POLTRANZITIVNE ALGEBRE IN VEKTORSKI PROSTORI

DAMJANA KOKOL BUKOVŠEK

Ekonomska fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15A30

V članku obravnavamo poltranzitivne množice matrik, ki imajo kako algebraično strukturo. Poltranzitivnost je lastnost, ki je nekoliko šibkejša od tranzitivnosti. Ukvarjamo se predvsem s poltranzitivnimi algebrami in vektorskimi prostori matrik.

SEMITRANSITIVE ALGEBRAS AND VECTOR SPACES

In this paper we deal with semitransitive sets of matrices having some algebraic structure. Semitransitivity is a property weaker than transitivity. We consider semitransitive algebras and vector spaces of matrices.

Uvod

Naj bo $\mathbb{F}$ komutativen obseg in $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ algebra vseh $n \times n$ matrik nad $\mathbb{F}$, ki jo gledamo kot algebro vseh linearnih transformacij na vektorskem prostoru $\mathbb{F}^n$ z vnaprej izbrano bazo. Pravimo, da je družina matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *tranzitivna*, če za poljubna neničelna vektorja $x, y \in \mathbb{F}^n$ obstaja takšna matrika $A \in \mathcal{A}$, da velja $Ax = y$. Nekoliko šibkejša lastnost je poltranzitivnost. Prvič sta pojem uvedla H. Rosenthal in V. Troitsky v članku [8].

Definicija 1. Družina $\mathcal{A}$ je *poltranzitivna*, če za vsaka dva neničelna vektorja $x, y \in \mathbb{F}^n$ obstaja takšna matrika $A \in \mathcal{A}$, da velja $Ax = y$ ali pa velja $Ay = x$.

Pojem poltranzitivnosti je zelo naravna posplošitev pomembnega pojma tranzitivnosti. Tranzitivnost so mnogi avtorji študirali za različne množice $\mathcal{A}$, ki imajo tudi kako algebraično strukturo, na primer grupe, polgrupe, vektorske prostore in algebre. Dobro znan je Burnsidov izrek, ki pravi, da v primeru algebraično zaprtega obsega $\mathbb{F}$ algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nima nobene prave tranzitivne podalgebre. Če predpostavimo, da je družina $\mathcal{A}$ samo vektorski prostor, potem je takih družin veliko. V članku [1] je dokazan izrek, ki pravi, da je dimenzija poljubnega tranzitivnega vektorskega podprostora v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ vsaj $2n - 1$.

Pojem tranzitivnosti je tesno povezan z (ne)obstojem skupnega invariantnega podprostora. Če je družina matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ tranzitivna, potem ne obstaja pravi netrivialni podprostor prostora $\mathbb{F}^n$, ki bi bil invarianten za vse elemente družine. Če pa je družina matrik $\mathcal{A}$ algebra, velja tudi nasprotno. Algebra matrik, ki nima skupnega pravega netrivialnega invariantnega podprostora, je tranzitivna. Družina matrik $\mathcal{B} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ in algebra matrik $\mathcal{A}$, ki je generirana z družino $\mathcal{B}$, imata iste invariantne podprostore. Če je družina matrik $\mathcal{B}$ tranzitivna, potem tudi algebra matrik $\mathcal{A}$, ki je generirana z družino $\mathcal{B}$, nima nobenega skupnega pravega netrivialnega invariantnega podprostora.

V tem članku se bomo ukvarjali s poltranzitivnimi družinami matrik, za katere bomo še predpostavili, da imajo algebraično strukturo algebre ali vektorskega prostora. Pojem poltranzitivnosti je precej nov, tako da bo njegovo uporabnost pokazala šele prihodnost.

Poltranzitivne algebre

Poglejmo si najprej preprost primer poltranzitivne algebre matrik, ki ni tranzitivna. Označimo z I identično matriko, z J pa Jordanovo kletko velikosti $n \times n$, to je matriko, katere elementi na prvi naddiagonali so enaki 1, vsi drugi elementi pa so enaki 0. Naj bo

$$\mathcal{A} = \left\{ a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1};\ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix};\quad a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F} \right\}. \tag{1}$$

Očitno je, da sta linearna kombinacija in produkt dveh matrik iz $\mathcal{A}$ spet matriki iz $\mathcal{A}$, zato je $\mathcal{A}$ algebra. Naj bo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza prostora $\mathbb{F}^n$. Z nobeno matriko iz $\mathcal{A}$ ne moremo preslikati prvega baznega vektorja e_1 v drugi bazni vektor e_2, zato $\mathcal{A}$ ni tranzitivna. Prostor $\mathcal{A}e_1$ je namreč enak linearni ogrinjači vektorja e_1.

