungslinie einer Kugel steht normal zu dem Halbmesser des Berührungspunktes (§. 80).

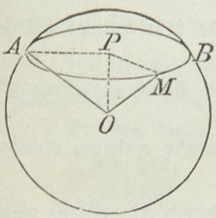
2. Alle von einem Punkte außerhalb einer Kugel an diese gezogenen Berührungsstrecken sind einander gleich (§. 81).

Die Ebene und die Kugel.

§. **263.** Der Centralabstand einer Ebene, d. i. ihr Abstand vom Mittelpunkte einer Kugel, ist entweder kleiner oder ebenso groß, oder größer als deren Halbmesser. Im ersten Falle schneidet die Ebene die Kugel; im zweiten Falle berührt sie dieselbe in einem Punkte; im dritten liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

Lehrsatz. Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Fig. 143.



Beweis. Es sei AMB (Fig. 143) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpunkte O eine Normale OP auf die Schnittfläche, zieht von P nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Strecken PA und PM, ferner noch die Halbmesser OA und OM, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OPA und OPM congruent, daher PA = PM. Daraus folgt, dass alle Umfangspunkte des Schnittes von P gleichen Abstand haben, dass also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis AMB wird ein Kugelkreis genannt.

§. **264.** **Lehrsätze** von den Kugelkreisen.

1. Die Strecke aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte eines Kugelkreises ist normal zur Ebene des letzteren.

2. Die Normale aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Kugelkreises geht durch den Mittelpunkt des letzteren.

3. Die Gerade, welche im Mittelpunkte eines Kugelkreises auf dessen Ebene normal errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

4. Gleichen Kugelkreisen entsprechen gleiche Centralabstände; und umgekehrt.

5. Dem größeren Kugelkreise entspricht ein kleinerer Centralabstand; und umgekehrt.

Die Beweise dieser Sätze stimmen mit jenen für die analogen Sätze von den Sehnen des Kreises in §§. 75 und 77 überein.

Zusätze. a) Unter allen Kugelkreisen ist der durch den Mittelpunkt der Kugel gehende der größte. Er heißt deshalb auch geradezu ein größter Kugelkreis oder ein Hauptkreis. Der Halbmesser eines Hauptkreises der Kugel ist dem Kugelhalbmesser gleich.

b) Zwei Hauptkreise einer Kugel schneiden sich immer in einem Durchmesser derselben und halbieren einander gegenseitig.

c) Durch je zwei Punkte der Kugelfläche, welche nicht Gegenpunkte sind, ist die Lage eines Hauptkreises der Kugel unzweideutig bestimmt. Der von zwei Punkten begrenzte Bogen eines Hauptkreises gibt den sphärischen Abstand dieser Punkte an.

d) Von den beiden Endpunkten des zur Ebene eines Kugelkreises normalen Kugeldurchmessers (§. 264, 3) hat jeder von allen Umfangspunkten des Kugelkreises gleiche sphärische Abstände. Diese zwei Punkte heißen deshalb sphärische Mittelpunkte des Kugelkreises.

Die Umfangspunkte gleicher Kugelkreise haben gleiche sphärische Abstände von ihren entsprechenden sphärischen Mittelpunkten.

§. 265. Lehrsätze von den Berührungsebenen der Kugel.

1. Die Ebene, welche im Endpunkte eines Kugelhalbmessers zu diesem normal ist, ist eine Berührungsebene der Kugel. (§. 80, 1.)

2. Der Halbmesser einer Kugel nach dem Berührungspunkte steht normal auf der Berührungsebene. (§. 80, 2.)

3. Die Normale aus dem Mittelpunkte einer Kugel auf die Berührungsebene geht durch den Berührungspunkt. (§. 80, 3.)

4. Die zur Berührungsebene einer Kugel im Berührungspunkte errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt der Kugel. (§. 80, 4.)

§. 266. Die beiden Theile, in welche die Kugel durch die Ebene eines Kugelkreises getheilt wird, heißen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente und die dazugehörigen Theile der Kugelfläche Kugelmützen oder Calotten. Die Kreisfläche ist die Grundfläche der beiden Kugelsegmente und der Kugelmützen. Der von der Mütze und ihrer Grundfläche begrenzte Theil des zu dieser normalen Durchmessers der Kugel ist die Höhe des Kugelsegmentes und der Kugelmütze.

Der zwischen den Ebenen zweier paralleler Kugelkreise liegende Theil der Kugel heißt eine Kugelschichte und der dazu gehörige Theil der Kugelfläche eine Kugelzone. Der Abstand der beiden Kreisflächen ist die Höhe der Kugelschichte und der Zone.

Dreht sich ein Sector eines Hauptkreises der Kugel um einen seiner Halbmesser, so heißt der dadurch beschriebene Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsector. Derselbe besteht aus einem Kugelsegment und einem Kegel, dessen Scheitel der Kugelmittelpunkt und dessen Grundfläche die Grundfläche des Kugelsegments ist.

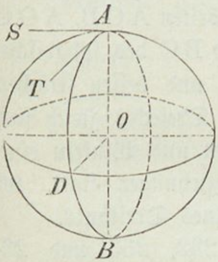
§ 267. Eine Kugel heißt einem Polyeder eingeschrieben, wenn alle Grenzflächen desselben Berührungsebenen der Kugel sind, und umgeschrieben, wenn alle Eckpunkte des Polyeders in der Kugelfläche liegen.

Jedem regulären Polyeder kann eine Kugel ein- und umgeschrieben werden. (Folgt aus §. 252.)

Sphärische Winkel, sphärische Zwei- und Dreiecke.

§. 268. Der Neigungswinkel der Ebenen zweier Hauptkreise einer Kugel heißt der sphärische Winkel der beiden Kreise. Das Maß eines sphärischen Winkels CAD (Fig. 144) ist der zwischen den beiden Kugelkreisen liegende, von jedem ihrer Schnittpunkte um 90° abstehende Kreisbogen CD. Da nämlich CO ⊥ AO und DO ⊥ AO ist, so ist COD der Neigungswinkel der Ebenen der beiden größten Kreise ACB und ADB, und der Bogen CD das Maß dieses Winkels. Ein sphärischer Winkel CAD ist gleich dem Winkel SAT der Tangenten, welche durch einen Schnittpunkt der zwei Kugelkreise an dieselben gezogen werden.

Fig. 144.



§. 269. Ein Theil der Kugelfläche, welcher von zwei größten Halbkreisen der Kugel begrenzt wird, wie z. B. ACBDA (Fig. 144), heißt ein sphärisches Zweieck.

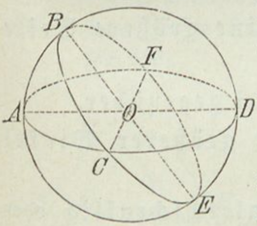
Zu gleichen sphärischen Winkeln derselben Kugel gehören gleiche sphärische Zweiecke; und umgekehrt.

Beweis durch Deckung.

§. 270. Ein Theil der Kugelfläche, welcher von drei Bogen größter Kugelkreise begrenzt wird, heißt ein sphärisches Dreieck; wie ABC (Fig. 145).

Die Kreisbogen AB, AC und BC werden die Seiten, und die sphärischen Winkel ACB, ABC und BAC die Winkel des sphärischen Dreieckes genannt. Die Größe der Seiten wird stets im Bogenmaße angegeben.

Fig. 145.

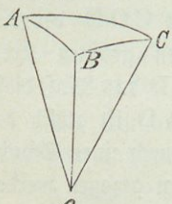


Die Seiten eines jeden sphärischen Dreieckes sind zugleich die Seiten eines zweiten sphärischen Dreieckes, welches das erste zu der ganzen Kugeloberfläche ergänzt. Wenn übrigens nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so ist immer dasjenige sphärische Dreieck zu verstehen, welches kleiner ist als die halbe Kugelfläche. Zu jedem sphärischen Dreiecke, das kleiner ist als die halbe Kugelfläche und dessen eine Seite größer ist als 180°, gehört ein zweites, welches mit jenem zwei Seiten gemeinsam hat und dessen dritte Seite die dritte Seite des ersteren zu 360° ergänzt, somit kleiner als 180° ist. Z. B. das Dreieck ABDEC hat die Seiten ABDE, EC und CA, das Dreieck AEC hat die Seiten AE, EC und CA; ABDE und

AE ergänzen sich zu 360°. Die beiden Dreiecke ergänzen sich gegenseitig zu der halben Kugelfläche; man nennt ein jedes das sphärische Nebendreieck des andern. Da sich aus den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes sogleich auch die Seiten und Winkel seines Nebendreieckes bestimmen lassen, so sollen bei den folgenden Untersuchungen nur solche sphärische Dreiecke vorausgesetzt werden, in denen die Seiten einzeln kleiner als 180° sind.

§. 271. Es sei ABC (Fig. 146) ein sphärisches Dreieck, dessen jede Seite kleiner ist als 180°, und O der Mittelpunkt der Kugel. Zieht man die Halbmesser AO, BO und CO, und legt durch je zwei eine Ebene, so entsteht das Dreikant OABC, dessen Seiten AOB, AOC, und BOC die Seiten AB, AC und BC des sphärischen Dreieckes ABC zum Maße haben, und dessen Flächenwinkel den Winkeln des sphärischen Dreieckes gleich sind. Es finden daher zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes dieselben Beziehungen statt, wie zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreikants.

Fig. 146.



Mit Rücksicht auf die §§. 232, 233 und 234 gelten demnach auch für die sphärischen Dreiecke folgende Sätze:

1. Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte Seite.

2. Die Summe aller drei Seiten ist kleiner als 360°.

3. Die Summe aller drei Winkel ist größer als 180° und kleiner als 540°.

4. Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber.

5. Dem größeren Winkel liegt auch eine größere Seite gegenüber.

6. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

7. Der größeren Seite liegt auch ein größerer Winkel gegenüber.

Ein sphärisches Dreieck heißt gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig, je nachdem es drei oder zwei gleiche, oder lauter verschiedene Seiten hat.

Ein sphärisches Dreieck kann (nach 3) zwei oder auch drei rechte Winkel haben. Ein sphärisches Dreieck, welches keinen rechten Winkel enthält, heißt schiefwinklig; kommt darin ein rechter Winkel vor, so wird es ein rechtwinkliges genannt.

§. 272. Zwei sphärische Dreiecke, in denen alle Seiten und Winkel paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch, je nachdem die gleichen Bestandstücke in demselben oder im entgegengesetzten Sinne aufeinander folgen (§. 231).

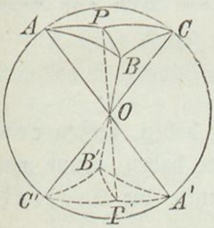
Den sechs Sätzen, welche in §. 235 bezüglich der Congruenz und der Symmetrie der Dreikante bewiesen wurden, entsprechen analoge Sätze bezüglich der Congruenz und Symmetrie der sphärischen Dreiecke.

§. **273.** Ein sphärisches Dreieck, dessen Ecken Gegenpunkte der Ecken eines anderen Dreieckes sind, heißt das Gegendreieck des zweiten; z. B. A'B'C' (Fig. 147) ist das Gegendreieck zu ABC.

Zwei sphärische Gegendreiecke sind, sowie zwei Scheitelecken (§. 231), im allgemeinen symmetrisch, und nur dann congruent, wenn sie gleichschenklig sind.

Lehrsatz. Zwei sphärische Gegendreiecke sind flächengleich.

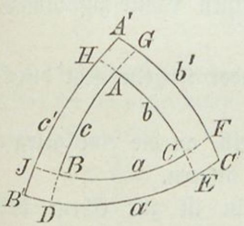
Fig. 147.



Beweis. Legt man (Fig. 147) durch die drei Eckpunkte eines jeden der zwei Gegendreiecke ABC und A'B'C' Kugelkreise, so sind diese einander gleich; denn sie sind zugleich um zwei congruente ebene Dreiecke beschrieben, deren Seiten als Sehnen zu den Seiten der beiden sphärischen Dreiecke gehören. Dann sind aber auch, wenn P und P' die entsprechenden sphärischen Mittelpunkte der zwei gleichen Kugelkreise sind, die sphärischen Abstände PA, PB, PC und P'A', P'B', P'C' einander gleich (§. 264, d). Die Dreiecke PAB, PAC und PBC, ebenso die Dreiecke P'A'B', P'A'C' und P'B'C, sind demnach gleichschenklig, und daher die ersteren folgeweise mit den letzteren congruent. Somit sind die Summen dieser Dreiecke, d. i. die Dreiecke ABC und A'B'C' flächengleich.

§. **274.** Beschreibt man aus den Eckpunkten eines sphärischen Dreieckes, als Polen, größte Kreisbogen, so heißt das dadurch entstehende sphärische Dreieck ein Polardreieck des ersteren.

Fig. 148.



Ist ABC (Fig. 148) ein sphärisches Dreieck und macht man AD = AE = BF = BG = CH = CJ = 90°, so ist, wenn durch die Punkte D und E, F und G, H und J die größten Kreisbogen B'C', A'C' und A'B' beschrieben werden, A'B'C' das Polardreieck des sphärischen Dreieckes ABC, und dieses wieder, wie man leicht sieht, das Polardreieck von A'B'C'.

Lehrsatz. 1. Zwei sphärische Dreiecke, welche Polardreiecke zu einander sind, gehören zu zwei Dreikanten, welche zu einander Polarecken sind.

Denn zieht man zu den Eckpunkten der zwei sphärischen Dreiecke Kugelhalbmesser, so sind diese die Kanten der beiden Dreikante, welche zu den zwei sphärischen Dreiecken gehören. Nun ist jeder Halbmesser des einen Dreieckes normal zu zwei Halbmessern des andern, weil die Seiten des einen um 90°

von den Eckpunkten des andern abstehen, somit ist er auch normal zu der durch diese Halbmesser gelegten Ebene; es ist sonach jede Kante des einen Dreikants normal zu einer Seitenfläche des andern, d. i. die beiden Dreikante sind Polarecken zu einander (§. 229).

2. In zwei sphärischen Polardreiecken sind die Seiten des einen Supplemente der Winkel des andern.

Heißen A, B, C die Winkel und a, b, c die gegenüberliegenden Seiten in dem sphärischen Dreiecke ABC, ferner A', B', C' die Winkel und a', b', c' die Seiten in dem Polardreiecke A'B'C', so ist

$$a + A' = 2R,\quad b + B' = 2R,\quad c + C' = 2R;\ \text{und}$$
$$a' + A = 2R,\quad b' + B = 2R,\quad c' + C = 2R.$$

Folgt aus §. 229, 2, kann aber auch unmittelbar aus Fig. 148 abgeleitet werden.

Lage zweier Kugeln gegen einander.

§. **275.** Zwei Kugeln, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen concentrisch. Zwei Kugeln, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man excentrisch, und die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte die Centrale der beiden Kugeln.

1. Haben zwei Kugelflächen einen Punkt der Centrale oder ihrer Verlängerung gemeinsam, so berühren sie sich in diesem Punkte, und zwar bezüglich von außen oder von innen.

2. Haben zwei Kugelflächen mehrere Punkte gemeinsam, so schneiden sie sich in diesen Punkten.

Lehrsatz. Der Schnitt zweier Kugelflächen ist ein Kreis.

Denn zieht man von zwei beliebigen Schnittpunkten der Kugelflächen zu deren Centrale Normale, so fallen ihre Fußpunkte in einen Punkt zusammen, und die Normalen selbst sind einander gleich.

Folgesätze. a) Die Centrale zweier sich berührender Kugeln geht durch den Berührungspunkt.

b) Die durch den Berührungspunkt zweier Kugeln an die eine gelegte Berührungsebene ist zugleich eine Berührungsebene der andern.

c) Die Centrale zweier sich schneidenden Kugeln ist zur Ebene des gemeinsamen Durchschnittskreises im Mittelpunkte desselben normal.

§. **276.** Die gegenseitige Lage zweier Kugeln hängt von der Größe ihrer Centrale c und ihrer Halbmesser R und r ab.

1. Ist $c > R + r$, so liegt die eine Kugel ganz außerhalb der andern.
2. Ist $c = R + r$, so berühren sich die beiden Kugeln von außen.
3. Ist $R + r > c > R - r$, so schneiden sich beide Kugeln.
4. Ist $c = R - r$, so berühren sich beide Kugeln von innen.
5. Ist $c < R - r$, so liegt die eine Kugel ganz innerhalb der andern.

III. Aufgaben.

§. 277. Constructionsaufgaben.

1. (Forderungssatz.) Um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben.

2. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene a) an einen Kegel, b) an einen Cylinder, c) an eine Kugel zu legen.

3. Durch eine Gerade eine Berührungsebene an die Kugel zu legen.

§. 278. Rechnungsaufgaben.

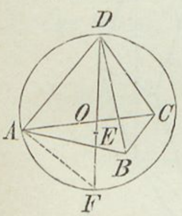
1. Es sei R der Halbmesser einer Kugel, r der Halbmesser eines Kugelkreises und d der Abstand dieses Kreises vom Kugelmittelpunkte; man bestimme jede dieser Größen, wenn die beiden anderen gegeben sind.

2. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche den zu dieser normalen Durchmesser 2R in dem Verhältnisse m : n theilt; wie groß ist der Halbmesser r der Schnittfläche?

3. Aus der Kante a eines regulären Polyeders die Halbmesser r und R der ihm ein- und der ihm umgeschriebenen Kugel zu bestimmen.

Heißt ϱ der Halbmesser des einer Seitenfläche des Polyeders umgeschriebenen Kreises, so ist, wie man aus Fig. 139 unmittelbar ersieht, für jedes reguläre Polyeder $r^2 = R^2 - \varrho^2$.

Fig. 149.

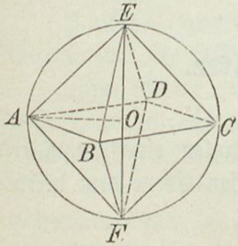


a) Es sei um das Tetraeder ABCD (Fig. 149) eine Kugel beschrieben und $DE \perp ABC$, so ist E der Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises; wird DE bis F verlängert, so ist DF ein Kugeldurchmesser und die Mitte O der Mittelpunkt der Kugel und daher auch des Tetraeders. Im rechtwinkligen $\triangle$ DAF ist nun $DF : AD = AD : DE$, oder $2R : a = a : \sqrt{a^2 - \varrho^2}$. Aus dieser Proportion erhält man, da $\varrho^2 = \frac{a^2}{3}$ (§. 172, 1) ist, $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{3}$ folgt dann $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

b) Zieht man beim Octaeder (Fig. 150) die Diagonale EF, so ist diese ein Durchmesser der umgeschriebenen Kugel, sie steht normal auf ABCD, und der Fußpunkt O ist der Mittelpunkt sowohl der umgeschriebenen Kugel, als des um das Quadrat ABCD beschriebenen Kreises. Es ist daher (nach §. 173) $AO = R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Fig. 150.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$ folgt ferner $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$.

c) Zieht man in Fig. 151, wo um ein Ikosaeder eine Kugel beschrieben ist, FG normal zu dem regelmäßigen Fünfecke ABCDE, so ist G der Mittelpunkt des um dasselbe beschriebenen Kreises und FH ein Kugeldurchmesser. Im rechtwinkligen Dreiecke FAH ist nun $FH : AF = AF : FG$, oder, da

$GA = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ (§. 175, Zus.) ist, $2R : a = a : \sqrt{\left\{a^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})\right\}}$.

Daraus folgt $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3}$ folgt dann $r = \frac{a}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}$.

d) Für das Hexaeder oder den Würfel ist:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und } r = \frac{a}{2}.$$

e) Das Dodekaeder läſst sich, wie man aus Fig. 152 sieht, in einen Würfel GHJKACEF und sechs dessen Seitenflächen aufsitzende, abgestumpfte dreiseitige Prismen zerlegen, und zwar ist der Halbmesser der dem Würfel umgeschriebenen Kugel zugleich der Halbmesser der dem Dodekaeder umgeschriebenen Kugel. Der erstere Halbmesser aber ist, da die Kante des Würfels als Diagonale eines regelmäßigen Fünfeckes $= \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$

(§. 175, Zus.) ist, nach d) gleich $\frac{a}{4}(1 + \sqrt{5}) . \sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{15})^2} = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$.

Folglich ist auch für das Dodekaeder $R = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$.

Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{16}(18 + 6\sqrt{5}) - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})$ (§. 175, Zus.) folgt dann $r = \frac{a}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}$.

Fig. 151.

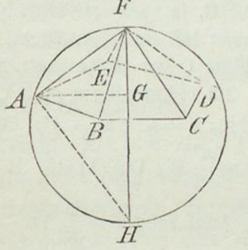
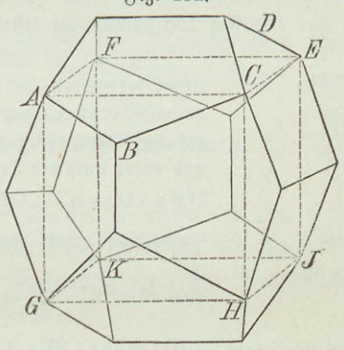


Fig. 152.



4. Die Kante eines regulären Polyeders aus dem Halbmesser a) der eingeschriebenen, b) der umgeschriebenen Kugel zu berechnen (Umkehrung der Aufg. 3).

IV. Übungssätze und Übungsaufgaben.

§. 279. Übungssätze.

1. Die Mitten zweier Paare gegenüberliegender Kanten eines regulären Tetraeders sind die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Ebene dem dritten Kantenpaare parallel ist.

2. Die Verbindungsstrecken der Mitten der drei Paare gegenüberliegender Kanten eines regulären Tetraeders schneiden einander in demselben Punkte (Übungssatz 1).

3. Die Mitten der Kanten eines regulären Tetraeders sind die Eckpunkte eines regulären Octaeders.

4. Zwei nicht parallele Berührungsebenen eines geraden Cylinders schneiden sich in einer zur Achse parallelen Geraden.

5. Legt man durch eine Gerade zwei Berührungsebenen an die Kugel und eine dritte Ebene durch den Mittelpunkt, so wird der Neigungswinkel der beiden Berührungsebenen durch die dritte Ebene halbiert.

§. 280. Constructionsaufgaben.

1. Ein reguläres Tetraeder zu construieren, wenn dessen Kante gegeben ist.

2. Einen Würfel zu construieren, wenn dessen Kante gegeben ist.

3. Die Darstellung aller Grenzflächen eines Körpers in einer zusammenhängenden ebenen Figur heißt das Netz des Körpers. Construiere das Netz

a) eines Prismas,
b) einer Pyramide,
c) eines Pyramidenstumpfes,
d) eines regulären Tetraeders,
e) eines Würfels,
f) eines regulären Octaeders,
g) eines regulären Dodekaeders,
h) eines regulären Ikosaeders,
i) eines geraden Cylinders,
k) eines geraden Kegels,
l) eines geraden Kegelstumpfes.

4. Um einen gegebenen Mittelpunkt eine Kugel zu beschreiben, welche a) eine Ebene, b) eine Kugel berührt.

5. Mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben, welche a) eine Ebene, b) eine Kugel in einem gegebenen Punkte derselben berührt.

Dritter Abschnitt.

Congruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit der Körper.

I. Congruenz und Symmetrie der Körper.

§. 281. Zwei Körper, welche so in einander gelegt werden können, dass sich alle ihre Grenzflächen decken, heißen congruent.

Zwei Körper, welche auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, dass die Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte derselben zu dieser Ebene normal ist und durch sie halbiert wird, heißen symmetrisch (§§. 69 und 217). Diese Ebene heißt die Symmetralebene.

Sowohl in congruenten als in symmetrischen Körpern sind je zwei entsprechende Strecken (Kanten, Höhen, Diagonalen, Halbmesser, Achsen) gleich, je zwei entsprechende Flächen congruent und je zwei entsprechende Keile gleich;

die entsprechenden Ecken aber sind nur in congruenten Körpern congruent, in symmetrischen dagegen symmetrisch.

Um zu einem gegebenen Polyeder ein symmetrisches zu construieren, darf man nur zu einer Ecke des gegebenen Körpers die Scheitelecke bilden und von dieser ausgehend einen zweiten Körper construieren, welcher mit dem gegebenen nach der Ordnung gleiche Kanten, congruente Flächen und gleiche Keile hat. Die Ecken der beiden Körper und ebenso die Körper selbst sind dann symmetrisch.

Folgesätze. a) Zwei Körper, welche mit einem dritten symmetrisch sind, sind unter einander congruent.

b) Ist von zwei congruenten Körpern der eine mit einem dritten symmetrisch, so ist es auch der andere.

§. **282.** **Lehrsatz.** Sind in zwei Pyramiden die Ecken am Scheitel congruent oder symmetrisch und drei entsprechende Seitenkanten paarweise gleich, so sind auch die Pyramiden bezüglich congruent oder symmetrisch.

Beweis. a) Bringt man im ersten Falle die congruenten Ecken zur Deckung, so müssen wegen der Gleichheit der drei entsprechenden Seitenkanten die Ebenen der Grundflächen, und folglich die Grundflächen selbst zusammenfallen.

b) Im zweiten Falle bildet man zu einer der beiden symmetrischen Ecken, etwa an der ersten Pyramide, die Scheitelecke und construiert in dieser eine Pyramide, welche der ersten symmetrisch ist. Dieselbe ist dann (nach a) der zweiten Pyramide congruent; folglich ist auch diese zweite Pyramide der ersten symmetrisch.

§. **283.** **Lehrsatz.** Sind in zwei Prismen zwei Ecken congruent oder symmetrisch, ein Paar Grundflächen congruent und ein Paar Seitenkanten gleich, so sind auch die Prismen bezüglich congruent oder symmetrisch.

Beweis. a) Bringt man im ersten Falle die congruenten Ecken zur Deckung, so decken sich auch zwei congruente Grundflächen und, wie leicht zu zeigen ist, auch alle Seitenflächen; dann müssen aber auch die beiden anderen Grundflächen zusammenfallen.

b) Sind die Ecken symmetrisch, so wird der Beweis analog wie zu b) in §. 282 geführt.

Folgesatz. Zwei Parallelepipede sind congruent, wenn in denselben zwei congruente Ecken paarweise gleiche Kanten haben.

§. **284.** 1. Zwei Kegel oder zwei Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen und ihre Achsen gleich sind und die Achsen mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden.

2. Zwei Kugeln sind congruent, wenn ihre Halbmesser gleich sind.

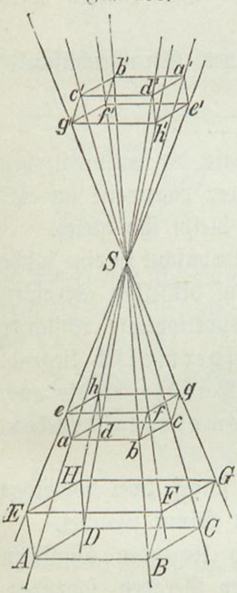
Die Beweise dieser zwei Sätze durch Deckung.

Bei den Kegeln, Cylindern und Kugeln fällt die Symmetrie mit der Congruenz zusammen.

II. Ähnlichkeit der Körper.

§. 285. **Lehrsätze.** 1. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels im Raume (Fig. 153) vom Scheitel S aus in den Punkten A und a, B und b, C und c,.. proportioniert geschnitten, so sind in den Körpern ABCDE.. und abcde.. die entsprechenden durch je drei Schnittpunkte gehenden Schnittflächen einander ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile paarweise gleich.

Fig. 153.



Beweis. Es sei SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = ...

Aus dieser Voraussetzung folgt unmittelbar AB ∥ ab, AC ∥ ac, BC ∥ bc,.. und ABC ∥ abc, ACD ∥ acd,.. (§. 124 und §. 227, 2). Dann ist aber auch (nach §. 227, 3) ABC ∾ abc, ACD ∾ acd,...

Liegen vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene, so liegen auch die entsprechenden Punkte a, b, c, d in einer Ebene; denn abc ∥ ABCD und acd ∥ ABCD, daher müssen abc und acd in einer und derselben Ebene liegen. Dann ist auch ABCD ∾ abcd, ABFE ∾ abfe,.. (§. 134, 3).

Dass ferner die entsprechenden Keile gleich sind, ergibt sich aus §. 225.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn von je zwei entsprechenden Punkten der eine auf einem Strahl des Strahlenbüschels, der andere auf dessen Ergänzung liegt, wie in den Körpern ABCDE.. und a' b' c' d' e'..; nur sind dann die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Schnittpunkten im entgegengesetzten Sinne parallel.

Zusätze. a) Sind A, B, C, D Umfangspunkte eines Kreises, so sind es auch a, b, c, d. Der Beweis wird wie in dem Zusatz zu §. 124, 1 geführt.

b) Liegen die Punkte A, B, C, D, E,.. auf der Oberfläche einer Kugel, so liegen auch a, b, c, d, e,.. auf der Oberfläche einer Kugel. Der Beweis ist analog demjenigen im Zusatz zu §. 124, 1.

1. Umgekehrt: Zwei Körper, in denen die entsprechenden Schnittflächen nach der Ordnung ähnlich und die entsprechenden Keile paarweise gleich sind, lassen sich immer auf einem Strahlenbüschel in eine solche Lage bringen, dass ihre entsprechenden Punkte auf denselben Strahlen oder deren Ergänzungen liegen und vom Scheitel proportionierte Abstände haben (Fig. 153).

Beweis. Die entsprechenden Strecken folgen in beiden Körpern entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne aufeinander.

Stellt man im ersten Falle die zwei Körper so gegen einander, dass eine Strecke und zwei sich in ihr schneidende Schnittflächen des einen Körpers der entsprechenden Strecke und den entsprechenden zwei Schnittflächen des andern Körpers paarweise in demselben Sinne parallel sind, so müssen wegen der Ähnlichkeit der Schnittflächen und wegen der Gleichheit der von ihnen gebildeten Keile auch je zwei andere entsprechende Strecken, sowie je zwei andere entsprechende Schnittflächen paarweise in demselben Sinne parallel sein.

Haben aber zwei Körper die hier angegebene parallele Lage gegen einander, so müssen sich die durch je zwei entsprechende Punkte derselben gezogenen Geraden in einem und demselben Punkte S schneiden. Der Beweis wird ebenso wie im §. 124, 2 geführt.

SA, SB, SC, ... sind demnach Strahlen eines Strahlenbüschels, woraus dann (§. 227, 1) folgt:

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$$

Im zweiten Falle werden die Körper so gelegt, dass die entsprechenden Strecken und die entsprechenden Schnittflächen beider Körper paarweise im entgegengesetzten Sinne parallel sind. Der weitere Beweis bleibt sich gleich.

§. 286. Zwei Körper, welche sich auf einem Strahlenbüschel in eine solche Lage bringen lassen, dass ihre entsprechenden Punkte auf denselben Strahlen oder deren Ergänzungen liegen und vom Scheitel proportionierte Abstände haben, heißen ähnlich, und in dieser Lage zugleich perspectivisch liegend.

Je zwei entsprechende Punkte heißen homologe Punkte, ebenso auch je zwei entsprechende Strecken, Flächen, Keile und Ecken homologe Strecken, Flächen, Keile und Ecken.

In zwei perspectivisch liegenden ähnlichen Körpern sind je zwei homologe Strecken entweder in demselben, oder im entgegengesetzten Sinne parallel.

Der Punkt, in welchem sich in zwei perspectivisch liegenden ähnlichen Körpern die durch je zwei entsprechende Punkte gezogenen Geraden schneiden, heißt der Ähnlichkeitspunkt der beiden Körper, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem die homologen Punktpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten dieses Punktes liegen.

Ist das constante Verhältnis der Abstände des Ähnlichkeitspunktes von zwei homologen Punkten = 1, so sind die ähnlichen Körper zugleich congruent, wenn ihr Ähnlichkeitspunkt ein äußerer, und symmetrisch, wenn ihr Ähnlichkeitspunkt ein innerer ist. Die Congruenz und die Symmetrie sind demnach nur besondere Fälle der Ähnlichkeit.

Folgesätze. a) In zwei ähnlichen Körpern sind die homologen Strecken proportioniert, die homologen Flächen ähnlich und die homologen Keile gleich, von den homologen Ecken aber entweder je zwei congruent, oder je zwei symmetrisch.

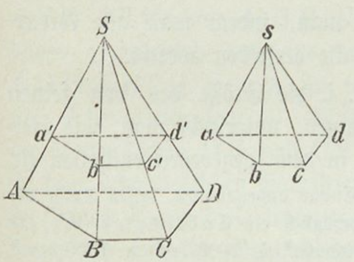
b) Ist von zwei congruenten oder symmetrischen Körpern der eine einem dritten ähnlich, so ist es auch der andere.

§. **287. Lehrsätze.** 1. Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die abgeschnittene Pyramide der gegebenen ähnlich.

Folgt unmittelbar aus §. 286.

2. Sind in zwei Pyramiden die Ecken am Scheitel congruent oder symmetrisch und drei homologe Seitenkanten paarweise proportioniert, so sind die Pyramiden ähnlich (Fig. 154).

Fig. 154.

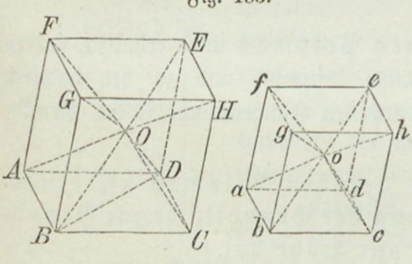


Beweis a) Schneidet man im ersten Falle auf der Kante SA das Stück Sa' = sa ab, und legt durch den Punkt a' die Ebene a'b'c'd' ‖ ABCD, so sind die Pyramiden SAC und Sa'c' ähnlich (nach 1). Die Pyramide Sa'c' aber ist (§. 282) mit sac congruent, daher sind auch die Pyramiden SAC und sac ähnlich.

b) Sind die Ecken am Scheitel symmetrisch, so construiere man in der Scheitelecke von S eine Pyramide, welche mit SAC symmetrisch ist. Dieselbe ist dann (nach a) der Pyramide sac ähnlich; somit sind auch die Pyramiden SAC und sac ähnlich.

§. **288. Lehrsatz.** Je zwei ähnliche Polyeder lassen sich in eine gleiche Anzahl ähnlicher Pyramiden zerlegen.

Fig. 155.



Beweis. Es seien (Fig. 155) die Polyeder ABE und abe ähnlich und zugleich auch perspectivisch liegend. Denkt man sich durch ein Paar homologer Punkte die Geraden Aa und Bb, und von ihrem Schnittpunkte S, welcher der Ähnlichkeitspunkt der beiden Polyeder ist, zu einem Punkte O im Innern des Polyeders ABE einen Strahl SO gezogen, so ist, wenn SO : So = SA : Sa ist, o der homologe Punkt im Innern des Polyeders abe.

Legt man nun durch O und o und die Kanten beider Polyeder Ebenen, so werden dadurch die Polyeder in so viele Pyramiden zerlegt, als sie Grenzflächen haben. Diese Pyramiden aber sind nach §. 285 paarweise ähnlich.

§. **289.** 1. Zwei Kegel oder zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen den Durchmessern ihrer Grundflächen proportioniert sind und mit den letzteren gleiche Neigungswinkel bilden.

2. Je zwei Kugeln sind ähnlich und zugleich perspectivisch liegend.

Zwei Kugeln haben einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt, ebenso äußere und innere Ähnlichkeitsstrahlen (§. 142).

Vierter Abschnitt.

Größenbestimmung der Körper.

§. 290. Bei der Ausmessung der Körper kommt die Bestimmung der Oberfläche und des Cubikinhaltes oder Volumens derselben in Betracht.

Die Oberfläche eines Körpers erhält man, indem man alle Grenzflächen berechnet und die erhaltenen Flächeninhalte derselben addiert.

Um das Volumen eines Körpers, d. i. die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes zu bestimmen, untersucht man, wie vielmal ein als Einheit angenommener Körper in dem gegebenen enthalten ist.

Als Einheit des Körpermaßes wird ein Cubus angenommen, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist, und der für das Metermaß bezüglich ein Cubikmeter (m^3), ein Cubikdecimeter (dm^3), ... heißt. $1\ m^3 = 1000\ dm^3$ à $1000\ cm^3$ à $1000\ mm^3$. Als Hohlmaß heißt das Cubikdecimeter Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

Zwei Körper, welche gleiches Volumen haben, heißen inhaltsgleich.

I. Ausmessung ebenflächiger Körper.

1. Das Prisma.

Oberfläche eines Prismas.

§. 291. Die Oberfläche o eines Prismas wird erhalten, indem man die Seitenflächen als Parallelogramme bestimmt und zu der dadurch erhaltenen Seitenoberfläche s den doppelten Flächeninhalt b der Grundfläche addiert; also $o = s + 2b$.

Die Seitenoberfläche eines geraden Prismas ist einem Rechtecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Prismas zur Höhe hat.

Inhaltsgleichheit der Prismen.

§. 292. **Lehrsatz.** Jedes Parallelepiped ist inhaltsgleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Beweis. 1. Zunächst läßt sich jedes schiefe Parallelepiped in ein inhaltsgleiches gerades Parallelepiped über derselben Grundfläche und von gleicher Höhe verwandeln. Stehen in dem Parallelepiped AG (Fig. 156) die gegenüberliegenden Seitenflächen AF und DG auf der Grundfläche AC schief,

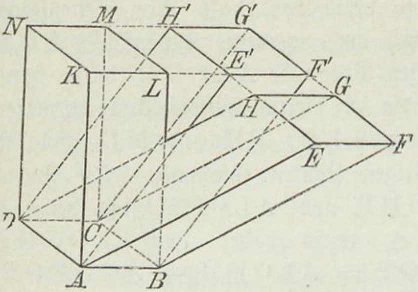


Fig. 156.

so errichte man auf dieser in den Kanten AB und CD normale Ebenen und erweitere die beiden anderen Seitenflächen DE und CF und die obere Grundfläche EG so weit, dass sie mit jenen Ebenen das Parallelepiped AG' begrenzen, in welchem zwei Seitenflächen auf der Grundfläche normal stehen. Die beiden Parallelepipede sind inhaltsgleich; denn die zwei dreiseitigen Prismen AEE'BFF' und DHH'CGG' sind congruent (§. 283); nimmt man daher abwechselnd das eine und das andere von dem prismatischen Körper ADH'EBCG'F weg, so müssen die Reste, d. i. die Parallelepipede AG und AG' gleich sein. — Sind in dem gegebenen Parallelepiped AG auch die Seitenflächen DE und CF auf der Grundfläche AC schief, daher auch in dem inhaltsgleichen Parallelepiped AG' die Seitenflächen DE' und CF', so können ebenso diese letzteren, ohne das Volumen des Körpers zu ändern, durch die auf der Grundfläche normalen Seitenflächen DK und CL ersetzt werden, wodurch man das inhaltsgleiche gerade Parallelepiped AM erhält.

2. Ferner lässt sich jedes gerade Parallelepiped AM (Fig. 157), dessen Grundfläche AC nicht rechtwinklig ist, in ein rechtwinkliges Parallelepiped AQ von gleicher Grundfläche und derselben Höhe verwandeln, indem man durch die Kanten AK und BL Ebenen legt, welche zur Seitenfläche AL normal sind. Die beiden Parallelepipede AM und AQ sind inhaltsgleich, da die dreiseitigen Prismen BCOLMQ und ADPKNR, welche dieselben nicht gemeinsam haben, congruent sind.

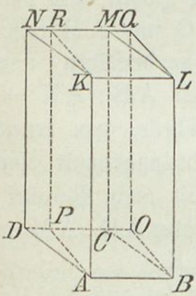


Fig. 157.

Man kann also jedes nicht rechtwinklige Parallelepiped in ein inhaltsgleiches rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Grundfläche und derselben Höhe verwandeln.

Folgesatz. Parallelepipede mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

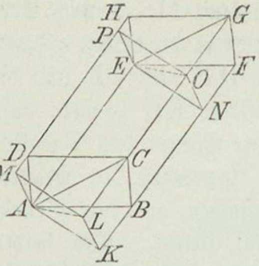
§. **293. Lehrsatz.** *Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen getheilt.*

Beweis. 1. Ist das Parallelepiped ein *gerades*, so folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 283.

2. Es sei das Parallelepiped AG (Fig. 158) ein *schiefes*.

Legt man durch die Punkte A und E zwei Ebenen, welche zu den Kanten des Parallelepipeds AG normal sind, so ist AKLMENOP ein gerades Parallelepiped, das (nach 1) durch den Diagonalschnitt AEOL in zwei gleiche Prismen ALMEOP und AKLENO getheilt wird.

Fig. 158.



Man denke sich nun die vierseitige Pyramide EOGHP so verschoben, dass ihre Seitenfläche EOP die mit ihr congruente Seitenfläche ALM der vierseitigen Pyramide ALCDM deckt; dann fallen auch die zu diesen Seitenflächen normalen Kanten OG und LC, PH und MD, folglich auch die übrigen Kanten zusammen. Die Pyramiden EOGHP und ALCDM sind demnach congruent; es muss daher auch EOGHP + ACDEOP = ALCDM + ACDEOP, d. i. Prisma ACDEGH = ALMEOP sein. Ebenso folgt, dass das Prisma ABCEFG = AKLENO ist. Da nun die Prismen ALMEOP und AKLENO inhaltsgleich sind, so sind es auch die Prismen ACDEGH und ABCEFG.

Folgesätze. a) Jedes dreiseitige Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

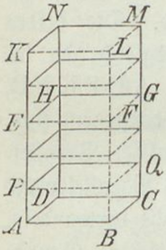
b) Jedes vielseitige Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Grundflächen und gleiche Höhe hat (§. 245, Folg.).

c) Prismen mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

Volumsverhältnisse der Parallelepipede.

§. 294. **Lehrsatz.** Die Volumina zweier rechtwinkliger Parallelepipede über derselben Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Fig. 159.



Beweis. Es seien (Fig. 159) die Höhen AE und AK der rechtwinkligen Parallelepipede AG und AM commensurabel, AP das gemeinsame Maß derselben und AE = m . AP, AK = n . AP, folglich AE : AK = m : n. Theilt man AK in n gleiche Theile, von denen AE m enthält, und legt durch jeden Theilungspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so ist auch Parallelepiped AG = m AQ. AM = n . AQ, daher AG : AM = m : n, und folglich AG : AM = AE : AK.

Sind die Höhen AE und AK incommensurabel, so folgt aus §. 115, dass die obige Proportion auch für diesen Fall Giltigkeit hat.

§. 295. **Lehrsatz.** Die Volumina zweier rechtwinkliger Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. Es seien P und p zwei rechtwinklige Parallelepipede, und zwar

in P . . A und B die Seiten der Grundfläche G, und h die Höhe,

„ p . . a „ b „ „ „ g. „ h „ „ ;

ferner seien in einem dritten rechtwinkligen Parallelepiped

P′ . . a und B die Seiten der Grundfläche, und h die Höhe.

In den Parallelepipeden P und P′ kann man das Rechteck mit den Seiten B und h als die gemeinsame Grundfläche betrachten; dann sind A und a ihre Höhen, und man hat nach §. 294

$$P : P' = A : a.$$

Ebenso erhält man $P' : p = B : b.$

Durch Multiplication dieser Proportionen ergibt sich

$$P : p = A.B : a.b.$$

Allein $A.B : a.b = G : g$ (§. 160); daher

$$P : p = G : g.$$

§. 296. **Lehrsatz.** Die Volumina je zweier rechtwinkliger Parallelepipede verhalten sich wie die Producte aus den Maßzahlen ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Es seien G und g die Maßzahlen der Grundflächen, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier rechtwinkliger Parallelepipede P und p; ferner sei P′ ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundfläche die Maßzahl g und dessen Höhe die Maßzahl H hat. Dann ist

$$P : P' = G : g \text{ (§. 295)},$$

$$P' : p = H : h \text{ (§. 294)},$$

daher durch Multiplication $P : p = G.H : g.h.$

Dieser Satz wird gewöhnlich so ausgedrückt:

Die Volumina je zweier rechtwinkliger Parallelepipede verhalten sich wie die Producte ihrer Grundflächen und Höhen.

Wenn im Folgenden von Producten aus Flächen und Linien die Rede ist, so sind immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

Bestimmung des Volumens der Prismen.

§. 297. **Lehrsatz.** Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Beweis. Es sei P ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundfläche G die Seiten a und b hat, und dessen Höhe c ist; ferner sei w die Einheit des Körpermaßes, d. i. ein Cubus, dessen Grundfläche g die Einheit des Flächenmaßes und dessen Höhe m die Einheit des Längenmaßes ist. Nach §. 296 hat man dann

$$\frac{P}{w} = \frac{G.c}{g.m} = \frac{G}{g} \cdot \frac{c}{m},$$

wo $\frac{P}{w}$ die Maßzahl für das Volumen des Parallelepipeds, $\frac{G}{g}$ die Maßzahl der Grundfläche G, und $\frac{c}{m}$ die Maßzahl der Höhe c ist.

Da (nach §. 160) $\frac{G}{g} = \frac{a.b}{m.m} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m}$ ist, so ist auch $\frac{P}{w} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m}$; d. i. das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus drei zusammenstoßenden Kanten (Länge, Breite und Höhe).

§. 298. **Lehrsatz.** Das Volumen eines Cubus ist gleich der dritten Potenz einer Kante (§. 297).

Bezeichnen V und v die Volumina zweier Würfel, deren Kanten S und s sind, so hat man $V = S^3$ und $v = s^3$, daher $V : v = S^3 : s^3$; d. h. die Volumina zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen zweier Kanten.

§. 299. Das Volumen eines jeden Prismas ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 297 mit Zuziehung des §. 293 a) und b).

2. Die Pyramide und das Prismatoid.

Oberfläche und Volumen einer Pyramide.

§. 300. Um die Oberfläche o einer Pyramide zu erhalten, berechnet man die Seitenflächen als Dreiecke, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche s; dazu addiert man noch den Flächeninhalt b der Grundfläche; also $o = s + b$.

1 Die Seitenoberfläche einer regulären Pyramide ist einem Dreiecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Seitenhöhe der Pyramide zur Höhe hat.

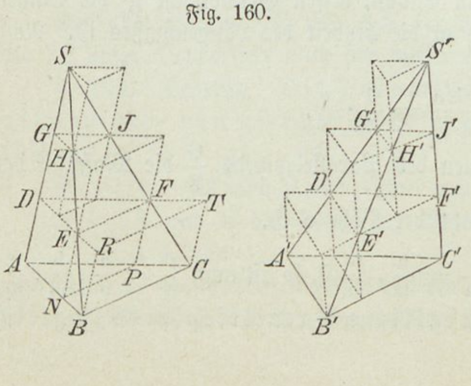
2. Die Oberflächen zweier ähnlichen Pyramiden (allgemein zweier ähnlichen Polyeder) verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Kanten.

Denn je zwei homologe Grundflächen sind ähnlich (§. 286), sie verhalten sich also wie die Quadrate ihrer homologen Seiten; dasselbe Verhältnis muss daher auch zwischen den Summen aller Grenzflächen in beiden Körpern stattfinden.

§. 301. **Lehrsatz.** Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich (Fig. 160).

Beweis. Es seien die Grundflächen ABC und A'B'C' der beiden Pyramiden SABC und S'A'B'C' gleich und in derselben Ebene, und die Scheitel S und S' in einer mit dieser parallelen Ebene gelegen. Theilt man in beiden Pyramiden die Höhen in n gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte zu den Grundflächen parallele Ebenen, so sind je zwei in gleicher Höhe geführte Schnittflächen, wie DEF und D'E'F', gleich (§. 241, 2).

Fig. 160.



Construiert man nun zu jedem zwischen zwei solchen Schnitten liegenden Stücke der Pyramiden ein äußeres und ein inneres Prisma, deren erstes die untere, deren zweites die obere Grundfläche des Pyramidenstückes zur Grundfläche hat, wie zu ABCDEF die Prismen ABCDRT und ANPDEF, so sind (§. 293, c) je zwei gleichliegende äußere Prismen, und ebenso je zwei gleichliegende innere Prismen gleich. Es werden daher auch die Summen aller äußeren und ebenso die Summen aller inneren Prismen in beiden Pyramiden gleich sein. Heißt nun A die erste und J die letztere Summe, P der Inhalt der Pyramide SABC und P′ der Inhalt der Pyramide S′A′B′C′, so ist

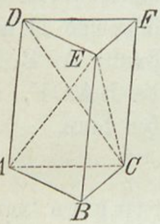
$$A > P > J \text{ und } A > P' > J.$$

Ferner ist jedes äußere Prisma einer jeden Pyramide gleich dem nächstunteren inneren Prisma, daher die Differenz $A - J$ gleich dem untersten äußeren Prisma ABCDRT, welches sich, da n beliebig groß angenommen werden kann, kleiner machen läßt, als jede noch so kleine constante Größe.

P und P′ sind also Grenzwerte derselben veränderlichen Größen A und J, die einander beliebig genähert werden können, und mithin einander gleich.

§. 302. **Lehrsatz.** Jedes dreiseitige Prisma kann in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden (Fig. 161).

Fig. 161.



Beweis. Legt man durch die Punkte A, E und C des dreiseitigen Prismas ABCDEF eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in eine dreiseitige Pyramide EABC und eine vierseitige EACFD. Diese letztere wird, wenn man durch die Punkte C, E und D eine Ebene legt, wieder in zwei dreiseitige Pyramiden EACD und ECDF getheilt. Das ganze Prisma besteht demnach aus drei dreiseitigen Pyramiden EACD, ECDF und EABC, von denen die erste der zweiten und diese der dritten inhaltsgleich ist (§. 301).

Folgesätze. a) Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

b) Jede vielseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe (§. 241, Folgesatz).

§. 303. **Lehrsatz.** Das Volumen einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 302 a) und b) und §. 299.

§. 304. **Lehrsatz.** Die Volumina zweier ähnlichen Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer homologen Kanten.

Beweis. Es seien P und p zwei ähnliche Pyramiden, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, und A und a zwei homologe Kanten. Man hat $P : p = G.H : g.h.$

Nun sind die Grundflächen G und g ähnlich und die Höhen H und h zwei homologen Kanten A und a proportioniert, daher

$$G : g = A^2 : a^2, \text{ und } H : h = A : a.$$

Multipliciert man diese beiden Proportionen, so ergibt sich

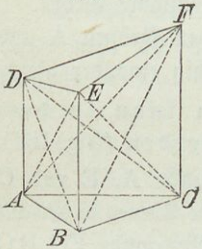
$$G.H : g.h = A^3 : a^3, \text{ und folglich auch}$$

$$P : p = A^3 : a^3.$$

Allgemein: Die Volumina je zweier ähnlichen Polyeder verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer homologen Kanten (§. 288).

§. 305. **Lehrsatz.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist gleich der Summe dreier Pyramiden, deren gemeinsame Grundfläche die Grundfläche des Prismas ist und deren Scheitel die Eckpunkte des schiefen Durchschnittes sind (Fig. 162).

Fig. 162



Beweis. Legt man durch die Punkte A, E, C eine Ebene, ferner durch C, E, D eine zweite Ebene, so zerfällt das schief abgeschnittene Prisma ABCDEF in drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF.

Die Pyramide EABC hat ABC zur Grundfläche und ihren Scheitel in E. Ferner ist, wenn man durch die Punkte B, C, D eine Ebene legt, nach §. 301 die Pyramide EACD gleich der Pyramide BACD, in welcher man auch ABC als Grundfläche und D als Scheitel betrachten kann. Ebenso ist, wenn man durch die Punkte A, B, F eine Ebene legt, die Pyramide ECDF gleich der Pyramide BACF, in welcher man ABC als Grundfläche und F als Scheitel ansehen kann.

Oberfläche und Volumen eines Pyramidenstumpfes.

§. 306. Die Oberfläche o eines Pyramidenstumpfes wird erhalten, indem man die Summe s aller Seitenflächen, welche Trapeze sind, bestimmt und die beiden Grundflächen B und b dazu addiert; also

$$o = s + B + b.$$

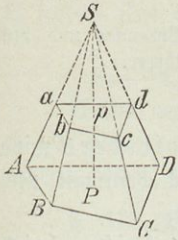
Die Seitenoberfläche eines regulären Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seitenhöhe.

Denn halbiert man eine Seitenkante und legt durch den Halbierungspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so halbiert diese auch die übrigen Seitenkanten und man erhält als den mittleren Durchschnitt ein reguläres Vieleck. Durch Zuziehung des Zusatzes zu §. 165, 3, b) ergibt sich dann sogleich die Richtigkeit des obigen Satzes.

§. 307. **Lehrsatz.** Das Volumen eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem Volumen dreier Pyramiden, welche die beiden Grundflächen und ihr geometrisches Mittel zu Grundflächen und die Höhe des Stumpfes zur Höhe haben.

Beweis. Ergänzt man den Pyramidenstumpf $ABCDabcd$ (Fig. 163) zur ganzen Pyramide, so ist das Volumen desselben

Fig. 163.



$$V = \text{Pyr. } SABCD - \text{Pyr. } Sabcd.$$

Bezeichnen B und b die Grundflächen, h die Höhe pP, und x die noch unbekannte Höhe Sp, so hat man

$$\text{Pyr. } SABCD = \frac{B(h+x)}{3}\ \text{Pyr. } Sabcd = \frac{bx}{3};\ \text{daher}$$

$$V = \frac{(Bh+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Bh}{3} + \frac{x}{3}(B-b).$$

Zur Bestimmung von x hat man (§. 241, 1) die Proportion:

$$B : b = (h+x)^2 : x^2, \text{ oder } \sqrt{B} : \sqrt{b} = (h+x) : x.$$

Daraus folgt $x = \dfrac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$ und somit

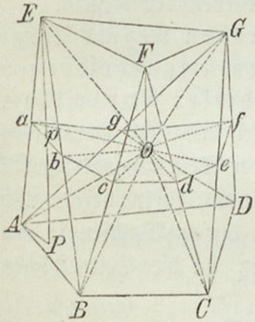
$$V = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}(B-b) = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B}+\sqrt{b})$$

$$= (B + \sqrt{Bb} + b) \cdot \frac{h}{3}.$$

Volumen eines Prismatoids.

§. 308. **Lehrsatz.** Das Volumen eines Prismatoids ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Summe des arithmetischen Mittels der beiden Grundflächen und des doppelten Mittelschnittes mit der Höhe (Fig. 164).

Fig. 164.



Beweis. Es seien B und b die Grundflächen, h die Höhe, M der Mittelschnitt $abcdefg$ (§. 247) und V das Volumen des Prismatoids.

Legt man durch irgend einen Punkt O des Mittelschnittes und durch die Kanten des Prismatoids Ebenen, so zerfällt dieses in Pyramiden, von denen zwei die Grundflächen des Prismatoids zu Grundflächen und dessen halbe Höhe zur Höhe haben. Der Inhalt dieser zwei Pyramiden ist

$$B \cdot \frac{h}{6} + b \cdot \frac{h}{6} = \frac{B+b}{2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Die übrigen Pyramiden haben ihren Scheitel in O und zu Grundflächen die Seitenflächen des Prismatoids. Von jeder dieser Pyramiden, z. B. von $OABE$, wird durch den Mittelschnitt eine kleinere Pyramide $OabE$ abgeschnitten, die mit ihr den Scheitel O und daher auch die Höhe gemeinsam hat; ihre Volumina verhalten sich daher wie die Grundflächen ABE und abE (§. 303); wegen $AE = 2aE$ ist $ABE = 4abE$ (§. 162), daher auch Pyr. $OABE = 4OabE$; nun ist die Pyr. $OabE$, wenn man Oab als Grundfläche und E als Scheitel annimmt, gleich $Oab \cdot \frac{h}{6}$; folglich Pyr. $OABE = 4 \cdot Oab \cdot \frac{h}{6}$. Ebenso erhält man Pyr. $OBEF = 4 \cdot Obc \cdot \frac{h}{6}$, somit als Inhalt aller dieser Pyramiden

$$4 \cdot (Oab + Obc + Ocd + \ldots) \cdot \frac{h}{6} = 4M \cdot \frac{h}{6} = 2M \cdot \frac{h}{3}.$$

Mithin ist $V = \left(\frac{B+b}{2} + 2M\right) . \frac{h}{3}$.

Zusatz. Die Anwendung dieser Formel auf das Prisma, die Pyramide und den Pyramidenstumpf führt auf die bekannten Sätze über den Inhalt dieser Körper.

3. Reguläre Polyeder.

§. 309. 1. Die Oberfläche eines regulären Polyeders wird erhalten, indem man eine Seitenfläche als ein reguläres Vieleck bestimmt und den Flächeninhalt mit der Zahl der Seitenflächen multipliciert.

2. Das Volumen eines regulären Polyeders ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Oberfläche desselben und dem Halbmesser der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel.

Der Beweis ergibt sich aus §§. 252 und 303.

II. Ausmessung krummflächiger Körper.

1. Der Kegel.

Oberfläche und Volumen eines Kegels.

§. 310. Wird der Grundfläche eines Kegels ein reguläres Vieleck ein- oder umgeschrieben und dasselbe als Grundfläche einer Pyramide angenommen, deren Scheitel der Scheitel des Kegels ist, so heißt diese Pyramide dem Kegel bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben.

Die Seitenkanten der eingeschriebenen Pyramide sind Seiten, die Seitenflächen der umgeschriebenen Pyramide sind Berührungsebenen des Kegels.

Lehrsätze. 1. Die Mantelfläche eines geraden Kegels liegt für jede Seitenanzahl der ihm ein- und der ihm umgeschriebenen Pyramide zwischen den Seitenoberflächen dieser Pyramiden.

Beweis. Beschreibt man in einen geraden Kegel fortgesetzt Pyramiden von immer größerer Seitenanzahl, so wächst, da mit der Seitenanzahl sowohl die Grundfläche als die Seitenhöhe der Pyramiden zunimmt, fortwährend auch die Seitenoberfläche derselben (§. 300), ohne jedoch bei diesem Wachsen je mit der Mantelfläche des Kegels zusammenfallen zu können, da die Seitenflächen der Pyramiden stets innerhalb des Kegels liegen.

Beschreibt man um einen geraden Kegel fortgesetzt Pyramiden von immer größerer Seitenanzahl, so nimmt die Seitenoberfläche derselben fortwährend ab, kann jedoch bei diesem Abnehmen ebenfalls nie mit der Mantelfläche des Kegels zusammenfallen, da die Seitenflächen der Pyramiden als Berührungsebenen des Kegels stets außerhalb desselben liegen.

2. Der Unterschied zwischen den Seitenoberflächen der einem geraden Kegel um- und der ihm eingeschriebenen Pyramide wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl unendlich klein.

Beweis. Sind S_n und s_n die Seitenoberflächen der um- und der eingeschriebenen n-seitigen Pyramide, U und u die Umfänge ihrer Grundflächen, H und h ihre Seitenhöhen, so ist

$$S_n = \tfrac{1}{2} UH \text{ und } s_n = \tfrac{1}{2} uh, \text{ daher}$$
$$S_n - s_n = \tfrac{1}{2}(UH - uh) = \tfrac{1}{2}(U - u)H + \tfrac{1}{2}(H - h)u.$$

Wächst nun n ohne Ende, so nähert sich $U - u$ der Null (§. 178, 2); ebenso nähert sich h dem Grenzwerte H, daher $H - h$ der Null; mithin wird $S_n - s_n$ unendlich klein, wenn n unendlich groß wird.

§. **311. Lehrsätze.** 1. Der Kegel ist größer als irgend eine ihm eingeschriebene, und kleiner als irgend eine ihm umgeschriebene Pyramide.

Denn die eingeschriebene Pyramide ist ein Theil des Kegels und dieser wieder ein Theil der umgeschriebenen Pyramide.

2. Der Unterschied zwischen den Volumina der irgend einem Kegel um- und der ihm eingeschriebenen Pyramide wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl unendlich klein.

Beweis. Sind V_n und v_n die Volumina der um- und der eingeschriebenen n-seitigen Pyramide, B und b ihre Grundflächen, und h ihre gemeinsame Höhe, so ist

$$V_n - v_n = \tfrac{1}{3}(B - b) . h.$$

Mit dem Wachsen von n nimmt nun $B - b$ unendlich ab (§. 179, 2), daher wird auch $V_n - v_n$ unendlich klein.

§. **312.** Die Sätze in §§. 310 und 311 führen auf folgende Definitionen:

Die Manteloberfläche eines geraden Kegels ist der gemeinsame Grenzwert der Seitenoberflächen der dem Kegel ein- und umgeschriebenen Pyramiden mit wachsender Seitenanzahl; das Volumen eines Kegels ist der gemeinsame Grenzwert der Volumina der dem Kegel ein- und umgeschriebenen Pyramiden mit wachsender Seitenanzahl.

§. **313. Lehrsatz.** Die Manteloberfläche eines geraden Kegels ist gleich dem halben Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Seite.

Folgt aus §§. 312 und 300, 1.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels und s dessen Seite, so ist die Manteloberfläche $m = 2r\pi . \frac{s}{2} = rs\pi$; mithin die Gesammtoberfläche $o = r^2\pi + rs\pi = (r + s)r\pi$.

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, daher $o = 3r^2\pi$.

§. **314. Lehrsatz.** Das Volumen eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 303.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe eines Kegels, so ist das Volumen $v = \frac{r^2 h \pi}{3}$.

Ist der Kegel ein gerader und s die Seite, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher $v = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}$.

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, folglich $v = \frac{r^3 \pi}{3} \sqrt{3}$.

Zusatz. Die Volumina ähnlicher Kegel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser ihrer Grundflächen. Denn die Höhen verhalten sich wie die Halbmesser der Grundflächen (§. 286, a).

Oberfläche und Volumen eines Kegelstumpfes.

§. **315. Lehrsatz.** Die Manteloberfläche eines geraden Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Schnittkreises und der Seite.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 306.

Sind R und r die Halbmesser des geraden Kegelstumpfes und s dessen Seite, so ist, da der mittlere Schnittkreis den Halbmesser $\frac{R+r}{2}$ hat, die Manteloberfläche $m = (R + r) \pi . s$, und die Gesammtoberfläche

$$o = [R^2 + r^2 + (R + r) s] . \pi.$$

§. **316. Lehrsatz.** Das Volumen eines Kegelstumpfes ist gleich dem Volumen dreier Kegel, welche die beiden Grundflächen und ihr geometrisches Mittel zu Grundflächen und die Höhe des Stumpfes zur Höhe haben.

Folgt aus §. 307.

Bezeichnen R und r bezüglich die Halbmesser der beiden Grundflächen und h die Höhe des Kegelstumpfes, so ist das Volumen

$$v = (R^2 \pi + r^2 \pi + R r \pi) . \frac{h}{3}.$$

2. Der Cylinder.

§. **317.** Wird der Grundfläche eines Cylinders ein reguläres Vieleck ein- oder umgeschrieben und dasselbe als Grundfläche eines Prismas angenommen, dessen Seiten parallel und gleich sind der Achse des Cylinders, so heißt dieses Prisma dem Cylinder ein- oder umgeschrieben.

Die Seitenkanten des eingeschriebenen Prismas sind Seiten, die Seitenflächen des umgeschriebenen Prismas sind Berührungsebenen des Cylinders.

Durch analoge Schlussfolgerungen, wie in §. 310, 1 und 2, ergeben sich folgende zwei Lehrsätze:

1. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders liegt für jede Seitenanzahl des ihm ein- und des ihm umgeschriebenen Prismas zwischen den Seitenoberflächen dieser Prismen.

2. Der Unterschied zwischen den Seitenoberflächen des einem geraden Cylinder um- und des ihm eingeschriebenen Prismas wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl unendlich klein.

§. **318.** 1. Der Cylinder ist größer als irgend ein ihm eingeschriebenes, und kleiner als irgend ein ihm umgeschriebenes Prisma.

2. Der Unterschied zwischen den Volumina des einem Cylinder um- und des ihm eingeschriebenen Prismas wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl unendlich klein.

Beweise analog wie zu 1 und 2 in §. 311.

§. **319.** Auf den Sätzen in §§. 317 und 318 beruhen folgende Erklärungen:

Die Manteloberfläche eines geraden Cylinders ist der gemeinsame Grenzwert der Seitenoberflächen der dem Cylinder ein- und umgeschriebenen Prismen mit wachsender Seitenzahl; das Volumen eines Cylinders ist der gemeinsame Grenzwert der Volumina der dem Cylinder ein- und umgeschriebenen Prismen mit wachsender Seitenanzahl.

§. **320.** **Lehrsatz.** Die Manteloberfläche eines geraden Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §§. 319 und 291.

Bezeichnet r den Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe, so ist die Manteloberfläche $m = 2 r h \pi$, daher die Gesammtoberfläche

$$o = 2 r^2 \pi + 2 r h \pi = 2 r \pi \ (r + h).$$

Im gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $o = 6 r^2 \pi$.

§. **321.** **Lehrsatz.** Das Volumen eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §§. 319 und 299.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, so ist der Cubikinhalt $v = r^2 h \pi$.

Für den gleichseitigen Cylinder hat man $h = 2r$, daher $v = 2 r^3 \pi$.

Zusatz. Die Volumina ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser ihrer Grundflächen (§. 286, a).

3. Rotationsflächen und Rotationskörper.

§. **322.** Dreht sich eine gerade, gebrochene oder krumme Linie oder eine ebene Figur um eine feste Gerade, so beschreibt während einer vollen Umdrehung jeder Punkt derselben eine Kreislinie, deren Ebene zu der festen Geraden normal ist. Die feste Gerade heißt die Rotationsachse oder bloß Achse, die durch die Drehung der Linie beschriebene Fläche die Rotationsfläche dieser Linie, und der durch die Drehung der ebenen Figur erzeugte Körper der Rotationskörper dieser Figur.

§. **323.** Die Rotationsfläche einer Strecke um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Achse ist je nach der Lage dieser Strecke gegen die Achse die Manteloberfläche eines geraden Kegels, eines geraden Kegelstumpfes oder eines geraden Cylinders, oder endlich, wenn die Strecke zur Achse normal ist, die Fläche eines Kreises oder Kreisringes.

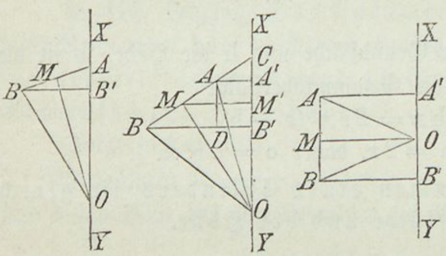
Dreht sich eine gebrochene Linie um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Achse, so ist ihre Rotationsfläche gleich der Summe der Rotationsflächen aller Strecken, aus denen die gebrochene Linie besteht.

Lehrsatz. Die Rotationsfläche der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes um eine in seiner Ebene durch den Scheitel gehende Achse ist gleich der Manteloberfläche eines geraden Cylinders, dessen Grundfläche die Dreieckshöhe zum Halbmesser hat und dessen Höhe die Projection der Grundlinie auf die Achse ist (Fig. 165).

Beweis. Nach der Lage der durch den Scheitel O gehenden Achse XY gegen das Dreieck AOB unterscheiden wir drei Fälle:

I. Es falle XY mit einem Schenkel AO des Dreieckes zusammen; dann ist die Rotationsfläche der Grundlinie AB, die wir durch F (AB) bezeichnen wollen, die Manteloberfläche eines geraden Kegels, somit $F(AB) = \pi BB'.AB$, wenn $BB' \perp XY$ ist. Zieht man $OM \perp AB$, so ist $\triangle ABB' \sim AOM$, folglich $BB' : AB' = OM : AM$ oder $BB' : AB' = OM : \frac{AB}{2}$, woraus $BB'.AB = 2OM.AB'$ folgt; somit hat man

Fig. 165.



$$F(AB) = 2\pi OM.AB'.$$

II. Es liege die Achse XY außerhalb des Dreieckes AOB, ohne jedoch der Grundlinie AB parallel zu sein; dann beschreibt AB die Manteloberfläche eines geraden Kegelstumpfes. Zieht man $OM \perp AB$, ferner AA', MM' und BB' normal zu XY, so ist $F(AB) = 2\pi MM'.AB$. Zieht man noch $AD \perp BB'$, so ist $\triangle MOM' \sim ABD$, daher $MM' : OM = AD : AB$, und $MM'.AB = OM.AD = OM.A'B'$; folglich

$$F(AB) = 2\pi OM.A'B'.$$

III. Ist die Achse XY der Grundlinie AB parallel, so beschreibt diese während der Rotation die Manteloberfläche eines geraden Cylinders. Zieht man $OM \perp AB$, ferner AA' und BB' normal zu XY, so ist

$$F(AB) = 2\pi OM.A'B'.$$

§. **324.** Verbindet man den Mittelpunkt eines regulären Vieleckes mit den Eckpunkten durch Strecken, so entstehen lauter congruente Dreiecke; ein

Dreieck oder mehrere nebeneinander liegende Dreiecke nennt man einen Ausschnitt des regulären Vieleckes und den dazu gehörigen Theil des Vielecksumfanges die Grundlinie des Ausschnittes.

Nimmt man in einem regulären Vielecke eine durch einen Eckpunkt und durch den Mittelpunkt gehende Gerade als Rotationsachse an, so sind die rotierenden Seiten Grundlinien von gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Höhe der Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises ist. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Seitenzahl des Vieleckes eine ungerade ist; in diesem Falle steht eine rotierende Seite zur Achse normal und beschreibt daher eine Kreisfläche.

Aus dem Lehrsatze in §. 323 ergeben sich demnach folgende Sätze:

1. Die Rotationsfläche der Grundlinie eines Ausschnittes eines regulären Vieleckes um eine durch den Mittelpunkt des Vieleckes gehende Achse ist gleich der Manteloberfläche eines geraden Cylinders, welcher den dem Vielecke eingeschriebenen Kreis zur Grundfläche und die Projection der Grundlinie auf die Achse zur Höhe hat.

2. Die Rotationsfläche des halben Umfanges eines regulären Vieleckes von gerader Seitenanzahl um eine durch zwei entgegengesetzte Eckpunkte gehende Achse ist gleich der Manteloberfläche eines geraden Cylinders, welcher den dem Vielecke eingeschriebenen Kreis zur Grundfläche und die Achse zur Höhe hat.

§. **325.** Der Rotationskörper einer geradlinigen ebenen Figur um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Achse ist aus geraden Kegeln, Kegelstumpfen oder Cylindern, welche entsprechend durch Addition oder Subtraction zu verbinden sind, zusammengesetzt.

Lehrsatz. Der Rotationskörper eines gleichschenkligen Dreieckes um eine in seiner Ebene durch den Scheitel gehende Achse ist gleich dem Volumen eines Kegels, der die Rotationsfläche der Grundlinie zur Grundfläche und die Dreieckshöhe zur Höhe hat (Fig. 165).

Beweis. Auch hier sind wieder dieselben drei Fälle wie in §. 323 zu unterscheiden.

I. Fällt die Achse XY mit einer Dreiecksseite AO zusammen, so ist der von dem Dreiecke AOB erzeugte Rotationskörper, den wir durch $K(AOB)$ bezeichnen wollen, die Summe zweier Kegel, daher $K(AOB) = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . AB' + \frac{1}{3}\pi BB'^2 . B'O = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . OA$; aber $BB' . OA = AB . OM$, weil jedes dieser Producte den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes AOB ausdrückt; daher auch $K(AOB) = \pi BB' . AB . \frac{1}{3} OM$, oder, da $\pi BB' . AB$ die von der Grundlinie AB beschriebene Kegelfläche ist,

$$K(AOB) = F(AB) . \tfrac{1}{3} OM.$$

Dieser Beweis gilt für jedes Dreieck AOB, in welchem $AO > B'O$ ist.

II. Liegt die Achse außerhalb des Dreieckes gegen AB convergierend, so verlängere man AB bis zur Begegnung mit der Achse in C; dann ist

$$\begin{aligned} K(AOB) &= K(BOC) - K(AOC) \\ &= F(BC) \cdot \tfrac{1}{3} OM - F(AC) \cdot \tfrac{1}{3} OM \text{ (Beweis I)} \\ &= F(AB) \cdot \tfrac{1}{3} OM. \end{aligned}$$

III. Ist $XY \parallel AB$, so ist der von dem $\triangle AA'O$ beschriebene Kegel $\frac{1}{3}$ des von dem Rechtecke $AA'OM$ beschriebenen Cylinders, daher der von dem $\triangle AOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ desselben Cylinders. Ebenso folgt, dass der von dem $\triangle BOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ des von dem Rechtecke $BB'OM$ beschriebenen Cylinders ist. Somit hat man

$$K(AOB) = \tfrac{2}{3} K(AA'B'B) = \tfrac{2}{3} \pi OM^2 \cdot A'B'.$$

Allein $2\pi OM \cdot A'B'$ ist die von der Seite AB beschriebene Rotationsfläche; daher $$K(AOB) = F(AB) \cdot \tfrac{1}{3} OM.$$

§. **326.** Aus dem Lehrsatze in §. 325 ergeben sich mit Beziehung auf §. 324 folgende Sätze:

1. Der Rotationskörper eines Ausschnittes eines regulären Vieleckes um eine durch den Mittelpunkt des Vieleckes gehende Achse ist gleich dem Volumen eines Kegels, der die Rotationsfläche der Grundlinie des Ausschnittes zur Grundfläche und den Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises zur Höhe hat.

2. Der Rotationskörper eines regulären Halbvieleckes von gerader Seitenanzahl um eine durch zwei entgegengesetzte Eckpunkte gehende Achse ist gleich dem Volumen eines Kegels, der die Rotationsfläche des halben Umfanges zur Grundfläche und den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zur Höhe hat.

4. Die Kugel.

Oberfläche und Cubikinhalt einer Kugel.

§. **327.** Wird einem Halbkreise ein reguläres Halbvieleck ein- oder umgeschrieben und dasselbe sammt dem Halbkreise um den Durchmesser des letzteren gedreht, so beschreibt der Halbkreis eine Kugel, der halbe Umfang des Vieleckes eine Rotationsfläche und das halbe Vieleck selbst einen Rotationskörper, welche der Kugel bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben heißen.

Jede solche Rotationsfläche hat mit der Kugelfläche mehrere Parallelkreise gemeinsam; alle übrigen Punkte der eingeschriebenen Rotationsfläche liegen innerhalb, alle übrigen Punkte der umgeschriebenen Rotationsfläche außerhalb der Kugelfläche.

Lehrsätze. 1. Die Kugelfläche liegt für jede Seitenanzahl der rotierenden Vielecke zwischen der der Kugel ein- und der ihr umgeschriebenen Rotationsfläche.

Beweis. Beschreibt man in und um eine Kugel Rotationsflächen mit fortgesetzt wachsender Seitenanzahl der rotierenden Vielecke, so werden (§. 324, 2) die eingeschriebenen Rotationsflächen immer größer, die umgeschriebenen immer kleiner, ohne dass jedoch die ersteren bei ihrem Wachsen, die letzteren bei ihrem Abnehmen je mit der Kugelfläche zusammenfallen können, da die eingeschriebene Rotationsfläche stets innerhalb, die umgeschriebene stets außerhalb der Kugelfläche liegt.

2. Der Unterschied zwischen den einer Kugel um- und eingeschriebenen Rotationsflächen wird bei fortgesetzt wachsender Seitenzahl der rotierenden Vielecke unendlich klein.

Beweis. Sind F_{2n} und f_{2n} die einer Kugel um- und eingeschriebenen Rotationsflächen zweier $2n$-seitiger Vielecke, r und ϱ die Halbmesser der den letzteren eingeschriebenen Kreise, $2R$ und $2r$ ihre Rotationsachsen, so hat man nach §. 324, 2

$$F_{2n} = 2r\pi \,.\, 2R \text{ und } f_{2n} = 2\varrho\pi \,.\, 2r, \text{ daher}$$
$$F_{2n} - f_{2n} = 4r\pi\,(R - \varrho).$$

Mit dem Wachsen von n nähert sich sowohl R als ϱ dem Grenzwerte r, daher die Differenz $R - \varrho$ der Null; mithin wird, da $4r\pi$ constant ist, auch die Differenz $F_{2n} - f_{2n}$ unendlich klein, wenn n unendlich groß wird.

§. 328. **Lehrsätze.** 1. Die Kugel ist größer als irgend ein ihr eingeschriebener, und kleiner als irgend ein ihr umgeschriebener Rotationskörper.

Denn der eingeschriebene Rotationskörper ist ein Theil der Kugel und diese wieder ein Theil des umgeschriebenen Rotationskörpers.

2. Der Unterschied zwischen den Cubikinhalten des einer Kugel um- und des ihr eingeschriebenen Rotationskörpers wird bei fortgesetzt wachsender Seitenanzahl der rotierenden Vielecke unendlich klein.

Beweis unter Beiziehung von §. 326, 2, analog wie zu §. 327, 2.

§. 329. Auf den §§. 327 und 328 beruhen folgende Definitionen:

Die Oberfläche einer Kugel ist der gemeinsame Grenzwert der ihr ein- und umgeschriebenen Rotationsflächen mit wachsender Seitenanzahl; das Volumen einer Kugel ist der gemeinsame Grenzwert der Volumina derselben Rotationskörper.

§. 330. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der Manteloberfläche eines geraden Cylinders, der den größten Kugelkreis zur Grundfläche und den Durchmesser zur Höhe hat.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 329 und §. 324, 2.

Ist r die Maßzahl des Kugelhalbmessers, so ist die Oberfläche

$$o = 2r\pi \,.\, 2r = 4r^2\pi;$$

d. h. die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kugelkreises.

Zusatz. Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Denn $O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2$.

§. 331. **Lehrsatz.** Das Volumen einer Kugel ist gleich dem Volumen eines Kegels, der die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat.

Ergibt sich aus §. 329 und 326, 2.

Ist r der Halbmesser, o die Oberfläche und v das Volumen einer Kugel, so ist $o = 4r^2\pi$, daher $v = 4r^2\pi \,.\, \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3\pi$.

Zusatz. Die Volumina zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Denn $V : v = \frac{4}{3} R^3\pi : \frac{4}{3} r^3\pi = R^3 : r^3$.

Flächeninhalt eines sphärischen Zweieckes und eines sphärischen Dreieckes.

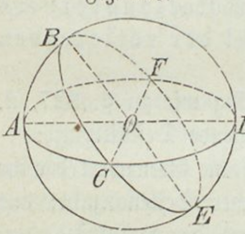
§. 332. **Lehrsatz.** Der Flächeninhalt eines sphärischen Zweieckes ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte eines größten Kugelkreises und der Verhältniszahl zwischen dem sphärischen Winkel und 90^0.

Ist f der Flächeninhalt eines sphärischen Zweieckes, dessen sphärischer Winkel m^0 beträgt, so hat man $f : 4r^2\pi = m^0 : 360^0$, daher

$$f = r^2\pi \,.\, \frac{m^0}{90^0}.$$

§. 333. Es seien A, B, C die Winkel des sphärischen Dreieckes ABC (Fig. 166), f der Flächeninhalt desselben und r der Kugelhalbmesser.

Fig. 166.



Die sphärischen Dreiecke ABC und BCD bilden das Zweieck ACDBA, daher ist nach §. 332

$$ABC + BCD = r^2\pi \,.\, \frac{A}{90^0}; \text{ ebenso ist}$$

$$ABC + ACE = r^2\pi \,.\, \frac{B}{90^0}$$

und wegen $DEC = ABF$ (§. 273)

$$ABC + DEC = r^2\pi \,.\, \frac{C}{90^0};$$

somit durch Addition

$$2ABC + (ABC + BCD + ACE + DEC) = r^2\pi \,.\, \frac{A + B + C}{90^0}, \text{ oder}$$

$$2f + 2r^2\pi = r^2\pi \,.\, \frac{A + B + C}{90^0}, \text{ und folglich}$$

$$f = r^2\pi \,.\, \frac{A + B + C - 180^0}{180^0} = \frac{r^2\pi e}{180^0},$$

wo e die stets positive Differenz $A + B + C - 180^0$ bedeutet und der sphärische Excess des Dreieckes heißt.

Wird die constante Größe $\frac{180^0}{\pi} = 57{\cdot}29578^0 = 206265''$, d. i. das Gradmaß eines Kreisbogens, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist (§. 189, 4), durch ϱ bezeichnet, so nimmt der obige Ausdruck für f folgende Form an; $f = r^2 \cdot \frac{e}{\varrho}$, d. h. der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem Quadrate des Kugelhalbmessers multipliciert mit dem Quotienten aus dem sphärischen Excesse und dem Gradmaße eines mit dem Halbmesser längengleichen Kreisbogens.

Beispiel. Ist $A = 59^0\ 4'\ 35''$, $B = 94^0\ 23'\ 10''$, $C = 102^0\ 4'\ 50''$,

so ist $e = 75^0\ 32'\ 35''$, $e'' = 271955''$

$$\log e'' = 5{\cdot}43\ 450$$
$$\log \varrho'' = 5{\cdot}31\ 443$$
$$0{\cdot}12\ 007 \quad f = 1{\cdot}31847\ r^2.$$

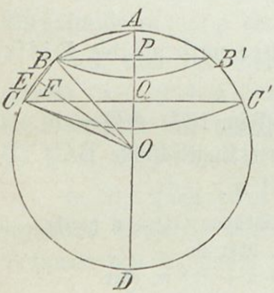
Zusatz. Die Fläche eines sphärischen Dreieckes gilt zugleich als Maß für die Größe des Dreikants, dessen Kugelschnitt es ist (§. 271).

Oberfläche einer Kugelmütze und einer Kugelzone.

§. 334. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugelmütze ist gleich der Manteloberfläche eines geraden Cylinders, der den größten Kugelkreis zur Grundfläche und die Höhe der Mütze zur Höhe hat.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 324, 1.

Fig. 167.



Ist (Fig. 167) $OA = r$ der Halbmesser der Kugel und $AP = h$ die Höhe der Kugelmütze ABB', so ist die Fläche dieser Mütze

$$M = 2 r \pi . h \ldots . 1).$$

Für h und $BP = \varrho$ ist

$$\varrho^2 = (2r - h)\ h \text{ (§. 135), also}$$
$$2rh = \varrho^2 + h^2 \text{ und}$$
$$M = (\varrho^2 + h^2)\ \pi \ldots 2).$$

Ist die Sehne $AB = s$ gegeben, so folgt aus 2)

$$M = s^2 \pi \ldots\ldots\ldots\ldots . 3).$$

§. 335. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugelzone ist gleich der Manteloberfläche eines geraden Cylinders, der den größten Kugelkreis zur Grundfläche und die Höhe der Zone zur Höhe hat.

Folgt aus §. 324, 1.

Heißt Z die Fläche der zu dem Bogen BC (Fig. 167) gehörigen Kugelzone $BCC'B'$, so ist für $OA = r$ und $PQ = a$

$$Z = 2 r \pi . a \ldots\ldots . 1).$$

Sind nebst r die Halbmesser der Grundflächen $BP = \varrho$ und $CQ = \varrho'$ gegeben, so hat man, da $a = OP - OQ$ ist,

$$Z = 2 r \pi \left(\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \sqrt{r^2 - \varrho'^2}\right) \ldots . 2).$$

Volumen eines Kugelsectors, eines Kugelsegmentes und einer Kugelschichte.

§. 336. **Lehrsatz.** Das Volumen eines Kugelsectors ist gleich dem Volumen eines Kegels, der die Kugelmütze des Sectors zur Grundfläche und den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 326, 1.

Haben r und h die in §. 334 angeführten Bedeutungen, so ist das Volumen v des durch die Rotation des Kreisausschnittes AOB (Fig. 167) erzeugten Kugelsectors

$$v = 2r\pi . h . \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 h \pi.$$

§. **337.** Das Volumen eines Kugelsegmentes ist, je nachdem dieses kleiner oder größer als die Halbkugel ist, gleich der Differenz oder der Summe der Volumina des entsprechenden Kugelsectors und eines Kegels, dessen Grundfläche die Grundfläche des Segmentes, und dessen Höhe der Abstand dieser Grundfläche von dem Kugelmittelpunkte ist.

Haben r, ϱ, h die in §. 334 angegebenen Bedeutungen, so hat man für den Inhalt S des zu dem Bogen AB (Fig. 167) gehörigen Kugelsegmentes ABB'

$$S = \tfrac{2}{3} r^2 h \pi - \tfrac{1}{3} \varrho^2 (r - h) \pi,$$

oder, da $\varrho^2 = (2r - h)\, h$ ist,

$$S = \tfrac{2}{3} r^2 h \pi - \tfrac{1}{3} h\, (2r - h)(r - h)\, \pi, \text{ oder}$$

$$S = \tfrac{1}{3} h^2 (3r - h)\, \pi.$$

§. **338.** Das Volumen einer Kugelschichte wird als die Differenz der Volumina zweier Kugelsegmente berechnet.

Haben r, h die obigen Bedeutungen und ist (Fig. 167) $AQ = h'$, so ist das Volumen s der zu dem Bogen BC gehörigen Kugelschichte BCC'B'

$$s = \tfrac{1}{3} \{ h'^2 (3r - h') - h^2 (3r - h) \} \pi \ldots . 1).$$

Ist r, dann die Höhe $PQ = a$ der Schichte und der Abstand $OQ = d$ gegeben, so geht der Ausdruck 1), da $h' = r - d$ und $h = r - a - d$ ist, über in

$$s = \tfrac{1}{3} \{ (r - d)^2 (2r + d) - (r - a - d)^2 (2r + a + d) \} \pi, \text{ oder}$$

$$s = \tfrac{1}{3} a \{ 3r^2 - 3d^2 - 3ad - a^2 \} \pi \ldots . 2).$$

Sind die Halbmesser $BP = \varrho$ und $CQ = \varrho'$ der beiden Grundflächen und die Höhe $PQ = a$ der Schichte gegeben, so erhält man, da

$$\varrho'^2 = r^2 - d^2,$$

$$\varrho^2 = r^2 - a^2 - d^2 - 2ad, \text{ daher}$$

$$\varrho'^2 + \varrho^2 = 2r^2 - 2d^2 - 2ad - a^2, \text{ und somit}$$

$$\frac{\varrho'^2 + \varrho^2 + a^2}{2} = r^2 - d^2 - ad$$

ist, durch Substitution in 2)

$$s = \tfrac{1}{3} a \{ \tfrac{3}{2} (\varrho'^2 + \varrho^2 + a^2) - a^2 \} \pi, \text{ oder}$$

$$s = \tfrac{1}{2} (\varrho^2 \pi . a + \varrho'^2 \pi . a) + \tfrac{4}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi \ldots . 3).$$

Die Formel 3) enthält den Satz:

Eine Kugelschichte ist gleich dem arithmetischen Mittel aus dem ihr ein- und umgeschriebenen Cylinder, vermehrt um die der Schichte eingeschriebenen Kugel.

III. Übungsaufgaben.

§. 339. Aufgaben über die Messung ebenflächiger Körper.

1. In einem Würfel ist a die Kante, d die Diagonale, o die Oberfläche, v das Volumen; aus einer dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Gegeben: 1) a = 1 *m* 3 *dm* 3 *cm*; 2) d = 0·755 *m*; 3) o = 10 cm^2; 4) v = 12·326391 m^3.

2. In einem rechtwinkligen Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche ist a (3·2 *dm*) eine Grundkante und o (52·48 dm^2) die Oberfläche; man bestimme das Volumen v.

3. Die Oberfläche o und das Volumen v eines rechtwinkligen Parallelepipeds aus dem Verhältnisse der drei Kanten und aus der Diagonale einer Seitenfläche zu berechnen.

Sind x, y, z die ungleichen Kanten, und ist $x : y : z = m : n : p$ und d die Diagonale der Seitenfläche, deren Seiten y und z sind, so erhält man

$$o = \frac{2(mn + mp + np)}{n^2 + p^2} \cdot d^2 \text{ und } v = \frac{mnp}{(n^2 + p^2)\sqrt{n^2 + p^2}} \cdot d^3.$$

4. Aus dem Volumen v eines rechtwinkligen Parallelepipeds und dem Verhältnisse $m : n : p$ der drei Kanten die Kanten zu berechnen.

4 a. Aus der Summe der drei Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds $x + y + z = s$ und aus dem Verhältnisse $x : y : z = m : n : p$ die Oberfläche und den Inhalt des Parallelepipeds zu berechnen. Speciell s = 74·4 *cm*, $x : y : z = 5 : 4 : 3$.

5. Die Höhe eines geraden Prismas ist h, die Basis desselben ein reguläres Sechseck, dessen Seite a ist; bestimme a) die Oberfläche, b) das Volumen des Prismas.

5 a. Aus einer geraden prismatischen Säule von Holz, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist, wird das größte, gerade dreiseitige Prisma gehauen; wie viel beträgt der Abfall, wenn die Grundkante des sechsseitigen Prismas 15 *cm* und die Seitenkante 1 *m* beträgt?

6. In einem sechsseitigen und einem vierseitigen geraden Prisma mit regulären Grundflächen ist die Höhe h (4·1 *dm*) und eine Seite der Grundfläche a (2·1 *dm*); wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Volumina?

6 a. Die Oberfläche und der Inhalt einer geraden prismatischen Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist, aus einer Grundkante a und einer Seitenkante s zu berechnen.

7. In einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ist a) a eine Grundkante und s eine Seitenkante; b) a eine Grundkante und h die Höhe; bestimme die Oberfläche o und das Volumen v.

8. Eine Pyramide mit der Höhe h und dem Volumen v hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck; wie groß ist eine Grundkante?

8 a. Die Oberfläche einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, beträgt o; wie groß ist eine Grundkante, wenn die Höhe der Pyramide doppelt so groß wie eine Grundkante ist?

9. Die Oberfläche und den Inhalt einer geraden Pyramide zu finden, in welcher die Höhe h, und a) die Grundfläche ein reguläres Sechseck mit der Seite a ist, b) ein reguläres Achteck mit der Seite a ist.

10. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a; wie groß ist a) die Oberfläche, b) das Volumen, wenn die Seitenkanten auf einander normal stehen?

11. In einem geraden Pyramidenstumpfe ist die Seitenkante s, die Grundflächen sind a) gleichseitige Dreiecke, b) Quadrate, c) reguläre Sechsecke mit den Seiten a_1 und a_2; wie groß ist die Oberfläche und das Volumen?

12. Eine Pyramide, deren Grundfläche b, und deren Höhe h ist, wird in dem Abstande a vom Scheitel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten; berechne die Volumina der beiden Theile der Pyramide.

13. In welchem Abstande vom Scheitel einer geraden Pyramide muss man eine mit der Grundfläche parallele Ebene legen, damit sie a) die Seitenoberfläche, b) die Pyramide selbst in dem Verhältnisse $m:n$ theile?

14. Ein Prismatoid von der Höhe h hat zu Grundflächen zwei congruente gleichseitige Dreiecke, deren Seiten $= a$ jedoch nicht parallel sind; wie groß ist sein Volumen? Der Mittelschnitt ist ein reguläres Sechseck.

15. Ein Sphenisk hat zur Grundfläche ein Trapez mit den Parallelseiten a und b und der Höhe k. Die durch a und b gehenden Seitenflächen schneiden sich in einer Kante von der Länge c im Abstande h von der Grundfläche; die beiden anderen Seitenflächen sind Dreiecke. Bestimme das Volumen v dieses Körpers.

$$v = \tfrac{1}{6} h k (a + b + c).$$

16. Aus der Kante a eines regulären Polyeders a) die Oberfläche o, b) das Volumen v desselben zu bestimmen.

a) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ist, ist $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; daher für das Tetr. $o = a^2\sqrt{3}$, Oct. $o = 2a^2\sqrt{3}$, Ikos. $o = 5a^2\sqrt{3}$.

Für das Hexaeder ist $o = 6a^2$.

Der Flächeninhalt eines regulären Fünfeckes mit der Seite a ist (§. 175, Zus.) $\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, folglich ist für das Dodekaeder $o = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

b) Aus §. 309, 2, und 278, 3, ergibt sich für das

$$\text{Tetr. } v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}, \qquad \text{Oct. } v = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}, \qquad \text{Hexaed. } v = a^3,$$

$$\text{Ikos. } v = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}), \qquad \text{Dodek. } v = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

17. Die Oberfläche und das Volumen eines regulären Polyeders aus dem Halbmesser a) der eingeschriebenen, b) der umgeschriebenen Kugel zu bestimmen.

§. 340. Aufgaben über die Messung krummflächiger Körper.

1. In einem geraden Kegel ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, s die Seite, m die Manteloberfläche, v das Volumen:

man bestimme a) h, s, m, wenn r, v gegeben sind;
b) r, h, v, „ s, m „ „
c) r, m, v, „ h, s „ „

Gegeben: 1) $r = 4\,dm$, $v = 70{\cdot}37167\,dm^3$; 2) $s = 8{\cdot}1\,dm$, $m = 89{\cdot}1873\,dm^2$; 3) $h = 1{\cdot}32\,m$, $s = 1{\cdot}43\,m$.

2. Wie gestalten sich die Auflösungen in 1. für $s = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Kegel?

3. Der Umfang der Grundfläche eines geraden Kegels ist p, der Achsenschnitt desselben ist ein rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist die Manteloberfläche?

4. In einem geraden Kegelstumpfe sind R und r die Halbmesser der Grundflächen und o die Oberfläche; bestimme das Volumen v.

5. Wie groß ist die Höhe h eines geraden Kegelstumpfes mit den Halbmessern R und r, wenn die Manteloberfläche desselben der Summe der Grundflächen gleich ist?

6. In welchem Abstande von der kleineren Grundfläche eines geraden Kegelstumpfes muss eine mit ihr parallele Ebene gelegt werden, damit a) die Schnittfläche $\frac{m}{n}$ der größeren Grundfläche sei, b) damit der Schnitt den Kegelstumpf halbiere?

7. Einem geraden Kegel, dessen Halbmesser r und dessen Höhe h ist, wird eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche a) eingeschrieben, b) umgeschrieben; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

8. Einem Kegelstumpfe mit der Höhe h und den Halbmessern R und r wird ein Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen eingeschrieben; wie groß ist das Volumen dieses Pyramidenstumpfes?

9. In einem geraden Cylinder ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, m die Manteloberfläche, v das Volumen; berechne aus je zweien dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben: 1) $r = 1{\cdot}064\,m$, $h = 2{\cdot}725\,m$; 2) $r = 6{\cdot}42\,dm$, $m = 15{\cdot}18\,dm^2$; 3) $m = 20\,dm^2$, $v = 7{\cdot}07356\,dm^3$.

10. Wie gestalten sich die Auflösungen in 9. für $h = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Cylinder?

11. In einem geraden Cylinder, dessen Cubikinhalt v ist, verhält sich die Höhe zu dem Durchmesser der Grundfläche wie $m : n$; wie groß ist die Oberfläche?

12. Das Volumen einer Cylinderröhre aus den beiden Halbmessern R und r und der Höhe h zu berechnen.

13 Aus dem Volumen v einer Cylinderröhre, der Höhe h und dem größeren Halbmesser R die Dicke d zu finden.

14. Das Ciment für 1 Liter = 1 dm^3 des Flüssigkeitsmaßes hat die Form eines Cylinders, dessen Höhe das Doppelte des Durchmessers beträgt; wie groß sind die Dimensionen dieses Cimentes in Millimeter?

15. Das Ciment für ein Deciliter des Hohlmaßes für trockene Gegenstände hat die Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser gleich ist dem Durchmesser eines inhaltsgleichen gleichseitigen Cylinders und dessen unterer Durchmesser $^5/_4$ des oberen beträgt; welche Dimensionen hat dasselbe?

16. Auf jeder Grundfläche eines geraden Cylinders vom Halbmesser r steht ein Kegel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der andern Grundfläche ist; bestimme den Umfang des Kreises, in welchem sich die beiden Kegelmäntel schneiden.

17. Einem geraden Cylinder mit dem Halbmesser r und der Höhe h wird ein Prisma mit quadratischer Grundfläche eingeschrieben; wie groß ist jede Seitenfläche des Prismas?

18. Wie groß ist die Manteloberfläche eines Cylinders, der einem Würfel von der Kante a 1) eingeschrieben, 2) umgeschrieben ist?

19. Ein Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind, kann um jede derselben als Achse gedreht werden; man suche die Relation zwischen den Volumina der dadurch entstandenen Rotationskörper A, B und C.

$$Aa = Bb = Cc.$$

20. Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Höhe h und dessen Parallelseiten a und a + m sind, rotiert um die Seite a als Achse; bestimme a) die Rotationsfläche, b) den Rotationskörper.

21. Ein Trapez rotiert einmal um die größere, dann um die kleinere seiner Parallelseiten; die Inhalte der dadurch erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie m : n. Wie verhalten sich die beiden parallelen Seiten zu einander?

22. Bestimme a) die Oberfläche, b) das Volumen eines Körpers, welcher durch Rotation eines regulären Sechseckes von 8 *cm* Seitenlänge um eine Winkelsymmetrale desselben erzeugt wird.

23. Die Seite eines regulären Fünfeckes ist a; wie groß ist a) die Rotationsfläche, b) der Rotationskörper desselben um eine Seitensymmetrale? (§. 175 Zus.)

24. In einer Kugel ist r der Halbmesser, o die Oberfläche, v das Volumen; suche aus jeder dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben: 1) r = 0·3589 *m*; 2) r = 1 *m* 1 *dm* 5·8 *cm*;
3) o = 64·184 dm^2; 4) v = 5·33774 dm^3.

25. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, welche mit einem gegebenen geraden a) Cylinder, b) Kegel, c) Kegelstumpf 1. gleiche Oberfläche, 2. gleiches Volumen hat.

26. Aus einer metallenen **Hohlkugel**, deren äußerer Durchmesser $2r$ (18 *cm*), und deren Wanddicke d (2 *cm*) ist, soll eine massive Kugel gegossen werden; wie groß wird der Durchmesser derselben?

27. Der größere Halbmesser einer Hohlkugel sei r und das Volumen ihrer Schale k; wie dick ist die Schale?

28. Wie groß ist der Flächeninhalt eines sphärischen Zweieckes, dessen Winkel $22^0 30'$ ist, wenn der Halbmesser der Kugel 1 *m* beträgt?

29. Man berechne für den Kugelhalbmesser = 1 *m* den Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes, dessen Winkel sind:

a) $125^0, 87^0, 82^0$; c) $96^0 34' 47''$, $71^0 5' 29''$, $63^0 19' 35''$;
b) $90^0, 51^0 59', 56^0 40'$; d) $21^0 42' 50''$, $142^0 18' 53''$, $30^0 46' 24''$.

30. Das durch die Rotation des Kreisabschnittes BCE (Fig. 167) um den Durchmesser AD erzeugte **ringförmige Kugelsegment** A zu bestimmen, wenn die Sehne $BC = \sigma$ und die Projection auf die Achse $PQ = a$ gegeben sind.

$$A = \frac{a \sigma^2 \pi}{6}.$$

31. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche übersieht von derselben eine Calotte, welche begrenzt wird durch die Kreislinie, welche die Berührungspunkte der vom Auge nach der Erde gezogenen Tangenten verbindet. Wie groß ist diese Calotte, wenn h die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und r den Halbmesser der Erde bezeichnet?

$$f = \frac{2 r^2 h \pi}{r + h}.$$

32. Wie groß ist die Fläche der Erde, welche man in einer Höhe von $137 \cdot 88$ *m* übersieht? ($r = 858 \cdot 474$ g. Meilen, 1 g. Meile = $7420 \cdot 44$ *m*).

33. Eine Kugel mit dem Halbmesser r wird durch eine Ebene so geschnitten, dass sich die Kugelmützen wie $m : n$ verhalten; wie groß sind die Cubikinhalte der zugehörigen Kugelsegmente?

$$S_1 = (m + 3n) \cdot \frac{4 m^2 r^3 \pi}{3 (m + n)^3} \text{ und } S_2 = (3m + n) \cdot \frac{4 n^2 r^3 \pi}{3 (m + n)^3}.$$

34. Das Segment einer Kugel vom Halbmesser r hat ein doppelt so großes Volumen als eine Kugel, welche die Höhe des Segmentes zum Halbmesser hat; wie groß ist die Höhe?

35. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, welche einem geraden Kegel mit der Höhe h und dem Halbmesser r eingeschrieben ist?

36. In einem gleichseitigen Cylinder werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Volumina dieser drei Körper?

37. Um eine Kugel werden ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Volumina dieser drei Körper?

38. Eine Kugel mit der Oberfläche o soll in einen inhaltsgleichen geraden Cylinder verwandelt werden, dessen Manteloberfläche der Oberfläche der Kugel gleich ist; wie groß ist a) der Halbmesser, b) die Höhe des Cylinders?

39. Einem gleichseitigen Dreiecke ist ein Kreis eingeschrieben; wie verhält sich die Manteloberfläche des durch Rotation des Dreieckes um eine seiner Höhen beschriebenen Kegels zu der Oberfläche der Kugel, welche bei dieser Drehung durch den Kreis erzeugt wird?

40. Um einen Würfel von der Kante a wird eine Kugel und um diese ein reguläres Tetraeder beschrieben; wie groß ist a) die Oberfläche, b) das Volumen des Tetraeders?

41. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche den darauf senkrechten Durchmesser 2R in dem Verhältnisse m : n theilt; auf der Schnittfläche stehen zwei gerade Kegel, deren Scheitel in der Kugeloberfläche liegen. Wie verhält sich das Volumen dieses Doppelkegels zu dem Volumen der Kugel?

42. Einem geraden Kegel, dessen Grundfläche r zum Halbmesser hat, und dessen Seite s ist, wird eine Kugel eingeschrieben. Wie groß ist a) der Halbmesser ϱ des Parallelkreises, in welchem die Kugel von der Mantelfläche des Kegels berührt wird, b) das Volumen v des durch diesen Kreis abgeschnittenen Kugelsegmentes?

$$\varrho = \frac{r\,(s - r)}{s} \text{ und } v = \frac{\varrho^3 \pi}{3} \cdot \frac{2s + r}{s + r} \cdot \sqrt{\frac{s - r}{s + r}}.$$

43. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich einer Zone, welche zu einer Kugel vom Radius r gehört und deren Höhe a ist; man bestimme die Oberfläche und das Volumen eines regulären Octaeders, welchem die erstere Kugel eingeschrieben ist.

44. Ein reguläres Tetraeder ist inhaltsgleich mit einer Kugelschichte, die zu einer Kugel vom Halbmesser r gehört und deren Grundflächen von dem Kugelmittelpunkte die Abstände d und d′ haben; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt einer Kugel, welche dem Tetraeder umgeschrieben ist?

Dritter Theil.

Trigonometrie.

§. 341. Um die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und der Winkel eines Dreieckes von einander durch Gleichungen darstellen und mittelst dieser aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die übrigen Stücke desselben durch Rechnung finden zu können, hat man als Stellvertreter der Winkel die Verhältniszahlen gewisser Strecken, welche durch die Winkel unzweideutig bestimmt sind, eingeführt. Diese Verhältniszahlen nennt man Functionen der Winkel oder goniometrische, auch trigonometrische Functionen, und die Lehre von den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen derselben die Goniometrie.

Die Anwendung der Winkelfunctionen auf die Berechnung der Dreiecke bildet den Gegenstand der Trigonometrie, und zwar der ebenen oder der sphärischen Trigonometrie, je nachdem sie sich auf die ebenen oder auf die sphärischen Dreiecke bezieht.

Erster Abschnitt.

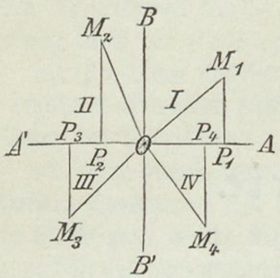
Goniometrie.

I. Erklärung und Darstellung der Winkelfunctionen.

§. 342. Zieht man in einer Ebene durch einen Punkt O (Fig. 168) zwei zu einander normale Gerade AA' und BB', so theilen diese die unbegrenzte Ebene in vier congruente Theile, welche Quadranten heißen. Dreht sich dann in dieser Ebene von der festen Geraden OA aus ein Strahl OM um den Punkt O in einer bestimmten Richtung, hier nach links, so durchläuft er nach und nach alle Quadranten der Ebene, die nach jener Richtung der Reihe nach der erste, zweite, dritte, vierte Quadrant heißen sollen, und bildet während dieser Drehung mit der Geraden OA alle Winkel von 0^0 bis 360^0

Ein Winkel AOM_1, dessen ein Schenkel OA ist und dessen zweiter Schenkel OM_1, OM_2,... im ersten, zweiten,... Quadranten liegt, wird gewöhnlich in abgekürzter Ausdrucksweise ein Winkel im ersten, zweiten,... Quadranten genannt.

Fig. 168.



Wird in dem Winkel AOM_1 von einem Punkte M_1 des einen Schenkels zu dem andern Schenkel die Normale M_1P_1 gezogen, so ist OP_1 die Projection der Strecke OM_1 auf die Gerade OA (§ 158); die Gerade OA heißt dann die Projectionsachse und das rechtwinklige Dreieck M_1P_1O ein Projectionsdreieck des Winkels AOM_1. Liegt der Winkel im zweiten, dritten, vierten Quadranten, so liegt auch sein Projectionsdreieck in demselben Quadranten.

Zieht man von verschiedenen Punkten des einen Schenkels zu dem andern Normale, so entstehen mehrere Projectionsdreiecke, diese sind einander ähnlich und daher sind die Verhältnisse zwischen je zwei Seiten des einen Projectionsdreieckes gleich den Verhältnissen zwischen den homologen Seiten jedes andern Dreieckes. Für jeden Winkel gibt es daher zwischen den Seiten seines Projectionsdreieckes unzweideutig bestimmte Verhältnisse, welche einzig nur von der Größe des Winkels abhängen und deshalb Functionen des Winkels heißen.

§. **343.** Die einzelnen Verhältnisse zwischen den Seiten des Projectionsdreiecks eines Winkels haben besondere Namen. Ist $AOM = \alpha$ (Fig. 168) ein Winkel in einem beliebigen Quadranten, so heißt in dem Projectionsdreiecke MPO

1. das Verhältnis der Normale zur Hypotenuse der Sinus des Winkels α, $\frac{MP}{OM} = \sin\alpha$;

2. das Verhältnis der Projection zur Hypotenuse der Cosinus dieses Winkels, $\frac{OP}{OM} = \cos\alpha$;

3. das Verhältnis der Normale zur Projection die Tangente des Winkels α, $\frac{MP}{OP} = \operatorname{tang}\alpha$;

4. das Verhältnis der Projection zur Normale die Cotangente dieses Winkels, $\frac{OP}{MP} = \cot\alpha$;

5. das Verhältnis der Hypotenuse zur Projection die Secante des Winkels α, $\frac{OM}{OP} = \sec\alpha$;

6. das Verhältnis der Hypotenuse zur Normale die Cosecante dieses Winkels, $\frac{OM}{PM} = \operatorname{cosec}\alpha$.

Die Namen der Functionen finden in den §§. 344 und 349 ihre Erklärung.

Aufgaben. 1. Construiere einen Winkel von 60° und sein Projectionsdreieck, miss die Seiten des letzten und berechne aus diesen durch Division alle sechs Functionen des Winkels.

2. Bestimme ebenso die einzelnen Functionen für a) 30°, b) 45°, c) 75°.

3. Gegeben ist sin $\alpha = \frac{3}{4}$; construiere mit Hilfe des Projectionsdreieckes den Winkel α. In welchem Quadranten kann α liegen?

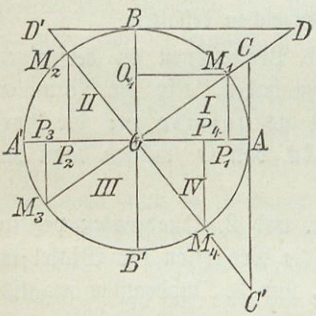
4. Construiere ebenso den Winkel α, wenn gegeben ist a) cos $\alpha = \frac{1}{2}$, b) tang $\alpha = \frac{5}{2}$, c) cot $\alpha = 1$, d) sec $\alpha = \frac{5}{4}$, e) cosec $\alpha = \frac{4}{3}$.

§. **344.** Darstellung der Winkelfunctionen am Kreise.

Zieht man (Fig. 169) in einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, zwei zu einander normale Durchmesser A A′ und B B′, so zertheilen sie den Kreis in vier Quadranten und es bildet ein Halbmesser O M, welcher sich von dem festen Halbmesser O A aus um O in der Richtung nach links durch alle vier Quadranten dreht, nach und nach mit dem festen Halbmesser O A alle um den Punkt O möglichen Winkel.

a) Ist A O M = α einer dieser Winkel, und zieht man von dem Endpunkte M des beweglichen Halbmessers O M auf den festen Halbmesser O A oder auf dessen Verlängerung O A′ die Normale M P, so ist nach §. 343

Fig. 169.



$$\frac{MP}{OM} = \frac{MP}{r} = \sin\alpha \text{ und } \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{r} = \cos\alpha.$$

b) Errichtet man ferner in dem Endpunkte A des festen Halbmessers O A auf diesen die Normale A C, welche den verlängerten beweglichen Halbmesser O M in C schneidet, so hat man, da $\triangle$ O A C $\sim$ O P M ist,

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{r} = \text{tang}\,\alpha \text{ und}$$
$$\frac{OM}{OP} = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{r} = \sec\alpha.$$

c) Errichtet man endlich in B auf O B die Normale B D, welche den verlängerten beweglichen Halbmesser O M in D schneidet, so hat man, da $\triangle$ O B D $\sim$ M P O ist,

$$\frac{OP}{MP} = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{r} = \cot\alpha \text{ und } \frac{OM}{MP} = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{r} = \text{cosec}\,\alpha.$$

Die Strecken M P, O P, A C, O C, B D und O D, deren Verhältnisse zu dem Halbmesser r des Kreises die Winkelfunctionen bestimmen, heißen goniometrische Linien, und zwar M P die Sinuslinie*), O P die Cosinuslinie, A C die Tangentenlinie**), O C die Secantenlinie***), B D die Cotangentenlinie und O D die Cosecantenlinie.

---

*) Sinus ist wahrscheinlich entstanden aus s. ins.: semissis inscriptae, Hälfte der eingeschriebenen Sehne, denn MP ist die Hälfte der Sehne des doppelten Centriwinkels.

**) Weil sie Tangente an den Kreis ist.

***) Weil sie den Kreis schneidet.

Da die Verhältnisse dieser Linien zu dem Halbmesser nur von der Größe des Winkels α abhängen und für jeden beliebigen Halbmesser dieselben Werte haben, so kann man, ohne die Werte der Winkelfunctionen zu ändern, die Längeneinheit selbst als Halbmesser des Kreises annehmen und somit $r = 1$ setzen. Dann gehen die obigen Verhältnisse in die folgenden Ausdrücke über:

$$M P = \sin \alpha, \qquad A C = \operatorname{tang} \alpha, \qquad B D = \cot \alpha,$$
$$O P = \cos \alpha, \qquad O C = \sec \alpha, \qquad O D = \operatorname{cosec} \alpha;$$

wo jedoch unter $M P$, $O P$, $A C$, $O C$, $B D$ und $O D$ nicht die goniometrischen Linien, sondern ihre Maßzahlen zu verstehen sind.

Die Winkelfunctionen können daher als Maßzahlen der entsprechenden goniometrischen Linien am Kreise für den Halbmesser $= 1$ aufgefasst werden.

§. **345.** Vorzeichen der Winkelfunctionen.

In den Projectionsdreiecken $M_1 P_1 O$, $M_2 P_2 O$, $M_3 P_3 O$ und $M_4 P_4 O$ (Fig. 168), welche Winkeln verschiedener Quadranten entsprechen, liegt die Normale bald über, bald unter der Projectionsachse $O A$, und die Projection bald rechts, bald links von dem Scheitel O. Zur genauen Bestimmung derselben muss daher dieser Gegensatz ihrer Lage durch die Vorzeichen des Positiven und Negativen ausgedrückt werden, wodurch dann auch die Winkelfunctionen der Größe der Winkel entsprechende Vorzeichen erhalten.

Man nimmt allgemein die Normalen und Projectionen in derjenigen Lage, welche sie für Winkel im ersten Quadranten haben, also die Normalen über $O A$, und die Projectionen rechts von O als positiv an; die Normalen unter $O A$ und die Projectionen links von O müssen dann als negativ angesehen werden.

Hiernach ist die Normale für Winkel im 1. und 2. Quadranten positiv, für Winkel im 3. und 4. Quadranten negativ; die Projection für Winkel im 1. und 4. Quadranten positiv, für Winkel im 2. und 3. Quadranten negativ.

Für die Vorzeichen der Winkelfunctionen ergeben sich dann aus den Erklärungen im §. 343, da die Hypotenuse immer absolut (positiv) angenommen wird, folgende Beziehungen:

1. Der Sinus und die Cosecante haben gleiches Vorzeichen mit der Normale des Projectionsdreieckes; sie sind also für Winkel im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ.

2. Der Cosinus und die Secante haben gleiches Vorzeichen mit der Projection, und sind demnach für Winkel im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

3. Die Tangente und die Cotangente sind positiv, wenn die Normale und die Projection gleiche Vorzeichen, und negativ, wenn diese verschiedene Vorzeichen haben, somit für Winkel im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man auch, wenn man die Winkelfunctionen als Maßzahlen der goniometrischen Linien am Kreise (Fig. 169) auffasst.

Die Sinus- und die Tangentenlinie über dem festen Halbmesser OA sind positiv, unter demselben negativ.

Die Cosinus- und die Cotangentenlinie rechts vom Mittelpunkte O sind positiv, links von demselben negativ.

Die Secanten- und die Cosecantenlinie sind positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung des beweglichen Halbmessers, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung desselben erhalten werden.

§. 346. Zu- und Abnahme der Functionen bei dem Wachsen des Winkels.

Ändert sich der Winkel α, so ändern sich auch die zugehörigen goniometrischen Linien, daher auch ihre Maßzahlen, d. i. die Winkelfunctionen.

A Größe des Sinus und des Cosinus (Fig. 169).

1. Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Cosinus ohne Ende der Einheit nähert; fallen beide Schenkel zusammen, so wird $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. Für sehr kleine Winkel ist der Unterschied zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels um so kleiner, je mehr sich der Winkel der Null nähert, wobei jedoch der Sinus stets kleiner bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so nimmt $\sin \alpha$ zu, anfangs rascher, dann langsamer; $\cos \alpha$ dagegen nimmt ab, anfangs langsamer, dann rascher; beide sind positiv. Für $\alpha = 90^0$ fällt die Sinuslinie mit dem beweglichen Schenkel zusammen, und es ist daher $\sin 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Wächst α von 90^0 bis 180^0, so ist der Sinus positiv und abnehmend, der Cosinus dagegen negativ und dem absoluten Werte nach wachsend. Wird $\alpha = 180^0$, so hat man $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

4. Während α von 180^0 bis 270^0 zunimmt, ist $\sin \alpha$ negativ und absolut zunehmend, $\cos \alpha$ auch negativ, aber absolut abnehmend; und es wird endlich $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Wird $\alpha > 270^0$, aber $< 360^0$, so ist der Sinus negativ und sein absoluter Wert abnehmend, der Cosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360^0$ werden Sinus und Cosinus wieder so groß wie für $\alpha = 0^0$, nämlich $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Sinus und Cosinus liegen demnach immer zwischen den Grenzen $+1$ und -1.

B. Größe der Tangente und der Secante (Fig. 169).

1. Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch die Tangente, während sich die Secante der Einheit nähert; fallen die beiden Schenkel zusammen, so hat man $\operatorname{tang} 0^0 = 0$ und $\sec 0^0 = +1$. Ferner: Je kleiner der Winkel,

desto kleiner wird auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente des Winkels, wobei jedoch die Tangente stets größer bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so sind tang α und sec α positiv und zunehmend. Für $\alpha = 90^0$ sind Tangente und Secante unendlich groß.

3. Nimmt α über 90^0 hinaus bis 180^0 zu, so werden Tangente und Secante negativ und dem absoluten Werte nach abnehmend. Erreicht α die Größe 180^0, so wird tang $180^0 = 0$, sec $180^0 = -1$.

4. Wenn α von 180^0 bis 270^0 wächst, nehmen die absoluten Werte der Tangente und Secante zu, und zwar ist die Tangente positiv, die Secante negativ. Für $\alpha = 270^0$ sind Tangente und Secante unendlich groß.

5. Wächst α über 270^0 bis 360^0, so nehmen Tangente und Secante absolut ab, die Tangente ist negativ, die Secante positiv, und es wird endlich tang $360^0 = 0$, sec $360^0 = +1$.

Die Tangente kann demnach alle möglichen reellen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$, die Secante alle Werte zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$ erhalten.

C. Größe der Cotangente und der Cosecante (Fig. 169).

1. Für sehr kleine Winkel nehmen Cotangente und Cosecante ohne Ende zu und werden beide für $\alpha = 0^0$ unendlich groß.

2. Im 1. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel ab, beide sind positiv; cot $90^0 = 0$, cosec $90^0 = +1$.

3. Im 2. Quadranten wachsen die absoluten Werte der Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel, bis sie bei 180^0 unendlich groß werden; die Cotangente ist negativ, die Cosecante positiv.

4. Im 3. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel absolut ab, die Cotangente ist positiv, die Cosecante negativ; cot $270^0 = 0$, cosec $270^0 = -1$.

5. Im 4. Quadranten sind Cotangente und Cosecante negativ und dem absoluten Werte nach wachsend; für $\alpha = 360^0$ werden beide unendlich groß.

Die Cotangente liegt also zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, die Cosecante zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$.

Zusätze. a) Eine jede Function hat in den vier einzelnen Quadranten vier gleiche absolute Werte, von denen in Bezug auf die Lage zwei positiv und zwei negativ sind. Während durch einen gegebenen Winkel seine Functionen unzweideutig bestimmt sind, entsprechen jeder gegebenen positiven und ebenso jeder gegebenen negativen Function zwei Winkel, welche in verschiedenen Quadranten liegen.

b) Die oben abgeleiteten Ergebnisse lassen sich auch auf Winkel ausdehnen, welche mehr als eine volle Umdrehung betragen; die allgemeine Form solcher Winkel ist $n \,.\, 360^0 + \alpha$ oder $2 n \pi + \alpha$ (§. 185, 4). Es ist offenbar, dass die Winkelfunctionen von $n \,.\, 360^0 + \alpha$ denselben Functionen von α gleich sind. Werden die Winkel in dieser allgemeinen Bedeutung aufgefasst, so läßt die Aufgabe, zu einer gegebenen Function den zugehörigen Winkel zu finden, unzählig viele Auflösungen zu, da es, abgesehen von der im Zus. a) hervorgehobenen Zweideutigkeit, unzählig viele um ein Vielfaches von 360° unterschiedene Winkel gibt, für welche die Function denselben Wert hat.

II. Beziehungen zwischen den Winkelfunctionen desselben Winkels.

§. 347. Da nach den Erklärungen in §. 343 die Cotangente, die Secante und die Cosecante bezüglich die reciproken Werte der Tangente, des Cosinus und des Sinus sind, so ergibt sich zunächst

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tang\alpha}\ldots 1) \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\ldots 2) \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\ldots 3).$$

Ferner folgt (Fig. 168) aus jenen Definitionen:

$$\tang\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{MP:OM}{OP:OM} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ und}$$

$$\cot\alpha = \frac{OP}{MP} = \frac{OP:OM}{MP:OM} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \text{ daher ist}$$

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ldots.\ 4) \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ldots.\ 5).$$

In dem Projectionsdreiecke MPO ist $MP^2 + OP^2 = OM^2$.

Dividiert man diese Gleichung folgeweise durch OM^2, OP^2 und MP^2 und setzt z. B. $\sin\alpha^2$ der Kürze wegen für $(\sin\alpha)^2$, so erhält man:

$$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 = 1, \text{ oder } \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1\ldots.\ 6)$$

$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OM}{OP}\right)^2, \quad \text{"} \quad \tang\alpha^2 + 1 = \sec\alpha^2\ldots.\ 7)$$

$$1 + \left(\frac{OP}{MP}\right)^2 = \left(\frac{OM}{MP}\right)^2, \quad \text{"} \quad 1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2\ldots.\ 8).$$

§. 348. Ist von den Functionen eines Winkels die eine bekannt, so lassen sich aus ihr mittelst der vorhergehenden Gleichungen auch die übrigen bestimmen.

Ist z. B. $\sin\alpha$ gegeben, so folgt aus der Gleichung 6)

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2}.$$

Aus 4) und 5) erhält man sodann

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}} \text{ und } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}{\sin\alpha}.$$

Die Gleichungen 2) und 3) geben endlich

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}} \text{ und } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Aus dem vorstehend durchgeführten Beispiele ersieht man, dass durch eine Function eines Winkels die übrigen Functionen mit Ausnahme jener, deren reciproker Wert sie ist, zweideutig bestimmt sind.

Aufgaben. 1. Die goniometrischen Functionen des Winkels α sind auszudrücken durch a) $\cos\alpha$, b) $\tang\alpha$, c) $\cot\alpha$, d) $\sec\alpha$, e) $\operatorname{cosec}\alpha$.

2. Die goniometrischen Functionen sind zu berechnen, wenn a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, b) $\cos\alpha = \frac{4}{17}$, c) $\tang\alpha = \frac{7}{24}$, d) $\cot\alpha = \frac{5}{12}$, e) $\sec\alpha = \frac{41}{40}$, f) $\operatorname{cosec}\alpha = 3\frac{4}{7}$ gegeben sind.

III. Beziehungen zwischen den Functionen von einander abhängiger Winkel.

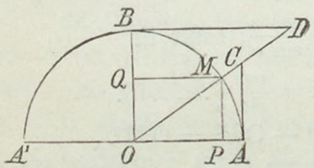
§. 349. Complementwinkel.

Zwei Complementwinkel (§. 16) können allgemein durch α und $90^0 - \alpha$ ausgedrückt werden.

Es sei (Fig. 170) $OA = 1$, $AOM = \alpha$, daher $BOM = 90^0 - \alpha$. Aus der Figur ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha, & \cos (90^0 - \alpha) = \sin \alpha; \\ \tang (90^0 - \alpha) = \cot \alpha, & \cot (90^0 - \alpha) = \tang \alpha; \\ \sec (90^0 - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha, & \operatorname{cosec} (90^0 - \alpha) = \sec \alpha. \end{array}\right\} \ldots 9).$$

Fig. 170.



In diesen Formeln finden die Namen cos, cot, cosec als Abkürzungen von complementi sinus, c. tangens, c. secans ihre Erklärung. Cos, cot, cosec heißen auch Cofunctionen.

Die Gleichungen 9 sagen: die Functionen eines Winkels sind gleich den Cofunctionen des complementären Winkels.

Zusatz. Da die Secante und Cosecante in den logarithmischen Berechnungen nicht angewendet werden, so wollen wir uns in den nachfolgenden Entwicklungen auf den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente beschränken.

§. 350. Zwei Winkel, deren Differenz 90^0 beträgt.

Die allgemeine Form zweier solcher Winkel ist α und $90^0 + \alpha$.

Ist (Fig. 169) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$ und $M_2 M_4 \perp M_1 M_3$, so ist $AOM_2 = 90^0 + \alpha$. Man hat dann, da $\triangle M_2 P_2 O \cong \triangle O P_1 M_1$ ist,

$$\sin (90^0 + \alpha) = M_2 P_2 = O P_1 = \cos \alpha,$$
$$\cos (90^0 + \alpha) = - O P_2 = - M_1 P_1 = - \sin \alpha.$$

Nimmt man α gleich dem stumpfen Winkel AOM_2 an, so ist $AOM_3 = 90^0 + \alpha$, und wegen $\triangle M_3 P_3 O \cong \triangle O P_2 M_2$

$$\sin (90^0 + \alpha) = - M_3 P_3 = - O P_2 = \cos \alpha,$$
$$\cos (90^0 + \alpha) = - O P_3 = - M_2 P_2 = - \sin \alpha.$$

Setzt man endlich $AOM_3 = \alpha$, daher $AOM_4 = 90^0 + \alpha$, so hat man, da $\triangle M_4 P_4 O \cong \triangle O P_3 M_3$ ist,

$$\sin (90^0 + \alpha) = - M_4 P_4 = - O P_3 = \cos \alpha,$$
$$\cos (90^0 + \alpha) = O P_4 = - M_3 P_3 = - \sin \alpha.$$

Es ist daher allgemein für jeden Winkel α

$$\left.\begin{array}{l} \sin (90^0 + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos (90^0 + \alpha) = - \sin \alpha \end{array}\right\} \ldots . 10).$$

Daraus folgt auch

$$\tang (90^0 + \alpha) = - \cot \alpha \text{ und } \cot (90^0 + \alpha) = - \tang \alpha.$$

§. 351. Supplementwinkel.

Zwei Supplementwinkel (§. 16) werden allgemein durch α und $180^0 - \alpha$ bezeichnet.

Es sei (Fig. 170) $OA = 1$, $AOM = \alpha$, daher $A'OM = 180^0 - \alpha$.

Dann ist $\sin(180^0 - \alpha) = MP$, $\quad \cos(180^0 - \alpha) = -OP$,

$\sin\alpha = MP$, $\quad \cos\alpha = OP$; folglich

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha, & \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha; \\ \text{und daher} & \\ \tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha, & \cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha. \end{array}\right\} \ldots 11).$$

Die Functionen eines Winkels sind gleich denselben Functionen des supplementären Winkels, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen, mit Ausnahme des Sinus, der dasselbe Vorzeichen behält.

Zusatz. Kommen in einer Rechnung nur hohle Winkel in Betracht, so entspricht dem Cosinus, der Tangente oder der Cotangente ein einziger Winkel, und zwar ein spitzer oder sein stumpfer Supplementwinkel, je nachdem die Function positiv oder negativ ist; dagegen wird durch den Sinus, welcher in diesem Falle immer positiv ist, ein Winkel nicht eindeutig bestimmt, da zu demselben Sinus zwei Winkel, ein spitzer und ein stumpfer gehören.

§. 352. Aufgaben.

1. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ (§. 49, 7); a) wie groß sind die andern Functionen dieses Winkels, b) wie groß sind die Functionen des Winkels 60^0, 120^0, 150^0?

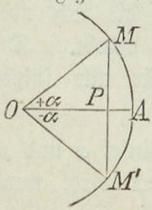
2. Die Seite eines einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebenen Zehneckes ist $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 175), daher ist $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; wie groß sind die Functionen der Winkel 18^0, 72^0, 108^0, 162^0? (3 Decimalen genau.)

3. Die Seite eines einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebenen Fünfeckes ist $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ (§. 175), daher ist $\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; wie groß sind die Functionen der Winkel 36^0, 54^0, 126^0, 144^0? (3 Dec. genau.)

§. 353. Negative Winkel.

Werden die Winkel, welche (Fig. 171) durch die Drehung des beweglichen Schenkels von A gegen M (nach links) entstehen, als positiv betrachtet, so müssen die Winkel, welche durch die Drehung des beweglichen Schenkels nach der entgegengesetzten Richtung von A nach M' entstehen, als negativ angesehen werden (§. 13).

Fig. 171.



Ist daher der Winkel $AOM' = AOM$ und setzt man $AOM = +\alpha$, so ist $AOM' = -\alpha$. Nimmt man $OM = OM' = 1$ an, und zieht von M und M' zu OA Normale, so müssen die dadurch entstehenden Dreiecke congruent sein und daher jene beiden Normalen in demselben Punkte P zusammentreffen. Da nun

$$M P = \sin \alpha,\ M'P = -\sin(-\alpha),\ \text{und}$$
$$O P = \cos \alpha, = \cos(-\alpha)\ \text{ist, so folgt}$$

daher
$$\left.\begin{array}{ll} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, & \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 12).$$

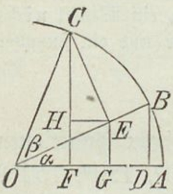
Die Functionen negativer Winkel sind gleich denselben Functionen der positiven Winkel, doch mit entgegengesetzten Vorzeichen, mit Ausnahme des Cosinus, der dasselbe Vorzeichen behält.

IV. Functionen zusammengesetzter Winkel.

§. 354. Summe zweier Winkel.

Ist (Fig. 172) W. $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Zieht man nun $BD \perp OA$, $CE \perp OB$ und $CF \perp OA$, so sind BDO, CEO und CFO die Projectionsdreiecke der Winkel α, β und $\alpha + \beta$. Ferner ist, wenn man $EG \perp OA$ und $EH \perp CF$ zieht, $EG = HF$, $EH = GF$ und der Winkel ECH, dessen Projectionsdreieck EHC ist, gleich dem Winkel α (§. 26, 2). Man hat also

Fig. 172.



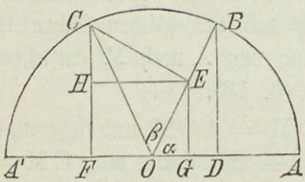
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CF}{OC} = \frac{EG + CH}{OC} = \frac{EG}{OC} + \frac{CH}{OC},$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OF}{OC} = \frac{OG - EH}{OC} = \frac{OG}{OC} - \frac{EH}{OC}.$$

Nun ist
$$\frac{EG}{OC} = \frac{EG}{OE} \cdot \frac{OE}{OC} = \sin \alpha \cos \beta,\quad \frac{CH}{OC} = \frac{CH}{CE} \cdot \frac{CF}{OC} = \cos \alpha \sin \beta,$$
$$\frac{OG}{OC} = \frac{OG}{OE} \cdot \frac{OE}{OC} = \cos \alpha \cos \beta,\quad \frac{EH}{OC} = \frac{EH}{CE} \cdot \frac{CE}{OC} = \sin \alpha \sin \beta,$$

daher
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \ldots\ 13)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \ldots\ 14).$$

Hier wurden α und β, und selbst die Summe $\alpha + \beta$ als spitze Winkel vorausgesetzt. Ist die Summe $\alpha + \beta$ der spitzen Winkel α und β größer als 90^0, wie in Figur 173, so bleibt die Beweisführung mit allen ihren Folgerungen dieselbe wie oben, mit alleiniger Ausnahme der Vorzeichen, in welchen während der Entwicklung eine Verschiedenheit eintritt, die sich aber in den Endresultaten wieder behebt. Die obigen Formeln gelten also für alle spitzen Winkel α und β.

Fig. 173.



Gelten nun die Formeln 13) und 14) für irgend zwei Winkel α und β, so gelten sie auch noch, wenn einer derselben um 90^0 vergrößert wird, wenn z. B. α in $\alpha' = 90^0 + \alpha$ übergeht. Denn

$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin(90^0 + \alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \text{ (§. 350)},$$
$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos(90^0 + \alpha + \beta) = -\sin(\alpha + \beta);$$

somit
$$\sin(\alpha' + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha' + \beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Nun ist $\cos\alpha = \sin(90^0 + \alpha)$ (§. 350) $= \sin\alpha'$,
$\sin\alpha = -\cos(90^0 + \alpha) = -\cos\alpha'$; daher
$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \sin\alpha'\sin\beta.$$

Hieraus folgt aber, dass die Formeln 13) und 14) allgemein giltig sind. Denn da sie für die Summe je zweier spitzer Winkel gelten, so gelten sie auch, wenn einer dieser Winkel um 90^0 wächst, also gelten sie auch für jede wiederholte Vergrößerung des einen oder des andern Winkels um 90^0; folglich sind sie allgemein für die Summe zweier beliebiger Winkel giltig.

Da $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ ist, so erhält man, wenn man den Zähler und den Nenner des letzteren Bruches durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividiert,
$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \quad \ldots\ldots 15).$$

Ebenso findet man
$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \quad \ldots\ldots\ldots 16).$$

§ 355. **Doppelte und halbe Winkel.**

1. Setzt man in den Formeln 13) bis 16) $\beta = \alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots 17) \qquad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 \ldots 18),$$
$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\alpha^2} \ldots\ldots 19) \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha} \ldots\ldots\ldots 20),$$

aus welchen Gleichungen sich die Functionen des doppelten Winkels finden lassen, wenn jene des einfachen Winkels bekannt sind.

Setzt man in den Formeln 17) und 18) überall α statt 2α, daher $\frac{\alpha}{2}$ statt α, so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \ldots 21) \qquad \cos\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots 22).$$

Da
$$1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ nach 6), und}$$
$$\cos\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ ist,}$$

so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addiert und subtrahiert werden,

$$1 + \cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots 23) \qquad 1 - \cos\alpha = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots 24),$$

daher
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \ldots 25) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \ldots\ldots 26).$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt ferner durch Division:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \ldots\ldots 27) \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} \ldots\ldots 28).$$

Mittelst der Formeln 25) bis 28) kann man die Functionen des halben Winkels bestimmen, wenn der Cosinus des ganzen Winkels bekannt ist.

§. **356.** Differenz zweier Winkel.

Es ist $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$.

Wendet man auf diese Summe die Gleichungen 13) und 14) an, so erhält man

$$\sin\alpha = \sin(\alpha - \beta)\cos\beta + \cos(\alpha - \beta)\sin\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha - \beta)\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)\sin\beta.$$

Löst man diese zwei Gleichungen auf, indem man in denselben $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ als die beiden Unbekannten betrachtet, so ergibt sich, da $\cos\beta^2 + \sin\beta^2 = 1$ ist,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \ldots 29)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ldots 30),$$

welche Formeln, so wie jene in 13) und 14), aus denen sie abgeleitet wurden, allgemein giltig sind.

Die Gleichungen 29) und 30) können auch in gleicher Weise, wie die Gleichungen 13) und 14) in §. 355, selbständig entwickelt werden.

Aus den Formeln 29) und 30) erhält man dann, wie in §. 355,

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \ldots\ldots 31)$$
$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \ldots\ldots\ldots 32).$$

§. **357.** Da $\sin 2n\pi = \sin 0^0 = 0$, $\cos 2n\pi = \cos 0^0 = 1$ und $\sin(2n+1)\pi = \sin\pi = 0$, $\cos(2n+1)\pi = \cos\pi = -1$ ist, so folgt aus den Formeln 13, 14, 29, 30

$$\sin(2n\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha, \qquad \sin[(2n+1)\pi \pm \alpha] = \mp\sin\alpha,$$
$$\cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos[(2n+1)\pi \pm \alpha] = -\cos\alpha;$$

somit auch

$$\operatorname{tang}(2n\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tang}\alpha, \qquad \operatorname{tang}[(2n+1)\pi \pm \alpha] = \pm\operatorname{tang}\alpha,$$
$$\cot(2n\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha, \qquad \cot[(2n+1)\pi \pm \alpha] = \pm\cot\alpha.$$

Die goniometrischen Functionen sind daher periodisch, und zwar ist die Periodicität bezüglich Sinus und Cosinus an 2π, bezüglich Tangente und Cotangente aber an π gebunden.

§. **358.** Summen und Differenz der Winkelfunctionen.

Aus den Formeln 13), 14), 29) und 30) erhält man durch Addition und Subtraction

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta,$$

oder, wenn man

$$\alpha + \beta = \varphi, \qquad \text{daher} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi),$$
$$\alpha - \beta = \psi, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \text{ setzt,}$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 33)$$
$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 34)$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 35)$$
$$\cos\varphi - \cos\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 36).$$

Aus 33) bis 36) folgt durch Division:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)} \ldots\ldots 37)$$

$$\frac{\sin\varphi \pm \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi \pm \psi) \ldots 38)$$

$$\frac{\sin\varphi \pm \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = -\cot\tfrac{1}{2}(\varphi \mp \psi) \ldots 39)$$

$$\frac{\cos\varphi + \cos\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \ldots\ldots 40).$$

V. Berechnung der Winkelfunctionen.

§. 359. Die bisher entwickelten Formeln können zunächst dazu verwendet werden, um die goniometrischen Functionen der verschiedenen Winkel zu berechnen. Da die Functionen aller Winkel auf jene der spitzen zurückgeführt werden können, so handelt es sich bloß um die Bestimmung der Functionen für die spitzen Winkel; nach §. 349 reicht es sogar hin, wenn die Functionen der Winkel bis 45° berechnet werden.

Wir wollen nun in dem Folgenden die Rechnung andeuten, durch welche die Functionen der Winkel von 0° bis 45° gefunden werden können.

Da für jeden solchen Winkel α die Länge des Bogens, der für den Halbmesser $= 1$ diesem Winkel entspricht, stets zwischen dem Sinus und der Tangente desselben liegen muss, so ist

$$\operatorname{arc}\alpha < \operatorname{tang}\alpha \qquad \text{und} \qquad \operatorname{arc}\alpha > \sin\alpha.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $\operatorname{arc}\alpha\cos\alpha < \sin\alpha$, oder $\operatorname{arc}\alpha\sqrt{1-\sin\alpha^2} < \sin\alpha$ und, da $\operatorname{arc}\alpha > \sin\alpha$ ist, umsomehr $\operatorname{arc}\alpha\sqrt{1-\operatorname{arc}\alpha^2} < \sin\alpha$. Für $\alpha < 45^0$ ist nun $1 - \operatorname{arc}\alpha^2 < 1$, daher $1 - \operatorname{arc}\alpha^2 < \sqrt{1-\operatorname{arc}\alpha^2}$, also nunmehr $\operatorname{arc}\alpha(1-\operatorname{arc}\alpha^2) < \sin\alpha$, oder $\operatorname{arc}\alpha - \operatorname{arc}\alpha^3 < \sin\alpha$, und somit

$$\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha < \operatorname{arc}\alpha^3.$$

Die Differenz zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels ist also für alle Winkel unter 45° kleiner als die dritte Potenz des Bogens.

Für $\alpha = 1'$ ist $\operatorname{arc} 1' = 0{\cdot}000\,290\,8882$, folglich

$$\operatorname{arc} 1' - \sin 1' < 0{\cdot}000\,290\,8882^3;$$

aber $0{\cdot}000\,290\,8882^3 < \frac{1}{10^{10}}$, daher umsomehr $\operatorname{arc} 1' - \sin 1' < \frac{1}{10^{10}}$; also ist auf 10 Decimalen genau

$$\sin 1' = 0{\cdot}000\,290\,8882.$$

Wird daraus $\cos 1' = \sqrt{1 - (\sin 1')^2}$ bestimmt, so geben dann die Formeln 17), 18), 13) und 14) den Sinus und Cosinus für $2'$, $4'$, $8'$, ..., den Sinus und Cosinus für $1' + 2' = 3'$, für $2' + 3' = 5'$, für $2' + 5' = 7'$, ..., und aus diesen wieder für $6'$, $10'$, $14'$, $9'$, $15'$, $21'$, u. s. w. bis $60'$ oder 1^0. Aus $\sin 1^0$ und $\cos 1^0$ findet man auf gleiche Weise die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45^0.

Zur Bestimmung der Sinus und Cosinus solcher Bogen, welche bloß Secunden enthalten, kann man umsomehr für den Sinus den Bogen selbst setzen. Da $\operatorname{arc} 1'' = \frac{\operatorname{arc} 1'}{60}$ ist, so ergibt sich

$$\sin 1'' = 0{\cdot}000\,004\,8481\ldots$$

Ferner ist

$$\sin 2'' = 2 \sin 1'',\quad \sin 3'' = 3 \sin 1'',\quad \sin 4'' = 4 \sin 1'',\quad \text{u. s. w.}$$

Daraus lassen sich sofort auch die Cosinus für die einzelnen Secunden bestimmen.

Hat man nun die Sinus und Cosinus der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden, so können daraus mittelst der Formeln 4) und 5) auch die Tangenten und Cotangenten berechnet werden.

§. **360.** Da die Winkelfunctionen im allgemeinen irrationale Zahlen sind, so werden sie um so genauer bestimmt sein, durch je mehr Decimalstellen man sie ausdrückt; aber in demselben Grade wird dann auch das Multiplicieren und Dividieren durch diese Functionen erschwert. Um diesem Übelstande zu begegnen, bedient man sich in den trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen, zu welchem Ende die Brigg'schen Logarithmen der Functionen für die einzelnen Winkel bestimmt und in den Logarithmentafeln gehörig zusammengestellt wurden.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man durch ein ganz einfaches Verfahren, welches aus den denselben vorangeschickten Einleitungen zu ersehen ist, zu jedem Winkel den Logarithmus der zugehörigen Functionen, und umgekehrt zu dem Logarithmus einer Function den zugehörigen Winkel*).

VI. Goniometrische Gleichungen.

§. **361.** Um eine Gleichung zwischen mehreren von demselben unbekannten Winkel abhängigen Functionen aufzulösen, formt man dieselbe nach den goniometrischen Grundformeln so um, dass sie nur eine einzige Winkelfunction enthält, und bestimmt dann aus der so transformierten Gleichung diese als die Unbekannte betrachtete Function. Will man zu dem gefundenen Werte der Function den Winkel selbst erhalten, so darf nur mit Hilfe der Logarithmen-

*) Eine ausführliche Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von Močnik herausgegebenen fünfstelligen Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien, bei Gerold, 1877.

tafeln zu der Function der Logarithmus derselben, und zu diesem der entsprechende Winkel gesucht werden.

Beispiele. 1. $2 \cos x = \cot x$.

Substituiert man $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, so ergibt sich $2 \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$, daher

$$\cos x \left(2 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0, \quad \sin x = \tfrac{1}{2}, \quad \cos x = 0,$$

wodurch der Winkel x bestimmt ist.

Aus $\sin x = 0{\cdot}5$ folgt $\log \sin x = 9{\cdot}69897 - 10$, und hieraus $x = 30^0$. Dies ist jedoch nicht der einzige Wert von x. Da (§. 346, a) in den vier Quadranten noch ein zweiter Winkel vorkommt, welcher denselben Sinus $\frac{1}{2}$ hat, nämlich der Supplementwinkel von 30^0, so ist $x = 150^0$ ein zweiter Wert von x. Wird aber der Begriff des Winkels auch auf Winkel, welche größer als 360^0 sind, und auf negative Winkel ausgedehnt, so hat man (§. 357) als allgemeine Lösungen $x = 30^0 \pm n . 360^0$ und $x = 150^0 \pm n . 360^0$, wo $n = 0$ oder gleich einer beliebigen ganzen Zahl ist. x kann demnach bei diesem erweiterten Begriffe des Winkels unzählig viele Werte haben; gewöhnlich beschränkt man sich jedoch auf jene zwei Werte, welche in den vier ersten Quadranten liegen. Ebenso ergeben sich aus $\cos x = 0$ die Lösungen $x = 90^0, 270^0$.

2. $a \sin (\alpha + x) = b \cos (\beta + x)$.

Man erhält

$$a \sin \alpha \cos x + a \cos \alpha \sin x = b \cos \beta \cos x - b \sin \beta \sin x, \text{ oder}$$
$$\sin x (a \cos \alpha + b \sin \beta) = \cos x (b \cos \beta - a \sin \alpha), \text{ daher}$$
$$\tan x = \frac{b \cos \beta - a \sin \alpha}{a \cos \alpha + b \sin \beta}.$$

3. $a \sin x + b \cos x = c$.

Setzt man $\cos x = \sqrt{1 - \sin x^2}$, so ergibt sich

$a \sin x + b \sqrt{1 - \sin x^2} = c$, oder $b \sqrt{1 - \sin x^2} = c - a \sin x$,

und durch Quadrieren beider Theile

$$\sin x = \frac{a c \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Man erhält für $\sin x$ zwei Werte, von denen jedoch nur einer der gegebenen Gleichung entspricht, da man dasselbe Resultat auch aus der Gleichung $a \sin x - b \cos x = c$ gewinnt. Es muss dann noch untersucht werden, welcher der beiden Werte der einen und welcher der andern Gleichung zukommt.

Einfacher gestaltet sich die Auflösung und Einführung eines Hilfswinkels. Bringt man die gegebene Gleichung auf die Form

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

und bestimmt einen Hilfswinkel φ so, dass $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ ist, so ergibt sich

$\sin x + \tan \varphi \cos x = \frac{c}{a}$, oder $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi$,

folglich
$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Aus dieser Gleichung kann, da φ bestimmt ist, der Wert von $x + \varphi$, und also auch der Wert von x berechnet werden.

4. Es seien zwei Gleichungen gegeben:

$$\sin x^2 + \cos y^2 = a \quad \text{und} \quad \cos x^2 - \sin y^2 = b.$$

Wird in der zweiten Gleichung $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$ und $\sin y^2 = 1 - \cos y^2$ substituiert, so erhält man

$$-\sin x^2 + \cos y^2 = b.$$

Aus dieser und der ersten der gegebenen Gleichungen ergibt sich dann

$$2 \sin x^2 = a - b \quad \text{und} \quad 2 \cos y^2 = a + b, \quad \text{folglich}$$

$$\sin x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - b)} \quad \text{und} \quad \cos y = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + b)}.$$

5. $x + y = \beta$; $\sin x - \sin y = n$.

Es ist $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$

$$= 2 \cos \tfrac{1}{2} \beta \sin \tfrac{1}{2}(x - y), \text{ also}$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2} \beta \sin \tfrac{1}{2}(x - y) = n, \text{ und}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(x - y) = \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2} \beta}.$$

Aus dieser Gleichung kann man $\frac{1}{2}(x - y)$ finden und erhält dann aus $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}(x - y)$ die Werte von x und y.

VII. Übungsaufgaben.

§. 362. 1. Berechne aus $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ die Functionen des Winkels von 15°.

2. Bestimme aus $\sin 30^\circ$ und $\sin 18^\circ$ den sin von 12°, 48°, 42°, 78°.

3. Bestimme aus $\sin 36^\circ$ und $\sin 30^\circ$ den sin von 6°, 84°, 66°, 21°.

4. Drücke durch Functionen von spitzen Winkeln aus:

a) $\sin 125^\circ$,	b) $\sin 200^\circ$,	c) $\sin 430^\circ$,	d) $\sin 98^\circ 12'$;
e) $\cos 139^\circ$,	f) $\cos 288^\circ$,	g) $\cos 538^\circ$,	h) $\cos 110^\circ 38' 42''$;
i) $\operatorname{tang} 91^\circ$,	k) $\operatorname{tang} 199^\circ$,	l) $\operatorname{tang} 620^\circ$,	m) $\operatorname{tang} 159^\circ 9' 30''$;
n) $\cot 163^\circ$,	o) $\cot 315^\circ$,	p) $\cot 726^\circ$,	q) $\cot 128^\circ 41' 55''$.

5. Berechne die übrigen Functionen des Winkels α, wenn gegeben ist:

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}; \qquad \text{b) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m};$$

$$\text{c) } \operatorname{tang} \alpha = \frac{n}{\sqrt{1 + 2n}}; \qquad \text{d) } \cot \alpha = \frac{\sqrt{m^2 + 2mn}}{m}.$$

6. Verwandle

a) $\cos \alpha + \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha}$ in einen Ausdruck, der nur $\sin \alpha$ enthält,

b) $\sin \alpha \cos \alpha - \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sin \alpha}$ „ „ „ „ „ $\cos \alpha$ „ ;

c) $1 - \cos \alpha^2 \cot \alpha^2 (\operatorname{tang} \alpha^2 - 1)$ „ „ „ $\operatorname{tang} \alpha$ „ ;

d) $\frac{1}{\sin \alpha^2} - \operatorname{tang} \alpha^2 (\cot \alpha^2 - 1)$ „ „ „ $\cot \alpha$ „ .

Beweise die Richtigkeit folgender Formeln:

7. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}$. 8. $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang} \alpha^2}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}$.

9. $\operatorname{tang}(45^0 \pm \alpha) = \frac{1 \pm \operatorname{tang}\alpha}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha}$.
10. $\cot(45^0 \pm \alpha) = \frac{\cot\alpha \mp 1}{\cot\alpha \pm 1}$.
11. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$.
12. $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot\alpha$.
13. $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha^2}{2}$.
14. $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2}$.
15. $\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.
16. $\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.
17. $\frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{\cot\alpha \pm \cot\beta} = \pm \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta$.
18. $\sin\frac{\alpha}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 \pm \sin\alpha}$.
19. $\sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\alpha + \gamma - \beta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)$
$= 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.
20. $\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)$
$= 4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.
21. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$
22. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{n\alpha}{2} \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Die Formeln 21. und 22. ergeben sich aus den Formeln 36) und 34) in §. 358, indem man statt φ und ψ bezüglich $m\alpha + \frac{3\alpha}{2}$ und $m\alpha + \frac{\alpha}{2}$ setzt, dann für m nach und nach 0, 1, 2, ... n — 1 substituiert und die erhaltenen Gleichungen addiert.

Beweise ferner für $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$:

23. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$.
24. $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} = 4 \cos\frac{\alpha+\beta}{4} \cos\frac{\alpha+\gamma}{4} \cos\frac{\beta+\gamma}{4}$.
25. $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma$.
26. $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} \cot\frac{\beta}{2} \cot\frac{\gamma}{2}$.

Wie ergeben sich die Ausdrücke 24. und 26. aus 23. und 25. durch die Substitution?

Suche aus den Logarithmentafeln folgende Logarithmen:

27. log sin $38^0 17'$
28. log sin $17^0 8' 20''$
29. log sin $51^0 58' 33''$
30. log sin $0^0 48' 37''$
31. log tang $1^0 25' 40''$
32. log tang $69^0 27' 39''$
33. log tang $23^0 23' 23''$
34. log tang $89^0 19' 31''$
35. log cos $57^0 48'$
36. log cos $39^0 9' 47''$
37. log cos $50^0 9' 9''$
38. log cos $101^0 2' 12''$
39. log cot $77^0 31'$
40. log cot $8^0 8' 54''$
41. log cot $0^0 40' 29''$
42. log cot $153^0 29' 8''$

Suche zu folgenden Logarithmen die entsprechenden Winkel:

43. $\log\sin x = 9 \cdot 49654 - 10$
44. $\log\sin y = 9 \cdot 79358 - 10$
45. $\log\sin z = 8 \cdot 74109 - 10$
46. $\log\sin A = 9 \cdot 99836 - 10$
47. $\log\operatorname{tang}\alpha = 10 \cdot 13264 - 10$
48. $\log\operatorname{tang}\beta = 10 \cdot 64570 - 10$
49. $\log\operatorname{tang}\gamma = 8 \cdot 95629 - 10$
50. $\log\operatorname{tang} B = 8 \cdot 47380 - 10$
51. $\log\cos C = 8 \cdot 49033 - 10$
52. $\log\cos x = 9 \cdot 17973 - 10$
53. $\log\cos y = 9 \cdot 97706 - 10$
54. $\log\cos z = 8 \cdot 12544 - 10$
55. $\log\cot\alpha = 11 \cdot 44266 - 10$
56. $\log\cot\beta = 10 \cdot 21671 - 10$
57. $\log\cot\gamma = 8 \cdot 90828 - 10$
58. $\log\cot A = 12 \cdot 44033 - 10$

Löse folgende goniometrische Gleichungen auf:

59. $2\sin x = \operatorname{tang} x$.
60. $a\sin x = b\cot x$.
61. $\sin x = \cos x^2$.
62. $\operatorname{tang} x - \cot x = a$.
63. $2(\operatorname{tang} x + \cot x) = 5$.
64. $2\operatorname{tang} y + 3\cot y = 5$.
65. $\sin(\varphi - x) = \cos(\varphi + x)$.
66. $\sin(\alpha - x) = \cos(\beta + x)$.
67. $\sin x + \operatorname{tang} x = 1 + \cos x$.
68. $\cot x - \cos x = 1 - \sin x$.
69. $a\sin x^2 + b\cos x^2 = c$.
70. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x$.
71. $a(1 + \cos x) = b\cos\frac{1}{2}x$.
72. $a(1 - \cos 2x) = b\sin 2x$.
73. $a(\cos y + \cot y) = b(1 + \sin y)$.
74. $a\sin x^2 + b\sin x\cos x + c\cos x^2 = 0$.
75. $\sin x = a\sin y$, $\operatorname{tang} x = b\operatorname{tang} y$.
76. $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$.
77. $x + y = \alpha$, $\cos x + \cos y = m$.
78. $x + y = \alpha$, $\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = n$.
79. $x + y = 120^0$, $\sin x \sin y = 0 \cdot 5$.
80. $x + y = \alpha$, $a\operatorname{tang} x = b\operatorname{tang} y$.

Zweiter Abschnitt.

Ebene Trigonometrie.

I. Auflösung der ebenen Dreiecke.

§. **363.** Ein Dreieck auflösen heißt, aus den Bestimmungsstücken eines Dreieckes die übrigen Bestandstücke durch Rechnung finden.

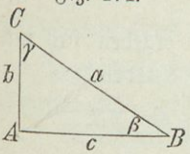
Dabei kommt es vor allem darauf an, aus den Eigenschaften des Dreieckes Gleichungen abzuleiten, welche die Beziehungen zwischen den Seiten und den Functionen der Winkel enthalten; durch Auflösung dieser Gleichungen, in denen sowohl die bestimmenden als die zu suchenden Bestandstücke des Dreieckes vorkommen, findet man dann die gesuchten Größen.

1. Rechtwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.

§. **364.** Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes müssen zwei von einander unabhängige Bestimmungsstücke gegeben sein.

Fig. 174.



Es sei das Dreieck BAC (Fig. 174) bei A rechtwinklig. Wir wollen hier und im Folgenden die Hypotenuse BC durch a, die Katheten AC und AB durch b und c, und die diesen gegenüberliegenden Winkel durch β und γ bezeichnen.

Aus den Erklärungen in §. 343 folgt unmittelbar:

1. $\quad b = a \sin \beta, \qquad c = a \sin \gamma;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

2. $\quad b = a \cos \gamma, \qquad c = a \cos \beta;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels.

3. $\quad b = c \operatorname{tang} \beta, \qquad c = b \operatorname{tang} \gamma;$

d. h jede Kathete ist gleich dem Producte aus der andern Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

4. $\quad b = c \cot \gamma, \qquad c = b \cot \beta;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der andern Kathete und der Cotangente des der ersteren Kathete anliegenden Winkels.

Zu diesen trigonometrischen Lehrsätzen tritt noch der Pythagoräische Lehrsatz $a^2 = b^2 + c^2$, welcher den Zusammenhang zwischen den drei Seiten ausdrückt.

Auflösungsfälle.

§. **365.** I. Gegeben die beiden Katheten b und c.

Aus $b = c \operatorname{tang} \beta = c \cot \gamma$ folgt $\operatorname{tang} \beta = \cot \gamma = \frac{b}{c}$ und für die Hypotenuse hat man $a = \frac{b}{\sin \beta}$ oder $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Es sei z. B. $b = 325$, $c = 418$. Man hat

$$\begin{array}{rlrl} \log b &= 2{\cdot}51\ 188 & \log b &= 2{\cdot}51\ 188 \\ \log c &= 2{\cdot}62\ 118 & \log \sin \beta &= 9{\cdot}78\ 803 - 10. \\ \hline \log \operatorname{tang} \beta &= 9{\cdot}89\ 070 - 10 & \log a &= 2{\cdot}72\ 385 \\ \beta &= 37^\circ 51' 54'' \text{ und} & a &= 529{\cdot}48. \\ \gamma &= 52^\circ\ 8'\ 6''. & & \end{array}$$

II. Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b.

$\sin \beta = \cos \gamma = \frac{b}{a}$, und $c = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta}$ oder $c = \sqrt{(a + b)(a - b)}$.

III. Gegeben eine Kathete b und ein Winkel, z. B. β.

$$\gamma = 90^0 - \beta, \quad c = \frac{b}{\operatorname{tang}\beta}, \quad a = \frac{b}{\sin\beta}.$$

IV. Gegeben die Hypotenuse a und ein Winkel, z. B. β.

$$\gamma = 90^0 - \beta, \quad b = a \sin\beta, \quad c = a \cos\beta.$$

§. 366. Berechnung des Flächeninhaltes eines rechtwinkligen Dreieckes.

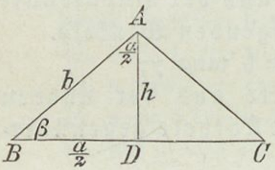
Für den Flächeninhalt f eines rechtwinkligen Dreieckes ergeben sich mit Rücksicht auf die im §. 365 angeführten vier Fälle folgende Ausdrücke:

$$f = \frac{bc}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{(a+b)(a-b)} = \frac{b^2}{2\operatorname{tang}\beta} = \frac{a^2}{4}\sin 2\beta.$$

2. Gleichschenklige Dreiecke.

§. 367. Zur Bestimmung eines gleichschenkligen Dreieckes ABC (Fig. 175) müssen zwei von einander unabhängige Stücke gegeben sein.

(Fig. 175).



Da durch die zur Grundlinie BC gezogene Höhe AD das gleichschenklige Dreieck in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerfällt, so kann jede Aufgabe über das gleichschenklige Dreieck auf die Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes zurückgeführt werden.

Ist a die Grundlinie, b der Schenkel, α der Winkel am Scheitel, β der Winkel an der Grundlinie und f der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreieckes ABC, so ergeben sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADB folgende Auflösungsgleichungen:

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0, \qquad a = 2b \sin\frac{\alpha}{2} = 2b \cos\beta,$$

$$h = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a}{2}\operatorname{tang}\beta = b \sin\beta,$$

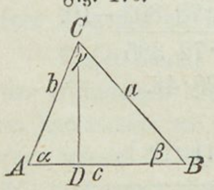
$$f = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a^2}{4}\operatorname{tang}\beta = \frac{b^2}{2}\sin 2\beta.$$

3. Dreiecke überhaupt.

Trigonometrische Lehrsätze und Formeln.

§. 368. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel (Sinus-Satz).

Fig. 176.



Zieht man CD $\perp$ AB (Fig. 176), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC

$$CD = BC.\sin B \text{ und } CD = AC \sin A;$$

daher $\qquad BC.\sin B = AC.\sin A,$

oder, wenn man hier und in dem Folgenden BC = a, AC = b, AB = c setzt und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ ausdrückt,

$$a \sin\beta = b \sin\alpha, \quad \text{oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} a : b = \sin\alpha : \sin\beta. \\ a : c = \sin\alpha : \sin\gamma, \\ b : c = \sin\beta : \sin\gamma. \end{array}\right\} \ldots \mathrm{I})$$

Ebenso erhält man (siehe oben).

In diesen Ausdrücken ändert sich nichts, wenn einer der Winkel, z. B. α, ein stumpfer ist, so dass die Normale CD die Verlängerung von BA trifft; man erhält dann $a : b = \sin(180^0 - \alpha) : \sin\beta = \sin\alpha : \sin\beta$. Der Sinus-Satz lässt sich auch in der Weise $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ ausdrücken und sagt, dass das Verhältnis zwischen einer Seite und dem Sinus ihres Gegenwinkels für dasselbe Dreieck eine constante Größe ist.

Bezeichnet man in Fig. 106 den Winkel CAB mit α, so ist auch $CDB = \alpha$, daher $BC = CD \sin\alpha$, oder $a = 2R . \sin\alpha$ und $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Da nun a und α auch im Dreieck ABC den gleichen Wert haben, so ist auch für dieses Dreieck $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, d. h. die Constante des Dreieckes ist gleich dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises.

§. **369.** In jedem Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Product aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (Cosinus-Satz).

Zieht man (Fig. 176) $CD \perp AB$, so ist

$$a^2 = CD^2 + BD^2.$$

Nun ist $CD = b \sin\alpha$, $BD = AB - AD = c - b\cos\alpha$; daher

$$a^2 = b^2 \sin\alpha^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos\alpha^2,$$

oder, da $b^2 (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) = b^2$ ist,

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos\alpha. \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos\beta. \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos\gamma. \end{array}\right\} \ldots \mathrm{II})$$

Ebenso erhält man (siehe oben).

Fällt die Normale CD außerhalb des Dreieckes, so ist dann $CD = b\sin(180^0 - \alpha)$ und $BD = c + b\cos(180^0 - \alpha)$, woraus sich dasselbe Resultat wie oben ergibt. Die Gleichungen II) gelten demnach allgemein.

Zusatz. Der hier bewiesene Lehrsatz kann auch unmittelbar aus §. 158 abgeleitet werden. Nach den dort angeführten zwei Sätzen ist $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2c . AD$, je nachdem α spitz oder stumpf ist; nun ist bezüglich $AD = b\cos\alpha$ oder $AD = b\cos(180^0 - \alpha)$; folglich in beiden Fällen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos\alpha.$$

Der Cosinus-Satz wird nach dem berühmten französischen Staatsmanne und Mathematiker Carnot (1753—1823) auch der Carnot'sche Lehrsatz genannt.

§. **370.** Aus den voranstehenden Gleichungen II) lassen sich die wichtigen zur logarithmischen Berechnung geeigneten Halbwinkelfunctionen ableiten. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \text{daher}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

somit, da nach §. 356, Formel 24) und 23)

$$1 - \cos\alpha = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ und } 1 + \cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ ist,}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Setzt man, wie in §. 168, 3, der Kürze wegen $a + b + c = 2s$, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ \cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\ \text{und daher}\quad \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Ähnliche Formeln erhält man auch für die Functionen von $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$.

§. 371. **Mollweide'sche Gleichungen.**

Aus der zweiten und dritten Gleichung in I) §. 368 folgt

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

oder, da $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$, also $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\frac{1}{2}\gamma$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}. \\ \text{Ebenso erhält man}\quad & \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}. \end{aligned}\right\} \ldots\text{IV)}$$

Drücke diese Formeln mit Worten aus!

§. 372. Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ ergibt sich auch

$(a + b) : (a - b) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta)$, oder

$(a + b) : (a - b) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und, wenn man das dritte und vierte Glied durch $2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ dividiert, $(a + b) : (a - b) = \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \ldots$ V).

Dieser Satz führt den Namen Tangenten-Satz und sagt:

Die Summe zweier Seiten eines Dreieckes verhält sich zur Differenz derselben, wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel.

Der Tangenten-Satz kann auch durch Division aus den Formeln IV abgeleitet werden.

Auflösungsfälle.

§. **373.** I. Gegeben eine Seite a und zwei Winkel β und γ.

Man erhält erstlich den dritten Winkel $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner folgen aus $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$ und $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$ die Gleichungen $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$ und $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Z. B. $a = 788$, $\beta = 55^0\,43'\,18''$, $\gamma = 72^0\,12'\,35''$. Man erhält

$$\alpha = 52^0\;4'\;7''.$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{\cdot}89\,653 \\ \log \sin\beta &= 9{\cdot}91\,714 - 10 \\ & \quad 2{\cdot}81\,367 \\ \log\sin\alpha &= 9{\cdot}89\,694 - 10 \\ \log b &= 2{\cdot}91\,673 \\ b &= 825{\cdot}52. \end{aligned}$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{\cdot}89\,653 \\ \log \sin\gamma &= 9{\cdot}97\,872 - 10 \\ & \quad 2{\cdot}87\,525 \\ \log\sin\alpha &= 9{\cdot}89\,694 - 10 \\ \log c &= 2{\cdot}97\,831 \\ c &= 951{\cdot}28. \end{aligned}$$

§. **374.** II. Gegeben zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ.

Aus der in §. 372 abgeleiteten Gleichung

$$\tang \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \tang \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}\gamma$$

erhält man $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Dann hat man, da $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ bekannt ist,

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha \text{ und } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \beta.$$

Die Seite c findet man aus $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$, oder vortheilhafter nach §. 371 aus $c = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ oder $c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$.

Es sei z. B. $a = 748$, $b = 375$, $\gamma = 63^0\,35'\,30''$. Man hat

$$\begin{aligned} a + b &= 1123 \\ a - b &= 373 \\ \tfrac{1}{2}\gamma &= 31^0 47' 45'' \\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 58^0 12' 15'' \\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 28^0 10' 54'' \\ \alpha &= 86^0 23'\;\,9'' \\ \beta &= 30^0\;\,1' 21'' \end{aligned}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 2{\cdot}57\,171 \\ \log \cot \tfrac{1}{2}\gamma &= 10{\cdot}20\,766 - 10 \\ & \quad 12{\cdot}77\,937 - 10 \\ \log(a+b) &= 3{\cdot}05\,038 \\ \log \tang \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 9{\cdot}72\,899 - 10 \\ \tfrac{1}{3}(\alpha - \beta) &= 28^0 10' 54''. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von c nach den Mollweide'schen Gleichungen hat man

$$\begin{aligned} \log(a+b) &= 3{\cdot}05038 \\ \log \sin \tfrac{\gamma}{2} &= 9{\cdot}72\,172 - 10 \\ & \quad 12{\cdot}77\,210 - 10 \\ \log \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 9{\cdot}94\,520 - 10 \\ \log c &= 2{\cdot}82\,690 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 2{\cdot}57\,171 \\ \log \cos \tfrac{\gamma}{2} &= 9{\cdot}92\,938 - 10 \\ & \quad 12{\cdot}50\,109 - 10 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 9{\cdot}67\,419 - 10 \\ \log c &= 2{\cdot}82\,690 \end{aligned}$$

$$c = 671{\cdot}27.$$

Die Übereinstimmung beider Werte ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Zusätze. a) Jeder der Winkel α und β läßt sich auch einzeln aus a, b und γ unmittelbar berechnen.

Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ erhält man $b \sin\alpha = a \sin\beta$, oder

$$b \sin\alpha = a \sin(\alpha + \gamma) = a \sin\alpha \cos\gamma + a \cos\alpha \sin\gamma, \text{ daher}$$

$$b \operatorname{tang}\alpha = a \operatorname{tang}\alpha \cos\gamma + a \sin\gamma, \text{ und folglich}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a \sin\gamma}{b - a\cos\gamma}.$$

Die Rechnung nach dieser Formel ist logarithmisch unterbrochen; die Unterbrechung kann jedoch durch Anwendung eines Hilfswinkels beseitigt werden.

Wird für $\gamma < 90^0$ ein Hilfswinkel φ so bestimmt, dass $\frac{a\cos\gamma}{b} = \sin\varphi^2$ ist, so erhält man $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b\cos\varphi^2}$.

Für $\gamma > 90^0$ wählt man einen solchen Hilfswinkel ψ, dass $-\frac{a\cos\gamma}{b} = \operatorname{tang}\psi^2$ ist; dann hat man $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\gamma\cos\psi^2}{b}$.

b) Auch die dritte Seite c kann aus a, b und γ unabhängig von den Winkeln α und β berechnet werden. Es ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\left(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right) \text{ (§. 365, 24)}$$

$$= (a-b)^2 + 4ab\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (a-b)^2 . \left[1 + \frac{4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}\right].$$

Wird nun ein Hilfswinkel φ so bestimmt, dass $\frac{4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2} = \operatorname{tang}\varphi^2$ ist, so hat man $c^2 = \frac{(a-b)^2}{\cos\varphi^2}$, daher $c = \frac{a-b}{\cos\varphi}$.

§. 375. III. Gegeben zwei Seiten a und b, wo $a > b$, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel α.

Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ erhält man $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$.

Da β durch den Sinus zu bestimmen ist, so kann dafür im allgemeinen entweder der zu diesem Sinus gehörige spitze Winkel oder auch dessen stumpfer Supplementwinkel genommen werden (§. 351, Zus.); diese Zweideutigkeit fällt jedoch hier weg, da man weiß, dass $a > b$, also auch $\alpha > \beta$ ist, und somit β spitz sein muss, welchen Wert auch α haben mag.

Aus α und β erhält man dann $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Die Seite c findet man aus der Gleichung $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Z. B. für $a = 1238$, $b = 519$, $\alpha = 78^0\,17'\,20''$ ergibt sich

$\beta = 24^0\,14'\,10''$, $\gamma = 77^0\,28'\,30''$, ferner $c = 1234\ 2$.

Ist hier nebst $a = 1238$ und $b = 519$ der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel $\beta = 24^0\,14'\,10''$ gegeben, so erhält man aus der Gleichung $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$, da α spitz oder stumpf sein kann,

entweder $\alpha = 78^0\,17'\,20''$ oder $\alpha = 101^0\,42'\,40''$, folglich
$\gamma = 77^0\,28'\,30''$ „ $\gamma = 54^0\,3'\,10''$.

Aus der Gleichung $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ergibt sich dann entweder $c = 1234 \cdot 2$ oder $c = 1023 \cdot 5$. — Die Aufgabe läßt also zwei Auflösungen zu.

§. **376.** IV. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Zur Bestimmung der Winkel dienen die Formeln III) in §. 370.

Ist der gesuchte halbe Winkel sehr nahe an 0^0, so läßt sich derselbe mittelst der Formel für den Cosinus nicht mit gehöriger Schärfe bestimmen, da sich die Cosinus nahe an 0^0 liegender Winkel nur sehr wenig ändern. Dasselbe gilt bezüglich der Formel für den Sinus, wenn der halbe Winkel sehr nahe an 90^0 liegt. Am zweckmäßigsten ist es, in allen Fällen die Formel für die Tangenten anzuwenden.

Es sei z. B. $a = 330 \cdot 1$, $b = 412 \cdot 2$, $c = 371 \cdot 3$.

Wendet man die Formel für die Tangenten an, so hat man

$$\begin{array}{rl} a = & 330 \cdot 1 \\ b = & 412 \cdot 2 \\ c = & 371 \cdot 3 \\ \hline a + b + c = & 1113 \cdot 6 \\ s = & 556 \cdot 8 \\ s - a = & 226 \cdot 7 \\ s - b = & 144 \cdot 6 \\ s - c = & 185 \cdot 5 \end{array}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

$$\begin{array}{rl} \log (s - b) = & 2 \cdot 16\,017 \\ \log (s - c) = & 2 \cdot 26\,834 \\ \hline & 4 \cdot 42\,851 \\ \log s = & \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 74\,570 \\ 2 \cdot 35\,545 \end{array}\right\} \\ \log (s - a) = & \\ \hline & 19 \cdot 32\,736 - 20 \\ \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = & 9 \cdot 66\,368 - 10 \\ \tfrac{1}{2}\alpha = & 24^0\,44'\,55'' \\ \alpha = & 49^0\,29'\,50''. \end{array}$$

Aus den Formeln für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta$ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$ erhält man ebenso
$$\beta = 71^0\,42'\,42'' \quad \text{und} \quad \gamma = 58^0\,47'\,28''.$$

Zusatz. Sehr bequem gestalten sich die Rechnungen, wenn in diesem Auflösungsfalle alle drei Winkel zu bestimmen sind, durch Einführung des Halbmessers r des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

Da $r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$ (§. 172, 2) ist, so hat man:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{r}{s-b}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{r}{s-c}.$$

Z. B.

$$\begin{array}{rl} a = & 1011 \\ b = & 956 \\ c = & 533 \\ \hline 2s = & 2500 \\ s = & 1250 \\ s - a = & 239 \\ s - b = & 294 \\ s - c = & 717 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log (s - a) = & 2 \cdot 37\,840 \\ \log (s - b) = & 2 \cdot 46\,835 \\ \log (s - c) = & 2 \cdot 85\,552 \\ \hline & 7 \cdot 70\,227 \\ \log s = & 3 \cdot 09\,691 \\ \hline \log r^2 = & 4 \cdot 60\,536 \\ \log r = & 2 \cdot 30\,268 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = 9\cdot 92\,428 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = 9\cdot 83\,433 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = 9\cdot 44\,716 - 10$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 40^0\ 1'\,48'', \text{ daher } \alpha = 80^0\ 3'\,36'';$$
$$\tfrac{1}{2}\beta = 34^0\,19'\,40'', \quad " \quad \beta = 68^0\,39'\,20'';$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = 15^0\,38'\,32'', \quad " \quad \gamma = 31^0\,17'\ 4''.$$

§. 377. **Berechnung des Flächeninhaltes eines schiefwinkligen Dreieckes.**

Ist h die zur Seite a gehörige Höhe, so ist $h = b \sin\gamma$, daher

$$f = \frac{ah}{2} = \frac{ab}{2} \sin\gamma \ldots 1),$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Nach diesem Satze kann man für den zweiten Auflösungsfall den Flächeninhalt aus den gegebenen Stücken unmittelbar berechnen; in den übrigen Fällen müssen zuerst die nicht gegebenen Stücke der obigen Formel gesucht werden.

Für den vierten Fall liefert schon die Planimetrie (§. 168, 3) eine zur unmittelbaren Berechnung brauchbare Formel, die auch trigonometrisch abgeleitet werden kann. Es ist

$$f = \frac{ab}{2} \sin\gamma = \frac{ab}{2} \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma,$$

daher mit Rücksicht auf die Formeln III) in §. 370

$$f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \ldots 2).$$

Ist in diesem Falle zur Bestimmung der Winkel der Halbmesser r des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises benützt worden (§. 376, Zus.), so hat man zur Berechnung des Flächeninhaltes (§. 172, 2) die einfachere Formel

$$f = rs \ldots 3).$$

4. Übungsaufgaben.

§. 378. **Zahlenbeispiele zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke:**

	a	b	c	β	γ	f
1.	233	105	208	26° 47′ 6″	63° 12′ 54″	10920
2.	397	228	325	35° 3′ 4″	54° 56′ 56″	37050
3.	505	336	377	41° 42′ 32″	48° 17′ 28″	63336
4.	56·5	39·6	40·3	44° 29′ 53″	45° 30′ 7″	797·94
5.	3·794	2·083	3·171	33° 18′ 2″	56° 41′ 58″	3·3026
6.	2·3456	1·3988	1·8828	36° 36′ 37″	53° 23′ 23″	1·31685

7. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse a und ein spitzer Winkel β gegeben; bestimme die zur Hypotenuse gehörige Höhe h und die durch dieselbe gebildeten, den Katheten b und c anliegenden Abschnitte p und q der Hypotenuse.

Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben ist:

8. p und h;	9. p und b;
10. p und β;	11. h und β.
12. $b + c = s$ und β;	13. $b - c = d$ und β;
14. $a + b = s$ und β;	15. $a - b = d$ und β;
16. $a + b + c = 2s$ und β;	17. f und β.

§. 379. **Beispiele zur Berechnung gleichschenkliger Dreiecke:**

	a	b	h	α	β	f
1.	88	125	117	41°13′ 6″	69°23′27″	5148
2.	240	241	209	59°43′32″	60° 8′14″	25080
3.	672	505	377	83°25′ 4″	48°17′28″	126672
4.	3·12	2·05	1·33	99° 6′	40°27′	2·0748
5.	4·5	2·3995	0·8338	139°20′	20°20′	1·876

6. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Summe der Grundlinie und der auf ihr stehenden Höhe doppelt so groß als der Schenkel; berechne seine Winkel.

§. 380. **Beispiele zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.**

	a	b	c	α	β	γ	f
1.	17	113	120	7°37′40″	61°55′40″	110°26′40″	900
2.	119	145	156	46°23′50″	61°55′40″	71°40′30″	8190
3.	388	389	195	75°10′52″	75°45′ 0″	29° 4′ 8″	36666
4.	569	281	680	55°17′31″	23°57′ 8″	100°45′21″	78540
5.	330·1	412·2	371·3	49°29′50″	71°42′42″	58°47′28″	58188
6.	15·47	17·39	22·88	42°30′44″	49°25′49″	88° 3′27″	134·43
7.	1·275	1·2753	0·0565	88°24′10″	89° 3′30″	2°32′20″	0·03601
8.	1·2344	1·4303	0·9332	58°32′51″	81°17′36″	10° 9′33″	0·56932

In dem Dreiecke ABC (Fig. 176) sei $CD = h$, $BD = p$, $AD = q$. Man löse das Dreieck auf, wenn gegeben ist:

9. a, b und h;	10. b, h und p;
11. p, q und h;	12. h, α und β;
13. $a + b = s$, h und β;	14. $a - b = d$, h und α.
15. $a + b = s$, c und γ;	16. $a - b = d$, c und γ;
17. $a + b = s$, c und $\alpha - \beta$;	18. $a - b = d$, c und $\alpha - \beta$.

In 15. und 17. verlängere AC um $CD = BC$ und berechne das Hilfsdreieck ABD. In 16. und 18. trage von BC die $CD = AC$ ab und benütze das Hilfsdreieck ACD.

19. $a + b = s$, α und β;	20. $a - b = d$, α und β;
21. $a + b = s$, γ und $\alpha - \beta$;	22. $a - b = d$, γ und $\alpha - \beta$.

23. Aus einer Seite a und den Winkeln α, β, γ eines Dreieckes die zu der Seite a gehörige Höhe h und den Flächeninhalt f zu berechnen.

$$h = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}, \qquad f = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}.$$

24. Die Seiten eines Dreieckes zu berechnen, wenn der Flächeninhalt f und die Winkel α, β, γ gegeben sind.

25. Aus dem Umfange 2 s und den Winkeln α, β, γ eines Dreieckes die Seiten und den Flächeninhalt zu berechnen.

Durch Anwendung §. 368 und §. 362, 23 erhält man

$$a = \frac{s.\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}, \quad b = \frac{s.\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma}, \quad c = \frac{s.\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta};$$

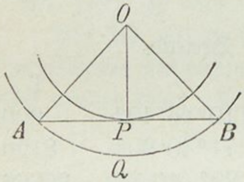
$$f = s^2.\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma.$$

II. Anwendung der ebenen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der Planimetrie.

§. 381. In einem Kreise (Fig. 177) sei der Halbmesser $OA = r$, die Sehne $AB = s$, der zugehörige Centriwinkel $AOB = \alpha$; ferner sei $\varDelta$ der Flächeninhalt des Dreieckes AOB, F der Flächeninhalt des Kreissectors AOB und f der Flächeninhalt des Kreissegments ABQA.

Fig. 177.



1. Gegeben r und s; zu suchen α.

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s}{2r}.$$

2. Gegeben r und α; zu suchen s, $\varDelta$, F und f.

$$s = 2r\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

$$\varDelta = \frac{r^2}{2}\sin\alpha,\ F = \frac{r^2\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{180^0}\ (\S.\ 187),$$

$$f = F - \varDelta = \frac{r^2}{2}\left\{\frac{\pi\alpha}{180^0} - \sin\alpha\right\}.$$

3. Gegeben s und α; zu suchen r, $\varDelta$, F und f.

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}, \quad \varDelta = \frac{s^2}{4}\cot\tfrac{1}{2}\alpha, \quad F = \frac{s^2\pi}{8\sin\frac{1}{2}\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{180^0}.$$

$$f = F - \varDelta = \frac{s^2}{4}\left\{\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{180^0} - \cot\tfrac{1}{2}\alpha\right\}.$$

§. 382. Die Seite eines regulären n-Eckes sei s, der Flächeninhalt f, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises r und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises R; aus n und einer dieser Größen die übrigen zu bestimmen.

In dem rechtwinkligen Dreiecke APO (Fig. 177) ist

$AP = \frac{s}{2}$, $AOP = \frac{180^0}{n}$, $OP = r$ und $OA = R$. Man hat daher

$$\frac{s}{2} = r\ \mathrm{tang}\ \frac{180^0}{n} = R\sin\frac{180^0}{n};\ r = R\cos\frac{180^0}{n}.$$

$$f = ns.\frac{r}{2} = \frac{ns^2}{4}\cot\frac{180^0}{n} = nr^2\ \mathrm{tang}\ \frac{180^0}{n} = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{360^0}{n}.$$

§. 383. Aus den Winkeln α, β, γ eines Dreieckes und dem Halbmesser R des ihm umgeschriebenen Kreises die Seiten zu berechnen.

Nach §. 368 ist

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma.$$

§. 384. Aus den Winkeln α, β, γ eines Dreieckes und dem Halbmesser r des ihm eingeschriebenen Kreises die Seiten zu berechnen.

Ist (Fig. 106) $OD = OE = OF = r$ der Halbmesser des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises, so ist

$$BE = r \cot \tfrac{1}{2} \beta, \quad EC = r \cot \tfrac{1}{2} \gamma; \text{ daher}$$

$$a = r(\cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma) = \frac{r \sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma}.$$

Ebenso erhält man

$$b = \frac{r \cos \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma}, \qquad c = \frac{r \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}.$$

§. 385. 1. Den Flächeninhalt f eines Parallelogramms zu finden, wenn zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel α gegeben sind.

Man erhält $f = ab \sin \alpha$.

2. Den Flächeninhalt f eines Viereckes zu bestimmen, wenn dessen Diagonalen p und q und ihr Winkel φ gegeben sind.

Bestimmt man die Flächeninhalte der vier Dreiecke, in welche das Viereck durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, nach §. 377, 1) und addiert dieselben, so ergibt sich

$$f = \frac{pq}{2} \sin \varphi.$$

2. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

§. 386. Die Höhe h eines Gegenstandes AB (eines Thurmes) zu bestimmen.

1. Wenn man zu dem Fußpunkte A messen kann.

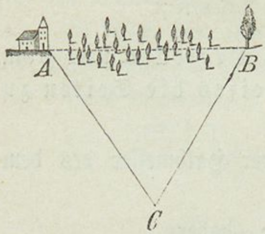
Man messe von einem Punkte C aus die Strecke $CA = a$, und in C den Höhenwinkel $ACB = \alpha$; dann ist $h = a \operatorname{tang} \alpha$.

2. Wenn man nicht zu dem Fußpunkte A messen kann.

Man messe in einer durch B gehenden Verticalebene die Strecke $CD = a$ als Standlinie und in ihren Endpunkten die Höhenwinkel $ACB = \alpha$ und $ADB = \beta$; dann ist $h = \dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

§. 387. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 178) auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines

Fig. 178.



dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

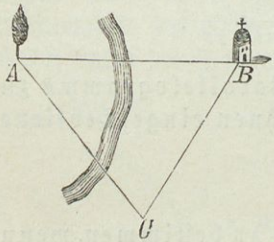
Man messe von einem dritten Punkte C aus die Strecken CB = a und CA = b, sowie den Winkel ACB = γ. Dann ist

$$AB = \frac{a - b}{\cos\varphi} \text{ (§. 374, Zus. b),}$$

$$\text{wo } \tang \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \sqrt{ab}}{a - b} \text{ ist.}$$

§. 388. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 179) auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

Fig. 179.



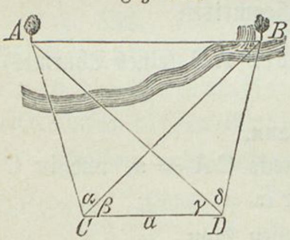
Man wähle einen dritten Standpunkt C, von dem man zu einem der beiden Punkte A oder B hin messen kann, und messe die Strecke BC = a, sowie die Winkel B = β und C = γ. Dann ergibt sich nach §. 373

$$AB = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

§. 389. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 180) auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.

Man wähle zwei Standpunkte C und D, messe die Standlinie CD = a und in ihren Endpunkten die Winkel ACB = α, BCD = β, ADC = γ und ADB = δ. Dann hat man

Fig. 180.



$$\text{im } \triangle ACD..AD = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = b \text{ (§. 373),}$$

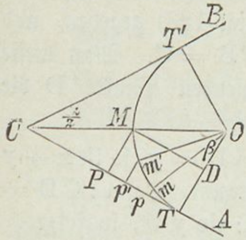
$$\text{„ } \triangle BCD..BD = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)} = c \text{ (§. 373),}$$

$$\text{„ } \triangle ABD..AB = \frac{b - c}{\cos\varphi} \text{ (§. 374, Zus. b),}$$

$$\text{wo } \tang \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\delta \sqrt{bc}}{b - c} \text{ ist.}$$

§. 390. Beim Tracieren einer Eisenbahn wurden die Geraden AC und BC (Fig. 181) ausgesteckt und ihr Winkel ACB = α gemessen; es soll der die beiden Geraden berührende Kreisbogen vom Halbmesser r ausgesteckt werden.

Fig. 181.



Zur Festlegung der Berührungspunkte T und T' hat man

$$CT = CT' = r \cot \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Zur Bestimmung der Mitte M des Kreisbogens braucht man, wenn $MP \perp CT$ ist, nur die Strecken PT und MP zu kennen; man hat nun, da $MOT = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ ist,

$PT = r \cos \frac{1}{2}\alpha$, $MP = OT - OD = r - r \sin \frac{1}{2}\alpha$.

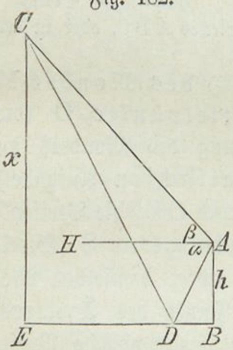
Will man zwischen M und T auch mehrere Zwischenpunkte des Kreisbogens MT erhalten, so denkt man sich denselben in n gleiche Theile Tm, mm',.. getheilt, deren jeder dem Winkel $\beta = \frac{1}{n}\, MOT = \frac{1}{n}\,(90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$ entspricht; dann ergibt sich, wenn mp, m'p',.. zu CT normal sind, zur Bestimmung der Punkte m, m',..

$pT = r \sin \beta$, $\qquad mp = r - r \cos \beta$;

$p'T = r \sin 2\beta$, $\qquad m'p' = r - r \cos 2\beta$; u. s. w.

§. **391.** Die Höhe einer Wolke aus deren Bilde in dem Spiegel eines Teiches zu bestimmen.

Fig. 182.



Ein Beobachter A (Fig. 182) befindet sich in der Höhe $AB = h$ über dem Spiegel eines benachbarten Teiches D; er visiert nach einem markierten Punkte C einer Wolke und misst den Winkel $CAH = \beta$, den diese Visierlinie mit der durch sein Auge gehenden Horizontalen AH bildet. Die Wolke spiegelt sich im Teiche, der Beobachter sieht ihr Bild in der Richtung AD und misst den Winkel $HAD = \alpha$, den die Richtung zum Bilde mit der Horizontalen einschließt. Zu suchen ist die Höhe $CE = x$ der Wolke über dem Teichniveau aus h, α, β.

Aus $\triangle$ CED ist $x = CD \,.\, \sin CDE$, und da nach dem Spiegelungsgesetze W. $CDE = ADB = \alpha$ ist, hat man $x = CD \,.\, \sin \alpha$.

Die Länge CD ergibt sich aus dem Dreiecke CAD; es ist

$CD : AD = \sin CAD : \sin ACD = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta)$;

$$\text{daher } CD = AD \,.\, \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

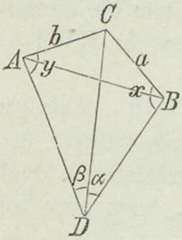
Endlich ist aus $\triangle$ADB die Länge $AD = \frac{h}{\sin \alpha}$. Folglich ist

$$x = h \,.\, \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

§. **392.** Aus drei ihrer Lage nach auf dem Felde gegebenen Punkten A, B, C die Lage eines vierten Punktes D zu bestimmen, wenn man nur die Winkel messen kann, welche die von D an die drei Punkte gezogenen Visierlinien bilden. (Pothenot'sche Aufgabe oder Problem des Rückwärtseinschneidens beim Messtisch.)

Es sei das Dreieck ABC (Fig. 183) gegeben, und zwar $BC = a$, $AC = b$, W. $ACB = C$. Man messe in dem der Lage nach zu bestimmenden Punkte D die Winkel $BDC = \alpha$ und $ADC = \beta$.

Fig. 183.



Setzt man $CBD = x$ und $CAD = y$, so ist $x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + C)$, somit bekannt. Da $a : CD = \sin\alpha : \sin x$ und $b : CD = \sin\beta : \sin y$ ist, so folgt

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}, \text{ daher}$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{b \sin\alpha - a \sin\beta}{b \sin\alpha + a \sin\beta} = \frac{\cot\varphi - 1}{\cot\varphi + 1},$$

wenn der Winkel φ so bestimmt wird, dass $\cot\varphi = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ ist; oder $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)} = \cot(45^0 + \varphi)$ (§. 358, 37 und §. 362, 10); folglich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x + y)\cot(45^0 + \varphi).$$

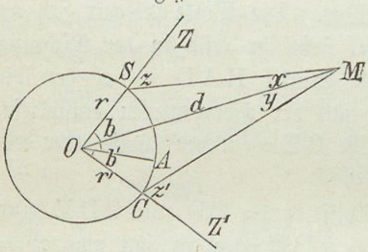
Aus $\frac{1}{2}(x + y)$ und $\frac{1}{2}(x - y)$ erhält man x und y. Dann ist

$$DB = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin\alpha}, \quad DA = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin\beta}, \quad DC = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta}.$$

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn D innerhalb des Dreieckes ABC, oder in der Strecke AB liegt?

§. 393. Die Entfernung $OM = d$ (Fig. 184) des Mondes M von dem Erdmittelpunkte O (die geocentrische Entfernung des Mondes) zu bestimmen. (Parallachsen-Aufgabe.)

Fig. 184.



Es seien OZ und OZ' die Verticallinien zweier Beobachtungsorte S (Stockholm) und C (Cap) unter demselben Meridian; ist A ein Punkt des Äquators, so ist $AS = b$ die geographische Breite von S, ebenso $AC = b'$ jene von C. Zwei Beobachter, der eine in S, der andere in C, beobachten in demselben Augenblicke die Zenithdistanz des Mondes, d. i. die Winkel $ZSM = z$ und $Z'CM = z'$. Aus z, z', b, b' und dem Halbmesser r der Erde ist die Entfernung d zu bestimmen.

Aus dem Vierecke MSOC ist $x + y$ gegeben, denn

$$(x + y) + (180^0 - z) + (b + b') + (180^0 - z') = 360^0,$$

$$\text{daher } x + y = (z + z') - (b + b') \ldots 1).$$

Um jeden der Winkel $x + y$ einzeln zu bestimmen, hat man

aus $\triangle MOS \,..\, r : d = \sin x : \sin(180^0 - z)$,

aus $\triangle MOC \,..\, r : d = \sin y : \sin(180^0 - z')$,

mithin $\sin x : \sin y = \sin z : \sin z'$, und hieraus

$(\sin x + \sin y) : (\sin x - \sin y) = (\sin z + \sin z') : (\sin z - \sin z')$,
oder mit Rücksicht auf §. 358, Form. 37)

$$\tan\frac{x+y}{2} : \tan\frac{x-y}{2} = \tan\frac{z+z'}{2} : \tan\frac{z-z'}{2} \ldots 2).$$

Aus 1) und 2) erhält man $x + y$ und $x - y$ und daraus x und y.
Dann folgt aus $\triangle$ MOS oder $\triangle$ MOC

$$d = \frac{r \sin z}{\sin x} \text{ oder } d = \frac{r \sin z'}{\sin y}.$$

Für $r + 1$, $b + b' = 93^0\,15'\,27''$, $z = 33^0\,20'\,24''$, $z' = 61^0\,13'\,33''$ erhält man $d = 62{\cdot}46$.

3. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. **394.** Gegeben ist eine Strecke S im Raume und ihr Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection s der Strecke auf die Ebene.

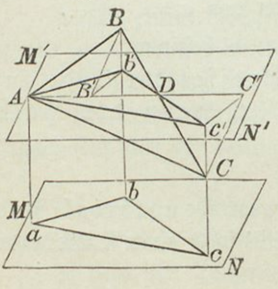
Es sei $AB = S$ (Fig. 185) die gegebene Strecke, $Aa \perp MN$ und $Bb \perp MN$, also $ab = s$ die Projection der Strecke auf MN. Zieht man in der Ebene ABab die $AB' \parallel ab$, so ist $Ab' = ab$ und $BAb' = \alpha$; aber $Ab' = AB \cos\alpha$; daher $s = S \cos\alpha$.

§. **395.** Gegeben ist ein Dreieck D und sein Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection d des Dreieckes auf die Ebene. $d = D \cos\alpha$.

Beweis. Das Dreieck D sei ABC (Fig. 185). Man kann immer durch einen Eckpunkt A desselben eine mit MN parallele Ebene M'N' legen, welche das Dreieck ABC in AD schneidet. Dann ist die Projection Ab'c' des Dreieckes ABC auf die Ebene M'N' offenbar congruent mit der Projection abc desselben auf die Ebene MN. Die AD theilt sowohl das Dreieck ABC in die Dreiecke ADB und ADC, als auch dessen Projection Ab'c' in die Dreiecke ADb' und ADc'.

Zieht man $BB' \perp AD$ und verbindet B' mit b', so ist $BB'b' = \alpha$, daher $B'b' = BB' \cos\alpha$. Nun ist $\triangle ADB = \frac{1}{2} AD \,.\, BB'$ und $\triangle ADb' = \frac{1}{2} AD \,.\, B'b' = \frac{1}{2} AD \,.\, BB' \cos\alpha = \triangle ADB \,.\cos\alpha$. Ebenso erhält man $\triangle ADc' = \triangle ADC \,.\, \cos\alpha$; somit ist $d = \triangle ADb' + \triangle ADc' = (\triangle ADB + ADC).\cos\alpha = D \cos\alpha$.

Fig. 185.



§. **396.** Gegeben ist ein Vieleck P und sein Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection p des Vieleckes auf die Ebene.

$$p = P \cos\alpha.$$

Folgt aus §. 395, wenn das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt wird.

§. 397. In einer dreiseitigen Pyramide sind die Flächeninhalte f_1, f_2, f_3 dreier Grenzflächen nebst den von ihnen gebildeten Neigungswinkeln α_3, α_2, α_1 gegeben; man bestimme den Flächeninhalt f_4 der vierten Grenzfläche.

Da jede Fläche der dreiseitigen Pyramide gleich ist der Summe der Projection der übrigen drei Flächen auf dieselbe, so hat man, wenn β_1, β_2, β_3 die Neigungswinkel der Flächen f_1, f_2, f_3 mit der Fläche f_4 bezeichnen,

$$f_1 = f_2 \cos\alpha_3 + f_3 \cos\alpha_2 + f_4 \cos\beta_1,$$
$$f_2 = f_1 \cos\alpha_3 + f_3 \cos\alpha_1 + f_4 \cos\beta_2,$$
$$f_3 = f_1 \cos\alpha_2 + f_2 \cos\alpha_1 + f_4 \cos\beta_3,$$
$$f_4 = f_1 \cos\beta_1 + f_2 \cos\beta_2 + f_3 \cos\beta_3.$$

Multipliciert man diese Gleichungen der Reihe nach mit f_1, f_2, f_3, f_4 und subtrahiert dann die Summe der ersten drei von der vierten, so folgt

$$f_4^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2f_1 f_2 \cos\alpha_3 - 2f_1 f_3 \cos\alpha_2 - 2f_2 f_3 \cos\alpha_1.$$

Drücke diese Beziehung in Worten aus!

§. 398. Den Inhalt v eines Parallelepipeds zu berechnen, dessen Grundfläche bestimmt ist und dessen Seitenkante c mit der Grundfläche den Neigungswinkel φ bildet.

Ist die Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a und b, so findet man $v = abc \sin\varphi$.

Ist dagegen die Grundfläche ein schiefes Parallelogramm, dessen Seiten a und b den Winkel γ einschließen, so hat man

$$v = abc \sin\gamma \sin\varphi.$$

§. 399. Zu bestimmen ist (§§. 334 und 335, Fig. 167) a) eine Kugelmütze M, wenn r und der Centriwinkel $AOB = \alpha$ gegeben sind; b) eine Kugelzone Z, wenn r und die Winkel $AOB = \alpha$ und $AOC = \alpha'$ gegeben sind.

a) $M = 2r^2\pi(1 - \cos\alpha)$, b) $Z = 2r^2\pi(\cos\alpha - \cos\alpha')$.

4. Aufgaben aus der mathematischen Geographie.

§. 400. 1. Den Meridianbogen b der Erde, den man von einer Höhe h übersehen kann, zu bestimmen, wenn der Halbmesser der als Kugel betrachteten Erde r ist.

Für das Gradmaß des Bogens α erhält man $\cos\alpha = \frac{r}{r+h}$.

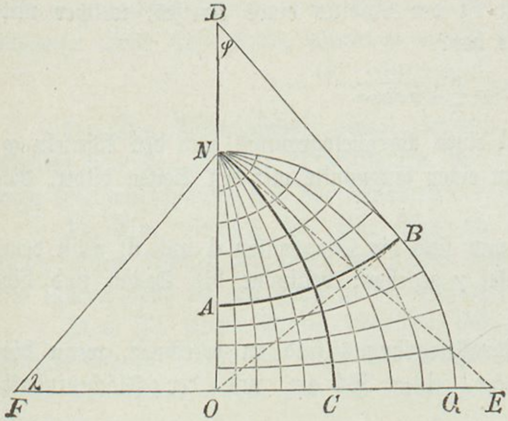
Aus α wird dann nach §. 185 die Bogenlänge b bestimmt.

2. Den Halbmesser ϱ eines Parallelkreises der Erde aus der geographischen Breite φ zu bestimmen, wenn der Halbmesser der Erde r ist.

$$\varrho = r \cos\varphi.$$

§. 401. Das Netz einer stereographischen Äquatorial-Projection der Erdkugel zu entwerfen. (Fig. 186 stellt einen Quadranten des Projectionsnetzes dar.)

Fig. 186.



Bei dieser Projectionsart projiciert man die Parallel- und die Meridiankreise aus einem Punkte O des Äquators auf diejenige Meridianebene, welche mit der durch O gehenden Berührungsebene der Erdkugel parallel ist. Die Projectionen des Äquators und des durch O gehenden Meridians sind Strecken, die Projectionen aller übrigen Parallel- und Meridiankreise sind wieder Kreise, und zwar schneiden sich diese unter denselben Winkeln, wie die projicierten Kreise. Die Mittelpunkte der einzelnen Projectionskreise liegen auf den Verlängerungen der ON und der QO. Als Bestimmungsstücke derselben erhält man:

a) für die Projection AB eines Parallelkreises von der geographischen Breite φ, wenn $ON = OQ = r$ gesetzt wird und BD eine Tangente des Kreises NBQ ist, wegen $BDO = BOQ = \varphi$,

$$\text{Halbmesser } DA = DB = r \cot \varphi,$$

$$\text{Abstand } OA = \frac{r}{\sin \varphi} - r \cot \varphi = r \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2};$$

b) für die Projection NC eines Meridians von der Länge λ in Bezug auf den durch O gehenden Meridian, wenn NE eine Tangente des Kreises NC und $NF \perp NE$ ist, wegen $NFO = ONE = \lambda$,

$$\text{Halbmesser } FC = FN = \frac{r}{\sin \lambda},$$

$$\text{Abstand } OC = \frac{r}{\sin \lambda} - r \cot \lambda = r \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}.$$

5. Übungsaufgaben.

§. **402.** Aus der Planimetrie.

1. In einem Rechtecke ist die Diagonale d und der Winkel φ, welchen sie mit einer Seite bildet, gegeben; berechne die Seiten und den Flächeninhalt.

1 a. Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, von dem die Differenz zweier zusammenstoßender Seiten 40 *cm* ist und der Winkel der beiden Diagonalen 36° 20′ beträgt?

$$f = 1163 \cdot 1\ cm^2.$$

2. Aus den Seiten a und b eines Rechteckes die Winkel zu bestimmen, welche die Seiten mit einer Diagonale bilden.

3. Aus den Diagonalen d und d′ eines Rhombus die Winkel desselben zu berechnen.

3 a. Die Seite eines Rhombus ist $a = 25$ *cm*, ein spitzer Winkel desselben $\alpha = 38^\circ 0' 2''$; wie groß ist der Radius eines Kreises, welcher mit diesem Rhombus gleichen Inhalt hat?

$$r = \frac{a}{\pi} \sqrt{\pi \sin \alpha}.$$

4. Aus einer Diagonale d eines Parallelogramms und den Winkeln φ und ψ, welche dieselbe an ihrem einen Endpunkte mit den Seiten bildet, die Seiten zu berechnen.

5. In einem Parallelogramm sind die Diagonalen d und d′ nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ gegeben; bestimme die Seiten und die Winkel des Parallelogramms.

5 a. Die Seiten eines Parallelogramms sind zu berechnen, wenn die beiden Diagonalen $d = 84 \cdot 5$ *cm*, $d_1 = 364$ *cm* und der Flächeninhalt $f = 14280$ cm^2 gegeben sind.

$$\sin e = \frac{2f}{d\,d_1}.$$

6. Aus den beiden parallelen Seiten a und b und dem Flächeninhalte f eines gleichschenkligen Trapezes die Winkel desselben zu berechnen.

6 a. Ein gleichschenkliges Trapez hat die parallelen Seiten $a = 94$ *m*, $b = 68$ *m* und den spitzen Winkel $\alpha = 65^\circ 5' 43''$; wie groß ist der Inhalt?

$$f = \frac{(a+b)\,(a-b)}{4} \tang \alpha.$$

7. Die Seiten und die Winkel eines gleichschenkligen Trapezes aus einer Diagonale d und den Winkeln φ und ψ, welche sie an ihrem einen Endpunkte mit den Seiten bildet, zu berechnen.

7 a. Von einem gleichschenkligen Trapeze sind die Schenkel $c = 8$ *m* und der Radius des umgeschriebenen Kreises $r = 10$ *m* gegeben; die Fläche soll den fünften Theil der umgeschriebenen Kreisfläche betragen; wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Trapezes?

$$a = 18 \cdot 05 \; m, \quad b = 5 \cdot 95 \; m, \quad \alpha = 40^\circ 53' 15''.$$

8. Aus den beiden parallelen Seiten a und b eines Trapezes und den der Seite a anliegenden Winkeln α und β die nicht parallelen Seiten zu berechnen.

8 a. Ein trapezförmiges Feld hat die parallelen Seiten $a = 425$ *m*, $b = 325$ *m* und eine nicht parallele Seite $c = 200$ *m*; welchen Inhalt hat dieses Trapez, wenn eine Diagonale 375 *m* beträgt?

$$f = 66176 \; m^2.$$

9. In einem Trapeze sind die größere Parallelseite a, die ihr anliegenden Winkel α und β und die mit ihr den Winkel α einschließende Seite c gegeben; wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

9a. Wie groß ist der Inhalt einer trapezförmigen Wiese, wenn die beiden parallelen Seiten $a = 318\,m$, $b = 215\,m$ lang sind und die der längeren Seite anliegenden Winkel $\alpha = 63^{0}\,45'$ und $\gamma = 58^{0}\,40'$ betragen?

$$f = \frac{(a+b)(a-b)\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}.$$

10. Den Flächeninhalt eines zwischen zwei parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Stückes zu bestimmen, wenn die Abstände d, d′ der Sehnen vom Kreismittelpunkte und der Halbmesser r gegeben sind.

11. Eine Secante und eine Tangente desselben Kreises schneiden sich unter einem Winkel von 60^{0}, der äußere Abschnitt der Secante ist gleich 1, der innere gleich 3; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

11a. In einem Kreise schneiden sich zwei Durchmesser unter einem Winkel von 30^{0}; verbindet man ihre Endpunkte, so ist die eine Verbindungssehne um $409\,m$ länger als die andere; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

$289 \cdot 2\,m.$

12. Welchen Winkel bilden die äußeren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise, deren Halbmesser r und r′ sind, und deren Centrale gleich c ist?

13. Drei Kreise mit den Halbmessern R, r und ϱ berühren sich von außen; bestimme die Winkel, welche die drei Centralen miteinander bilden.

14. Den Flächeninhalt f eines Dreieckes zu berechnen, wenn nebst den Winkeln $\alpha = 65^{0}\,28'\,14''$, $\beta = 42^{0}\,30'\,4''$ desselben a) der Halbmesser $R = 205\,mm$ des ihm umgeschriebenen, b) der Halbmesser $r = 150\,mm$ des ihm eingeschriebenen Kreises gegeben ist.

a) $f = 2R^{2}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; b) $f = r^{2}\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta\cot\frac{1}{2}\gamma$.

15. Die Winkel α, β, γ eines Dreieckes und der Halbmesser R des ihm umgeschriebenen Kreises sind gegeben; man bestimme den Halbmesser r des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

$$r = 4R\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

16. In einem Sehnenvierecke ABCD (Fig. 78) sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ gegeben; man bestimme die vier Winkel α, β, γ, δ, die in derselben Reihenfolge an den Punkten A, B, C, D liegen.

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}, \text{ wo } 2s = a+b+c+d \text{ ist.}$$

17. In einem Sehnenvierecke sind gegeben zwei gegenüberliegende Seiten a und c, ein Winkel α und der Halbmesser R des umgeschriebenen Kreises; berechne die beiden anderen Seiten.

18. In einem Sehnenvierecke sind die beiden Diagonalen m und n, der von ihnen eingeschlossene Winkel γ und der Halbmesser r des Kreises gegeben; bestimme die Winkel und die Seiten des Sehnenviereckes.

19. Aus zwei anstoßenden Seiten a und b eines Tangentenviereckes, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel β und dem Halbmesser r des Kreises die Winkel und die Seiten des Viereckes zu berechnen.

Zahlenbeispiele zur Berechnung regulärer Vielecke.

	n	s	r	R	f
20.	5	2·6042	1·7922	2·2153	11·669.
21.	8	1·5	1·8107	1·9598	10·964.
22.	10	1·5596	2·4	2.5235	18·715.
23.	15	0·83165	1·9563	2	12·202.
24.	24	0·39251	2·2503	2·2697	16.

25. Ein reguläres Zwölfeck ist flächengleich mit einem regulären Sechsecke, dessen Seite s = 4 ist; wie groß ist der Halbmesser des dem regulären Zwölfecke eingeschriebenen Kreises?

26. (Das Parallelogramm der Kräfte.) Es seien p und q zwei Kräfte, welche auf einen Punkt unter dem Winkel φ wirken und mit der Richtung der Resultierenden r die Winkel α und β bilden. Wenn von diesen sechs Größen drei gegeben sind, und zwar:

1) p, q, φ;	3) p, r, α;	5) p, r, φ;	7) r, α, β;
2) p, q, α;	4) p, r, β;	6) p, α, β;	8) p, q, r;

in jedem Falle die drei übrigen Größen zu bestimmen.

27. Wie hoch ist der Stand der Sonne, wenn ein 24 *m* hoher Gegenstand in der Horizontalebene einen Schatten von 72 *m* Länge wirft?

28. Wie groß ist der wahre Durchmesser des Mondes, wenn sein scheinbarer mittlerer Halbmesser 15′ 31·69″ und seine mittlere Entfernung von der Erde 51805 geogr. Meilen beträgt?

29. Wie groß ist der scheinbare Durchmesser der Venus bei einer Entfernung d = 5127000 geogr. Meilen von dem Beobachter auf der Erde, wenn der wahre Durchmesser a = 1680 geogr. Meilen beträgt?

30. Damit ein Gegenstand in der normalen Sehweite von 25 *cm* sichtbar sei, muss sein Sehwinkel mindestens 40″ betragen; wie groß muss daher der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes mindestens sein?

31. Unter welchem Winkel φ sieht ein Mann, dessen Auge 1·6 *m* über dem Boden erhaben ist, einen Thurm von 65 *m* Höhe in der Entfernung von 85 *m*?

§. **403.** Aus der Stereometrie.

1. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck, welches die Winkel α, β, γ hat und einem Kreise vom Halbmesser R eingeschrieben ist, die Seitenkanten desselben sind gleich s und gegen die Grundfläche unter dem Winkel φ geneigt; wie groß ist das Volumen des Prismas?

$$v = 2\,s\,R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\varphi.$$

2. Gegeben ist der Cubikinhalt v einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Neigungswinkel α der Seitenkante gegen die Grundfläche; bestimme a) die Grundfläche, b) die Seitenkante.

2 a. Von einer dreiseitigen Pyramide ist jede Seitenkante 40 *cm* lang, von der Grundfläche sind zwei Seiten 23 *cm* und 12 *cm* und der von ihnen eingeschlossene Winkel $74^0\,52'\,42''$ gegeben; wie groß ist der Inhalt dieser Pyramide?

$$v = 1695{\cdot}6\ cm^3.$$

3. In einer regulären n-seitigen Pyramide ist a die Grundkante, s die Seitenkante; wie groß ist a) die Oberfläche, b) das Volumen?

3 a. Von einer regelmäßigen zehnseitigen Pyramide sind die Seitenkanten $s = 132\ cm$ lang und gegen die Basis unter dem Winkel $\alpha = 35^0\,15'$ geneigt; wie groß ist der Inhalt dieser Pyramide?

$$v = \tfrac{5}{3}\, s^3 \sin 2\alpha \cos\alpha \sin 36^0.$$

4. Die Oberfläche und das Volumen einer regulären n-seitigen Pyramide, deren Grundkante a und deren Höhe der doppelte Halbmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises ist, zu berechnen.

5. Das Volumen einer regulären Pyramide, die zur Grundfläche ein n-Eck mit der Seite a hat, ist v; wie groß ist der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche?

6. In einem regulären Pyramidenstumpfe ist die größere Grundfläche ein Achteck mit der Seite a, die Projection einer Seitenkante auf die größere Grundfläche p und der zugehörige Neigungswinkel α; berechne a) die Oberfläche, b) das Volumen des Stumpfes.

7. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) das Volumen eines geraden Kegels, dessen Seite s mit der Grundfläche den Neigungswinkel φ bildet?

7 a. Der Inhalt eines geraden Kegels sei V und die Seitenlinien des Kegels seien unter dem Winkel α gegen die Basis geneigt; wie groß ist die Mantelfläche?

$$M = \sqrt[3]{\left(\frac{3\,V}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{\pi}{\cos\alpha}}.$$

8. Die Manteloberfläche und das Volumen eines geraden Kegels aus dem Halbmesser r der Grundfläche und dem Winkel α am Scheitel eines Achsenschnittes zu berechnen.

9. In einem schiefen Kegel ist die Achse a gegen die Grundfläche, deren Halbmesser r ist, unter dem Winkel α geneigt; wie groß ist die Höhe, die größte und die kleinste Seite des Kegels?

10. In einem schiefen Kegel ist α der kleinste Neigungswinkel einer Seite mit der Grundfläche, h die Höhe und p die Projection der Achse auf die Grundfläche; zu berechnen ist das Volumen.

10 a. Wie groß ist der Inhalt eines schiefen Kegels, wenn die kleinste Seitenlinie b desselben 15 *dm* beträgt und gegen die Grundfläche unter $\alpha = 74^0\,36'$, die größte Seitenlinie aber unter $\beta = 36^0\,48'$ geneigt ist und die Höhe zwischen der größten und kleinsten Seitenlinie liegt?

$$v = \frac{b^3\pi}{12}\,\frac{\sin\alpha \sin\gamma^2}{\sin\beta^2}\,.$$

11. Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes aus der Seite s, ihrem Neigungswinkel α gegen die größere Grundfläche und der Manteloberfläche m zu berechnen.

$$v = \frac{\pi s}{4} . \sin \alpha . \left[\frac{m^2}{s^2 \pi^2} + \frac{s^2}{3} \cos \alpha^2\right].$$

11 a. Von einem geraden, abgestutzten Kegel mit der Seitenlänge 1 *m* ist die Mantelfläche gleich der großen Grundfläche und der Neigungswinkel einer Seitenlinie gegen die Grundfläche 60°; wie groß sind die Radien und die Mantelfläche?

$$R = 1{\cdot}707\, m, \qquad r = 1{\cdot}207\, m, \qquad m = 9{\cdot}071\, m^2.$$

12. In einem geraden Kegelstumpfe sind R und r die Halbmesser der Grundflächen und v das Volumen; wie groß ist a) der Neigungswinkel α der Seite gegen die größere Grundfläche, b) die Seite s, c) die Manteloberfläche m des Stumpfes?

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{3\, v}{\pi (R^3 - r^3)}, \qquad s = \frac{R - r}{\cos \alpha}, \qquad m = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{\cos \alpha}.$$

12 a. Wie groß ist der Inhalt eines geraden Kegelstutzes, wenn die Mantelfläche 194·35 *cm*², die Seite 7·9 *cm* und der Neigungswinkel der letzteren gegen die Grundfläche 84° 28′ 30″ beträgt?

$$v = 379{\cdot}9\, cm^3.$$

13. In einem schiefen Cylinder ist die Achse a gegen die Grundfläche, deren Halbmesser r ist, unter dem Winkel α geneigt; berechne a) den Flächeninhalt des zur Grundfläche normalen Achsenschnittes, b) das Volumen des Cylinders.

14. Wie groß ist a) die Rotationsfläche, b) der Rotationskörper eines regulären Zwölfeckes mit der Seite a um eine dasselbe halbierende Diagonale als Achse?

15. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten a und b den Winkel γ einschließen, dreht sich um die dritte nicht gegebene Seite; wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

15 a. Ein Dreieck mit der Seite $b = 5\, dm$ und den beiden anliegenden Winkeln $\alpha = 54^\circ 36'$, $\gamma = 74^\circ 54'$ rotiert um b als Achse; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Rotationskörpers?

$$O = \frac{2 \pi b^2}{\sin \beta^2} \sin \alpha \sin \gamma \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}; \quad v = \frac{b^3 \pi}{3} \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta}\right)^2.$$

16. Die Oberfläche einer Kugel ist o, eine Calotte derselben m; bestimme den Centriwinkel α des Bogens, durch dessen Umdrehung die Calotte erzeugt wird.

17. Aus dem Volumen v eines Kugelsectors und dem Winkel α des Achsenschnittes den Halbmesser r der Kugel zu finden.

18. In einer Kugel, deren Volumen v ist, wird ein gerader Kegel beschrieben, dessen Winkel am Scheitel des Achsenschnittes α ist; wie groß ist das Volumen des Kegels?

18 a. Einer Kugel von $O = 50\ dm^2$ Oberfläche soll ein gerader Kegel eingeschrieben werden, welcher an der Spitze den Winkel $\alpha = 34^\circ 18' 36''$ hat; wie groß ist der Inhalt des Kegels?

$$v = \frac{2\pi}{3} R^3 \left(\sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

19. Die Achse a eines schiefen Kegels bildet mit der Grundfläche, deren Halbmesser r ist, den Neigungswinkel α; wie groß ist der Halbmesser der um den Kegel beschriebenen Kugel?

20. Ein Kreissector, dessen Centriwinkel α und dessen Halbmesser r ist, dreht sich um den zur Sehne seines Bogens parallelen Durchmesser; wie groß ist a) die Oberfläche o, b) das Volumen v des Rotationskörpers?

$$o = 2r^2\pi\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right), \quad v = \frac{4r^3\pi}{3}\sin\frac{\alpha^3}{2}.$$

21. Gegeben sind der Halbmesser R und r der größeren und der kleineren Grundfläche eines geraden Kegelstumpfes und der Neigungswinkel α der Seite mit der größeren Grundfläche des Stumpfes; bestimme die Höhe einer Kugelmütze, welche der Manteloberfläche des Kegelstumpfes gleich ist und zu einer Kugel gehört, welche die Höhe des Stumpfes zum Halbmesser hat.

22. Wie hoch muss ein Berg mindestens sein, damit man seine Spitze vom Meere aus noch in einer Entfernung von 100 Kilometer sehen kann?

23. Wie groß ist die Fläche der Erde, die man in einer Höhe von 75 *m* übersieht?

24. Wie viel geogr. Meilen hat der Parallelkreis von Wien in der geogr. Breite von $48^\circ 12' 35''$? (Halbmesser der Erde = 858·474 geogr. Meilen.)

25. Bei welcher geogr. Breite beträgt ein Grad des Parallelkreises 8·623 geogr. Meilen?

26. Zwei Orte der Erde liegen auf dem φten Grade nördlicher Breite und haben eine östliche Länge von bezüglich λ und λ'; wie weit sind dieselben längs ihres Parallelkreises von einander entfernt?

$$\varphi = 47^\circ 58', \quad \lambda = 42^\circ 15', \quad \lambda' = 31^\circ 37', \quad r = 858{\cdot}474.$$

27. Zwei Orte haben gleiche geogr. Breite φ ($48^\circ 12' 35''$), ihre Mittage differieren um m (10) Minuten; wie groß ist ihr Abstand längs des Parallelkreises?

28. Zwei Orte von gleicher geogr. Breite φ ($74^\circ 4'$) sind längs des Parallelkreises c (442) Meilen von einander entfernt; wie viele Grade beträgt der Unterschied ihrer geogr. Längen?

29. Bestimme die Höhe und die Oberfläche a) der heißen Zone, b) der gemäßigten Zone, c) der kalten Zone der Erde, wenn man den Erdhalbmesser r = 858·474 geogr. Meilen und $\varphi = 23^\circ 28'$ als den Abstand des Polarkreises vom Pole, wie auch als den Abstand des Wendekreises vom Äquator annimmt.

Dritter Abschnitt.

Sphärische Trigonometrie.

I. Auflösung der sphärischen Dreiecke.

1. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

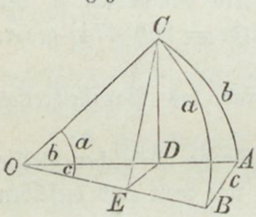
§. **404.** Ein sphärisches Dreieck kann einen, zwei oder auch drei rechte Winkel enthalten. Sind alle drei Winkel eines sphärischen Dreieckes rechte, so sind die drei Seiten Quadranten; kommen zwei rechte Winkel vor, so stehen denselben ebenfalls Quadranten gegenüber und die dritte Seite muss ebenso viele Grade enthalten wie der dritte Winkel. Diese beiden Fälle geben also zu keiner Aufgabe Anlass, und es brauchen hier nur solche sphärische Dreiecke betrachtet zu werden, welche bloß *einen* rechten Winkel enthalten.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§. **405.** Es sei ABC (Fig. 187) ein bei A rechtwinkliges sphärisches Dreieck, und O der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel; b und c seien die Katheten, B und C die ihnen gegenüberliegenden Winkel und a die Hypotenuse.

Setzt man zunächst alle drei Seiten und die Winkel B und C kleiner als 90^0 voraus, zieht $CD \perp OA$, $CE \perp OB$, und verbindet D mit E, so ist (§. 219, 2) $CD \perp$ Ebene AOB; DE ist dann die Projection der CE auf AOB, und daher $\perp OB$ (§. 210); mithin ist Winkel $CDE = B$.

Fig. 187.



1. Man hat nun

$OE = OC \,.\, \cos a,$

$OE = OD \,.\, \cos c = OC \,.\, \cos b \cos c;$

daher $OC \,.\, \cos a = OC \,.\, \cos b \cos c$, mithin

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots 1);$$

d. h. *der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden Katheten.*

2. Ferner ist $CD = OC \,.\, \sin b,$

$CD = CE \,.\, \sin B = OC \,.\, \sin a \sin B;$

mithin $OC \,.\, \sin b = OC \,.\, \sin a \sin B$, und folglich

$$\left.\begin{array}{r} \sin b = \sin a \sin B. \\ \text{Ebenso erhält man } \sin c = \sin a \sin C; \end{array}\right\}\ldots 2);$$

d. h. *der Sinus einer Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.*

3. Es ist auch

$DE = CE \,.\, \cos B = OC \,.\, \sin a \cos B,$

$DE = OD \,.\, \sin c = OC \,.\, \cos b \sin c = OC \,.\, \cos b \sin a \sin C$ (nach 2);

mithin $OC \,.\, \sin a \cos B = OC \,.\, \cos b \sin a \sin C$, folglich

$$\left.\begin{aligned} &\cos B = \cos b \sin C, \\ \text{und analog}\quad &\cos C = \cos c \sin B; \end{aligned}\right\}\ldots 3);$$

d. h. der Cosinus eines schiefen Winkels ist gleich dem Producte aus dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite und dem Sinus des andern schiefen Winkels.

4. Man hat ferner

$$CD = OD.\text{tang } b,$$

$$CD = CE.\sin B = OE.\text{tang } a \sin B = OD.\cos c \text{ tang } a \sin B$$
$$= OD.\text{tang } a \cos C \text{ (nach 3)};$$

daher $OD.\text{tang } b = OD.\text{tang } a \cos C$, oder

$$\left.\begin{aligned} &\text{tang } b = \text{tang } a \cos C, \\ \text{und analog}\quad &\text{tang } c = \text{tang } a \cos B; \end{aligned}\right\}\ldots 4);$$

d. h. die Tangente einer Kathete ist gleich dem Producte aus der Tangente der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden schiefen Winkels.

5. Auch ist $CD = OD.\text{tang } b$,

$$CD = DE.\text{tang } B = OD.\sin c \text{ tang } B;$$

folglich $OD.\text{tang } b = OD.\sin c \text{ tang } B$, oder

$$\left.\begin{aligned} &\text{tang } b = \sin c \text{ tang } B, \\ \text{und analog}\quad &\text{tang } c = \sin b \text{ tang } C; \end{aligned}\right\}\ldots 5);$$

d. h. die Tangente einer Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus der andern Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

6. Aus 1) und 3) erhält man endlich

$$\cos a = \cos b \cos c = \frac{\cos B}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\sin B}, \text{ oder}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots\ldots 6);$$

d. h. der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel.

Setzt man statt der Katheten b und c deren Complemente b′ und c′, so erhält man aus den vorstehenden sechs Formeln

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \sin b' \sin c' \\ \cos b' &= \sin a \sin B \\ \cos B &= \sin b' \sin C \\ \cot c' &= \text{tang } a.\cos B \\ \cot c' &= \cos b'.\text{tang } C \\ \cos a &= \cot B \cot C \end{aligned}\right\} \alpha \text{ oder } \left.\begin{aligned} \cos a &= \sin b' \sin c' \\ \cos b' &= \sin a \sin B \\ \cos B &= \sin b' \sin C \\ \cos B &= \cot a.\cot c' \\ \cos b' &= \cot c' \cot C \\ \cos a &= \cot B.\cot C \end{aligned}\right\} \beta$$

Läßt man den rechten Winkel fort, so sind die fünf andern Umfangsstücke des Dreieckes:

$$\begin{array}{ccc} & c \quad b & \\ B & & C \\ & a & \end{array}$$

und die Formeln β sagen:

Der Cosinus eines Stückes ist gleich dem Producte aus den Sinus der beiden gegenüberliegenden Stücke, oder ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke; doch sind statt der Katheten deren Complemente zu setzen. (Neper'scher Satz vom rechtwinkligen Dreiecke.)

Zusätze. 1. Die Entwicklung der vorhergehenden Gleichungen beruht auf der Voraussetzung, dass a, b, c, sowie B, C einzeln kleiner als 90° sind. Trifft diese Voraussetzung nicht ein, so darf man nur die Figur in entsprechender Weise ändern und dann das gleiche Verfahren, wie vorhin, anwenden; man erhält mit Berücksichtigung der Vorzeichen in jedem Falle dieselben Gleichungen wie früher. Diese haben demnach allgemeine Giltigkeit.

2. Ist in einem sphärischen Dreiecke eine Seite = 90°, so ist das Polardreieck ein rechtwinkliges; folglich können auch hier die vorhergehenden Gleichungen nach gehöriger Umänderung angewendet werden.

Folgesatz. In der Gleichung $\cos B = \cos b \sin C$ (in 3) ist $\sin C$ immer positiv; also müssen $\cos B$ und $\cos b$ stets gleiche Vorzeichen haben. Ist daher $b \lessgtr 90^\circ$, und folglich $\cos b \gtrless 0$, so muss auch $\cos B \gtrless 0$, somit $B \lessgtr 90^\circ$ sein. Umgekehrt: Wenn $B \lessgtr 90^\circ$ ist, so muss auch $b \lessgtr 90^\circ$ sein.

Auflösungsfälle.

§. **406.** I. Gegeben die beiden Katheten b und c.

Aus $\cos a = \sin b' \sin c'$, $\cos c' = \cot b' \cot B$, $\cos b' = \cot c \cot C$ folgt

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Es sei z. B. $b = 27^\circ\, 28'\, 36''$ und $c = 51^\circ\, 12'\, 8''$. Man hat

$$\begin{array}{r}
\log \cos b = 9{\cdot}94\ 802 \\
\log \cos c = 9{\cdot}79\ 697 \\
\hline
\log \cos a = 9{\cdot}74\ 499 \\
a = 56^\circ\, 13'\, 41''
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log \operatorname{tang} b = 9{\cdot}71\ 604 \\
\log \sin c = 9{\cdot}89\ 174 \\
\hline
\log \operatorname{tang} B = 9{\cdot}82\ 430 \\
B = 33^\circ\, 42'\, 49''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\log \operatorname{tang} c = 10{\cdot}09\ 476 \\
\log \sin b = 9.66\ 406 \\
\hline
\log \operatorname{tang} C = 10{\cdot}43\ 070 \\
C = 69^\circ\, 38'\, 54''.
\end{array}$$

II. Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b.

Aus $\cos a = \sin b' \sin c'$, $\cos b' = \sin a \sin B$, $\cos C = \cot a \cot b'$ folgt

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b'}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a'}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Obwohl zu $\sin B$ im allgemeinen zwei Winkel gehören, ein spitzer und ein stumpfer, so fällt doch hier jeder Zweifel weg, da $B \gtrless 90^\circ$ angenommen werden muss, je nachdem $b \gtrless 90^\circ$ gegeben ist.

Narodna in univerzitetna knjižnica - Ljubljana

III. Gegeben eine Kathete b und ihr gegenüberliegender Winkel B.

Aus $\cos b' = \sin a \sin B$, $\cos c' = \cot b' \cot B$, $\cos B = \sin b'$ $\sin C$ folgt

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\tan b}{\tan B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b},$$

oder aus $\cos a = \sin b' \sin c'$, $\cos C = \cot a \cot b'$ folgt

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \cos C = \frac{\tan b}{\tan a}.$$

Wenn a gefunden wurde, so können daraus mittelst der Gleichungen für $\cos c$ und $\cos C$ die Werte für c und C unzweideutig bestimmt werden; allein zur Bestimmung von a kennt man nur den Sinus von a, daher lässt diese Aufgabe zwei Lösungen zu.

IV. Gegeben eine Kathete b und ihr anliegender Winkel C.

Aus $\cos C = \cot a \cot b'$, $\cos b' = \cot C \cot c'$, $\cos B = \sin b'$ $\sin C$ folgt

$$\tan a = \frac{\tan b}{\cos C}, \quad \tan c = \sin b \tan C, \quad \cos B = \cos b \sin C.$$

V. Gegeben die Hypotenuse a und ein anliegender Winkel B.

Aus $\cos b' = \sin a \sin B$, $\cos B = \cot a \cot c'$, $\cos a \cot B \cot C$ folgt

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \tan c = \tan a \cos B, \quad \cot C = \cos a \tan B.$$

Hier ist b durch $\sin b$ eindeutig bestimmt, da man $b \gtrless 90^0$ annehmen muss, je nachdem $B \lessgtr 90^0$ ist.

VI. Gegeben die beiden schiefen Winkel B und C.

Aus $\cos a = \cot B \cot C$, $\cos B = \sin b' \sin C$, $\cos C = \sin c'$ $\sin B$ folgt

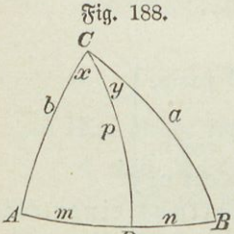
$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

2. Schiefwinklige sphärische Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze und Formeln über das schiefwinklige sphärische Dreieck.

§. **407.** Es sei ABC (Fig. 188) ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck, a, b, c seien seine drei Seiten, A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 188.



Zieht man durch C einen größten Kreisbogen $CD \perp AB$, und bezeichnet die Bogen AD, BD und CD bezüglich durch m, n und p, so ist (§. 405, β) in den rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC

$\cos p' = \sin a \sin B$, und

$\cos p' = \sin b \sin A$; daher

$\sin a \sin B = \sin b \sin A$, oder

$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$;

d. h. in jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel (Sinus-Satz).

Analog von

erhält man

$$\left.\begin{aligned}\sin a \sin B &= \sin b \sin A\\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A,\\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B.\end{aligned}\right\}\ldots\mathrm{I})$$

Die Gleichungen I) sind auch dann giltig, wenn der normal gelegte größte Kreisbogen außerhalb des Dreieckes ABC fällt; man erhält dann nach dem obigen Vorgange sin (180° — A), sin (180° — B) oder sin (180° — C), welche jedoch bezüglich mit sin A, sin B oder sin C gleich sind.

§. 408. 1. Im rechtwinkligen Dreiecke BDC (Fig. 188) ist

$\cos a = \sin p' \sin n' = \cos p \cos n = \cos p \cos (c - m)$, oder

$$\cos a = \cos p \cos c \cos m + \cos p \sin c \sin m.$$

Nun ist $\cos p \cos m = \cos b$, und wegen

$$\cos A = \cot b \cot m' \operatorname{tang} m = \cos A \operatorname{tang} b,$$

daher $\cos p \sin m = \frac{\cos b}{\cos m} . \sin m = \cos b \operatorname{tang} m = \cos b \operatorname{tang} b \cos A$

$$= \sin b \cos A.$$

Mit diesen Werten erhält man für cos a:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Analog erhält man

$$\left.\begin{aligned}\cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;\end{aligned}\right\}\ldots\mathrm{II\,a});$$

d. h. in jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer Seite gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden anderen Seiten, vermehrt um das Product aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. (Cosinus-Satz für eine Seite.)

2. Im rechtwinkligen Dreiecke ADC ist

$$\cos A = \cos p \sin x = \cos p \sin (C - y), \text{ oder}$$

$$\cos A = \cos p \sin C \cos y - \cos p \cos C \sin y.$$

Nun ist $\cos p \sin y = \cos B$ (§. 405, 3), und daher

$\cos p \cos y = \frac{\cos B}{\sin y} . \cos y = \cos B \cot y = \cos B . \frac{\cos a}{\cot B}$ (§. 405, 6)

$$= \sin B \cos a.$$

Damit erhält man für cos A:

$$\cos A = - \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a.$$

Ebenso findet man

$$\left.\begin{aligned}\cos B &= - \cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,\\ \cos C &= - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c;\end{aligned}\right\}\ldots\mathrm{II\,b});$$

d. h. in jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem negativen Producte aus den Cosinus der beiden anderen Winkel, vermehrt um das Product aus den

Sinus dieser Winkel und dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite. (Cosinus-Satz für einen Winkel.)

Die Gleichungen II a) und II b) sind allgemein giltig, da man dieselben Ausdrücke auch dann erhält, wenn der durch einen Scheitel des Dreieckes ABC auf die Gegenseite normal gelegte Bogen außerhalb dieses Dreieckes fällt.

§. **409.** 1. Um aus den Gleichungen II a) logarithmisch bequeme Formeln abzuleiten, hat man zunächst aus der ersten Gleichung:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ daher}$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c},$$

oder mit Rücksicht auf §. 356, Form. 24) und 23), und §. 358, Form 36)

$$\left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c},$$

$$\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man nun $a + b + c = 2s$, so erhält man die Halbwinkelsätze:

$$\left.\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}. \\ \text{Daraus folgt } \operatorname{tang} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}. \end{aligned}\right\} \text{III a).}$$

Auf gleiche Weise findet man auch die Functionen für $\frac{B}{2}$ und $\frac{C}{2}$.

2. Wendet man denselben Entwicklungsgang auf die Werte für cos a, cos b und cos c aus den Gleichungen II b) an, so erhält man, wenn $A + B + C = 2S$ gesetzt wird, die Halbseitensätze:

$$\left.\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C}}, \\ \operatorname{tang} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - A)}{\cos (S - B) \cos (S - C)}}. \end{aligned}\right\} \text{III b).}$$

Auf gleiche Weise findet man auch die Functionen für $\frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2}$.

§. **410.** Gauß'sche Gleichungen.

Substituiert man in der Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(A + B) = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

die Werte von $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\sin \frac{B}{2}$ aus III a), so hat man

$$\sin \tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a \sin b}} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$
$$+ \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$
$$= \frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} \cdot \cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} \cdot \cos\tfrac{1}{2}C,$$

daher

$$\left.\begin{array}{l} \sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C. \\ \text{Ebenso ergibt sich} \\ \sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C, \\ \cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C, \\ \cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C. \end{array}\right| \text{IV).}$$

Schreibt man diese Gleichungen in der Form gleicher Quotienten

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

so gehen aus einer derselben alle übrigen hervor, wenn man auf der einen Seite die geschriebenen Vorzeichen und auf der andern Seite die Functionszeichen sin und cos vertauscht.

Folgesatz. Da in der Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C$$

$\cos\frac{1}{2}c$ und $\sin\frac{1}{2}C$ immer positiv sind, so müssen $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ und $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ stets gleiche Vorzeichen haben. Ist daher $a+b \lesseqgtr 180^0$, also $\cos\frac{1}{2}(a+b) \gtreqless 0$, so muss auch $\cos\frac{1}{2}(A+B) \gtreqless 0$, somit $A+B \lesseqgtr 180^0$ sein. Umgekehrt: Ist $A+B \lesseqgtr 180^0$, so ist bezüglich auch $a+b \lesseqgtr 180^0$.

§. 411. Neper'sche Analogien (Gleichungen).

1. Dividiert man die vierte der Gauß'schen Gleichungen in IV) durch die dritte, dann die zweite durch die erste, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} \tan\frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan\frac{1}{2}c \\ \tan\frac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan\frac{1}{2}c \end{array}\right\} \ldots \text{V a).}$$

2. Dividiert man ferner die erste der Gauß'schen Gleichungen durch die dritte und die zweite durch die vierte, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \tan\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\frac{1}{2}C \\ \tan\frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\frac{1}{2}C \end{array}\right\} \ldots \text{V b).}$$

Auflösungsfälle.

§. **412.** I. Gegeben zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C.

Die Winkel A und B ergeben sich aus den Neper'schen Gleichungen V b).

Die dritte Seite c kann dann am vortheilhaftesten durch Anwendung einer der Gauß'schen Gleichungen in IV) berechnet werden.

Ist z. B. $a = 97^0 30' 20''$, $b = 55^0 12' 10''$, $C = 39^0 58'$, so hat man $\frac{1}{2}(a+b) = 76^0 21' 15''$, $\frac{1}{2}(a-b) = 21^0 9' 5''$, $\frac{C}{2} = 19^0 59'$.

$$\begin{array}{rlcrl}
\log\cos\frac{1}{2}(a-b) = & 9{\cdot}96971 & \qquad & \log\sin\frac{1}{2}(a-b) = & 9{\cdot}55731 \\
\log\cot\frac{1}{2}C = & \underline{10{\cdot}43933} & & \log\cot\frac{1}{2}C = & \underline{10{\cdot}43933} \\
 & 20{\cdot}40904 & & & 19{\cdot}99664 \\
\log\cos\frac{1}{2}(a+b) = & \underline{9{\cdot}37276} & & \log\sin\frac{1}{2}(a+b) = & \underline{9{\cdot}98757} \\
\log\tan\frac{1}{2}(A+B) = & 11{\cdot}03628 & & \log\tan\frac{1}{2}(A-B) = & 10{\cdot}00907 \\
\frac{1}{2}(A+B) = & 84^0 44' 40'' & & \frac{1}{2}(A-B) = & 45^0 35' 53'' \\
\text{daher} \quad A = & 130^0 20' 33'', & & B = & 39^0 8' 47''.
\end{array}$$

Zur Berechnung von c aus den Gleichungen in IV) hat man z. B. $\cos\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} \cdot \cos\frac{1}{2}C$, oder $\sin\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} \cdot \cos\frac{1}{2}C$ und erhält nach beiden Formeln $c = 56^0 40' 16''$.

Durch die Anwendung mehrerer Gauß'scher Gleichungen erhält man eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Zusatz. Die Seite c kann auch unabhängig von A und B unmittelbar aus den gegebenen Stücken bestimmt werden; man bedient sich dazu der Gleichung des Systems II a)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

welche jedoch durch Einführung eines Hilfswinkels logarithmisch brauchbar zu machen ist. Es ist

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \sin b \tan a \cos C).$$

Wird nun ein Hilfswinkel w so bestimmt, dass $\tan w = \tan a \cos C$ ist, so hat man dann

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \sin b \tan w)$$

$$= \frac{\cos a}{\cos w}(\cos b \cos w + \sin b \sin w); \text{ somit}$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cos(b-w)}{\cos w}.$$

§. **413.** II. Gegeben zwei Winkel A und B und die von ihnen eingeschlossene Seite c.

Die Werte für die Seiten a und b ergeben sich aus den Neper'schen Gleichungen V a) und den Winkel C findet man dann mittelst der Gauß'schen Gleichungen.

Zusatz. Der Winkel C kann auch unmittelbar aus den gegebenen Stücken mittelst der Gleichung des Systems II b)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
$$= \cos A\,(-\cos B + \sin B \operatorname{tang} A \cos c)$$

berechnet werden, wenn man einen Hilfswinkel w so bestimmt, dafs $\cot w = \operatorname{tang} A \cos c$ wird. Dann hat man

$$\cos C = \cos A\,(-\cos B + \sin B \cot w) = \frac{\cos A}{\sin w}\,(-\cos B \sin w + \sin B \cos w),$$

daher
$$\cos C = \frac{\cos A \sin (B - w)}{\sin w}.$$

§. **414.** III. Gegeben zwei Seiten a und b und ein gegenüberliegender Winkel A.

Für den Winkel B findet man aus dem System I)

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Hier kann B im allgemeinen spitz oder stumpf sein und die Aufgabe läfst zwei Auflösungen zu; nur unter besonderen Voraussetzungen kann das Dreieck ein eindeutig bestimmtes sein.

Es sei erstlich $A = 90^0$. Für $a + b \lesseqgtr 180^0$ ist dann auch $A + B \lesseqgtr 180^0$, daher bezüglich $B \lesseqgtr 90^0$. Die Aufgabe ist eindeutig.

Es sei ferner $A < 90^0$. Für $a + b \geqq 180^0$ mufs auch $A + B \geqq 180^0$, somit $B > 90^0$ sein; die Aufgabe läfst dann nur eine Auflösung zu. Für $a + b < 180^0$ aber, und somit $A + B < 180^0$, kann $B \gtrless 90^0$ sein, und es gibt zwei Dreiecke, wenn nicht der stumpfe Winkel B so grofs ist, dafs $A + B \geqq 180^0$ wäre, was immer eintritt, wenn $b \leqq a$ ist; in diesem Falle darf B nur spitz genommen werden.

Ist endlich $A > 90^0$, so hat man für $a + b \leqq 180^0$ auch $A + B \leqq 180^0$, und somit $B < 90^0$; das Dreieck ist also eindeutig bestimmt. Wenn dagegen $a + b > 180^0$ und daher auch $A + B > 180^0$ ist, so kann $B \gtrless 90^0$ sein; die Aufgabe ist also zweideutig, ausgenommen, wenn der spitze Winkel B so klein ist, dafs $A + B \leqq 180^0$ wäre, was für $b \geqq a$ eintritt, in welchem Falle dann B nur stumpf sein kann.

Das Dreieck hat also zwei Auflösungen, wenn

$A < 90^0$, $a + b < 180^0$ und $a < b$, oder
$A > 90^0$, $a + b > 180^0$ und $a > b$ ist.

Ist B bestimmt, so erhält man für c und C aus Va und Vb

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + b),$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Es sei z. B. $a = 57^0\,38'$, $b = 31^0\,12'$, $A = 104^0\,25'\,30''$.

Man erhält zuerst $B = 36^0\,26'\,25''$.

Da hier $A > 90^0$, $a + b < 180^0$, somit auch $A + B < 180^0$ ist, so mufs $B < 90^0$ sein. Ferner hat man

$$a + b = 88^\circ 50' \qquad \tfrac{1}{2}(a + b) = 44^\circ 25'$$
$$a - b = 26^\circ 26' \qquad \tfrac{1}{2}(a - b) = 13^\circ 13'$$
$$A + B = 140^\circ 51' 55'' \qquad \tfrac{1}{2}(A + B) = 70^\circ 25' 57{\cdot}5''$$
$$A - B = 67^\circ 59' 5'' \qquad \tfrac{1}{2}(A - B) = 33^\circ 59' 32{\cdot}5''$$

$$\begin{array}{rr}
\log\sin \tfrac{1}{2}(A + B) = & 9{\cdot}97\,417 \\
\log\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b) = & 9{\cdot}37\,080 \\
\hline
 & 19{\cdot}34\,497 \\
\log\sin \tfrac{1}{2}(A - B) = & 9{\cdot}74\,747 \\
\hline
\log\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = & 9{\cdot}59\,750 \\
\tfrac{1}{2} c = & 21^\circ 35' 40'' \\
c = & 43^\circ 11' 20''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\log\sin \tfrac{1}{2}(a + b) = & 9{\cdot}84\,502 \\
\log\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B) = & 9{\cdot}82\,886 \\
\hline
 & 19{\cdot}67\,388 \\
\log\sin \tfrac{1}{2}(a - b) = & 9{\cdot}35\,914 \\
\hline
\log\cot \tfrac{1}{2} C = & 10{\cdot}31\,474 \\
\tfrac{1}{2} C = & 25^\circ 50' 54'' \\
C = & 51^\circ 41' 48''.
\end{array}$$

§. **415.** IV. Gegeben zwei Winkel A und B und eine gegenüberliegende Seite a.

Für die Seite b hat man $\sin b = \dfrac{\sin a \sin B}{\sin A}$.

Für c und C geben die Neper'schen Gleichungen V a) und V b)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b),$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Da b aus sin b zu bestimmen ist, so bietet diese Aufgabe nur in besonderen Fällen eine einzige Auflösung. Durch ähnliche Folgerungen, wie in §. 414, kann man sich überzeugen, dass zweideutige Fälle eintreten, wenn

$a < 90^\circ$, $A + B < 180^\circ$ und $A < B$, oder

$a > 90^\circ$, $A + B > 180^\circ$ und $A > B$ ist.

§. **416.** V. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Zur Bestimmung der Winkel bedient man sich der Halbwinkelsätze.

Z. B. $a = 50^\circ 54' 32''$, $b = 37^\circ 47' 18''$, $c = 74^\circ 51' 50''$.

$$\begin{array}{rr}
a = & 50^\circ 54' 32'' \\
b = & 37^\circ 47' 18'' \\
c = & 74^\circ 51' 50'' \\
\hline
a + b + c = & 163^\circ 33' 40'' \\
s = & 81^\circ 46' 50'' \\
s - a = & 30^\circ 52' 18'' \\
s - b = & 43^\circ 59' 32'' \\
s - c = & 6^\circ 55'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\log\sin(s - b) = & 9{\cdot}84\,171 \\
\log\sin(s - c) = & 9{\cdot}08\,072 \\
\hline
 & 18{\cdot}92\,243 \\
\log\sin s = & 9{\cdot}99\,552 \\
\log\sin(s - a) = & 9{\cdot}71\,022 \\
\hline
 & 19{\cdot}21\,669 \\
\hline
\log\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = & 9{\cdot}60\,835 \\
\tfrac{1}{2} A = & 22^\circ\ 5' 20'' \\
A = & 44^\circ 10' 40''
\end{array}$$

Ebenso findet man $B = 33^\circ 22' 45''$ und $C = 119^\circ 55' 6''$.

Zusatz. Sind alle drei Winkel zu berechnen, so ist es am vortheilhaftesten, zuerst

$$\sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin s}} = \operatorname{tang} r$$

zu bestimmen; dann ist

$$\tang \frac{A}{2} = \frac{\tang r}{\sin (s-a)}, \quad \tang \frac{B}{2} = \frac{\tang r}{\sin (s-b)}, \quad \tang \frac{C}{2} = \frac{\tang r}{\sin (s-c)}.$$

§. **417.** VI. Gegeben alle drei Winkel A, B und C

Die gesuchten Stücke ergeben sich aus den Halbseitensätzen.

Zusatz. Sind alle drei Seiten zu bestimmen, so wendet man am bequemsten die Substitution

$$\sqrt{\frac{-\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\cos S}} = \cot R$$

an und rechnet nach den Formeln

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{\cot R}{\cos (S-A)}, \quad \cot \frac{b}{2} = \frac{\cot R}{\cos (S-B)}, \quad \cot \frac{c}{2} = \frac{\cot R}{\cos (S-C)}.$$

3. Bestimmung des Flächeninhaltes eines sphärischen Dreieckes.

§. **418.** Sind von einem sphärischen Dreiecke der Kugelhalbmesser r und die drei Winkel A, B, C gegeben, so ist der Flächeninhalt (§. 333)

$$f = r^2\pi . \frac{A + B + C - 180^0}{180^0},$$

wo $A + B + C - 180^0 = e$ den sphärischen Excess ausdrückt.

Sind nun drei andere Stücke als die drei Winkel gegeben, so lassen sich aus denselben die drei Winkel, also auch der sphärische Excess und der Flächeninhalt, berechnen. Man kann zwar auch in diesen Fällen besondere Ausdrücke für den sphärischen Excess entwickeln; dieselben haben aber zumeist eine minder zweckmäßige Form. Wir beschränken uns daher nur auf die folgenden zwei Fälle, für welche sich ebenso einfache als elegante Formeln ergeben.

§. **419.** Den sphärischen Excess eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes aus dessen zwei Katheten b und c zu bestimmen.

Es ist $e = B + C - 90^0$, daher

$$\begin{aligned}\cos e = \cos(-e) &= \cos\{90^0 - (B + C)\} = \sin (B + C)\\ &= \sin B \cos C + \cos B \sin C\\ &= \frac{\sin b}{\sin a}.\frac{\tang b}{\tang a} + \frac{\tang c}{\tang a}.\frac{\sin c}{\sin a} \text{ (§. 405, 2 und 4)}\\ &= \frac{(\sin b^2 \cos c + \sin c^2 \cos b)\cos a}{\sin a^2 . \cos b \cos c}\\ &= \frac{\sin b^2 \cos c + \sin c^2 \cos b}{1 - \cos a^2} \text{ (§. 405, 1), oder}\end{aligned}$$

$$\cos e = \frac{(\cos b + \cos c)(1 - \cos b \cos c)}{1 - \cos b^2 \cos c^2} \text{ (§. 405, 1), somit}$$

$$\cos e = \frac{\cos b + \cos c}{1 + \cos b \cos c}.$$

Dann erhält man

$$1 - \cos e = \frac{(1 - \cos b)(1 - \cos c)}{1 + \cos b \cos c}, \text{ und}$$

$$1 + \cos e = \frac{(1 + \cos b)(1 + \cos c)}{1 + \cos b \cos c}; \text{ folglich ist}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos e}{1 + \cos e}} = \sqrt{\frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}, \text{ oder}$$

$$\tang \frac{e}{2} = \tang \frac{b}{2} \cdot \tang \frac{c}{2} \text{ (§. 356, 27).}$$

§. **420.** Den sphärischen Excess eines schiefwinkligen sphärischen Dreieckes aus dessen drei Seiten a, b und c zu bestimmen.

Es ist $e = A + B - (180^0 - C)$, daher

$\frac{1}{4} e = \frac{1}{2} \{\frac{1}{2}(A + B) - (90^0 - \frac{1}{2} C)\}$, folglich nach §. 358, 38)

$$\tang \tfrac{1}{4} e = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) - \sin (90^0 - \frac{1}{2} C)}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \cos (90^0 - \frac{1}{2} C)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) - \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \sin \frac{1}{2} C}$$

$$= \frac{[\cos \frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2} c] \cdot \cos \frac{1}{2} C}{[\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2} c] \cdot \sin \frac{1}{2} C} \text{ (§. 410)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{4}(a + c - b) \sin \frac{1}{4}(b + c - a)}{\cos \frac{1}{4}(a + b + c) \cos \frac{1}{4}(a + b - c)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Setzt man $a + b + c = 2s$, so folgt mit Rücksicht auf §. 409, 1

$$\tang \tfrac{1}{4} e = \frac{\sin \frac{1}{2}(s - b) \sin \frac{1}{2}(s - a)}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2}(s - c)} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin (s - a) \sin (s - b)}}, \text{ oder}$$

$$\tang \tfrac{1}{4} e = \sqrt{\tang \tfrac{1}{2} s \tang \tfrac{1}{2}(s - a) \tang \tfrac{1}{2}(s - b) \tang \tfrac{1}{2}(s - c)}.$$

Dieser Ausdruck heißt die l'Hulier'sche Formel.

4. Übungsaufgaben.

§ **421. Beispiele** zur Berechnung **rechtwinkliger** sphärischer Dreiecke.

1. $a = 54^0 20'$, $b = 36^0 27'$ $c = 43^0 32' 31''$,
   $A = 90^0$, $B = 46^0 59' 17''$, $C = 57^0 59' 17''$; $f = 0{\cdot}279 r^2$.
2. $a = 106^0\ 3' 32''$, $b = 127^0 56' 33''$, $c = 63^0 15' 47''$,
   $A = 90^0$, $B = 124^0 51'$, $C = 68^0 20'$; $f = 1{\cdot}8009 r^2$.
3. $a = 52^0$, $b = 51^0 59'$, $c = 1^0 32' 50''$,
   $A = 90^0$, $B = 88^0 47' 27''$, $C = 1^0 57' 49''$; $f = 0{\cdot}0132 r^2$.
4. $a = 87^0 13' 13''$, $b = 65^0 46' 53''$, $c = 83^0 12' 38''$,
   $A = 90^0$, $B = 65^0 55' 55''$, $C = 83^0 48' 11''$; $f = 1{\cdot}0426 r^2$.
5. $a = 80^0\ 6'\ 5''$, $b = 33^0 12' 40''$, $c = 87^0 43' 50''$,
   $A = 90^0$, $B = 33^0 13' 56''$, $C = 88^0 45' 23''$; $f = 0{\cdot}5565 r^2$.

Beweise, dass für jedes sphärische Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

6. $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$.

7. $\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b$.

Aus den Systemen IIa) und IIb), indem in der ersten Gleichung für cos b, bezüglich für cos B, der Wert aus der zweiten Gleichung gesetzt wird.

8. $\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos C \cos b$.

9. $\cot A \sin B = \cot a \sin c - \cos c \cos B$.

Aus 7. und 6., indem für sin B und sin b bezüglich die Werte $\frac{\sin A \sin b}{\sin a}$ und $\frac{\sin a \sin B}{\sin A}$ gesetzt werden.

10. $\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}$.

Aus den Neper'schen Gleichungen in V a).

Beispiele zur Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke.

11. $a = 47^\circ 42' 1''$, $b = 63^\circ 15' 12''$, $c = 50^\circ 2' 1''$,
$A = 55^\circ 52' 43''$, $B = 88^\circ 12' 20''$, $C = 59^\circ 4' 25''$; $f = 0{\cdot}4033\, r^2$.

12. $a = 99^\circ 28' 18''$, $b = 78^\circ 35' 34''$, $c = 68^\circ 24' 24''$,
$A = 105^\circ 5' 32''$, $B = 73^\circ 38' 28''$, $C = 65^\circ 31' 34''$; $f = 1{\cdot}1215\, r^2$.

13. $a = 54^\circ 28'$, $b = 123^\circ 43'$, $c = 73^\circ 15' 20''$,
$A = 21^\circ 17' 22''$, $B = 158^\circ 14' 16''$, $C = 25^\circ 17' 35''$; $f = 0{\cdot}4333\, r^2$.

14. $a = 55^\circ 42' 43''$, $b = 120^\circ 55' 35''$, $c = 88^\circ 12' 20''$,
$A = 47^\circ 52' 1''$, $B = 129^\circ 57' 59''$, $C = 63^\circ 15' 12''$; $f = 1{\cdot}0632\, r^2$.

15. $a = 63^\circ 14' 39''$, $b = 107^\circ 52' 24''$, $c = 125^\circ 5' 41''$,
$A = 69^\circ 25' 11''$, $B = 93^\circ 46' 14''$, $C = 120^\circ 55' 35''$; $f = 1{\cdot}8172\, r^2$.

16. $a = 109^\circ 39' 21''$, $b = 46^\circ 42' 11''$, $c = 69^\circ 50'$,
$A = 146^\circ 58' 20''$, $B = 24^\circ 54' 47''$, $C = 32^\circ 54' 28''$; $f = 0{\cdot}4327\, r^2$.

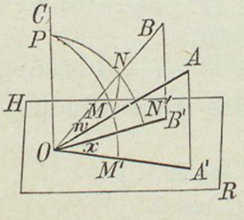
II. Anwendung der sphärischen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. 422. Die in §§. 405, dann 407—411 entwickelten Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes enthalten (§. 271) zugleich auch die Beziehungen zwischen den Seiten (Kantenwinkeln) und den Winkeln (Flächenwinkeln) eines Dreikants.

Einen im Raume gemessenen Winkel auf den Horizont zu reducieren.

Fig. 189.



Es sei $AOB = w$ (Fig. 189) ein im Raume gemessener Winkel, OA' und OB' seien die Projectionen seiner Schenkel auf die Horizontalebene HR, $AOA' = \alpha$ und $BOB' = \beta$ die Neigungswinkel derselben gegen den Horizont; zu suchen ist der Winkel $A'OB' = x$, den die beiden Projectionen in der Horizontalebene bilden.

Die Ebenen der Neigungswinkel AOA' und BOB' schneiden sich erweitert in der Geraden OC, welche zur Horizontalebene normal ist (§. 220). Beschreibt man nun in dem Dreikante OABC um O eine Kugel, deren Oberfläche die Kanten des Dreikants in den Punkten M, N und P schneidet, so erhält man das sphärische Dreieck MNP, in welchem die drei Seiten $MN = w$, $MP = 90^0 - \alpha$, $NP = 90^0 - \beta$ bekannt sind, und der Winkel P den gesuchten Winkel x darstellt.

Nach §. 409, 1 erhält man demnach

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \cos (s - w)}{\cos\alpha \cos\beta}},$$

wenn $\alpha + \beta + w = 2s$ gesetzt wird.

§. **423.** Ein reguläres Polyeder wird von p m-seitigen Vielecken, von denen je n in einer Ecke zusammenstoßen und deren Seite a ist, eingeschlossen; man suche (§. 252 und Fig. 139)

a) den halben Neigungswinkel $JLO = \frac{N}{2}$ zweier in einer Kante zusammenstoßender Seitenflächen;

b) den Halbmesser $OJ = r$ der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel;

c) den Halbmesser $OA = R$ der dem Polyeder umgeschriebenen Kugel;

d) die Oberfläche O; und

e) das Volumen V des Polyeders.

Aus der dreiseitigen Ecke OJLA erhält man,

wenn $\frac{180^0}{m} = \varphi$ und $\frac{180^0}{n} = \psi$ gesetzt wird,

$$\cos AOL = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi} \text{ und } \cos JOL = \frac{\cos\psi}{\sin\varphi};$$

daher ist

$$\sin\frac{N}{2} = \cos JOL = \frac{\cos\psi}{\sin\varphi},$$

$$r = \frac{a}{2}\cot\varphi \operatorname{tang}\frac{N}{2}, \qquad R = \frac{a}{2}\operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\frac{N}{2},$$

$$o = \frac{m p a^2}{4}\cot\varphi, \qquad V = \frac{N p a^3}{24}\cot\varphi^2 \operatorname{tang}\frac{N}{2}.$$

§. **424.** Aus den drei Kanten a, b, c eines schiefwinkligen Parallelepipeds und den Winkeln γ, β, α, welche jene Kanten mit einander bilden, das Volumen V des Parallelepipeds zu bestimmen.

Nimmt man a und b als zwei Grundkanten an und bezeichnet den Neigungswinkel der Seitenkante c gegen die Grundfläche durch w, so erhält man zunächst

$$V = a b c \sin\gamma \sin w.$$

Wird nun zu dem Dreikante, welches die Kanten a, b, c bilden, ein sphärisches Dreieck construiert, so sind α, β, γ dessen Seiten; der Neigungswinkel w erscheint in diesem Dreiecke als der auf die Seite γ durch den gegenüberliegenden Scheitel normal gelegte Bogen. Unter Berücksichtigung der §§. 407 und 409, 1 findet man daher, wenn der von den Dreiecksseiten α und γ eingeschlossene Winkel durch B bezeichnet und $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$ gesetzt wird,

$$\sin w = \sin\alpha \sin B = 2 \sin\alpha \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= \frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{\sin\sigma \sin(\sigma - \alpha)\sin(\sigma - \beta)\sin(\sigma - \gamma)};$$

somit ist

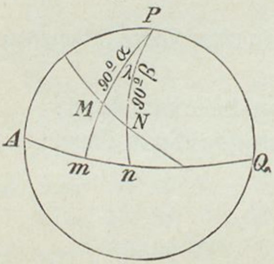
$$V = 2abc\sqrt{\sin\sigma \sin(\sigma - \alpha)\sin(\sigma - \beta)\sin(\sigma - \gamma)}.$$

2. Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie.

§. **425.** 1. *Aus den geographischen Breiten zweier Orte der Erdoberfläche und deren Längenunterschiede den sphärischen Abstand derselben zu bestimmen.* (Die Erde wird als Kugel angenommen.)

Sind M und N (Fig. 190) die beiden Orte, so ist ihr Abstand MN ein Bogen eines größten Kugelkreises. Es sei P der Pol und AQ der Äquator; dann sind Mm und Nn die Breiten dieser Orte, und deren Längenunterschied mn gleich dem Winkel MPN.

Fig. 190.



Setzt man $\mathrm{Mm} = \alpha$, $\mathrm{Nn} = \beta$, $\mathrm{mn} = \lambda$, so sind in dem sphärischen Dreiecke MNP zwei Seiten $\mathrm{MP} = 90^0 - \alpha$ und $\mathrm{NP} = 90^0 - \beta$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $\mathrm{MPN} = \lambda$ gegeben, und man hat (nach §. 412, Zus.)

$$\cos \mathrm{MN} = \frac{\sin \alpha \sin (\beta + \mathrm{w})}{\cos \mathrm{w}},$$

wozu der Hilfswinkel w aus $\operatorname{tang} \mathrm{w} = \cot \alpha \cos \lambda$ berechnet wird.

Man sucht daher zuerst w, daraus den Bogen MN, und verwandelt diesen in geographische Meilen, deren 15 auf einen Grad gehen.

2. *Aus dem sphärischen Abstande zweier Orte auf der Erde und ihren geographischen Breiten den Unterschied ihrer Längen zu berechnen.*

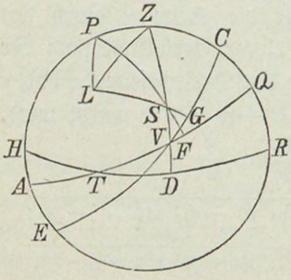
Haben α, β und λ die Bedeutung wie in 1. und wird die Entfernung MN im Bogenmaße durch δ ausgedrückt, so erhält man (nach §. 409, 1)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \lambda = \sqrt{\frac{\cos (\sigma + \alpha) \cos (\sigma + \beta)}{\sin \sigma \sin (\sigma - \delta)}},$$

wo $2\sigma = 180^0 - (\alpha + \beta) + \delta$ ist.

§. **426.** Es sei S (Fig. 191) irgend ein Gestirn, Z der Pol des Horizontes HTR oder das Zenith, P der Pol des Äquators AVQ oder der nördliche Weltpol, L der Pol der Ekliptik EVC; ferner HZR der Meridian des Ortes der Erde, dessen Zenith Z ist. Zieht man durch S und durch die Pole Z, P, L die größten Kreise ZSD, PSF, LSG, welche somit folgeweise zu HR, AQ, EC normal sind, so ist

Fig. 191.



$\mathrm{SD} = \mathrm{h}$ die Höhe des Gestirns,
$\mathrm{RD} = \mathrm{RZD} = \mathrm{w}$ das Azimuth,
$\mathrm{SZ} = 90^0 - \mathrm{h} = \mathrm{z}$ die Zenithdistanz;
$\mathrm{SF} = \delta$ die Declination,
$\mathrm{VF} = \alpha$ die Rectascension,
$\mathrm{QF} = \mathrm{QPF} = \mathrm{s}$ der Stundenwinkel,

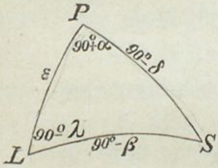
$SP = 90^0 - \delta = p$ die Poldistanz in Bezug auf den Äquator;
$SG = \beta$ die Breite, $VG = \lambda$ die Länge, $SL = 90^0 - \beta$ die Poldistanz des Gestirns in Bezug auf die Ekliptik.

Ferner ist V der Frühlingspunkt, $HP = \varphi$ die Polhöhe (zugleich geographische Breite) des Ortes der Erde, dessen Zenith Z ist, und der Winkel QVC oder der Bogen $LP = \varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik.

§. **427.** 1. Es seien die Rectascension α und die Declination δ eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik ε gegeben; man suche die Länge λ und die Breite β.

In dem Dreiecke LPS (Fig. 192) sind zwei Seiten $LP = \varepsilon$ (§. 426) und $PS = 90^0 - \delta$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $P = 90^0 + \alpha$ gegeben, und der Winkel $L = 90^0 - \lambda$ nebst der Seite $LS = 90^0 - \beta$ zu suchen. Aus §. 412, Zus., folgt nun, wenn man dort

Fig. 192.



$$a = 90^0 - \delta,\quad A = 90^0 - \lambda,$$
$$b = \varepsilon,$$
$$c = 90^0 - \beta,\quad C = 90^0 + \alpha \quad \text{setzt,}$$
$$\sin\beta = \frac{\sin\delta\cos(\varepsilon + n)}{\cos n},$$
wo $\tang n = \cot\delta \sin\alpha$ ist.

Zur Bestimmung von λ hat man dann
$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos\beta}.$$

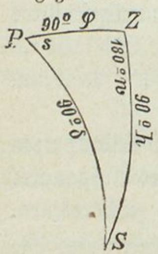
2. Wenn λ, β und ε gegeben sind, α und δ zu bestimmen. Die Auflösung ist analog wie bei 1.

§. **428.** 1. Die Höhe h und das Azimuth w eines Gestirns sind nebst der Polhöhe φ des Ortes gegeben; man suche die Declination δ und den Stundenwinkel s.

In dem Dreiecke ZPS (Fig. 193) sind zwei Seiten $ZS = 90^0 - h$ und $ZP = 90^0 - \varphi$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $Z = 180^0 - w$ bekannt, und der Winkel $P = s$ nebst der Seite $PS = 90^0 - \delta$ zu suchen.

Setzt man mit Rücksicht auf §. 412, Zusatz,

Fig. 193.



$$a = 90^0 - h,\quad A = s,$$
$$b = 90^0 - \varphi,$$
$$c = 90^0 - \delta,\quad C = 180^0 - w,$$
so erhält man zur Berechnung von δ die Gleichung
$$\sin\delta = \frac{\sin h \sin(\varphi - m)}{\cos m},$$
wo $\tang m = \cot h \cos w$ ist.

Der Stundenwinkel ergibt sich dann aus
$$\sin s = \frac{\sin w \cos h}{\cos\delta}.$$

2. Wenn δ, s und φ gegeben sind, h und w zu berechnen. Die Auflösung ist derjenigen in 1. analog.

3. Wenn δ, h und φ gegeben sind, s und w zu finden. Nach §. 409, 1 ergibt sich

$$\operatorname{tang} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\} \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)\}}{\sin\{45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\} \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)\}}},$$

$$\cot \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\} \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)\}}{\sin\{45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\} \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)\}}}.$$

4. Wenn h, w und s gegeben sind, δ und φ zu bestimmen. Mit Rücksicht auf §. 414 erhält man

$$\cos \delta = \frac{\cos h \sin w}{\sin s}, \text{ und}$$

$$\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{1}{2}(w - s)}{\cos \frac{1}{2}(w + s)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(h - \delta).$$

§. **429.** Die Zeit des Auf- und des Unterganges eines Gestirns zu bestimmen.

Das sphärische Dreieck ZPS (Fig. 193) gibt (§. 408, IIa)

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Für den Auf- oder Untergang des Gestirns ist nun $h = 0$, daher

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s,$$

woraus $\cos s = -\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$, oder

$$\cos(180^0 - s) = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$$

folgt, worin s den Stundenwinkel des auf- oder untergehenden Sternes, d. i. die Zeit ausdrückt, welche zwischen der Culmination und dem Auf- oder Untergange desselben enthalten ist und der halbe Tagbogen des Gestirns heißt.

Z. B. Wie groß ist für Wien der halbe Tagbogen der Sonne am 13. Mai, wo ihre Declination $\delta = 18^0 25'$ beträgt?

Für Wien ist die Polhöhe $\varphi = 48^0 12' 35''$. Man erhält daher

$$180^0 - s = 68^0 7' 39'' \quad \text{und} \quad s = 111^0 52' 21''.$$

Zur Verwandlung dieses Bogens in Zeit hat man die Proportion

$$360^0 : 111^0 52' 21'' = 24 \text{ Stunden} : x \text{ Stunden},$$

woraus $x = 7^h 27' 29''$ folgt.

Für die Sonne ist s, in Zeit ausgedrückt, zugleich die Sonnenzeit ihres Unterganges und $24^h - s$ jene des Aufganges. Am 13. Mai geht also in Wien die Sonne um $7^h 27' 29''$ abends unter und um $16^h 32' 31''$, d. i. um $4^h 32' 37''$ morgens auf.

Für andere Gestirne muss man, wenn die Sonnenzeit der Culmination bekannt ist, von ihr s in Zeit subtrahieren, um die Sonnenzeit des Aufganges, und zu ihr s in Zeit addieren, um die Sonnenzeit des Unterganges zu berechnen.

Zusatz. Der halbe Tagbogen der Sonne doppelt genommen gibt die Tageslänge.

Da in den Sonnenwenden die Declination $\pm\,\delta$ der Sonne gleich der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\,27'\,30''$ ist, so wird durch

$$\cos\,(180^0 - s) = \pm\,\text{tang}\,\varepsilon\;\text{tang}\,\varphi$$

die Dauer des längsten und kürzesten Tages bestimmt.

3. Übungsaufgaben.

§. **430.** 1. Bestimme α) $\sin \frac{N}{2}$, β) $\cos N$ für das reguläre a) Tetraeder, b) Octaeder, c) Dodekaeder, d) Ikosaeder, wenn N den Neigungswinkel zweier Seitenflächen bezeichnet (§. 423 und §. 362, 1—3).

Für $\sin \frac{N}{2}$ erhält man a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, c) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, d) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$.

„ $\cos N$ „ „ a) $\frac{1}{3}$, b) $-\frac{1}{3}$, c) $-\frac{1}{2}$, d) $\frac{2}{3}$.

2. Ein Achsenschnitt eines Cylinders, dessen Achse a gegen die Grundfläche mit dem Radius r unter dem Winkel α geneigt ist, schneidet die Grundfläche in einer Strecke, welche mit der Projection der Achse den Winkel β bildet; wie groß ist der Flächeninhalt des Achsenschnittes?

3. Aus drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c und den von ihnen gebildeten Winkeln α, β, γ eines dreiseitigen Prismas dessen Volumen zu finden (§. 424).

4. Aus drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c einer dreiseitigen Pyramide und den von ihnen gebildeten Winkeln α, β, γ das Volumen v der Pyramide zu finden.

Aus §. 424 und der vorhergehenden Aufgabe ergibt sich für $2\,\sigma = \alpha + \beta + \gamma$

$$v = \tfrac{1}{3}\,abc\,\sqrt{\sin\sigma\,\sin(\sigma-\alpha)\,\sin(\sigma-\beta)\,\sin(\sigma-\gamma)}.$$

5. Das Volumen v einer dreiseitigen Pyramide aus den in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c und den der Reihe nach an diesen liegenden Keilen A, B, C zu berechnen.

Aus dem Resultate der vorhergehenden Aufgabe 4 erhält man unter Beiziehung der Formeln III a) und III b) in §. 409 und I) in §. 407

$$v = \frac{2\,abc}{3\sin A\sin B\sin C}\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)},$$

wo $2\,S = A + B + C$ ist.

6. Die geographische Breite von Wien ist $48^0\,12'\,35''$, die von Rom $41^0\,53'\,54''$, die geographische Länge von Wien ist $34^0\,2'\,49''$, die von Rom $30^0\,9'\,30''$; wie groß ist der sphärische Abstand beider Städte?

7. Die sphärische Entfernung zwischen Wien und Paris ist 139·67 geographische Meilen, die geogr. Breite von Wien ist $48^0\,12'\,35''$, die von Paris $48^0\,50'\,13''$; wie viel beträgt die Differenz der Uhren an beiden Orten?

8. Die geogr. Breite und Länge dreier Orte auf der Erde und der Halbmesser der letzteren sind gegeben; berechne die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des durch jene Orte bestimmten sphärischen Dreieckes.

9. Die Länge eines Sternes ist 62° 52′ 38″, die Breite 19° 40′ 39″, die Schiefe der Ekliptik 23° 27, 30″; wie groß sind die Rectascension und die Declination dieses Sternes?

10. Bestimme aus der Declination 21° 58′ 15″ eines Sternes, seinem Stundenwinkel 15° 38′ 42″ und der Polhöhe 50° 5′ 18″ die Höhe und das Azimuth desselben.

11. Wie hoch steht die Sonne am 15. April um 11 Uhr vormittags über dem Horizonte von Graz, dessen Polhöhe 47° 4′ 20″ ist, wenn die Declination an diesem Tage 9° 50′ beträgt?

12. Um welche Tageszeit hatte die Sonne am 20. Mai, wo die Declination 20° 4′ war, in Wien, dessen Polhöhe 48° 12′ 25″ ist, eine Höhe von 38° 30′?

13. Die geographische Breite von Prag beträgt 50° 5′ 18″, die von Triest 45° 38′ 37″; berechne die Dauer des längsten Tages für jeden dieser Orte (§. 429, Zusatz).

14. Welche geogr. Breite hat ein Ort, dessen längster Tag 18 Stunden dauert?

15. Wie viele Breitegrade muss ein Ort mindestens haben, damit für denselben die Dauer des längsten Tages 24 Stunden erreiche?

Vierter Theil.

Analytische Geometrie.

§. 431. Die *analytische Geometrie* hat die Untersuchung der Raumgebilde mit Hilfe der Rechnung (Analysis) zum Gegenstande.

In der vorliegenden Abhandlung beschränken wir uns auf die analytische Geometrie der *Ebene*.

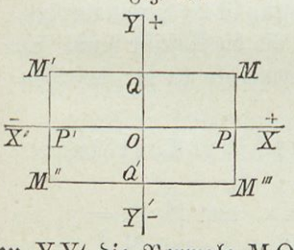
I. Der Punkt.

Rechtwinklige Coordinaten.

§. 432. Um ein Raumgebilde *analytisch* zu bestimmen, wird dasselbe auf gewisse festliegende Linien und Punkte, welche man ein *Coordinatensystem* nennt, bezogen. Das einfachste und am meisten im Gebrauche stehende Coordinatensystem ist das *rechtwinklige*.

Man zieht (Fig. 194) zwei feste, zu einander normale Gerade XX' und YY', welche sich im Punkte O schneiden.

Fig. 194.



Diese Geraden heißen *Coordinatenachsen*, und zwar XX' die *Abscissenachse*, YY' die *Ordinatenachse*; ihr Schnittpunkt O heißt der *Anfangspunkt* oder *Ursprung* der Coordinaten.

Es sei nun M ein Punkt in der durch XX' und YY' gelegten Ebene. Zieht man von demselben zu XX' die Normale MP und zu YY' die Normale MQ, so sind durch die Lage des Punktes M auch seine Abstände MP und MQ von den Coordinatenachsen unzweideutig bestimmt. Sind umgekehrt die Abstände MP und MQ gegeben, so ist durch dieselben auch die Lage des Punktes M bestimmt; man darf nur in P eine Normale zu XX' und in Q eine Normale zu YY' ziehen, ihr Durchschnitt ist der Punkt M.

Die Abstände MQ und MP heißen die **Coordinaten** des Punktes M, und zwar der Abstand MQ oder der ihm gleiche Abschnitt OP die **Abscisse** und der Abstand MP die **Ordinate**. Die Abscisse wird gewöhnlich durch x, die Ordinate durch y bezeichnet, wenn der Punkt als ein beliebiger gelten soll.

Hat ein bestimmter Punkt M die Coordinaten $OP = a$ und $MP = b$, so drückt man dies analytisch durch die Gleichungen

$$x = a, \; y = b$$

aus, welche deshalb die **Gleichungen des Punktes** M heißen.

Derselbe Punkt wird auf diese Weise immer durch dieselben zwei Gleichungen ausgedrückt, und dieselben zwei Gleichungen bestimmen immer denselben Punkt. Der Punkt M ist demnach der geometrische Repräsentant der Gleichungen $x = a$, $y = b$, und diese sind der analytische Repräsentant des Punktes M.

Einen Punkt M, dessen Coordinaten a und b sind, pflegt man auch kurzweg durch (a, b) zu bezeichnen.

§. 433. Die beiden Coordinatenachsen theilen die Ebene in vier **Quadranten**. Um nun anzuzeigen, in welchem Quadranten ein bestimmter Punkt liegt, werden die Coordinaten auf den entgegengesetzten Seiten jeder Achse durch die Vorzeichen + oder — unterschieden. Man betrachtet gewöhnlich die Abscissen in der Richtung nach **rechts** von der Ordinatenachse als **positiv**, die Abscissen in der Richtung nach **links** als **negativ**; ebenso die Ordinaten in der Richtung nach **oben** von der Abscissenachse als **positiv**, die Ordinaten in der Richtung nach **unten** als **negativ**.

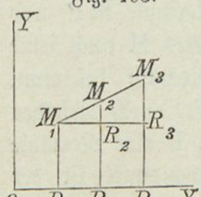
Unter dieser Voraussetzung hat man, wenn (Fig. 194) $OP = OP'$ $= a$ und $OQ = OQ' = b$ gesetzt wird,

für den Punkt M ... $x = +a, \; y = +b$;
" " " M' ... $x = -a, \; y = +b$;
" " " M'' ... $x = -a, \; y = -b$;
" " " M''' ... $x = +a, \; y = -b$.

Für die Punkte, welche in der Abscissenachse liegen, ist die Ordinate Null; für die Punkte, welche in der Ordinatenachse liegen, ist die Abscisse Null. Für den Anfangspunkt O, welcher sowohl in der Ordinaten- als in der Abscissenachse liegt, ist $x = 0$ und $y = 0$.

§. 434. **Abstand zweier Punkte, welche durch ihre Coordinaten gegeben sind.**

Fig. 195.



Sind (Fig. 195) $OP_1 = x_1$ und $M_1 P_1 = y_1$ die Coordinaten des Punktes M_1, $OP_2 = x_2$ und $M_2 P_2 = y_2$ die Coordinaten des Punktes M_2, so ist, wenn man $M_1 R_2 \parallel OX$ zieht, in dem rechtwinkligen $\triangle M_1 R_2 M_2$

$$M_1 M_2{}^2 = M_1 R_2{}^2 + M_2 R_2{}^2;$$

oder wenn der Abstand $M_1 M_2 = d$ gesetzt wird,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Umgekehrt wird die Forderung, dass ein Punkt (x, y) von dem Punkte (a, b) den Abstand d habe, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2.$$

Für den Abstand eines Punktes (x_1, y_1) von dem Anfangspunkte $(0, 0)$ der Coordinaten ergibt sich

$$d^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2.$$

§. **435.** Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer Geraden liegen.

1. Es seien (Fig. 195) die Punkte $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ und $M_3 = (x_3, y_3)$ gegeben. Liegen diese drei Punkte in einer Geraden, so müssen, wenn $M_1 R_3 \parallel OX$ ist, die Dreiecke $M_1 R_2 M_2$ und $M_1 R_3 M_3$ ähnlich sein; man hat daher

$$\frac{M_2 R_2}{M_3 R_3} = \frac{M_1 R_2}{M_1 R_3}, \quad \text{oder} \quad \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1};$$

d. h. die Ordinatendifferenzen je zweier Punkte müssen den entsprechenden Abscissendifferenzen proportioniert sein.

2. Umgekehrt: Findet für drei Punkte $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2\ y_2)$ und $M_3 = (x_3, y_3)$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \ldots \ 1)$$

statt, so müssen dieselben in einer Geraden liegen.

Es schneide die durch M_1 und M_2 gezogene Gerade die zur Abscissenachse Normale, welche x_3 zur Abscisse hat, in irgend einem Punkte M, dessen Ordinate y sei, so dass M_1, M_2 und M in einer Geraden liegen; dann ist nach 1)

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \ldots \ 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber $y = y_3$, d. h. die Punkte (x_3, y) und (x_3, y_3) müssen zusammenfallen, oder M muss mit M_3 identisch sein.

§. **436.** Aus den Coordinaten zweier Punkte $M_1 = (x', y')$ und $M_3 = (x'', y'')$ die Coordinaten des Punktes M_2 abzuleiten, der ihre Verbindungsstrecke $M_1 M_3$ in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ theilt (Fig. 195).

Sind x, y die gesuchten Coordinaten des Punktes M_2, so ist

$$m : n = M_1 M_2 : M_2 M_3 = P_1 P_2 : P_2 P_3, \quad \text{oder}$$
$$m : n = (x - x') : (x'' - x), \text{ woraus sich ergibt}$$

$$x = \frac{nx' + mx''}{m + n}.$$

Ebenso erhält man

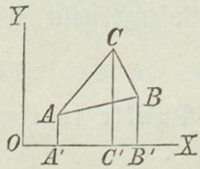
$$y = \frac{ny' + my''}{m + n}.$$

Für den Halbierungspunkt der Strecke $M_1 M_3$ ist $m = n$, daher

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \qquad y = \frac{y' + y''}{2}.$$

§. **437.** Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Eckpunkte durch ihre Coordinaten gegeben sind.

Fig. 196.



Heißt f der Flächeninhalt des Dreieckes ABC (Fig. 196), so hat man

$$f = AA'C'C + CC'B'B - AA'B'B.$$

Bezieht man nun dieses Dreieck auf das rechtwinklige Coordinatensystem XOY, und ist

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2), \quad C = (x_3, y_3),$$

so ist $AA'C'C = \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2}$, $\quad CC'B'B = \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2}$,

$$AA'B'B = \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2}; \text{ und daher}$$

$$f = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}.$$

Zusätze. 1. Auf gleiche Weise kann auch der Flächeninhalt jedes beliebigen Vieleckes durch die Coordinaten seiner Eckpunkte bestimmt werden.

2. Liegen die Punkte A, B und C in einer Geraden, so ist $f = 0$, daher

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0,$$

woraus man dieselbe Bedingungsgleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

erhält, die in §. 435 auf einem andern Wege gefunden wurde.

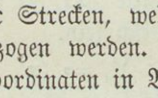
Schiefwinklige Coordinaten.

§. **438.** Stehen die beiden Achsen XX' und YY' nicht normal, sondern schief auf einander, so heißt das Coordinatensystem schiefwinklig. Die schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes M sind dann die Maßzahlen der Strecken, welche von M zu den beiden Achsen mit denselben parallel gezogen werden. In dem Nachfolgenden sollen nur rechtwinklige Parallel-Coordinaten in Betracht gezogen werden.

Polar-Coordinaten.

§. **439.** Manchmal ist auch das Polar-Coordinatensystem im Gebrauche. Bei diesem nimmt man einen festen Punkt O (Fig. 197) an, welcher der Pol genannt wird, und von demselben aus einen festen Strahl OZ, welcher die Polarachse heißt.

Fig. 197.



Die Lage eines Punktes M ist nun vollkommen bestimmt, wenn der Abstand MO dieses Punktes vom Pole und der Winkel MOZ, den MO mit der Polarachse bildet, bekannt sind. Der Abstand MO heißt der Radiusvector, er wird immer im absoluten Sinne genommen und allgemein durch r bezeichnet. Der Winkel $MOZ = \varphi$ wird entweder von 0^0 bis 360^0, oder von 0^0 bis $\pm 180^0$ gezählt. Die Größen r und φ heißen die Polar-Coordinaten des Punktes M.

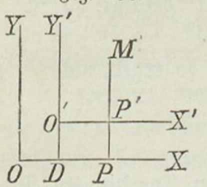
Transformation der Coordinaten.

§. **440.** Häufig tritt bei analytischen Untersuchungen das Bedürfnis ein, die Coordinaten eines Punktes in einem bestimmten Achsensysteme durch die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf ein neues Achsensystem, dessen Lage gegen das frühere gegeben ist, auszudrücken. Diese Aufgabe nennt man die Transformation der Coordinaten.

Für die Zwecke dieses Buches wird es genügen, den Übergang von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme zu einem andern rechtwinkligen zu erörtern.

1. Die neuen Achsen seien mit den alten direct parallel.

Fig. 198.



Sind (Fig. 198) OX, OY die Achsen des ursprünglichen, O'X', O'Y' die Achsen des neuen rechtwinkligen Systems, und die Coordinaten eines Punktes M in Bezug auf das alte System $OP = x$, $MP = y$, in Bezug auf das neue System $O'P' = x'$, $MP' = y'$; sind ferner $OD = m$, $O'D = n$ die Coordinaten des neuen Anfangspunktes O' in Bezug auf das alte System, so hat man $OP = OD + DP$ und $PM = PP' + P'M$ oder

$$x = m + x', \quad y = n + y' \ldots 1).$$

m und n werden ihr Vorzeichen ändern, je nachdem O' in einem der vier Quadranten liegt. Bei einer parallelen Verschiebung der Achsen ist jede ursprüngliche Coordinate gleich der algebraischen Summe aus der entsprechenden neuen Coordinate und der entsprechenden Coordinate des neuen Ursprungs.

2. Die neuen Achsen seien gegen die alten um den Winkel α gedreht (Fig. 199).

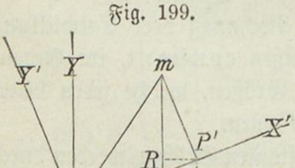
Dann ist

$$OP = OQ - PQ = OQ - P'R = OP' \cos\alpha - MP' \sin\alpha$$
$$PM = PR + RM = QP' + RM = OP' \sin\alpha + MP' \cos\alpha,$$

somit

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{array}\right\} \ldots 2).$$

Fig. 199.



3. Die neuen Achsen seien gegen die alten um den Winkel α gedreht und der neue Ursprung habe bezüglich des alten die Coordinaten m und n.

Nach 1 und 2 ist dann

$$\left.\begin{array}{l} x = m + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = n + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{array}\right\} \ldots 3).$$

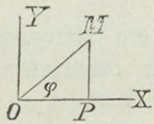
§. **441.** Rechtwinklige Coordinaten in Polar-Coordinaten zu verwandeln.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, wenn der Pol O

(Fig. 200) mit dem Ursprunge, und die Polarachse OX mit der Abscissenachse des rechtwinkligen Systems zusammenfällt.

Es seien für den Punkt M, $x = OP$, $y = MP$ die rechtwinkligen Coordinaten, ferner $r = OM$ der Radiusvector und $\varphi = MOX$ der Winkel desselben mit der Polarachse.

Fig. 200.



Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPO ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi; \end{array}\right\} \ldots 4),$$

ferner

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Zusatz. Bezeichnen ξ und η die Winkel des Radiusvectors OM mit den positiven Achsen der x und der y, von 0^0 bis 180^0 gezählt, so ist

$$x = r \cos \xi \quad \text{und} \quad y = r \cos \eta.$$

Substituiert man diese Werte in $x^2 + y^2 = r^2$, so ergibt sich

$$\cos \xi^2 + \cos \eta^2 = 1.$$

Aufgaben.

§. **442.** 1. Bestimme die Lage der Punkte, deren Coordinaten sind: a) $x = 3$, $y = 4$; b) $x = -2$, $y = 3$; c) $x = -1$, $y = -4$; d) $x = -2$, $y = 1$; e) $x = 0$, $y = 2$; f) $x = -3$, $y = 0$.

2. Construiere das Dreieck ABC, in welchem der Eckpunkt $A = (-2, 0)$, $B = (2, -3)$ und $C = (4, 4)$ ist.

3. Bestimme den Abstand der Punkte a) (7, 10) und (—5, 5), b) (6, —5) und (—2, 1), c) (12, —12) und (—9, 8).

4. Drücke durch eine Gleichung aus, dass der Punkt (x, y) von den Punkten (5, 4) und (3, 2) gleichweit absteht.

5. Bestimme den Punkt, welcher von den Punkten (3, 4), (2, —3) und (—2, 3) gleichweit absteht, und gib diesen Abstand an.

6. Zwei Eckpunkte eines Dreieckes sind (4, —2) und (3, 2), der dritte liegt im Ursprunge; bestimme a) die Länge jeder Seite, b) die Coordinaten des Halbierungspunktes jeder Seite, und c) den Flächeninhalt des Dreieckes.

II. Gleichungen zwischen zwei Variablen und ihre geometrischen Örter.

§. **443.** Größen, denen man während einer Rechnung oder Entwicklung einen bestimmten unveränderlichen Wert beilegt, heißen constant, im Gegensatze zu den veränderlichen oder variablen Größen, welche jeden beliebigen, ihrer Natur angemessenen Wert annehmen können.

Die Beziehungen zwischen variablen und constanten Größen werden durch Gleichungen ausgedrückt; z. B. $y = 2x + 3$. Bedeutet hier x eine variable Größe, so ist, da der Wert von $2x + 3$ mit x sich ändert, auch y variabel; weil jedoch zu jedem speciellen Werte von x aus $y = 2x + 3$ ein bestimmter Wert von y sich ergibt, so erscheint y als abhängig von x. Man unterscheidet daher unabhängig und abhängig Variable; die ersteren sind jene, denen man jeden beliebigen mit ihrer Natur verträglichen Wert beilegen kann, die letzteren solche, deren Werte durch jene der unabhängig Variablen bestimmt werden.

Um auszudrücken, dass eine Variable y von einer andern x abhängig sei, sagt man, y sei eine Function von x und bezeichnet dies durch das Symbol $y = f(x)$.

§. **444.** Eine Gleichung zwischen zwei Variablen x und y hat unzählig viele Auflösungen; werden für x nach und nach verschiedene specielle Werte gesetzt, so erhält man zu jedem Werte von x aus der Gleichung auch für y einen oder mehrere zugehörige Werte. Betrachtet man nun jedes Paar zusammengehörender Werte von x und y als Coordinaten eines Punktes M in Bezug auf ein bestimmtes Achsensystem und construiert hiernach den Punkt, so erscheint jede Auflösung der Gleichung geometrisch durch einen Punkt dargestellt.

Je weniger von einander verschieden man die aufeinander folgenden Werte von x annimmt, desto näher aneinander rücken auch die durch die Coordinaten bestimmten Punkte. Durchläuft x alle reellen negativen und positiven Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so beschreibt der variable Punkt M eine bestimmte Linie, welche die Eigenschaft hat, dass die Coordinaten jedes ihrer Punkte der gegebenen Gleichung genügen. Diese Linie heißt deshalb der geometrische Ort der Gleichung.

In der Ausführung werden so viele Punkte der Linie bestimmt, als nöthig sind, um die Linie vollständig darzustellen.

Zum besseren Verständnisse mögen folgende Beispiele dienen.

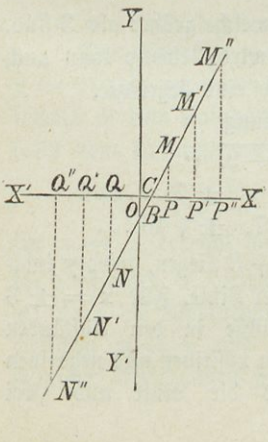
1. Es sei die Gleichung des ersten Grades

$$y = 2x - 1$$

zu construieren, d. i. ihr geometrischer Ort zu bestimmen.

Die Abscissenachse sei XX' (Fig. 201) und O der Anfangspunkt der Coordinaten.

Fig. 201.



Für $x = 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$
ist $y = 1, 3, 5, \ldots, -3, -5, -7, \ldots$

Trägt man auf der Abscissenachse die positiven Werte von x von O aus bis P, P', P'', ... und die negativen von O bis Q, Q', Q'', .. auf, errichtet in diesen Punkten Normale und trägt auf denselben die entsprechenden Werte von y, und zwar die positiven nach oben, die negativen nach unten auf, so liegen die Endpunkte M, M', M'', .. N, N', N'' .. in der Linie, welche durch die Gleichung $y = 2x - 1$ analytisch bestimmt ist. Da die Ordinatendifferenzen den Abscissendifferenzen proportioniert sind, so ist die Linie nach §. 435, 2 gerade.

Um den Punkt B zu erhalten, in welchem diese Gerade die Ordinatenachse schneidet, erwäge man, dass für diesen Punkt $x = 0$ ist; dann wird $y = 2x - 1 = -1$, also ist $OB = -1$. Für den Punkt C, in welchem die Gerade die Abscissenachse schneidet, muss $y = 0$, also $2x - 1 = 0$ sein, woraus sich $x = \frac{1}{2}$ ergibt; also ist $OC = \frac{1}{2}$.

Construiere ebenso die Gleichung $y = -2x$.

Welcher geometrische Ort entspricht folgenden Gleichungen:

a) $y = 0$, b) $x = 0$, c) $y = b$, d) $x = c$?

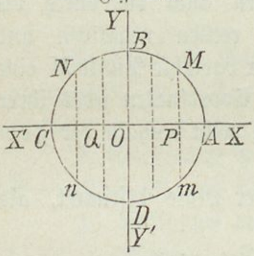
Jeder Gleichung des ersten Grades entspricht eine gerade Linie.

2. Man construiere die quadratische Gleichung

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ oder } y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

Für	$x = 0$,	1,	2,	$3\ldots$	-1,	-2,	-3
ist	$y = \pm 3$,	$\pm\sqrt{8}$,	$\pm\sqrt{5}$,	$0\ldots$	$\pm\sqrt{8}$,	$\pm\sqrt{5}$,	0

Fig. 202.



Werden je zwei zusammengehörige Werte von x und y als Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das System, dessen Abscissenachse XX' (Fig. 202) und dessen Anfangspunkt O ist, angenommen, so ergibt sich, dass zu jeder Abscisse zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, und dass ebenso zu jeder Ordinate zwei gleiche entgegengesetzte Abscissen gehören. Die der obigen Gleichung entsprechende Linie besteht demnach aus vier zusammenhängenden Theilen, welche in Beziehung auf die Coordinatenachsen symmetrisch liegen.

Für $x = 0$ ist $y = \pm 3$; nimmt man daher $OB = +3$ und $OD = -3$ an, so sind B und D die Punkte, in denen die Ordinatenachse von der Linie geschnitten wird. Zu $y = 0$ gehört $x = \pm 3$; nimmt man daher $OA = +3$ und $OC = -3$ an, so sind ebenso A und C die Schnittpunkte der Linie mit der Abscissenachse.

Für alle positiven und negativen Werte von x, welche größer als 3 sind, gibt es keine Ordinaten, da für $x > 3$ y imaginär wird; ebenso kann auch y nicht größer als 3 sein. Die krumme Linie ist also eine begrenzte.

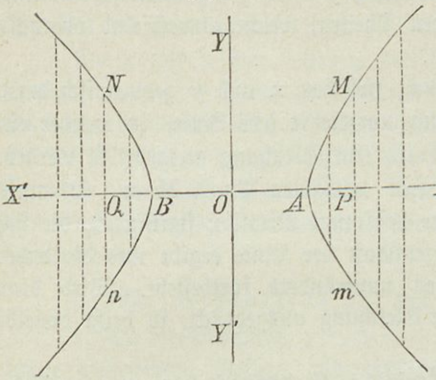
3. Es sei zu construieren die quadratische Gleichung

$$x^2 - y^2 = 9, \text{ oder } y = \pm\sqrt{x^2 - 9}.$$

Für	$x = \pm 3$,	± 4,	± 5,	± 6,	$\pm 7, \ldots$
wird	$y = 0$,	$\pm\sqrt{7}$,	± 4,	$\pm\sqrt{27}$,	$\pm\sqrt{40}, \ldots$

Für alle Werte von x, welche zwischen -3 und $+3$ liegen, wird y imaginär und erhält man daher (Fig. 203) keine Punkte der Linie. Für $x = \pm 3$ wird $y = 0$; die Linie schneidet also die Abscissenachse in den Abständen $OA = +3$ und $OB = -3$. Da ferner zu gleichen positiven und negativen Abscissen gleiche Ordinaten gehören, so folgt, dass die Linie aus zwei

Fig. 203.



getrennten Ästen zusammengesetzt ist, welche auf beiden Seiten der Ordinatenachse symmetrisch liegen.

Jeder positiven, sowie jeder negativen Abscisse entsprechen zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, und zwar nehmen mit den wachsenden Abscissen auch die Ordinaten ohne Ende zu. Hieraus ergibt sich, dass jeder Ast der Linie aus zwei Theilen besteht, welche sich oberhalb und unterhalb der Abscissenachse symmetrisch ins Unendliche erstrecken.

Construiere noch die quadratischen Gleichungen:

a) $y^2 = 6x - x^2$, c) $y^2 = 4x$, e) $4x^2 + 9y^2 = 36$,
b) $y = x^2 + 3x - 2$, d) $xy = 10$, f) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

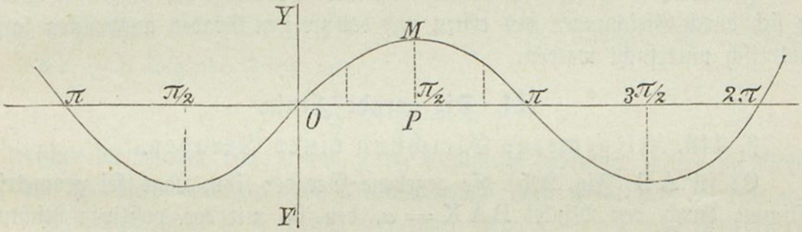
Aus den voranstehenden Aufgaben ist ersichtlich, dass die geometrischen Örter quadratischer Gleichungen an Gestalt sehr verschieden sein können.

4. Es soll noch die transcendente Gleichung $y = \sin x$ construiert werden (Fig. 204).

Für $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ldots\quad -\frac{\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{3\pi}{2},\ -2\pi\ldots$

ist $y = 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ldots\quad -1,\quad 0,\ +1,\quad 0\ldots$

Fig. 204.



Den Abscissen $x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ldots$ entspricht die Ordinate $y = 0$; die zu $y = \sin x$ gehörige Linie schneidet also die Abscissenachse sowohl in dem Anfangspunkte als in den Abständen $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ldots$ rechts und links vom Anfangspunkte.

Von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ sind die Ordinaten positiv und stetig wachsend; für $x = \frac{\pi}{2}$ erreicht die Ordinate den größten Wert 1; von da an nehmen die Ordinaten in derselben Weise ab bis $x = \pi$, wo $y = 0$ wird und also die Linie die Abscissenachse schneidet. Ein ganz gleicher Theil der Linie liegt zwischen $x = \pi$ und $x = 2\pi$ auf der unteren Seite der Abscissenachse. Analoge Beziehungen finden auch für negative Werte von x statt.

Die krumme Linie, welche die Gleichung $y = \sin x$ geometrisch darstellt, besteht also aus unendlich vielen gleichen Theilen, welche abwechselnd oberhalb und unterhalb der Abscissenachse liegen.

§. **445.** Sowie sich jede Gleichung zwischen x und y geometrisch durch eine Linie darstellen läſst, so kann auch umgekehrt jede Linie, in welcher ein bestimmtes Bildungsgesetz vorherrscht, durch eine Gleichung ausgedrückt werden. Nimmt man nämlich in der Linie einen variablen Punkt M an, so muſs zwischen den Coordinaten desselben eine bestimmte Relation stattfinden, die sich aus irgend einer charakteristischen Eigenschaft der Linie ergibt und die daher für alle Lagen des variablen Punktes unverändert fortbesteht. Wird diese Relation zwischen x und y durch eine Gleichung ausgedrückt, so heiſst dieselbe die Gleichung der Linie.

Eine Gleichung zwischen zwei Variablen ist demnach der analytische Repräsentant für eine gegebene Linie, sowie umgekehrt die Linie der geometrische Repräsentant für eine gegebene Gleichung ist. Auf dieser Wechselbeziehung beruht das Wesen der analytischen Geometrie. Sie hat die Aufgabe, aus irgend einer bekannten charakteristischen Eigenschaft einer gegebenen Linie die Gleichung abzuleiten, welche durch die Coordinaten jedes Punktes in der Linie erfüllt wird, und andererseits aus einer gegebenen Gleichung zwischen zwei Variablen das durch sie dargestellte geometrische Gebilde zu ermitteln; insbesondere auch, durch Modification und Combination der zu bestimmten Linien gehörigen Gleichungen und deren geometrische Deutung die Eigenschaften dieser Linien zu entwickeln.

In dem Nachfolgenden sollen nach der Ordnung die einzelnen Linien, die sich durch Gleichungen des ersten und des zweiten Grades ausdrücken lassen analytisch untersucht werden.

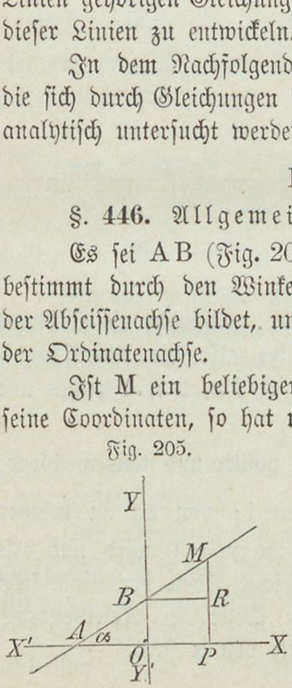
III. Die gerade Linie.

§. **446.** Allgemeine Gleichung einer Geraden.

Es sei AB (Fig. 205) die gegebene Gerade; ihre Lage sei geometrisch bestimmt durch den Winkel $BAX = \alpha$, den sie mit der positiven Richtung der Abscissenachse bildet, und durch das von ihr abgeschnittene Stück $OB = b$ der Ordinatenachse.

Ist M ein beliebiger Punkt der AB und sind $x = OP$, $y = MP$ seine Coordinaten, so hat man, wenn $BR \parallel OX$ gezogen wird,

Fig. 205.



$$y = MP = MR + RP.$$

Nun ist

$MR = BR \,.\, \operatorname{tang} MBR = x \operatorname{tang} \alpha$, und

$RP = b$; daher

$$y = x \operatorname{tang} \alpha + b,$$

oder, wenn man $\operatorname{tang} \alpha = a$ setzt,

$$y = ax + b.$$

Diese Gleichung findet zwischen den Coordinaten x und y eines jeden Punktes der Geraden AB statt, sie ist daher die Gleichung der Geraden.

Da a und b jede beliebige reelle Zahl bedeuten können, so ist die Gleichung $y = ax + b$ der analytische Ausdruck für alle möglichen geraden Linien. Für eine bestimmte Gerade haben auch a und b ganz bestimmte, constante Werte, während x und y variabel sind, d. i. für jeden andern Punkt dieser Geraden andere Werte annehmen. Die Größe $a = \operatorname{tang} \alpha$ heißt, da sie bloß von der Richtung der Geraden gegen die Abscissenachse abhängt, die Richtungsconstante.

§. **447.** Discussion der Gleichung $y = ax + b$.

1. Da die Gleichung $y = ax + b$ zwei Constanten a und b hat, die so lange unbestimmt bleiben, als nicht von einer bestimmten Geraden die Rede ist, so folgt, dass zur vollkommenen Bestimmung einer Geraden zwei Bedingungen erforderlich sind.

2. Die Richtungsconstante a ist positiv oder negativ, je nachdem der Winkel α, welchen die Gerade mit der positiven Abscissenachse bildet, spitz oder stumpf ist. Die Constante b ist positiv oder negativ, je nachdem die Gerade die Ordinatenachse oberhalb oder unterhalb der Abscissenachse schneidet.

Man kann daher schon aus den Vorzeichen der Constanten ersehen, auf welcher Seite die Coordinatenachsen von der Geraden geschnitten werden.

3. Für den Schnittpunkt A der Geraden AB (Fig. 205) mit der Abscissenachse ist $y = 0$; dann folgt aus der obigen Gleichung $x = -\frac{b}{a}$. Für den Schnittpunkt B der Geraden mit der Ordinatenachse ist $x = o$, daher $y = b$.

Setzt man $-\frac{b}{a} = c$, also $a = -\frac{b}{c}$, so nimmt die Gleichung $y = ax + b$ folgende Form an:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1,$$

in welcher die Nenner von x und y die Abschnitte bedeuten, welche die Gerade auf der Abscissen- und auf der Ordinatenachse vom Ursprunge an bestimmt.

4. Nimmt man $b = 0$ an, so erhält man $x = ax$ als Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden. Diese Gleichung enthält nur noch eine Constante, da die eine Bedingung der Geraden schon dadurch angegeben ist, dass sie durch den Anfangspunkt geht.

5. Soll die Gerade, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht, und deren Gleichung $y = ax$ ist, mit der Abscissenachse zusammenfallen, so muss man den Winkel α, und somit auch a, gleich Null setzen; man erhält also $y = 0$ als Gleichung der Abscissenachse.

Vertauscht man die Abscissenachse mit der Ordinatenachse, so ergibt sich dann $x = 0$ als Gleichung der Ordinatenachse.

6. Soll die Gerade zu der Achse der x, und zwar in dem Abstande b parallel sein, so muss man in der Gleichung $y = ax + b$ den Winkel α,

also auch a, gleich Null setzen, wodurch man $y = b$ als Gleichung einer zu der Abscissenachse in dem Abstande b parallelen Geraden erhält.

Vertauscht man die Achsen der x und der y, so ergibt sich ebenso $x = c$ als Gleichung einer zu der Ordinatenachse in dem Abstande c parallelen Geraden.

§. **448.** Der geometrische Ort einer Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Variablen ist eine Gerade.

Beweis. Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Variablen $Ax + By + C = 0$ läſst sich auf die Form $y = ax + b$ bringen. Betrachtet man nun die Gleichung $y = ax + b$ als den analytischen Ausdruck für eine Linie, indem man x und y als die Coordinaten ihrer Punkte, a und b aber als constante Größen ansieht, so hat man für irgend drei Punkte dieser Linie, deren Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 und x_3, y_3 sind,

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b, \qquad y_3 = ax_3 + b.$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von jeder der letzteren, so erhält man

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \text{und} \quad y_3 - y_1 = a(x_3 - x_1),$$

daher

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Die drei Punkte liegen demnach (§. 435, 2) in einer Geraden, d. i. der geometrische Ort der Gleichung $y = ax + b$ ist eine Gerade.

§. **449.** Construction einer Geraden, deren Gleichung gegeben ist.

Man bestimme zwei Punkte, durch welche die Gerade gehen soll, indem man aus der Gleichung zwei Paare zusammengehöriger Werte von x und y sucht und diese construiert. Im allgemeinen ist es am bequemsten, die Schnittpunkte der Geraden mit den beiden Achsen zu bestimmen, indem man in der Gleichung einmal $y = 0$, und dann $x = 0$ setzt.

§. **450.** Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt (x_1, y_1) geht.

Die verlangte Gleichung hat die Form

$$y = ax + b \ldots 1),$$

wobei a und b der Bedingung der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind.

Damit die Gerade durch den Punkt (x_1, y_1) gehe, müssen dessen Coordinaten der Gleichung 1) genüge leisten; es muſs also

$$y_1 = ax_1 + b \ldots 2)$$

sein. Diese Gleichung enthält außer den bekannten Zahlen x_1 und y_1 noch die Unbekannten a und b und kann dazu verwendet werden, die eine Unbekannte durch die andere auszudrücken. Man erhält $b = y_1 - ax_1$ und damit geht die Gleichung 1) über in

$$y = ax + y_1 - ax_1 \quad \text{oder} \quad y - y_1 = a(x - x_1) \ldots 3).$$

Diese Gleichung 3), welche man auch durch die Subtraction der Gleichung 2) von 1) erhält, hat noch eine unbestimmte Constante a, wie es sein muss, da durch einen Punkt unzählig viele Gerade gezogen werden können. Ist aber die Aufgabe gestellt, die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und die X-Achse unter einem bestimmten Winkel schneidet, so hat a in 1) und 2) und daher auch in 3) einen bestimmten Wert oder es gibt nur eine Gerade, welche diesen Bedingungen genügt.

§. 451. Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht.

Die verlangte Gleichung hat die Form

$$y = ax + b \ldots 1),$$

wo a und b noch unbestimmt sind.

Damit die Gerade durch die zwei Punkte gehe, müssen deren Coordinaten der Gleichung 1) genügen, es müssen somit die Bedingungsgleichungen

$$y_1 = ax_1 + b \ldots 2) \text{ und } y_2 = ax_2 + b \ldots 3) \qquad \text{bestehen.}$$

Aus 2) und 3) können nun a und b bestimmt und ihre Werte in 1) eingesetzt werden, wodurch die unbekannten Constanten a und b in 1) durch die Coordinaten der gegebenen Punkte ausgedrückt sind.

Dasselbe erreicht man auch, wenn man die Gleichung 2) von 1) und dann von 3) subtrahiert

$$y - y_1 = a\,(x - x_1) \ldots 4) \qquad y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1) \ldots 5)$$

und nun a aus 4) und 5) eliminiert. Man erhält so als die gesuchte Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) \ldots \; 6).$$

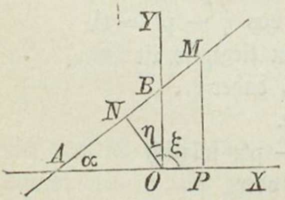
§. 452. Normalform der Gleichung einer Geraden.

Es sei die Lage einer Geraden AB (Fig. 206) geometrisch bestimmt durch die Länge der Normalen $ON = p$ vom Coordinatenanfangspunkte auf die Gerade und durch die Winkel $XON = \xi$ und $YON = \eta$, welche diese Normale mit den positiven Coordinatenachsen bildet.

Die allgemeine Form der Gleichung dieser Geraden ist

$$y = ax + b, \text{ oder } y - ax - b = 0.$$

Fig. 206.



Werden alle Glieder dieser Gleichung mit $\cos\alpha$ multipliciert, so erhält man

$$y \cos\alpha - x \sin\alpha - b \cos\alpha = 0,$$

oder, da $\alpha = \eta = \xi - 90^0$, folglich

$$-\sin\alpha = \cos\xi \text{ (§. 350)},$$

$$\cos\alpha = \cos\eta \text{ und } b \cos\alpha = p \text{ ist,}$$

$$x \cos\xi + y \cos\eta - p = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man auf analoge Weise auch für jede andere Lage der AB; nur müssen in den Fällen, wo $\cos\alpha$ und b entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Glieder in der allgemeinen Form der Gleichung nicht mit $\cos\alpha$, sondern mit $-\cos\alpha$ multipliciert werden.

Die Gleichung $x \cos \xi + y \cos \eta - p = 0$ heißt die **Normalform der Gleichung einer geraden Linie.** Sie hat drei Constanten $\cos \xi$, $\cos \eta$ und p, welche sich jedoch auf zwei reducieren, da $\cos \xi^2 + \cos \eta^2 = 1$ (§. 441, Zus.), und somit durch $\cos \xi$ auch schon $\cos \eta$ bestimmt ist. Die Winkel ξ und η werden von 0° bis 180° gezählt, die Länge p wird unter allen Umständen als positiv angenommen.

Zusatz. Aus der allgemeinen Form der Gleichung einer Geraden erhält man ihre Normalform, wenn man alle Glieder der ersteren mit

$$\pm \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

multipliciert. Es ist demnach für alle Werte von x und y

$$x \cos \xi + y \cos \eta - p = \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \text{somit:}$$

$$\cos \xi = \frac{-a}{\sqrt{1 + a^2}}, \ \cos \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \ p = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

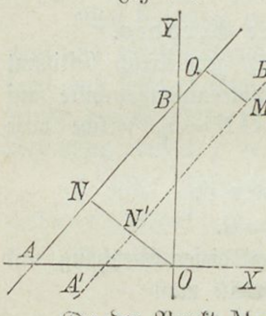
wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{1 + a^2}$ mit dem Vorzeichen von b übereinstimmend genommen werden muss.

§. 453. Abstand eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Geraden.

1. Es sei (Fig. 207) $M = (x', y')$ der gegebene Punkt und $x \cos \xi + y \cos \eta - p = 0$ die in der Normalform gegebene Gleichung der Geraden AB.

Da $p = ON$ als positiv anzunehmen ist, so muss die Normale $P = MQ$ von dem Punkte M auf die Gerade AB positiv oder negativ genommen werden, je nachdem M und der Coordinatenanfangspunkt O auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der AB liegen. Nehmen wir hier den ersten Fall, also P positiv an.

Fig 207.



Ziehen wir durch M die $A'B' \parallel AB$, so fällt die zu $A'B'$ Normale $ON' = p'$ in die ON und bildet daher mit den Coordinatenachsen ebenfalls die Winkel ξ und η; die Gleichung der $A'B'$ ist also

$$x \cos \xi + y \cos \eta - p' = 0.$$

Da der Punkt $M = (x', y')$ in dieser Geraden liegt, so ist

$$x' \cos \xi + y' \cos \eta - p' = 0, \text{ daher}$$

$$p' = x' \cos \xi + y' \cos \eta.$$

Nun ist $MQ = ON - ON'$, oder $P = p - p'$; folglich

$$P = p - x' \cos \xi - y' \cos \eta, \text{ oder}$$

$$P = -(x' \cos \xi + y' \cos \eta - p).$$

Da man zu demselben Resultate auch für jede andere Lage des Punktes M gelangt, so ergibt sich der Satz:

Der erste Theil der in der Normalform gegebenen Gleichung einer Geraden, negativ genommen, drückt den Abstand des Punktes (x, y) von dieser Geraden aus.

2. Ist die Gleichung der Geraden AB in der allgemeinen Form $y = ax + b$ gegeben, so hat man, da nach §. 452, Zusatz

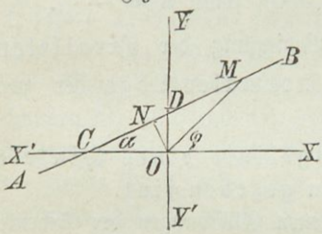
$$x \cos \xi + y \cos \eta - p = \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ ist,}$$

$$P = -\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

§. 454. Polargleichung einer Geraden.

Um die Gleichung der Geraden AB (Fig. 208) für die Polar-Coordinaten zu erhalten, nehmen wir der Einfachheit halber den Ursprung O der rechtwinkligen Coordinaten als Pol und die Abscissenachse OX als Polarachse an; für den Punkt M ist dann $r = OM$, $\varphi = MOX$. Ist nun $ON = p$ der Abstand des Poles von der Geraden AB und der Winkel $BCX = \alpha$, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke MNO

Fig. 208.



$$OM = \frac{ON}{\sin NMO}, \text{ oder da } NMO = \varphi - \alpha \text{ ist,}$$

$$r = \frac{p}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

als Polargleichung der Geraden AB.

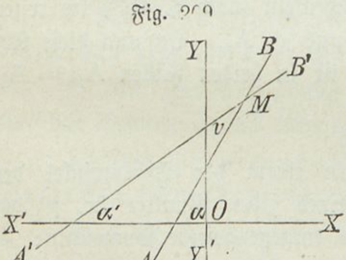
Diese Gleichung erhält man auch aus $y = ax + b$, indem man (§. 441) $y = r \sin \varphi$ und $x = r \cos \varphi$ setzt und beachtet, dass $a = \tang \alpha$ und $b \cos \alpha = p$ ist.

Zwei Gerade.

§. 455. Schnittpunkt zweier Geraden.

Es seien $y = ax + b \ldots 1)$,
$y = a'x + b \ldots 2)$

Fig. 209



die Gleichungen der beiden Geraden AB und A'B' (Fig. 209); man suche die Coordinaten ihres Schnittpunktes M.

Für alle Punkte der Geraden AB ist $y = ax + b$; für alle Punkte der Geraden A'B' ist $y = a'x + b'$; für den Punkt, der in den beiden Geraden liegt, für den Schnittpunkt M, muss daher $y = ax + b$ und zugleich auch $y = a'x + b'$ gelten. Dem Punkte M werden daher jene Coordinaten x und y zukommen, durch welche beiden Gleichungen zugleich Genüge geleistet wird; diese Werte ergeben sich aber durch Auflösung jener Gleichungen; man erhält

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

§. **456.** Gegenseitige Lage zweier Geraden.

1. Sind (Fig 209) die Gleichungen der Geraden AB und A'B', welche mit der Abscissenachse die Winkel α und α' bilden,

$$y = ax + b \text{ und } y = a'x + b',$$

wo also $a = \operatorname{tang} \alpha$, $a' = \operatorname{tang} \alpha'$ ist, so hat man zur Bestimmung des Winkels $AMA' = v$, den die beiden Geraden einschließen,

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang} (\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \alpha'}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}, \text{ oder } \operatorname{tang} v = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Der Winkel AMB' ist der Nebenwinkel von v, daher

$$\operatorname{tang} AMB' = -\operatorname{tang} v = -\frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

2. Sind die beiden Geraden AB und A'B' einander parallel, ist also $\alpha = \alpha'$, so ist auch $a = a'$.

Sind die Geraden AB und A'B' zu einander normal, ist also $\alpha = 90^0 + \alpha'$, so ist $\operatorname{tang} \alpha = -\cot \alpha'$ (§. 350), somit $a = -\frac{1}{a'}$.

Die Gleichung $a = a'$ drückt also die Bedingung der parallelen, die Gleichung $a = -\frac{1}{a'}$ die Bedingung der normalen Lage der zwei Geraden aus.

§. **457.** Gleichung der Halbierungslinie eines Winkels, dessen Schenkel durch ihre Gleichungen gegeben sind.

1. Es seien die in der Normalform gegebenen Gleichungen der Schenkel eines Winkels $x \cos \xi_1 + y \cos \eta_1 - p_1 = 0$ und $x \cos \xi_2 + y \cos \eta_2 - p_2 = 0$, welche Gleichungen wir der Kürze halber durch die Symbole

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = 0$$

ausdrücken wollen.

a) Liegt der Coordinatenanfangspunkt in dem gegebenen Winkel selbst oder in einem Scheitelwinkel, so sind die Abstände eines beliebigen Punktes (x, y) der Winkelhalbierungslinie von den Schenkeln (nach §. 453) im ersten Falle $-A_1$ und $-A_2$, im zweiten $+A_1$ und $+A_2$. Da nun diese Abstände (nach §. 46, 2) gleich sein müssen, so ist in beiden Fällen $A_1 = A_2$, und somit die Gleichung der Halbierungslinie

$$A_1 - A_2 = 0.$$

b) Liegt der Coordinatenanfangspunkt in einem der Nebenwinkel des gegebenen Winkels, so haben die Abstände eines jeden Punktes (x, y) der Winkelhalbierenden von den beiden Schenkeln entgegengesetzte Vorzeichen; sie sind also entweder $-A_1$ und $+A_2$, oder $+A_1$ und $-A_2$, und man hat, da diese Abstände gleich sein müssen, in jedem Falle $A_1 = -A_2$; mithin ist hier die Gleichung der Winkelhalbierungslinie

$$A_1 + A_2 = 0.$$

2. Sind die Gleichungen der Schenkel eines Winkels in der allgemeinen Form $y = a_1 x + b_1$ und $y = a_2 x + b_2$ gegeben, so ergibt sich aus 1. mit Rücksicht auf §. 452, Zusatz

$$\frac{y - a_1 x - b_1}{\sqrt{1+a_1^2}} - \frac{y - a_2 x - b_2}{\sqrt{1+a_2^2}} = 0$$

als Gleichung der Halbierungslinie des Winkels, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt, und

$$\frac{y - a_1 x - b_1}{\sqrt{1+a_1^2}} + \frac{y - a_2 x - b_2}{\sqrt{1+a_2^2}} = 0$$

als Gleichung der Halbierungslinie seines Nebenwinkels.

§. **458.** Bedingung, unter welcher sich drei Gerade in demselben Punkte schneiden.

Es seien $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, wo $G = 0$ das Symbol für die Gleichung einer Geraden in der allgemeinen Form oder in der Normalform ist.

Multipliciert man die gegebenen drei Gleichungen folgeweise mit λ_1, λ_2, λ_3, und lassen sich diese constanten Factoren so bestimmen, dass $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ eine identische Gleichung wird, so schneiden sich die drei Geraden in demselben Punkte.

Denn setzt man die besonderen Werte für x und y, welche den Gleichungen $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ genügen und daher ihrem Schnittpunkte angehören, in die identische Gleichung $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$, so verschwindet der zweite Theil, also muss auch der erste Theil $\lambda_3 G_3 = 0$, und, da λ_3 eine constante Zahl ist, auch $G_3 = 0$ werden. Diese besonderen Werte für x und y befriedigen somit alle drei gegebenen Gleichungen, d. h. die drei Geraden schneiden einander in einem gegebenen Punkte.

In der Anwendung tritt am häufigsten die folgende, für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ sich ergebende Form der obigen identischen Gleichung auf:

$$G_3 = G_1 + G_2.$$

Sie enthält den Satz: Wenn von den Gleichungen dreier Geraden die eine gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden sich die drei Geraden in demselben Punkte.

§. **459.** Zur Anwendung der voranstehenden Lehren sollen hier die analytischen Beweise einiger Lehrsätze vom geradlinigen Dreiecke folgen:

1. Die Halbierungslinien der drei inneren Winkel eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte (§. 48, 2).

Sind die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes in der Normalform

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0,$$

so sind, wenn man den Coordinatenanfangspunkt innerhalb des Dreieckes annimmt, nach §. 457 die Gleichungen der Winkelhalbierungslinien

$$A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1 - A_3 = 0, \qquad A_3 - A_2 = 0.$$

Da nun die erste dieser Gleichungen gleich ist der Summe der beiden anderen, so folgt nach §. 458, dass sich die drei Halbierungslinien in demselben Punkte schneiden.

2. Die Halbierungslinien eines inneren Winkels und der zwei ihm nicht anliegenden Außenwinkel eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte.

Nach §. 457 erhält man die drei Gleichungen

$$A_2 - A_1 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0, \qquad A_2 + A_3 = 0.$$

Die dritte Gleichung ist die Summe der beiden anderen; also schneiden sich die drei Winkelhalbierungslinien in demselben Punkte.

3. Die Halbierungslinien der drei Außenwinkel eines Dreieckes schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in derselben Geraden liegen.

Nimmt man wieder den Ursprung der Coordinaten innerhalb des Dreieckes an, so sind die Gleichungen der Halbierungslinien der jenen Seiten gegenüberliegenden Außenwinkel

$$A_2 + A_3 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0, \qquad A_1 + A_2 = 0.$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden $A_2 + A_3 = 0$ mit der gegenüberliegenden Seite $A_1 = 0$ müssen diese beiden Gleichungen zugleich befriedigen; sie müssen daher auch der Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ genüge leisten, d. h. der Schnittpunkt liegt in der Geraden, deren Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ ist.

Ebenso folgt, dass auch der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $A_1 + A_3 = 0$ mit der Seite $A_2 = 0$, und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $A_1 + A_2 = 0$ mit der Seite $A_3 = 0$ in der Geraden, deren Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ ist, also mit dem früheren Schnittpunkte in derselben Geraden liegen.

4. Die Schwerlinien eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte (§. 61).

Wählen wir in dem Dreiecke ABC (Fig. 210) der Einfachheit halber den Eckpunkt A als Coordinatenanfangspunkt und die Seite AB als Abscissenachse. Dann haben wir zur analytischen Bestimmung die drei Eckpunkte

$$A = (0, 0), \qquad B = (x_2, 0), \qquad C = (x_3, y_3).$$

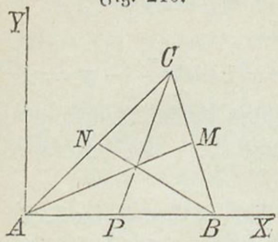
Sind M, N, P die Halbierungspunkte der den Eckpunkten A, B, C gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes, so ist

$$M = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \qquad M = \left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \qquad P = \left(\frac{x_2}{2}, 0\right).$$

Für die Schwerlinien AM, BN, CP erhalten wir daher nach §. 451 folgeweise die Gleichungen:

$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2}} \cdot x, \quad y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3}{2} - x_2}(x - x_2), \quad y = \frac{y_3}{x_3 - \frac{x_2}{2}}\left(x - \frac{x_2}{2}\right).$$

Fig. 210.



welche sich auch so ausdrücken lassen:

$$(x_2 + x_3)\, y - y_3 x = 0,$$
$$(x_3 - 2x_2)\, y - y_3 x + x_2 y_3 = 0,$$
$$(2x_3 - x_2)\, y - 2y_3 x + x_2 y_3 = 0.$$

Da nun die dritte Gleichung gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden sich die durch diese Gleichungen dargestellten Schwerlinien in demselben Punkte.

Aufgaben.

§. **460.** 1. Suche die Gleichung einer Geraden, welche a) von der Ordinatenachse das Stück -2 abschneidet und mit der Abscissenachse einen Winkel von 45^0 bildet; b) von der Abscissenachse das Stück -3 und von der Ordinatenachse das Stück 2 abschneidet.

2. Construiere eine Gerade, deren Gleichung ist:

a) $y = 3x + 5$, b) $y = -2x + 3$, c) $y = 2x$.

3. Gegeben sind die Punkte:

a) $(1, -1)$ und $(-2, 2)$, b) $(2, 7)$ und $(-1, 1)$;
c) $(-\frac{1}{2}, 3)$ und $(3, 0)$, d) $(0, -2)$ und $(-\frac{2}{3}, -3)$;

suche die Gleichung der Geraden, welche durch diese Punkte geht.

4. Bestimme den Abstand a) des Punktes $(2, 3)$ von der Geraden $4y = 3x + 12$, b) des Punktes $(7, 4)$ von der Geraden $15y = -8x - 30$.

5. Die Eckpunkte eines Dreieckes sind $(-2, 2)$, $(4, 2)$ und $(1, 6)$; bestimme a) die Gleichungen der Seiten, b) die Höhen des Dreieckes.

6. Suche die Coordinaten des Schnittpunktes, sowie den Winkel der beiden Geraden:

a) $y = -3x + 5$ und $y = -2x - 4$;
b) $3y = 2x + 9$ und $4y = x + 3$.

7. Die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes sind $y = -x - 3$, $7y = -2x - 6$ und $3y = 2x - 14$; suche a) die Coordinaten der Eckpunkte, b) den Flächeninhalt des Dreieckes.

8. Bestimme die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $(4, -1)$ und den Schnittpunkt der beiden Geraden $y = 2x - 4$ und $y = -x - 5$ geht.

9. Suche die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und zu der Geraden $y = ax + b$ a) parallel, b) normal ist.

10. Bestimme die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $(-4, 3)$ geht und zu der Geraden $5y = 2x - 4$ parallel ist.

11. Die Gleichung einer Geraden zu finden, die durch den Punkt $(-2, 4)$ geht und zu der Geraden, welche die Punkte $(2, -3)$ und $(3, 1)$ verbindet, parallel ist.

12. Suche die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (1, 4) geht und zu der Geraden $2y = -x + 2$ normal ist.

13. In dem Schnittpunkte der Geraden $\frac{x}{3} + y = 1$ und $\frac{x}{2} - y = 1$ wird zu der letzteren Geraden eine Normale gezogen; welches ist ihre Gleichung?

14. Die Endpunkte einer Strecke sind $(1, -2)$ und $(3, -4)$; bestimme die Gleichung ihrer Symmetrale.

15. Die Gleichungen der Schenkel eines Winkels sind a) $3y + 4x = 2$ und $4y = 3x - 5$, b) $10y - 24x = 1$ und $6y - 8x = 5$; suche die Gleichung der Winkelhalbierenden.

Beweise analytisch folgende Lehrsätze:

16. Die Halbierungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels sind zu einander normal (§. 457, 2).

17. Die Halbierungslinien zweier innerer Winkel und des dritten Außenwinkels eines Dreieckes schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in derselben Geraden liegen.

18. Die drei Höhen eines Dreieckes (§. 60) schneiden einander in demselben Punkte.

19. Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes (§. 48, 1) schneiden einander in demselben Punkte.

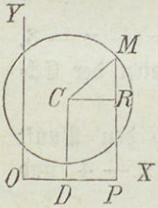
IV. Die Kreislinie.

§. **461.** Allgemeine Gleichung des Kreises.

In der Kreislinie sind alle Punkte von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt. Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, darf man nur diese charakteristische Eigenschaft desselben in die analytische Zeichensprache übertragen.

Sind (Fig. 211) $OP = x$, $MP = y$ die Coordinaten des Punktes M einer Kreislinie, deren Halbmesser $CM = r$ ist, ferner $OD = p$, $CD = q$ die Coordinaten des Mittelpunktes C, so ist, wenn man $CR \parallel OX$ zieht,

Fig. 211.



$$CR^2 + MR^2 = CM^2.$$

Man erhält daher, da $CR = x - p$, $MR = y - q$ ist und der Abstand CM für alle Punkte der Kreislinie $= r$ sein muss, als allgemeine Gleichung des Kreises

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \ldots 1).$$

Diese Gleichung enthält drei constante Größen p, q und r, was anzeigt, dass zur vollkommenen Bestimmung der Lage und der Größe eines Kreises drei Bedingungen erforderlich sind. Man kann diese drei Constanten beliebig ändern, so bedeutet die Gleichung immer wieder einen Kreis, wenn auch dessen Lage und Größe eine andere wird; der Charakter der krummen Linie wird durch die Änderung der Constanten nicht geändert.

Zusatz. Die Gleichung 1) kann man auch so darstellen:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0 \ldots 2).$$

Diese Form heißt die Normalform der Gleichung eines Kreises; sie wird oft der Kürze halber durch das Symbol $K = O$ ausgedrückt.

Da $(x - p)^2 + (y - q)^2$ das Quadrat der Entfernung des Punktes $M = (x, y)$ vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet, so ist $(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$, d. i. die Differenz zwischen dem Quadrate dieser Entfernung und dem Quadrate des Halbmessers, die Potenz des Punktes M in Bezug auf den Kreis (§. 138). Man kann daher sagen:

Der erste Theil K der in der Normalform $K = O$ gegebenen Gleichung eines Kreises drückt die Potenz des Punktes (x, y) in Beziehung auf diesen Kreis aus.

§. **462.** Für besondere Lagen der Coordinatenachsen nimmt die Gleichung des Kreises eine noch einfachere Gestalt an.

1. Liegt der Mittelpunkt des Kreises in der positiven Abscissen-Halbachse im Abstande $p = r$, so geht die Gleichung 1) über in

$$x^2 + y^2 = 2rx \ldots 3).$$

Diese Gleichung heißt die Scheitelgleichung des Kreises.

2. Liegt der Mittelpunkt des Kreises im Ursprunge der Coordinaten, so ist $p = 0$, $q = 0$, und man erhält aus 1) die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots 4).$$

Diese Gleichung heißt die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Die Gleichungen 3) und 4) enthalten eine einzige Constante, was ganz natürlich ist, da von den drei im allgemeinen nöthigen Bedingungen zwei bereits durch die Voraussetzungen, unter welchen jene Gleichungen stattfinden, ausgesprochen sind.

§. **463.** Discussion der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Zur räumlichen Deutung der Gleichung des Kreises wählen wir die Mittelpunktsgleichung als die einfachste.

1. Aus $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ und $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ folgt, dass jedem Werte von x (y), für welchen überhaupt y (x) einen reellen Wert hat, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y (x) entsprechen; die Kreislinie wird also von der Abscissenachse (Ordinatenachse) in zwei symmetrische Theile getheilt.

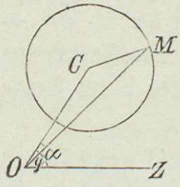
2. Für die Schnittpunkte des Kreises mit der Abscissenachse ist $y = 0$, daher $x = \pm r$. Für die Schnittpunkte des Kreises mit der Ordinatenachse ist $x = 0$, daher $y = \pm r$. Die Kreislinie schneidet also sowohl die Abscissen- als die Ordinatenachse in zwei Punkten, welche auf entgegengesetzten Seiten vom Ursprunge den Abstand r haben.

3. Für $x > r$ wird y imaginär, für $y > r$ wird x imaginär; der größte Wert, den man für x oder y setzen kann, ist also der Halbmesser r.

§. **464.** Polargleichung des Kreises.

Es sei (Fig. 212) C der Mittelpunkt eines Kreises, $CM = a$ dessen Halbmesser, ferner O der Pol des Polar-Coordinatensystems, $OC = \varrho$ der Radiusvector des Mittelpunktes und $COZ = \alpha$ der Winkel, den OC mit der Polarachse OZ bildet. Ist nun M irgend ein Punkt der Kreislinie, also

Fig. 212.



$r = OM$ sein Radiusvector und $\varphi = MOZ$ der Winkel desselben mit der Polarachse, so erhält man aus dem Dreiecke CMO

$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2\,OM\,.\,OC\,.\cos COM$$

oder $a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,\varrho\cos(\alpha - \varphi)$, woraus

$$r = \varrho\cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin(\alpha - \varphi)^2}$$

als allgemeine Polargleichung des Kreises folgt.

Für $\varrho = 0$ erhält diese Gleichung die Form $r = a$.

§. **465.** Bedingungen für den Schnitt und die Berührung zweier Kreise.

Es seien O und o die Mittelpunkte zweier Kreise, R und r ihre Halbmesser und $Oo = c$ ihre Centrale. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung O als den Coordinatenanfangspunkt und Oo als die Abscissenachse annehmen; dann sind die Gleichungen der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ und } (x - c)^2 + y^2 = r^2.$$

Um die Coordinaten der den beiden Kreislinien gemeinsamen Punkte zu erhalten, wird man aus ihren Gleichungen x und y bestimmen. Subtrahiert man zu diesem Ende die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man

$$x^2 - (x - c)^2 = R^2 - r^2, \text{ oder } 2cx - c^2 = R^2 - r^2, \text{ daher } x = \frac{c^2 + R^2 - r^2}{2c}.$$

Substituiert man diesen Wert in die erste Gleichung, so ergibt sich

$$y = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{4c^2R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2},$$

oder, da

$$\begin{aligned} 4c^2R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2 &= (2cR + c^2 + R^2 - r^2)\,(2cR - c^2 - R^2 + r^2) \\ &= \{(c + R)^2 - r^2\}\,.\,\{r^2 - (c - R)^2\} \\ &= (c + R + r)\,(c + R - r)\,(r + c - R)\,(r - c + R) \text{ ist,} \end{aligned}$$

$$y = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{(c + R + r)\,(c + R - r)\,(c - R + r)\,(R + r - c)}.$$

Hieraus folgt, dass sich für y im allgemeinen zwei Werte ergeben, welche, je nachdem das Product unter dem Wurzelzeichen positiv, Null, oder negativ ist, reell und verschieden, reell und gleich, oder imaginär sind, dass demnach die beiden Kreise entweder zwei Punkte, oder einen einzigen, oder keinen Punkt gemeinsam haben. Welcher von diesen Fällen stattfindet, hängt, da man immer $R \geqq r$ annehmen kann und dann die Factoren $c + R + r$ und $c + R - r$ wesentlich positiv sind, von der Beschaffenheit der Factoren $c - R + r$ und $R + r - c$ ab.

1. Haben die Factoren $c - R + r$ und $R + r - c$ gleiche Vorzeichen, so können sie nur positiv sein, weil nicht zugleich $c < R - r$ und $c > R + r$ sein kann. In diesem Falle, wo also $R - r < c < R + r$ ist, hat y zwei reelle und entgegengesetzte Werte; die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten, welche gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten und dieselbe Abscisse haben.

2. Ist einer der Factoren $R + r - c$ und $c - R + r$ Null, also entweder

$$c = R + r \text{ oder } c = R - r,$$

so wird $y = 0$; die beiden Kreise haben nur einen gemeinsamen Punkt, d. i. sie berühren sich, und zwar im ersten Falle von außen, im zweiten von innen.

3. Haben die Factoren $R + r - c$ und $c - R + r$ verschiedene Vorzeichen, ist also gleichzeitig

entweder $c > R + r$, folglich auch $c > R - r$,
oder $c < R - r$, folglich auch $c < R + r$,

so wird y imaginär; die zwei Kreise haben keinen Punkt miteinander gemeinsam, es liegt der eine Kreis im ersten Falle ganz außerhalb, im zweiten ganz innerhalb des zweiten Kreises.

Die analytische Untersuchung führt hiernach auf die schon aus §. 93 bekannten Sätze über die Lage zweier Kreise.

§. **466.** Gleichung der Potenzlinie zweier Kreise.

Es seien allgemein die Gleichungen zweier Kreise

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 = 0 \text{ und}$$
$$(x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2 = 0 \text{ oder}$$
$$K_1 = 0 \text{ und } K_2 = 0.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man die Gleichung

$$K_1 - K_2 = 0, \text{ oder}$$

$2x\,(p_2 - p_1) + 2y\,(q_2 - q_1) + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - (p_2^2 + q_2^2 - r_2^2) = 0$, also die Gleichung einer geraden Linie.

Um die nähere Beschaffenheit dieser Geraden kennen zu lernen, beachte man, dass K_1 und K_2 die Potenzen des Punktes (x, y) in Beziehung auf die zwei gegebenen Kreise bedeuten (§. 461, Zusatz). Die Gleichung $K_1 - K_2 = 0$, oder $K_1 = K_2$ drückt demnach aus, dass jeder Punkt der durch sie dargestellten Geraden in Beziehung auf die beiden Kreise gleiche Potenzen hat, dass also diese Gerade die Potenzlinie (§. 139) der zwei Kreise ist.

Sind $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die in der Normalform gegebenen Gleichungen zweier Kreise, so ist $K_1 - K_2 = 0$ die Gleichung ihrer Potenzlinie.

Lehrsatz. Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden einander in demselben Punkte.

Beweis. Es seien $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ die Gleichungen dreier Kreise in ihrer Normalform; dann sind die Gleichungen der Potenzlinien von je zwei Kreisen

$$K_1 - K_2 = 0, \qquad K_1 - K_3 = 0, \qquad K_3 - K_2 = 0.$$

Da nun die erste der letzteren drei Gleichungen gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden sich die durch diese Gleichungen dargestellten Geraden, d. i. die drei Potenzlinien in demselben Punkte (§. 458).

Der gemeinsame Schnittpunkt der drei Potenzlinien dreier Kreise heißt das Potenzcentrum dieser Kreise.

Aufgaben.

§. **467.** 1. Die Gleichung eines Kreises ist

a) $x^2 + y^2 = 6x + 8y + 24$, b) $x^2 + y^2 = 2x$,

c) $36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0$;

bestimme die Coordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser.

2. Construiere einen Kreis, dessen Gleichung ist:

a) $x^2 + y^2 - 6y = 16$, b) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$,

c) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = 19$.

3. Die Gleichung eines Kreises ist durch die Proportion $x : y = (y - 6) : (8 - x)$ gegeben; construiere den Kreis.

4. Die Gleichungen zweier Kreise sind $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ und $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$; suche a) die Gleichung ihrer Centrale, b) den Abstand des Coordinatenanfangspunktes von der Centrale.

5. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch den äußeren und den inneren Ähnlichkeitspunkt zweier gegebener Kreise geht und den Abstand beider Ähnlichkeitspunkte zum Durchmesser hat (§. 142).

6. Die Gleichung für den geometrischen Ort der Scheitel aller Dreiecke zu finden, welche dieselbe Grundlinie a haben und in denen a) die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten gleich a^2 ist, b) die beiden anderen Seiten in dem constanten Verhältnis $m : n$ stehen.

Man nehme die Grundlinie als Abscissenachse und einen Endpunkt derselben als Coordinatenanfangspunkt an.

7. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt (p, q) ist, berührt die Gerade $y = ax + b$; welches ist die Gleichung des Kreises?

Der Halbmesser ist gleich dem Abstande des Mittelpunktes von der Geraden.

8. Es soll mit dem Halbmesser $r = 13$ ein Kreis beschrieben werden, welchen die Gerade $5x + 12y = 124$ im Punkte, dessen Abscisse $x_1 = 8$ ist, berührt; welches ist die Gleichung dieses Kreises?

9. Suche die Gleichung eines Kreises, welcher durch den Punkt $(6, 8)$ geht und die Gerade $4x + 3y + 1 = 0$ im Punkte, dessen Abscisse $x_2 = -1$ ist, berührt.

10. Die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes sind $12x - 5y + 13 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$ und $15x - 8y + 14 = 0$; bestimme die Gleichung des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

11. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch die drei Punkte $(4, -2)$, $(-1, 3)$ und $(-5, -1)$ geht.

12. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch die zwei Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ geht und die Gerade $3x - 4y + 6 = 0$ berührt.

13. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher durch die zwei Punkte $(0, 0)$ und $(2, 0)$ geht und den Kreis $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ von außen berührt.

Die Centrale der beiden Kreise ist gleich der Summe ihrer Halbmesser.

14. Welches ist die Gleichung der Potenzlinie der beiden Kreise $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ und $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$?

15. Bestimme das Potenzcentrum für die Kreise $(x - 3)^2 + y^2 = 5$, $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ und $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 7$.

V. Die Ellipse.

§. 468. Eine Linie der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass die Summe der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten constant ist, heißt eine **Ellipse**.

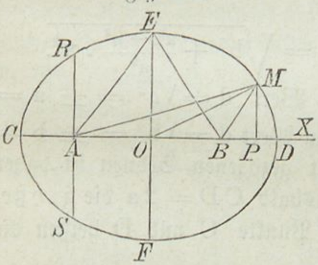
Sind A und B (Fig. 213) die zwei gegebenen Punkte, und ist $2a$ die constante Summe der Abstände eines jeden Punktes der Ellipse von jenen zwei Punkten, so ist M ein Punkt der Ellipse, wenn $AM + BM = 2a$ ist.

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die **Brennpunkte** der Ellipse, die von ihnen zu einem Punkte M der Ellipse gezogenen Strecken AM und BM die **Leitstrahlen** dieses Punktes.

§. 469. **Bestimmung der Leitstrahlen der Ellipse.**

Es seien (Fig. 213) A und B die Brennpunkte, die Mitte O ihres Abstandes sei zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten und OBX die Abscissenachse. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Ellipse, also $AM + BM = 2a$, und sind $x = OP$, $y = MP$ die Coordinaten dieses Punktes, so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken APM und BPM, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

Fig. 213.



$$AM^2 = y^2 + (x + e)^2,$$
$$BM^2 = y^2 + (x - e)^2, \text{ daher}$$
$$AM^2 - BM^2 = 4ex, \text{ oder}$$
$$(AM + BM).(AM - BM) = 4ex; \text{ aber}$$
$$AM + BM = 2a, \text{ daher}$$
$$AM - BM = \frac{2ex}{a} \text{ und}$$
$$AM = a + \frac{ex}{a} \text{ und } BM = a - \frac{ex}{a}.$$

§. 470. **Gleichung der Ellipse.**

Aus dem $\triangle APM$ (Fig. 213) folgt $MP^2 = AM^2 - AP^2$, oder

$$y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (x + e)^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2$$
$$= a^2 - e^2 - \frac{a^2 - e^2}{a^2} . x^2, \text{ daher}$$
$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - e^2).$$

Da unter allen Umständen $AM + BM > AB$, also $2a > 2e$ oder $a > e$ ist, so muss die Differenz $a^2 - e^2$ immer positiv sein. Setzt man daher $a^2 - e^2 = b^2$, so ergibt sich

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

als die **Gleichung der Ellipse**. Dieselbe lässt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 471. **Discussion der Gleichung** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

1. Löst man diese Gleichung nach y und dann nach x auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ und } x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

woraus hervorgeht, dass zu jedem Werte von x, für welchen y reell ausfällt, zwei gleiche entgegengesetzte Werte von y, und ebenso zu jedem Werte von y, für welchen x reell wird, zwei gleiche entgegengesetzte Werte von x gehören. Die Ellipse liegt also gegen beide Coordinatenachsen symmetrisch. Der Anfangspunkt O der Coordinaten heißt deshalb der Mittelpunkt und $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

2. Für $y = 0$ erhält man $x = \pm a$, und für $x = 0$, $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die Abscissenachse in den Abständen $+a$ und $-a$, und die Ordinatenachse in den Abständen $+b$ und $-b$ vom Anfangspunkte.

3. Der größte Wert, den x annehmen kann, ist a, der größte Wert von y ist b; für $x > a$ wird y, für $y > b$ wird x imaginär. Zieht man daher zur Ordinatenachse in den Abständen $+a$ und $-a$, und zur Abscissenachse in den Abständen $+b$ und $-b$ parallele Gerade, welche ein Rechteck bilden, so wird die ganze Ellipse innerhalb dieses Rechteckes enthalten sein. Daraus folgt, dass die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

4. Bezeichnet man den Abstand OM eines beliebigen Punktes M der Ellipse vom Mittelpunkte O mit d, so ist

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Für $x = \pm a$ erhält man den größten Wert $d = \sqrt{a^2} = \pm a = OD = OC$; für $x = 0$ erhält man den kleinsten Wert $d = \sqrt{b^2} = \pm b = OE = OF$. Unter allen durch den Mittelpunkt gezogenen Sehnen ist daher CD die größte, EF die kleinste. Man nennt deshalb $CD = 2a$ die große, $EF = 2b$ die kleine Achse der Ellipse; die Punkte C und D heißen die Scheitel derselben.

Auch folgt daraus: Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist gleich der großen Achse.

5. Aus $a^2 - e^2 = b^2$ ergibt sich

$$AO = OB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

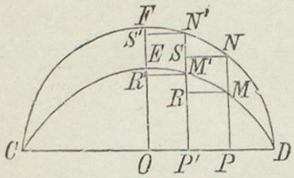
welche Größe die lineare Excentricität der Ellipse heißt. Das Verhältnis $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ nennt man die numerische Excentricität.

6. Je kleiner die Excentricität ist, desto weniger ist a von b unterschieden, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $e = 0$ wird $a = b$ und die Gleichung der Ellipse geht in die des Kreises über. Der Kreis kann demnach als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität Null ist.

7. Für $x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$ erhält man $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Die durch einen Brennpunkt zur großen Achse normal gezogene Sehne RS heißt der Parameter der Ellipse. Es ist somit, wenn man diesen durch 2p bezeichnet, $p = \frac{b^2}{a}$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zu der halben großen und der halben kleinen Achse.

§. **472.** Beschreibt man über der großen Achse einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis, so verhalten sich die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Ellipse und des Kreises wie die halbe kleine zur halben großen Achse.

Fig. 214.



Setzt man (Fig. 214) $OP = x$, $MP = y$ und $NP = \eta$, so ist

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $\eta^2 = a^2 - x^2$; daher

$y^2 : \eta^2 = b^2 : a^2$, und $y : \eta = b : a$.

§. **473.** Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Producte aus den beiden Halbachsen und der Zahl π.

Zieht man (Fig. 214) durch beliebig viele Punkte $M, M', \ldots$ der Ellipse Ordinaten, deren Verlängerungen den über der großen Achse CD beschriebenen Kreis in den Punkten $N, N', \ldots$ treffen, ferner parallel zur großen Achse die Strecken $MR, M'R', \ldots, NS, N'S', \ldots$, so verhalten sich je zwei entsprechende Rechtecke $MPP'R$ und $NPP'S$ wie $b : a$. In demselben Verhältnis stehen dann auch die Summen aller dieser Rechtecke. Nimmt man nun die Punkte $M, M', \ldots$ unendlich nahe an, so müssen sich auch die Grenzwerte, denen sich jene Summen ohne Ende nähern, d. i. die Flächen der Ellipse und des Kreises, wie $b : a$ verhalten. Der Flächeninhalt des Kreises ist $a^2\pi$; heißt f der Flächeninhalt der Ellipse, so hat man $f : a^2\pi = b : a$; folglich ist $f = ab\pi$.

§. **474.** Scheitelgleichung der Ellipse.

Nimmt man statt des Mittelpunktes O (Fig. 213) den Scheitel C als Anfangspunkt der Coordinaten an und behält die große Achse CD als Abscissenachse, so bleiben für das neue Coordinatensystem die früheren Coordinaten unverändert, während die Abscissen für das frühere System den um die halbe große Achse a verminderten Abscissen des neuen gleich sind. Um daher die Gleichung der Ellipse für das neue System, d. i. ihre Scheitelgleichung, zu erhalten, darf man nur in der Mittelpunktsgleichung x durch $x - a$ ersetzen. Man erhält dadurch

$$b^2 (x - a)^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \text{ oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

$$\text{also, wenn } \frac{b^2}{a} = p \text{ gesetzt wird, } y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2), \text{ oder}$$

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

§. **475.** Polargleichung der Ellipse.

Nimmt man (Fig. 213) den einen Brennpunkt B einer Ellipse als Pol und die Gerade BD, welche durch den diesem Brennpunkte zunächstliegenden Scheitel D geht, als Polarachse an, so ist für irgend einen Punkt M der Ellipse der Radiusvector $r = BM$ und der Winkel $\varphi = MBD$.

Dann ist $r = a - \frac{ex}{a}$ (§. 469) und $x = e + r \cos \varphi$; daher

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi}, \text{ oder } r = \frac{b^2}{a\left(1 + \frac{e}{a} \cos \varphi\right)}.$$

Beachtet man noch, dass $\frac{b^2}{a} = p$ und $\frac{e}{a} = \varepsilon$ (§. 471) ist, so ergibt sich als Polargleichung für die Ellipse

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

wo $\varepsilon < 1$ ist.

Aufgaben.

§. **476.** 1. Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu bestimmen, wenn die große Achse und die Brennpunkte gegeben sind.

Man nehme in der großen Achse zwischen den Brennpunkten beliebig viele Punkte an, deren jeder die große Achse in zwei Abschnitte theilt, und beschreibe mit dem einen Abschnitte als Halbmesser um den einen, mit dem zweiten Abschnitte um den andern Brennpunkt Kreisbogen; die Schnittpunkte derselben sind Punkte der Ellipse.

2. Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu bestimmen, wenn beide Achsen gegeben sind.

3. Bestimme die Gleichung einer Ellipse, in welcher die große Achse $= 8$ und ein Punkt $= (2, 1)$ ist.

4. Für welchen Punkt der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind Abscisse und Ordinate gleich? Wie lässt sich der Punkt durch Construction finden?

5. Welches ist die Scheitelgleichung einer Ellipse, deren kleine Achse $2y$ und deren Parameter $2p$ ist?

6. Die Coordinaten des Mittelpunktes einer Ellipse sind m und n, die Achsen derselben $2a$ und $2b$; welches ist die Gleichung der Ellipse, wenn ihre Achsen den Coordinatenachsen parallel laufen?

7. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 + 36x - 96y + 36 = 0$; bestimme a) die Coordinaten des Mittelpunktes, b) die Achsen.

8. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist flächengleich mit der Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes, dessen Grundflächen die Halbmesser a und b haben; wie groß ist die Höhe des Kegelstumpfes?

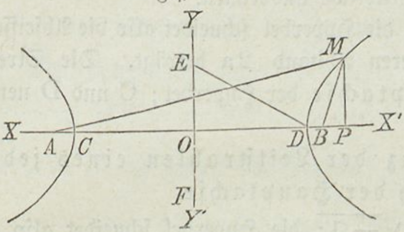
9. Die kleine Achse einer Ellipse ist $2b$; wie groß muss die große Achse sein, damit die Ellipse flächengleich sei mit der Manteloberfläche eines gleichseitigen Kegels, welcher die halbe große Achse der Ellipse zur Höhe hat?

VI. Die Hyperbel.

§. **477.** Eine Linie der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass die Differenz der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten constant ist, heißt eine Hyperbel.

Sind A und B (Fig. 215) die gegebenen Punkte, und ist $2a$ die constante Differenz der Abstände eines jeden Punktes der Hyperbel von jenen zwei Punkten, so ist M ein Punkt der Hyperbel, wenn $AM - BM = 2a$ ist.

Fig. 215.



Die beiden gegebenen Punkte A und B heißen die **Brennpunkte** der Hyperbel, die Strecken AM und BM die **Leitstrahlen** des Punktes M.

§. **478.** Bestimmung der Leitstrahlen der Hyperbel.

Nimmt man (Fig. 215) die Mitte O des Abstandes AB beider Brennpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten und OBX als Abscissenachse an, so erhält man, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird, für einen beliebigen Punkt M der Hyperbel analog, wie für die Ellipse in §. 469,

$$AM = \frac{ex}{a} + a \text{ und } BM = \frac{ex}{a} - a.$$

§. **479.** Gleichung der Hyperbel.

Aus dem Dreiecke APM (Fig. 215) erhält man auf gleiche Weise, wie für die Ellipse in §. 470,

$$(a^2 - e^2)\ x^2 + a^2y^2 = a^2\ (a^2 - e^2).$$

Während jedoch die Differenz $a^2 - e^2$ für die Ellipse positiv war, muss sie hier negativ angenommen werden; denn $AM - BM < AB$, also $2a < 2e$ oder $a < e$, somit auch $a^2 < e^2$. Setzt man daher $a^2 - e^2 = -b^2$, so ergibt sich als die gesuchte Gleichung der Hyperbel

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2, \text{ oder } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Diese Gleichung läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von jener der Ellipse nur dadurch, dass statt b^2 der letzteren in der ersteren $-b^2$ vorkommt.

§. **480.** Discussion der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

1. Diese Gleichung gibt

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ und } x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

So lange $x < a$ ist, fällt y imaginär aus; für solche Abscissen gibt es also keinen Punkt der Hyperbel. Zu jeder Abscisse $x > a$ gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von y; ebenso erhält man für jeden Wert von y zwei gleiche und entgegengesetzte Abscissen. Die Hyperbel besteht also aus zwei getrennten, zu beiden Seiten der Ordinatenachse symmetrisch liegenden Ästen; jeder dieser Äste wird durch die Abscissenachse in zwei symmetrische Theile getheilt. Der Anfangspunkt O der Coordinaten heißt deshalb der **Mittelpunkt**, und daher die Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ die **Mittelpunktsgleichung** der Hyperbel.

2. Da x und y jeden noch so großen Wert annehmen können, so folgt, dass sich die Äste der Hyperbel ins Unendliche ausdehnen.

3. Für $y = 0$ wird $x = \pm a$; die Hyperbel schneidet also die Abscissenachse in zwei Punkten D und C, deren Abstand $2a$ beträgt. Die Strecke $CD = 2a$ heißt die **erste** oder **Hauptachse** der Hyperbel; C und D nennt man die **Scheitel** derselben.

Daraus folgt: **Die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Hyperbel ist gleich der Hauptachse.**

4. Für $x = 0$ wird $y = \pm b\sqrt{-1}$; die Hyperbel schneidet also die Ordinatenachse nicht in reellen Punkten. Wegen der wichtigen Beziehung der Länge b zur Hyperbel trägt man jedoch auf die Ordinatenachse die Strecken $OE = OF = \pm b$ auf und nennt analog, wie bei der Ellipse, die Strecke $EF = 2b$ auch eine Achse, und zwar die **Nebenachse** der Hyperbel.

5. Aus $a^2 - e^2 = -b^2$ oder $e^2 = a^2 + b^2$ folgt

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

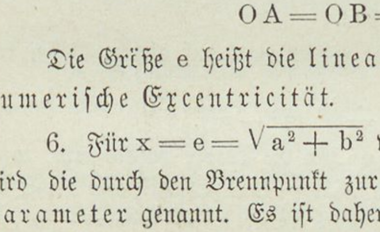
Die Größe e heißt die **lineare**, die Größe $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ die **numerische Excentricität**.

6. Für $x = e = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Auch in der Hyperbel wird die durch den Brennpunkt zur ersten Achse normal gezogene Sehne der **Parameter** genannt. Es ist daher, wenn man denselben mit $2p$ bezeichnet, $p = \frac{b^2}{a}$, d. h. **der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zu der halben Haupt- und der halben Nebenachse.**

7. Für $a = b$ wird die Hyperbel eine **gleichseitige** genannt; ihre Gleichung ist $x^2 - y^2 = a^2$.

8. Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel die Gleichung $y = a'x$ einer durch O (Fig. 216) gehenden Geraden M'M, so erhält man für die Schnittpunkte der beiden Linien:

Fig. 216.



$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2a'^2}}, \quad y = \frac{\pm aa'b}{\sqrt{b^2 - a^2a'^2}},$$

wobei das obere Zeichen dem Punkte M, das untere dem Punkte M' entspricht. Aus diesen Werten folgt, dass ein Schnitt einer solchen Geraden mit der Hyperbel nur möglich ist, wenn $a^2 > a^2a'^2$, oder $a' < \frac{b}{a}$ ist; wird $a' > \frac{b}{a}$, so fallen die Werte von x und y imaginär aus.

9. Besonders merkwürdig sind jene zwei Geraden, für welche $a' = \pm \frac{b}{a}$, also $b^2 = a^2 a'^2$ ist. Um diese Geraden zu construieren, errichte man in D auf OX eine Normale, trage auf ihr $DG = DG' = b$ auf und ziehe die Geraden GOH' und G'OH; man hat für diese in der That

$$\text{tang } GOD = \frac{b}{a}, \text{ und tang } HOD = -\frac{b}{a}.$$

Betrachtet man nun eine dieser Geraden, z. B. H'G, so ist, wenn $OP = x$, $MP = y$, $NP = y'$ gesetzt wird, $y' = \frac{b}{a} x$ und $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$; ferner, da M ein Punkt der Hyperbel ist, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; daher

$$y'^2 - y^2 = b^2, \text{ oder } y' - y = \frac{b^2}{y' + y}.$$

Wenn x größer wird, nehmen auch y und y' zu; mit dem Wachsen von $y' + y$ nimmt aber, da b^2 constant ist, die Differenz $y' - y = MN$ ab; dieselbe wird daher unendlich klein, wenn x unendlich wächst, d. h. die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr der Geraden H'G, ohne sie zu erreichen. Dasselbe gilt von der Geraden HG'.

Eine Gerade, welcher sich eine krumme Linie immer mehr nähert, ohne jedoch mit ihr je zusammenzutreffen, nennt man eine Asymptote der krummen Linie. Die Hyperbel hat zwei Asymptoten, deren Gleichungen sind:

$$y = + \frac{b}{a} . x \quad \text{und} \quad y = - \frac{b}{a} . x.$$

§. 481. Scheitelgleichung der Hyperbel.

Man erhält, analog wie für die Ellipse (§. 474),

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

§. 482. Polargleichung der Hyperbel.

Nimmt man (Fig. 215) den Brennpunkt B als Pol und BD als Polarachse an, so ist für irgend einen Punkt M der Hyperbel $r = BM$ und $\varphi = MBD$.

Aus $r = \frac{ex}{a} - a$ (§. 478) und $x = e - r \cos \varphi$ ergibt sich dann, analog wie für die Ellipse §. 475, auch für die Hyperbel die Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

wo jedoch $\varepsilon > 1$ ist.

Die vorstehende Polargleichung gilt für den Ast der Hyperbel, in welchem der als Pol gewählte Brennpunkt B liegt. Für den andern Ast der Hyperbel erhält man aus $r = -\frac{ex}{a} + a$ und $-x = r \cos \varphi - e$ die Polargleichung $r = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$.

Aufgaben.

§. 483. 1. Beliebig viele Punkte einer Hyperbel zu bestimmen, wenn die Hauptachse und die beiden Brennpunkte gegeben sind.

Man nehme in der Verlängerung der Hauptachse über die Brennpunkte hinaus beliebig viele Punkte an, beschreibe mit dem Abstande eines jeden von dem einen Scheitel um den einen Brennpunkt und mit dem Abstande desselben Punktes von dem zweiten Scheitel um den andern Brennpunkt Kreisbogen, welche sich schneiden; die Schnittpunkte sind Puntte der Hyperbel.

2. Ein Punkt (x', y') einer Hyperbel und die Hauptachse $2a$ sind gegeben; welches ist die Gleichung der Hyperbel?

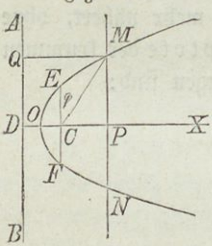
3. Für welchen Punkt der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ist die Ordinate gleich der Abscisse? (Wann ist die Lösung möglich?)

4. Die Normale vom Brennpunkte einer Hyperbel auf die Asymptote ist gleich der halben Nebenachse.

VII. Die Parabel.

§. 484. Eine Linie der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass jeder ihrer Punkte von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden denselben Abstand hat, heißt eine Parabel.

Fig. 217.



Ist C (Fig. 217) der gegebene Punkt und AB die gegebene Gerade, ferner $MQ \perp AB$, so ist M ein Punkt der Parabel, wenn $MC = MQ$ ist.

Der gegebene Punkt C heißt der Brennpunkt, die gegebene Gerade AB die Leitlinie der Parabel und CM der Leitstrahl des Punktes M.

§. 485. Bestimmung eines Leitstrahls der Parabel.

Man ziehe (Fig. 217) $CD \perp AB$ und nehme die Mitte O der Normalen CD als Anfangspunkt der Coordinaten und OCX als Abscissenachse an. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Parabel, also $CM = MQ$, wo $MQ \perp AB$, und sind $x = OP$, $y = MP$ die Coordinaten von M, so ergibt sich, wenn $OC = OD = \frac{p}{2}$ gesetzt wird,

$$CM = MQ = DP = OP + OD, \text{ also}$$

$$CM = x + \frac{p}{2}.$$

§. 486. Gleichung der Parabel.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPC (Fig. 217) erhält man

$$MP^2 = CM^2 - CP^2, \text{ oder } y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \text{ woraus}$$

$$y^2 = 2px$$

als die gesuchte Gleichung der Parabel folgt.

§. 487. Discussion der Gleichung $y^2 = 2px$.

1. Aus dieser Gleichung ergibt sich $y = \pm\sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werte von x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel dehnt sich also zu beiden Seiten der Abscissenachse OX in zwei

congruenten Ästen aus, und zwar ins Unendliche, da x und y jede beliebige Größe erreichen können. Die Gerade OX heißt die Achse der Parabel.

2. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; der Ursprung O der Coordinaten ist also ein Punkt der Parabel, er heißt der Scheitel, und daher die Gleichung $y^2 = 2px$ die Scheitelgleichung der Parabel.

3. Für ein negatives x wird y imaginär; negativen Abscissen entsprechen daher keine Punkte der Parabel.

4. Setzt man $x = \frac{p}{2} = OC$, so wird $y = CE = CF = \pm p$; daher ist $EF = 2p$. Die Größe $2p$ stellt also die durch den Brennpunkt normal auf die Achse gezogene Sehne EF dar; sie heißt der Parameter der Parabel.

5. Aus $y^2 = 2px$ folgt $2p : y = y : x$, d. h. die Ordinate eines jeden Punktes der Parabel ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Abscisse des Punktes.

6. Sind x' und x'' die Abscissen, y' und y'' die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte einer Parabel, deren Parameter $2p$ ist, so hat man

$$y'^2 = 2px' \quad \text{und} \quad y''^2 = 2px'', \quad \text{daher}$$

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

d. h. in der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die zugehörigen Abscissen.

Zusätze. 1. Läßt man in der Scheitelgleichung $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$ einer Ellipse oder Hyperbel a ohne Ende zunehmen, während p ungeändert bleibt, was bei gehöriger Annahme von b vermöge der Gleichung $\frac{b^2}{a} = p$ immer möglich ist, so wird für $a = \infty$ der Quotient $\frac{px^2}{a}$ sich ohne Ende der Null, und die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel ohne Ende jener der Parabel $y^2 = 2px$ nähern. Die Parabel kann demnach als eine Ellipse oder als eine Hyperbel angesehen werden, deren große oder erste Achse unendlich groß ist.

2. Alle bisher betrachteten krummen Linien lassen sich durch die gemeinsame Scheitelgleichung

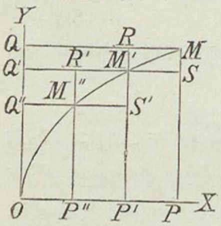
$$y^2 = 2px + qx^2$$

darstellen, in welcher p für den Kreis den Halbmesser, für die übrigen krummen Linien den halben Parameter bedeutet, und q für den Kreis $= -1$, für die Ellipse $= -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}$, also negativ und absolut < 1, für die Hyperbel $= \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$, also positiv und für die Parabel $= 0$ ist.

§. **488.** Der Flächeninhalt des zwischen zwei zusammengehörigen Coordinaten eingeschlossenen Parabelstückes ist gleich $^2/_3$ des Productes aus diesen Coordinaten.

Es sei OM (Fig. 218) ein parabolischer Bogen. Zieht man durch beliebig viele Punkte M, M', M'',... Normale auf die Abscissenachse OX und auf die Ordinatenachse OY, so ist, wenn $OP = x$, $MP = y$, $OP' = x'$, $M'P' = y' \ldots$ gesetzt wird,

Fig. 218.



$$\text{Rechteck } PR = (x - x')\,y = \frac{(y^2 - y'^2)\,y}{2p},$$

$$\text{Rechteck } QS = x\,(y - y'); \text{ daher}$$

$$\frac{PR}{QS} = \frac{(y + y')\,y}{2px}.$$

Je näher man die Punkte der Parabel annimmt, desto mehr nähern sich auch die Coordinaten derselben, desto mehr nähert sich dann das Verhältnis der Rechtecke PR und QS dem Grenzwerte

$$\frac{(y + y')\,y}{2px} = \frac{2y^2}{2px} = 2.$$

Demselben Grenzwerte 2 nähert sich unter dieser Voraussetzung auch das Verhältnis zwischen je zwei folgenden entsprechenden Rechtecken $P'R'$ und $Q'S'$, u. s. w., daher auch das Verhältnis zwischen der Summe der Rechtecke $PR + P'R' + \ldots$ und der Summe der Rechtecke $QS + Q'S' + \ldots$. Der Grenzwert dieses letzten Verhältnisses ist aber zugleich das Verhältnis der Fläche OMP zu der Fläche OMQ; somit ist das Verhältnis $\frac{OMP}{OMQ} = 2$.

Hieraus folgt

$$2\,OMQ = OMP, \text{ daher } 3\,OMQ = OMP + OMQ = xy; \text{ also}$$

$$OMQ = \tfrac{1}{3}\,xy, \quad \text{und} \quad OMP = \tfrac{2}{3}\,xy.$$

§. 489. Polargleichung der Parabel.

Nimmt man (Fig. 217) den Brennpunkt C als den Pol und die CO als die Polarachse an, so ist für den Punkt M der Parabel der Radiusvector $r = CM$ und $\varphi = MCO$.

Nach §. 485 ist $r = x + \frac{p}{2}$; daher wegen $x = \frac{p}{2} - r \cos \varphi$ auch $r = p - r \cos \varphi$, woraus sich

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$$

als Polargleichung der Parabel ergibt.

Zusatz. Alle bisher betrachteten krummen Linien lassen sich durch die gemeinsame Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

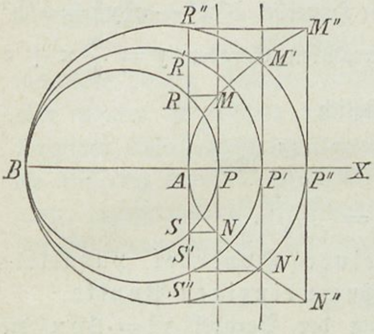
darstellen, in welcher p für den Kreis den Halbmesser, für die übrigen krummen Linien den halben Parameter bedeutet, und ε für den Kreis $= 0$, für die Ellipse < 1, für die Hyperbel > 1, und für die Parabel $= 1$ ist.

Aufgaben.

§. 490. 1. Beliebig viele Punkte einer Parabel zu bestimmen, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind.

Man bestimme zuerst den Scheitel und die Achse; dann nehme man in der Achse beliebig viele Punkte an, ziehe durch dieselben Normale auf die Achse und beschreibe mit dem Abstande jedes Punktes von der Leitlinie als Halbmesser um den Brennpunkt Kreisbogen, welche die entsprechende Normale schneiden; die Schnittpunkte sind Punkte der Parabel.

Fig. 219.



2. Wenn der Parameter gegeben ist, beliebig viele Punkte der Parabel zu bestimmen.

Die Auflösung beruht auf §. 487, 5.

Es sei AB (Fig. 219) der Parameter, A der Scheitel und AX die Achse der Parabel. Man nehme beliebige Abscissen AP, AP',... an und beschreibe über BP, BP',.... als Durchmesser Kreise, welche die in A auf AB errichtete Normale in den Punkten R und S, R' und S'... schneiden. Zieht man nun durch diese Punkte Parallele zur Achse, so werden diese die in P, P'.. auf die Achse errichteten Normalen in den Punkten M und N, M' und N'... schneiden; diese sind dann Punkte der Parabel.

3. Die Gleichung einer Parabel sei $y^2 = 2x$; wie groß ist der Flächeninhalt des von dem Parameter begrenzten Parabelstückes?

4. Der Parameter einer Parabel, deren Achse mit der Abscissenachse parallel läuft, ist gleich $2p$, die Coordinaten des Scheitels sind m und n; welches ist die Gleichung der Parabel?

5. Die Gleichung einer Parabel ist $x^2 - 4y - 6x = 3$; bestimme a) die Coordinaten des Scheitels, b) den Parameter.

6. Ein Körper, welcher die Höhe h über dem Horizonte hat, erhält durch eine Kraft eine gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit c (in 1 Zeitsecunde) und vermöge der Schwerkraft eine verticale Bewegung mit der Beschleunigung g. a) Welche Linie durchläuft er? b) Nach welcher Zeit, und c) in welcher horizontalen Entfernung vom Anfangspunkte langt er in der Horizontalebene an? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

VIII. Tangenten und Normalen der krummen Linien.

§. 491. Die Gerade und die krummen Linien.

Verbindet man die Gleichungen zweier Linien, so sind die sich ergebenden Werte von x und y die Coordinaten der den beiden Linien gemeinsamen Punkte.

Ist eine der beiden Linien eine Gerade und die andere ein Kreis, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, so erhält man für x und y im allgemeinen zwei Paare von zusammengehörigen Werten. Sind diese Werte reell und verschieden, so haben die beiden Linien zwei gemeinsame Punkte, d. i. die Gerade schneidet die krumme Linie in zwei Punkten. Fallen die beiden Werte in einen einzigen zusammen, so haben die zwei Linien nur einen gemeinsamen

Punkt, d. i. die Gerade **berührt** die krumme Linie in jenem Punkte. Sind endlich die Werte von x und y imaginär, so haben die beiden Linien keinen gemeinsamen Punkt.

Ausnahmen kommen in besonderen Fällen bei der Hyperbel und bei der Parabel vor.

1. Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ die Gleichung einer zu einer Asymptote parallelen Geraden $y = \frac{b}{a}x + c$ oder $y = -\frac{b}{a}x + c$, so erhält man bezüglich

$$x = -\frac{a(b^2 + c^2)}{2bc},\quad y = \frac{c^2 - b^2}{2c},\ \text{oder}$$

$$x = \frac{a(b^2 + c^2)}{2bc},\quad y = \frac{c^2 - b^2}{2c}.$$

Jede mit einer Asymptote einer Hyperbel parallele Gerade schneidet die Hyperbel in einem einzigen Punkte.

2. Verbindet man mit der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ die Gleichung einer zur Achse parallelen Geraden $y = c$, so ergibt sich

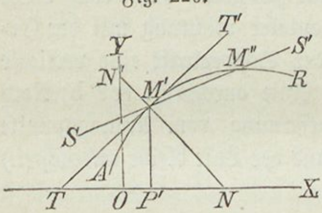
$$x = \frac{c^2}{2p},\quad y = c.$$

Jede zur Achse einer Parabel parallele Gerade schneidet also die Parabel in einem einzigen Punkte.

§. 492. Allgemeiner Begriff der Tangente.

Es sei AR (Fig. 220) irgend eine krumme Linie und M′ der Punkt, in welchem sie von der Geraden TT′ berührt werden soll. Man denke sich durch diesen Berührungspunkt M′ und durch einen benachbarten Punkt M″ zuerst eine Secante SS′ gezogen und diese dann um M′ so gedreht, dass M″ dem M′ immer näher rückt; dann wird sich auch die Secante SS′ der Tangente TT′ immer mehr nähern und endlich mit ihr zusammenfallen, wenn M″ auf den Berührungspunkt M′ zu liegen kommt.

Fig. 220.



Man kann daher die **Tangente** einer krummen Linie als eine **Secante** derselben betrachten, welche durch die Drehung um den einen Schnittpunkt in eine solche Lage gebracht wurde, dass der zweite Schnittpunkt mit dem ersten zusammenfällt.

Eine im Berührungspunkte M′ auf der Tangente normale Gerade M′N heißt eine **Normale** der krummen Linie.

Bei der Berührung einer krummen Linie mit einer Geraden sind nachstehende vier Größen von Wichtigkeit:

1. Die **Tangente** M′T, d. i. die Länge der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zum Schnittpunkte mit der Abscissenachse;

2. die Subtangente P'T, d. i. die Projection der Tangente auf die Abscissenachse;

3. die Normale M'N, d. i. die Länge der Normallinie zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenachse; und

4. die Subnormale P'N, d. i. die Projection der Normale auf die Abscissenachse.

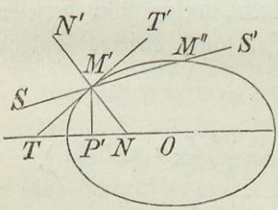
Von diesen vier Berührungsgrößen sind die Tangente und die Normale wesentlich positiv. Die Subtangente und die Subnormale dagegen sind positiv oder negativ, je nachdem sie von der Ordinate aus nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung liegen; sie werden in jedem Falle bestimmt durch die Differenz $x - x'$, in welcher x die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente, beziehungsweise der Normale, mit der Abscissenachse, und x' die Abscisse des Berührungspunktes bezeichnet.

1. Ellipse und Kreis.

§. **493.** Gleichungen der Tangente und der Normale.

Sind x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier benachbarter Punkte M' und M'' (Fig. 221) einer Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, so hat man für die durch M' und M'' gehende Secante SS' die Gleichung

Fig. 221.



$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$

wobei zugleich die Bestimmungsgleichungen $b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$, $b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$ stattfinden, durch deren Subtraction man

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder
$$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0$$

und daher
$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}$$

erhält. Substituiert man diesen Wert in die obige Gleichung der Secante SS', so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$y - y' = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x').$$

1. Fällt nun der Punkt M'' mit M' zusammen, so kommt die Secante SS' in die Lage der Tangente TT'; setzt man also in der letzten Gleichung $x'' = x'$, $y'' = y'$, so erhält man für die Tangente TT' die Gleichung

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')\ldots 1),$$

welche man auch so darstellen kann:

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2.$$

In dieser letzteren Form läßt sich die Gleichung der Tangente unmittelbar aus jener der Ellipse $b^2xx + a^2yy = a^2b^2$ leicht ableiten, indem man die Quadrate xx und yy durch die Producte xx' und yy' ersetzt.

2. Für die im Punkte M′ auf die Tangente errichtete Normale NN′ ergibt sich (§. 456, 2) die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x') \ldots 2).$$

Zusatz. Für b = a geht die Ellipse in einen Kreis über. Für den Kreis ist daher

a) die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'), \text{ oder } xx' + yy' = a^2;$$

b) die Gleichung der Normale

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'), \text{ oder } y = \frac{y'}{x'}x,$$

woraus folgt, dass jede Normale des Kreises durch den Mittelpunkt geht.

§. **494.** Länge der vier Berührungsgrößen.

1. Setzt man in der Gleichung der Tangente $y = 0$, so erhält man $x = \frac{a^2}{x'}$ als die Abscisse des Punktes T (Fig. 221); folglich ist

$$\text{Subtangente } P'T = x - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Subtangente von der kleinen Achse 2b unabhängig ist, dass alle Ellipsen, somit auch der Kreis, welche über derselben großen Achse beschrieben werden, für gleiche Abscissen auch dieselbe Subtangente haben.

2. Für die Tangente M′T erhält man:

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T'^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}\right),$$

daher

$$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}.$$

3. Setzt man in der Gleichung der Normale $y = 0$, so ergibt sich für den Punkt N der Abscisse $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x'$; daraus folgt

$$\text{Subnormale } P'N = x - x' = -\frac{b^2 x'}{a^2}.$$

4. Zur Bestimmung der Normale M′N hat man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4}, \text{ daher}$$

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

Zusatz. Für b = a, d. i. für den Kreis ist

a) die Subtangente $= \frac{a^2 - x'^2}{x'}$; b) die Tangente $= \frac{ry'}{x'}$;

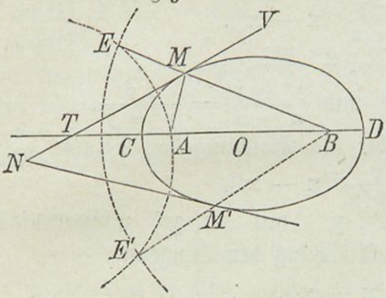
c) die Subnormale $= -x'$; d) die Normale $= r$.

§. **495.** Jede Tangente der Ellipse bildet mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

Es seien (Fig. 222) AM und BM die Leitstrahlen des Punktes M = (x′, y′) einer Ellipse, deren Mittelpunkt O ist.

Die Gleichung der durch M an die Ellipse gezogenen Tangente ist $b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2$. Aus ihr ergibt sich für $y = 0$ als die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente mit der großen Achse $x = \frac{a^2}{x'}$.

Fig. 222.



Ist nun AME ein Außenwinkel des Dreieckes ABM, MT die Halbierungslinie dieses Winkels und T ihr Schnittpunkt mit der großen Achse, so ist nach §. 120, 2

$$AT : BT = AM : BM,$$

oder mit Rücksicht auf §. 469

$$(OT - e) : (OT + e) = \left(a - \frac{ex'}{a}\right) : \left(a + \frac{ex'}{a}\right),$$

woraus auch $TO = \frac{a^2}{x'}$ folgt.

Der Punkt, in welchem die durch M gezogene Tangente die große Achse schneidet, ist also identisch mit dem Punkte T; d. i. die Tangente im Punkte M ist die Halbierungslinie MT des Winkels AME.

Da nun EMT = BMV und nach der Voraussetzung AMT = EMT ist, so ist auch AMT = BMV.

Dieser Satz erklärt folgende Erscheinungen, welche auf dem Reflexionsgesetze beruhen. Von einer elliptischen Spiegelfläche werden die von einem Brennpunkte auffallenden Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen so reflectiert, dass sie sich im andern Brennpunkte vereinigen. Erregt man in einem elliptisch geformten Gefäße, worin sich eine Flüssigkeit befindet, in dem einen Brennpunkte eine Wellenbewegung, so treffen die reflectierten Wellen im andern Brennpunkte zusammen.

2. Hyperbel.

§. **496.** Tangenten und Normalen der Hyperbel.

Die Gleichungen der Tangente und der Normale, sowie die Längen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale lassen sich hier in analoger Weise wie bei der Ellipse (§§. 493 und 494) entwickeln; sie können aber auch aus den dort gewonnenen Resultaten sofort erhalten werden, wenn man in denselben b^2 mit $-b^2$ vertauscht.

§. **497.** Jede Tangente der Hyperbel bildet mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

Der Beweis wird unter Beziehung auf §. 120, 1 analog wie zu §. 495 geführt.

Auf diesen Satz gründet sich die optische Erscheinung, dass von einem hyperbolisch geschliffenen Hohlspiegel Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkte ausgehen, so reflectiert werden, als ob sie vom andern Brennpunkte herkämen.

3. Parabel.

§. **498.** Gleichungen der Tangente und der Normale.

Die Gleichung der Secante, welche durch die Punkte (x', y') und (x'', y'') der Parabel $y^2 = 2\,px$ geht, ist

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x').$$

Wegen $y'^2 = 2\,px'$ und $y''^2 = 2\,px''$ ist:

$$y''^2 - y'^2 = 2\,p\,(x'' - x') \text{ und } \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2\,p}{y'' + y'}.$$

Durch Substitution ergibt sich daher als Gleichung der Secante

$$y - y' = \frac{2\,p}{y'' + y'}\,(x - x').$$

1. Läſst man nun den Punkt (x'', y'') mit (x', y') zusammenfallen, so wird $y'' = y'$, und man erhält als Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{p}{y'}\,(x - x') \ldots .\ 1),$$

oder

$$yy' = 2\,p \,.\, \frac{x + x'}{2}.$$

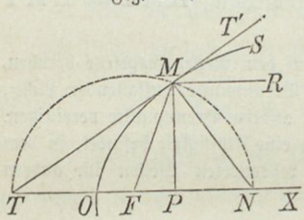
2. Für die zu dieser Tangente gehörige Normale folgt aus 1)

$$y - y' = -\frac{y'}{p}\,(x - x') \ldots .\ 2).$$

§. **499.** Länge der vier Berührungsgrößen.

1. Aus der Gleichung der Tangente ergibt sich für den Punkt T (Fig. 223), indem man $y = 0$ setzt, $x = -x'$; daher ist

Fig. 223.



$$\text{Subtangente } PT = x - x' = -2x'.$$

In der Parabel ist die Subtangente eines Punktes (dem absoluten Werte nach) der doppelten Abscisse desselben gleich.

2. Für die Tangente MT hat man $MT^2 = MP^2 + TP^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2$, somit

$$\text{Tangente } MT = \sqrt{2x'\,(p + 2x')}.$$

3. Setzt man in der Gleichung der Normale $y = 0$, so erhält man für den Punkt N die Abscisse $x = x' + p$; daher ist

$$\text{Subnormale } PN = x - x' = p.$$

In der Parabel ist die Subnormale constant und gleich dem halben Parameter.

4. Für die Normale MN erhält man

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y'^2 + p^2 = 2\,px' + p^2, \text{ alſo}$$

$$\text{Normale } MN = \sqrt{p\,(p + 2x')}.$$

Zuſatz. Der Berührungspunkt und die Fußpunkte der Tangente und der Normale in der Achse sind von dem Brennpunkte der Parabel gleich weit entfernt.

Denn wegen $FP = x' - \frac{p}{2}$ ist $MF = TF = NF = x' + \frac{p}{2}$.

§. **500.** Die Tangente einer Parabel bildet mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und mit der durch diesen Punkt zur Achse parallelen Geraden gleiche Winkel.

Da nach §. 499, Zus., das $\triangle$ FMT (Fig. 223) gleichschenklig ist, so ist der W. FMT = FTM; nun ist auch W. RMT′ = FTM; daher FMT = RMT′.

Auf diesem Satze beruht die Anwendung parabolischer Hohlspiegel. Fallen nämlich Licht-, Wärme- und Schallstrahlen parallel zur Achse auf den Spiegel auf, so vereinigen sie sich nach der Reflexion im Brennpunkte. Umgekehrt: Die vom Brennpunkte ausgehenden Strahlen werden von dem Spiegel parallel zur Achse reflectiert.

Aufgaben.

§. **501.** Kreis.

1. Wie viele Punkte hat die Gerade

a) $y = x + 2$, b) $4x + 3y = 50$, c) $3y = x + 40$

mit einem Kreise, dessen Gleichung $x^2 + y^2 = 100$ ist, gemeinsam?

2. Der Kreis $4x^2 + 4y^2 = 25$ wird von der Geraden $2y = 14x - 25$ geschnitten; bestimme a) die Coordinaten der beiden Schnittpunkte, b) die Länge der diese Punkte verbindenden Sehne, c) den zu ihr gehörenden Centriwinkel.

3. An den Kreis $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ wird im Punkte (x', y') eine Tangente gezogen; welches ist die Gleichung derselben?

4. An den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ sind in den Punkten $(-4, 3)$ und $(-3, 4)$ Tangenten gelegt; bestimme a) die Gleichungen der beiden Tangenten, b) den von ihnen eingeschlossenen Winkel.

5. An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ sollen von einem außerhalb desselben liegenden Punkte (m, n) Tangenten gezogen werden; bestimme a) die Coordinaten der Berührungspunkte, b) die Gleichung der Berührungssehne.

Die Gleichung der Tangente ist $xx' + yy' = r^2 \ldots 1)$. Da die Tangente durch den Punkt (m, n) gehen soll, so muss $mx' + ny' = r^2 \ldots 2)$, und weil der Berührungspunkt (x', y') dem Kreise angehört, auch $x'^2 + y'^2 = r^2 \ldots 3)$ sein. Aus 2) und 3) sind nun x' und y' zu bestimmen und dann die Werte in 1) einzusetzen.

6. Die Gerade $2x + y = 10$ schneidet den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ in zwei Punkten; durch diese Schnittpunkte werden Tangenten an den Kreis gelegt. In welchem Punkte schneiden sich die beiden Tangenten?

7. Die Gleichung der Polare des Punktes (m, n) in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zu finden (§. 143).

$$mx + ny = r^2.$$

8. Die Gerade $y = ax + b$ wird als Polare bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ betrachtet; bestimme die Coordinaten des zugehörigen Poles.

$$-\frac{ar^2}{b}, \ \frac{r^2}{b}.$$

9. An den Kreis $x^2 + y^2 = 100$ ist eine Tangente zu ziehen, welche mit der Geraden $y = \frac{3x}{4} + 15$ parallel ist; wie lautet ihre Gleichung?

$$y = \frac{3x}{4} \pm \frac{25}{2}.$$

10. Wie lang ist die den beiden Kreisen $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ gemeinsame Sehne?

11. Wie lautet die Potenzlinie der Kreise

$$(x + p)^2 + y^2 = r^2, \quad (x - p)^2 + y^2 = \varrho^2?$$

12. Wie lauten die Potenzlinien der Kreise

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3, \quad (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2?$$

und wie die Coordinaten des Potenzcentrums?

§. **502.** Ellipse.

1. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 = 144$, die Gleichung einer Geraden

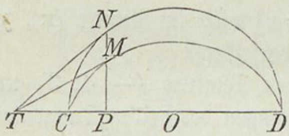
a) $y = 3x + 5$, b) $y = x + 5$, c) $y = 2x - 9$;

wie viele Punkte hat die Ellipse mit jeder dieser Geraden gemeinsam?

2. Durch einen Punkt M der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Auflösung 1. Verlängert man (Fig. 222) den Leitstrahl BM über M hinaus, so darf man, um die Lage der Tangente MN zu erhalten, (nach §. 495) nur den Winkel AME halbieren. Man macht daher ME = MA und beschreibt um E und A mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in N schneiden; die durch N und M gezogene Gerade NM ist die verlangte Tangente.

Fig. 224.



Auflösung 2. Nach §. 494, Zusatz, indem man (Fig. 224) über der großen Achse CD einen Kreis beschreibt, die Ordinate MP bis N verlängert, durch N eine Tangente NT an den Kreis construiert und TM zieht.

3. Aus einem Punkte N (Fig. 222) außerhalb der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Hier kommt es mit Rücksicht auf die 1. Auflösung der Aufgabe 2 offenbar nur darauf an, einen Punkt E zu finden, der von N ebenso weit absteht, als der eine Brennpunkt A, und dessen Entfernung von dem anderen Brennpunkte B der großen Achse gleich ist. Diesen Punkt findet man aber in dem Durchschnitte der um N mit dem Halbmesser NA, und um B mit dem Halbmesser CD beschriebenen Kreisbogen. Zieht man die Gerade EB, welche die Ellipse in M schneidet, so ist M der Berührungspunkt und NM die gesuchte Tangente.

Da jene zwei Bogen auch noch einen zweiten Schnittpunkt E' geben, so wird durch die Gerade E'B noch ein zweiter Berührungspunkt M' bestimmt, woraus folgt, dass von dem Punkte N zwei Tangenten NM und NM' an die Ellipse gezogen werden können.

4. Welches ist die Gleichung der Tangente an die Ellipse $x^2 + 25y^2 = 25$ im Punkte $(-3, \frac{4}{5})$?

5. An die Ellipse $4x^2 + 25y^2 = 100$ werden durch den Punkt $(4, \frac{6}{5})$ eine Tangente und eine Normale gezogen; wie groß ist a) die Subtangente, b) die Tangente, c) die Subnormale, d) die Normale?

6. Wie verhalten sich die Abschnitte, in welche die Abscisse eines Punktes der Ellipse durch die Normale dieses Punktes getheilt wird?

6 a. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche vom Punkte (3, 8) an die Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ gezogen werden können? (Die Auflösung ist analog jener der Aufg. 5 im §. 501.)

6 b. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, welche mit der Geraden $5y + 4x = a$ parallel sind?

7. An die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 100$ werden durch die Punkte (8, 3) und (6, — 4) Tangenten gezogen; bestimme a) die Coordinaten ihres Schnittpunktes, b) den von ihnen gebildeten Winkel.

8. Die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkte einer Ellipse auf die durch den Punkt (x', y') derselben gezogene Tangente zu bestimmen.

9. Das Product aus der Normale eines Punktes der Ellipse und der Senkrechten vom Mittelpunkte auf die Tangente desselben Punktes ist constant und gleich dem Quadrate der halben kleinen Achse.

10. Die Länge der Senkrechten von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die durch den Punkt (x', y') derselben gezogene Tangente zu finden.

11. Das Product aus den Senkrechten von den Brennpunkten einer Ellipse auf eine Tangente derselben ist constant und gleich dem Quadrate der halben kleinen Achse.

12. Die Coordinaten des Fußpunktes der Senkrechten von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die durch den Punkt (x', y') derselben gezogene Tangente zu bestimmen.

13. Der Abstand des Fußpunktes der von einem Brennpunkte einer Ellipse auf eine Tangente gezogenen Senkrechten vom Mittelpunkte der Ellipse ist gleich der halben großen Achse.

14. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Curven $x^2 + y^2 = 4$, $3y^2 + 5y^2 = 15^2$?

§. **503.** Hyperbel.

1. Die Gleichung einer Hyperbel ist $4x^2 - 9y^2 = 36$; wie viele Punkte hat die Gerade

a) $y = \frac{4x}{3} + 2$, b) $y = 2x - 8$, c) $6y = 5x - 9$

mit der Hyperbel gemeinsam?

2. Durch einen Punkt der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

Die Auflösung ist analog der Auflösung 1 zu §. 502, Aufg. 2.

2 a. An die Hyperbel $9x^2 - 16y^2 = 144$ ist im Punkte $(\frac{20}{3}, 4)$ die Tangente zu ziehen und deren Gleichung anzugeben.

3. Von einem außerhalb der Hyperbel liegenden Punkte an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Wird analog wie Aufg. 3 in §. 502 aufgelöst.

3 a. Wie lauten die Gleichungen der beiden Tangenten, welche vom Punkte $(8, \frac{21}{4})$ an die Hyperbel $9x^2 - 16y^2 = 144$ gezogen werden können?

4. Der zwischen den Asymptoten liegende Theil einer Tangente der Hyperbel wird im Berührungspunkte halbiert.

5. Innerhalb welches Winkels liegen die beiden Äste der Hyperbel

$$4x^2 - 9y^2 = 36?$$

6. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Curven

$$x^2 + y^2 = 60\tfrac{4}{9}, \quad 9x^2 - 16y^2 = 144?$$

§. 504. Parabel.

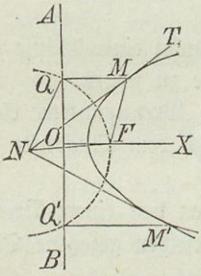
1. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 5x$; wie viele Punkte hat die Gerade

a) $4y = 5x + 4$, b) $y = 2x - 1$, c) $y = 3x + 2$

mit der Parabel gemeinsam?

2. Durch einen Punkt M der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Fig. 225.



Auflösung 1. Durch Halbierung des Winkels FMQ (Fig. 225) nach §. 500, indem man um F und Q mit demselben Halbmesser Kreisbogen beschreibt, welche sich in N schneiden, und dann die NM zieht.

Auflösung 2. Mit Rücksicht auf §. 499, 1. Man mache (Fig. 223) OT = OP und ziehe TM.

Auflösung 3. Nach §. 499, Zusatz. Man beschreibe (Fig. 223) um den Brennpunkt F mit dem Leitstrahle FM als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die verlängerte Achse in T schneidet, und ziehe TM.

2 a. Wie lautet die Gleichung der Tangente, welche im Punkte (2, 3) an die Parabel mit dem Parameter $4\frac{1}{2}$ gezogen wird?

3. Aus einem Punkte N (Fig. 225) außerhalb der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Mit Beziehung auf die 1. Auflösung der Aufgabe 2 handelt es sich hier nur darum, den Punkt Q zu bestimmen, durch welchen die mit der Achse parallele Gerade QM gezogen werden muss, damit sie den Berührungspunkt M treffe. Der Punkt Q liegt nun in der Leitlinie und ist von N ebenso weit entfernt, als der Punkt F. Um daher von N eine Tangente an die Parabel zu ziehen, beschreibt man um N mit dem Halbmesser NF einen Kreis, welcher die Leitlinie in Q schneidet, zieht QM $\parallel$ OX und sodann die Gerade NM.

Da jener Kreis die Leitlinie auch noch in einem zweiten Punkte Q' schneidet, so erhält man, wenn Q'M' $\parallel$ OX gezogen wird, einen zweiten Berührungspunkt M' und es ist auch NM' eine Tangente der Parabel.

4. Die Gleichung einer Parabel sei $y^2 = 16x$; suche die Gleichung derjenigen Tangente der Parabel, welche zu der Geraden $y = x - 3$ parallel ist.

5. An eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = 4x$ ist, seien durch zwei ihrer Punkte, deren Ordinaten 2 und -4 sind, Tangenten gezogen; bestimme a) den Schnittpunkt der beiden Tangenten, b) den von ihnen gebildeten Winkel, c) den Flächeninhalt des von den Tangenten und der Berührungssehne begrenzten Dreieckes.

6. Die Senkrechte vom Brennpunkte einer Parabel auf eine Tangente derselben ist die mittlere Proportionale zwischen dem entsprechenden Leitstrahl und dem vierten Theile des Parameters.

7. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Curven

$$y^2 = 2x \text{ und } x^2 + y^2 = 8?$$

8. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche in den Schnittpunkten an die beiden Curven $4x^2 - 9y^2 = 36$ und $y^2 = \frac{10}{9}x$ gezogen werden können, und unter welchem Winkel schneiden sich diese Tangenten?

IX. Allgemeine Untersuchung der Linien zweiten Grades.

§. **505.** Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten für ein bestimmtes Parallelsystem wird durch die Transformation derselben für ein anderes Parallelsystem nicht geändert. Denn ist die ursprüngliche Gleichung zwischen x und y vom m ten Grade, so ist erstlich von selbst klar, dass nach den im §. 440 angegebenen Substitutionen die neue transformierte Gleichung kein Glied enthalten könne, in welchem die Summe der Potenzexponenten von x und y größer als m wäre. Die Transformation kann aber den Grad der Gleichung auch nicht erniedrigen, weil man durch Rück-Transformation der neuen Gleichung für das frühere System nothwendig die ursprüngliche Gleichung wieder erhalten muss, und daher, wenn die erste Transformation den Grad der Gleichung herabgemindert hätte, die zweite Rück-Transformation ihn wieder erhöhen müsste, was jedoch nach dem Obigen nicht möglich ist.

Da hiernach der Grad der Gleichung einer Linie von der Lage des Parallel-Coordinatensystems unabhängig ist und einzig durch den Charakter der Linie bestimmt wird, so pflegt man die Linien nach dem Grade ihrer entsprechenden Gleichungen einzutheilen. Die gerade Linie ist eine Linie des ersten Grades, und zwar die einzige Linie dieses Grades; der Kreis, die Ellipse, Hyperbel und Parabel gehören zu den Linien des zweiten Grades. Diese letzteren sollen nun hier ganz allgemein untersucht werden.

§. **506.** Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots 1)$$

zwischen den Coordinaten x, y eines Punktes der Ebene, wo A, B, C, ... F reelle Coefficienten bedeuten.

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung, in welcher man unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraussetzen kann, kennen zu lernen, wird man dieselbe durch Transformierung der Coordinaten auf eine einfachere Form zu bringen suchen, indem man Ursprung und Achsenrichtung des neuen Systems so wählt, dass gewisse Glieder der transformierten Gleichung verschwinden.

Transformiert man zunächst die Coordinaten so, dass der Ursprung unverändert bleibt und die neue Abscissenachse mit der früheren den Winkel α bildet, so muss man (§. 440) statt x und y bezüglich

$$x \cos\alpha - y \sin\alpha \text{ und } x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

setzen. Man erhält dadurch eine neue Gleichung

$$Mx^2 + Oxy + Ny^2 + Qx + Ry + F = 0, \ldots 2,$$

in welcher

$$M = A \cos\alpha^2 + B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin\alpha^2,$$
$$O = -2(A - C) \sin\alpha \cos\alpha + B(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2),$$
$$N = A \sin\alpha^2 - B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos\alpha^2,$$
$$Q = D \cos\alpha + E \sin\alpha, \quad R = -D \sin\alpha + E \cos\alpha$$

ist und F den früheren Wert beibehält.

Um nun aus dieser transformierten Gleichung xy wegzuschaffen, muſs man dem noch unbestimmten Winkel α einen solchen Wert beilegen, daſs $O = -2(A-C)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) = 0$, oder was dasselbe ist, daſs $-(A-C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$ werde; man muſs also

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{A-C} \ldots 3)$$

setzen. Da die Tangente eines Winkels jeden reellen Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so läſst sich α immer so bestimmen, daſs der Gleichung 3) genüge geschieht. Dadurch geht die Gleichung 2) über in

$$Mx^2 + Ny^2 + Qx + Ry + F = 0 \ldots 4).$$

Zur Bestimmung von M und N ergibt sich aus den obigen Ausdrücken

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha.$$

Nun ist $\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\alpha^2}} = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$,

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\alpha^2}} = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}};$$ daher

$$M - N = \pm\sqrt{(A-C)^2 + B^2}.$$

Daraus folgt

$$M = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A-C)^2 = B^2}}{2},\quad N = \frac{(A+C)^2 \mp \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2} \ldots 5)$$

und $$MN = \frac{4AC - B^2}{4} = -\frac{B^2 - 4AC}{4} \ldots 6).$$

Die weiteren Transformationen hängen von der Beschaffenheit der Coefficienten M und N, oder mit Rücksicht auf die Gleichung 6) von der Beschaffenheit des Ausdruckes $B^2 - 4AC$ ab. In dieser Beziehung sind drei Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Es sei $B^2 - 4AC$ negativ.

Transformiert man die Gleichung 4), um die Glieder x und y wegzuschaffen, mit Beibehaltung der Achsenrichtung für einen neuen Ursprung (m, n), indem man statt x und y die Werte $x + m$ und $y + n$ substituiert, so ergibt sich die Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 + (2Mm + Q)x + (2Nn + R)y +$$
$$(Mm^2 + Nn^2 + Qm + Rn + F) = 0.$$

Damit die Coefficienten von x und y verschwinden, wählt man die noch unbestimmten Größen m und n so, daſs $2Mm + Q = 0$ und $2Nn + R = 0$ werde. Hieraus erhält man

$$m = -\frac{Q}{2M} \quad \text{und} \quad n = -\frac{R}{2N},$$

und daher als transformierte Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 = S \ldots 7),$$

wo $S = -(Mm^2 + Nn^2 + Qm + Rn + F)$ ist.

Diese Transformation ist hier immer möglich, da M und N unter der obigen Voraussetzung $B^2 - 4AC < 0$ im Hinblick auf die Gleichung 6) beide von Null verschieden sein müssen.

In der Gleichung 7) kann das erste Glied M stets als positiv angenommen werden; dann muss wegen $MN = \frac{4AC - B^2}{4}$ auch N positiv sein.

Es kommt noch die Beschaffenheit von S in Betracht.

1. Ist S positiv, so erhält man aus der Gleichung $Mx^2 + Ny^2 = S$ $\frac{M}{S}x^2 + \frac{N}{S}y^2 = 1$, und für $\frac{S}{M} = a^2$, $\frac{S}{N} = b^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, oder

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ldots . 8),$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b entspricht (§. 470).

Wenn in diesem Falle $M = N$ ist, so wird auch $a = b$, und man erhält $x^2 + y^2 = a^2$, nämlich die Gleichung des Kreises. Für den Kreis muss daher nach den Gleichungen 5)

$$\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = 0, \text{ d. i. } A = C \text{ und } B = 0 \text{ sein.}$$

2. Ist $S = 0$, so ergibt sich $Mx^2 + Ny^2 = 0$, welche Gleichung nur für $x = 0$ und $y = 0$ befriedigt werden kann; sie gehört also dem Anfangspunkte der neuen Coordinaten selbst an.

3. Ist S negativ, so kann der Gleichung $Mx^2 + Ny^2 = S$, deren erster Theil nur positive Glieder enthält, durch keine reellen Werte von x und y genüge geleistet werden; die Gleichung hat daher für ein negatives S keine geometrische Bedeutung.

Wenn also $B^2 - 4AC$ negativ ist, so entspricht die Gleichung 1) einer Ellipse, welche noch für specielle Fälle den Kreis oder einen Punkt als Varietäten darbietet.

II. Es sei $B^2 - 4AC$ positiv.

Da auch hier M und N von 0 verschieden sein müssen, so ist die in I. angegebene Transformation der Coordinaten ausführbar und kann daher die Gleichung 1) auch in diesem Falle auf die Form

$$Mx^2 + Ny^2 = S$$

gebracht werden. Nun haben hier, da $MN = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$ negativ ist, M und N entgegengesetzte Vorzeichen. Nimmt man daher M als positiv an, so ist N negativ; wir setzen dafür $-N'$, wo nun N' positiv ist.

1. Ist S positiv, so folgt aus der Gleichung $Mx^2 - N'y^2 = S$ $\frac{M}{S}x^2 - \frac{N'}{S}y^2 = 1$ und für $\frac{S}{M} = a^2$, $\frac{S}{N'} = b^2$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ldots . 9),$$

deren geometrischer Ort eine Hyperbel ist (§. 479).

2. Ist $S = 0$, so folgt aus der Gleichung $Mx^2 - N'y^2 = 0$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{M}{N'}},$$

welche Gleichung ein System zweier im Ursprunge sich schneidender Geraden (als Varietät der Hyperbel) darstellt.

3. Ist endlich S negativ, nämlich gleich $-S'$, so ist dann

$$N'y^2 - Mx^2 = S'.$$

Die Gleichung läſst sich durch Vertauschung der Achsen auf die erste Form zurückführen und stellt daher eine Hyperbel dar, in welcher die Abscissenachse mit der früheren Nebenachse zusammenfällt.

III. Es sei $B^2 - 4AC$ gleich Null.

In diesem Falle ist vermöge der Gleichung 6) entweder $M = 0$ oder $N = 0$; beide Coefficienten M und N können mit Rücksicht auf §. 505 nicht zugleich Null sein. Es sei z. B. $M = 0$; dann kann die in I. angegebene Transformation, weil $m = -\frac{Q}{2M}$ keinen bestimmten endlichen Wert hat, nicht ausgeführt werden; dagegen aber erscheint die erste transformierte Gleichung 4) unter der einfacheren Form

$$Ny^2 + Qx + Ry + F = 0 \ldots 10).$$

Um diese Gleichung noch einfacher darzustellen, nimmt man einen neuen Ursprung (r, s) an und setzt statt x und y bezüglich $x + r$ und $y + s$, wodurch man erhält:

$$Ny^2 + Qx + (2Ns + R)x + (Ns^2 + Qr + Rs + F) = 0.$$

Man wählt dann r und s so, daſs der Coefficient von y und das von x und y freie Glied verschwinden, daſs also $2Ns + R = 0$ und $Ns^2 + Qr + Rs + F = 0$ wird, was für die Werte

$$s = -\frac{R}{2N} \qquad \text{und} \qquad r = \frac{R^2 - 4NF}{4NQ}$$

stattfindet. Diese Transformation kann jedoch nur dann vorgenommen werden, wenn Q nicht gleich Null ist. Wir unterscheiden daher zwei Fälle.

1. Q ist von Null verschieden. Dann läſst sich die Gleichung 10) auf die einfachere $Ny^2 + Qx = 0$ transformieren, woraus

$$y^2 = Px \ldots 11),$$

das ist die Gleichung einer Parabel (§. 486), hervorgeht.

2. $Q = 0$, die früher angegebene Transformation läſst sich nicht anwenden; die Gleichung 10) nimmt nun die Form an:

$$Ny^2 + Ry + F = 0 \ldots 12),$$

woraus $y = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4NF}}{2N}$ folgt, welche Gleichung ein System zweier mit der Abscissenachse paralleler Geraden ausdrückt.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man auch, wenn man $N = 0$ annimmt; nur muſs dann die Abscissenachse mit der Ordinatenachse vertauscht werden.

Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, daſs die Gleichung 1) mit Ausnahme des zuletzt angeführten Falles durch eine zweimalige Transformation immer auf eine der beiden Gleichungen

$$Mx^2 + Ny^2 = S \qquad \text{und} \qquad y^2 = Px$$

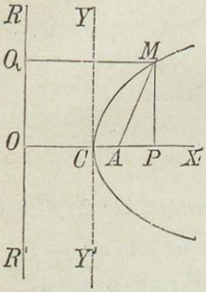
gebracht werden kann, und eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel mit Einschluſs ihrer Varietäten darstellt, je nachdem $B^2 - 4AC$ negativ, positiv oder gleich Null ist.

Der Charakter der dargestellten Linie hängt demnach einzig von der Beschaffenheit des Ausdruckes $B^2 - 4AC$ ab, welcher deshalb das charakteristische Binom der Gleichung 1) genannt wird.

§. **507.** Den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, deren Abstände von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden in einem constanten Verhältnisse c zu einander stehen.

Man nehme (Fig. 226) die gegebene Gerade RR', die Leitlinie, vorläufig als Ordinatenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, dessen Abscissenachse OX den gegebenen Punkt A, den Brennpunkt, in sich enthält.

Fig. 226.



Sind $OP = MQ = x$ und $MP = y$ die Coordinaten eines der verlangten Punkte M, so hat man, wenn $OA = d$ gesetzt wird,

$$AM : MQ = c, \text{ oder } AM = cx, \text{ und auch}$$

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2} = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}; \text{ daher}$$

$$cx = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}.$$

Daraus folgt

$$(1-c^2)\, x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0 \ldots 1).$$

Der gesuchte geometrische Ort ist demnach eine Linie des zweiten Grades, und zwar wie schon aus §. 506 hervorgeht, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem das charakteristische Binom $B^2 - 4AC = 4\,(c^2 - 1)$ negativ, positiv oder Null ist, d. i. je nachdem die Verhältniszahl c kleiner als 1, größer als 1 oder gleich 1 ist.

Um die Bedeutung der Gleichung 1) auch unabhängig von den Untersuchungen des §. 506 nachzuweisen, wird man dieselbe zunächst auf eine einfachere Gestalt bringen, indem man den Ursprung in der Abscissenachse um die Strecke m verschiebt, d. i. $x + m$ statt x setzt, wo m noch unbestimmt ist. Dadurch erhält man

$$(1-c^2)\, x^2 + y^2 + 2\,\{m(1-c^2) - d\}\, x + \{m^2(1-c^2) - 2dm + d^2\} = 0 \ldots 2).$$

Man wähle dann m so, dass $m^2\,(1-c^2) - 2dm + d^2 = 0$ werde, was für $m = \frac{d}{1 \pm c}$ stattfindet. Da aber der eine Wert $m = \frac{d}{1-c}$ für $c = 1$ nicht brauchbar ist, so nehme man $m = \frac{d}{1+c}$ an, für welchen Wert man aus der Gleichung 2) erhält:

$$(1-c^2)\, x^2 + y^2 - 2cdx = 0,$$

oder, wenn $cd = p$ gesetzt wird,

$$(1-c^2)\, x^2 + y^2 - 2px = 0 \ldots 3).$$

1. Ist $c < 1$, so setze man $1 - c^2 = \frac{p}{a}$; dann ergibt sich aus 3)

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \ldots 4),$$

d. h. die Scheitelgleichung einer Ellipse.

Aus der obigen Substitution folgt

$$c^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2, \text{ daher } c = \varepsilon;$$

d. h. das constante Verhältnis c ist die numerische Excentricität ε selbst.

Ferner ist $\quad d = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{b^2}{a\varepsilon}$ und $m = \frac{d}{1+\varepsilon}$.

Die Leitlinie RR' bezieht sich auf den Brennpunkt A; in derselben Beziehung steht zu dem zweiten Brennpunkte B der Ellipse eine zweite Leitlinie SS', welche mit der ersten parallel ist und von dem zugeordneten Brennpunkte B auf der entgegengesetzten Seite denselben Abstand $d = \frac{b^2}{a\varepsilon}$ hat.

Wenn $c = 0$, also $\frac{p}{a} = 1$ wird, so geht die Gleichung 4) über in $y^2 = 2px - x^2$, d. i. in die Scheitelgleichung des **Kreises**.

2. Ist $c > 1$, so setze man $1 - c^2 = -\frac{p}{a}$; man erhält dadurch aus der Gleichung 3)

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a} \ldots . 5),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer **Hyperbel**.

Wie bei der Ellipse, ist auch hier

$$c = \varepsilon, \qquad d = \frac{b^2}{a\varepsilon}, \qquad m = \frac{d}{1 + \varepsilon}.$$

Auch die Hyperbel hat zwei Brennpunkte und zwei Leitlinien.

3. Ist endlich $c = 1$, so ergibt sich aus der Gleichung 3)

$$y^2 = 2px \ldots . 6),$$

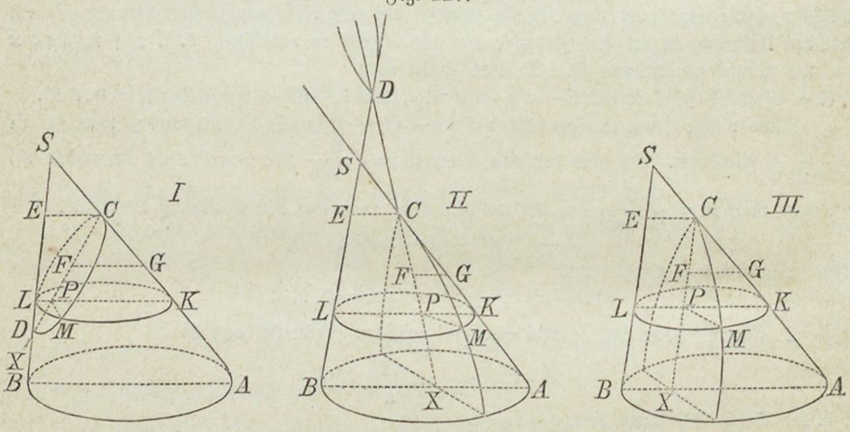
d. i. die Scheitelgleichung einer **Parabel**.

In diesem Falle ist $m = \frac{d}{2}$, d. h. der neue Ursprung, welcher der Scheitel der Parabel ist, fällt in die Mitte des Abstandes des Brennpunktes von der Leitlinie.

§. 508. Entstehung der Linien zweiten Grades aus dem Schnitte eines Kegels durch eine Ebene.

Es sei SAB (Fig. 227) ein zur Grundfläche normaler Achsenschnitt eines Kegels. Legt man durch einen beliebigen Punkt C der einen Seite SA

Fig. 227.



eine zu SAB normale Ebene, welche die Ebene SAB in der Geraden CX und die Kegelfläche in der Linie CM schneidet, so sind drei Hauptfälle möglich: entweder schneidet die Gerade CX auch die andere Seite SB selbst in D (I); oder sie schneidet nicht die Seite SB selbst, aber ihre Verlängerung über S hinaus in D (II); oder sie ist der zweiten Seite SB parallel (III).

Um die Schnittlinie CM der Kegelfläche und der durch C gelegten Ebene in jedem dieser drei Fälle zu bestimmen, lege man durch einen beliebigen Punkt M derselben die Ebene MKL parallel zur Grundfläche des Kegels.

Da MKL auf SAB normal steht, so ist auch die Schnittlinie MP der Ebenen MCX und MKL zur Ebene SAB normal (§. 220), daher auch normal zu CX und KL. Es ist daher, da MKL ein Kreis ist,

$$MP^2 = KP.LP \text{ (§. 135).}$$

Zieht man $CE \parallel AB$, macht $CF = CE$ und zieht auch $FG \parallel BA$, so hat man in I und II

$$KP : FG = CP : CF \quad \text{und} \quad LP : CE = PD : CD, \text{ daher}$$

$$KP = \frac{FG.CP}{CF} \quad \text{und} \quad LP = \frac{CE.PD}{CD}; \text{ folglich}$$

$$MP^2 = \frac{FG.CP.PD}{CD}.$$

Nimmt man nun CX als die Abscissenachse an, setzt $CP = x$, $MP = y$, ferner $CD = 2a$ und $FG = 2p$, so erhält man in I, wo $PD = 2a - x$ ist,

$$y^2 = \frac{2p.x.(2a - x)}{2a}, \quad \text{oder} \quad y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \ldots 1),$$

und in II, wo $PD = 2a + x$ ist,

$$y^2 = \frac{2p.x.(2a + x)}{2a}, \quad \text{oder} \quad y^2 = 2px + \frac{px^2}{a} \ldots 2).$$

Die Schnittlinie der Kegelfläche mit der Ebene ist also im ersten Falle eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel.

Ist im ersten Falle die Schnittebene parallel zur Grundfläche, so fallen die Strecken CD, EF und FG zusammen; es wird also $2a = 2p$ und die Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ geht über in $y^2 = 2px - x^2$, welche Gleichung einem Kreise angehört.

In III endlich erhält man für KP, wie oben, den Wert $KP = \frac{FG.CP}{CF}$, wogegen $LP = EC = CF$ ist; folglich ist $MP^2 = FG.CR$, oder

$$y^2 = 2px \ldots 3).$$

Im dritten Falle ist also die Schnittlinie eine Parabel.

Wegen der hier nachgewiesenen Entstehung der Ellipse, Hyperbel und Parabel aus dem Schnitte eines Kegels durch eine Ebene werden diese Linien gewöhnlich Kegelschnittslinien genannt.

Aufgaben.

§. 509. Suche durch die entsprechende Transformation der Coordinaten die geometrische Bedeutung folgender Gleichungen:

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$
2. $9x^2 + 16y^2 - 6x + 16y + 1 = 0.$
3. $x^2 - y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$
4. $8x^2 - y^2 + 48x = 0.$
5. $2x^2 + 4xy - y^2 = 0.$
6. $xy + x + y = 1.$
7. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 132x - 72y + 144 = 0.$

8. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x\sqrt{2} - 8y\sqrt{2} = 0.$

9. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 90x + 5y + 25 = 0.$

10. $3x^2 + 26xy\sqrt{3} - 23y^2 + 48x\sqrt{3} - 48y = 0.$

11. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren.

Bei der Lösung dieser und der folgenden Aufgaben betrachte man in der Gleichung der verlangten Kreise $(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2$ die Mittelpunktscoordinaten p und q als variabel, leite aus den Bedingungen der Aufgabe eine Gleichung zwischen p und q ab und suche die geometrische Bedeutung dieser Gleichung.

12. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren, wenn der gegebene Punkt a) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, b) ein anderer innerhalb des Kreises liegender Punkt ist, c) wenn er außerhalb des Kreises liegt.

13. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berühren, wenn die Gerade a) durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, b) wenn sie außerhalb des Kreises liegt.

14. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise, und zwar beide von innen oder beide von außen berühren, wenn a) die beiden Kreise sich schneiden, b) wenn der eine innerhalb des andern liegt, jedoch mit ihm nicht concentrisch ist.

15. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie haben und bei denen a) die Summe, b) die Differenz der beiden Scheitelseiten eine constante Größe ist.

Univerzitetna knjižnica Ljubljana
Narodna in univerzitetna knjižnica

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA
COBISS
00000492987