Izberimo poljubna neničelna vektorja

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

Naj bo x_k zadnja komponenta v vektorju x, ki je različna od 0, y_j pa zadnja komponenta v vektorju y, ki je različna od 0. Denimo, da je indeks $k \geq j$. Definiramo

$$a_0 = y_k/x_k,\ a_1 = (y_{k-1} - a_0 x_{k-1})/x_k,\ ...,$$

$$a_{k-1} = (y_1 - a_0 x_1 - a_1 x_2 - ... - a_{k-2} x_{k-1})/x_k.$$

Hitro se prepričamo, da matrika $A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{k-1} J^{k-1}$ preslika vektor x v y. Če pa je indeks $k < j$, zamenjamo vlogi vektorjev x in y ter najdemo matriko, ki preslika vektor y v vektor x. Videli smo, da je $\mathcal{A}$ res poltranzitivna algebra, ki ni tranzitivna.

Indeks nilpotentnosti matrike T je tako naravno število k, da velja $T^k = 0$, vendar $T^{k-1} \neq 0$. Za nilpotentno matriko $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ je največji možni indeks nilpotentnosti njena velikost n. V zgornjem zgledu poltranzitivna algebra $\mathcal{A}$ vsebuje nilpotentno matriko J indeksa nilpotentnosti n. To je res vedno, kadar je obseg $\mathbb{F}$ algebraično zaprt. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 1. *Če je $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg in $\mathcal{A}$ poltranzitivna algebra matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, potem $\mathcal{A}$ vsebuje nilpotent indeksa n.*

Bralec lahko najde dokaz tega izreka v članku [4]. Predpostavka o algebraični zaprtosti obsega je tu bistvena, kot pokaže naslednji zgled. Algebra

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

nad obsegom realnih števil je izomorfna obsegu kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Matriki $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ namreč ustreza kompleksno število $z = a + ib$, vsoti oziroma produktu matrik pa ustreza vsota oziroma produkt kompleksnih števil, kot pokaže kratek račun. Naj bosta $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ in $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ dva neničelna vektorja v $\mathbb{R}^2$. Hitro se prepričamo, da matrika, ki ustreza kompleksnemu številu $(y_1+iy_2)/(x_1+ix_2)$, preslika vektor x v y, zato je algebra $\mathcal{B}$ tranzitivna. Po drugi strani pa ne vsebuje nobenega nilpotenta indeksa 2, ker obseg kompleksnih števil nima neničelnih nilpotentov.

Vsaka poltranzitivna algebra matrik vsebuje minimalno poltranzitivno algebro (to je tako, ki ne vsebuje nobene manjše, ki bi bila še vedno poltranzitivna), saj je končnodimenzionalna. Družini matrik $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ sta si *simultano podobni*, če obstaja taka obrnljiva matrika $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, da je $\mathcal{B} = \{SAS^{-1}; A \in \mathcal{A}\}$. Simultana podobnost pomeni, da zamenjamo bazo, v kateri gledamo matrike, torej v resnici isto družino matrik „pogledamo z druge strani“.

Posledica 2. *Naj bo $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg. Vsaka minimalna poltranzitivna algebra matrik je simultano podobna algebri $\mathcal{A}$, ki je opisana v* (1). *Zato je vsaka minimalna poltranzitivna algebra matrik komutativna.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}$ poltranzitivna algebra matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad algebraično zaprtim obsegom $\mathbb{F}$. Po izreku 1 algebra $\mathcal{B}$ vsebuje matriko T, za katero velja $T^n = 0$, vendar $T^{n-1} \neq 0$. Matrika T je podobna Jordanovi kletki J, torej je $T = SJS^{-1}$ za neko obrnljivo matriko S. (Matriko S dobimo tako, da za njen zadnji stolpec vzamemo vektor x, ki ne leži v jedru matrike T^{n-1}, za j-ti stolpec pa vzamemo vektor $T^{n-j}x$ za vsak $j = 1, 2, ..., n-1$.) Naj bo $\mathcal{C}$ podalgebra v $\mathcal{B}$, ki je generirana s T. Vsaka matrika iz $\mathcal{C}$ je tako oblike $a_0I + a_1T + a_2T^2 + ... + a_{n-1}T^{n-1} = a_0I + a_1SJS^{-1} + a_2(SJS^{-1})^2 + ... + a_{n-1}(SJS^{-1})^{n-1} = S(a_0I + a_1J + a_2J^2 + ... + a_{n-1}J^{n-1})S^{-1}$. Torej je algebra $\mathcal{C}$ simultano podobna algebri $\mathcal{A}$, definirani v (1). Po drugi strani pa, če je $\mathcal{B}$ minimalna poltranzitivna algebra matrik, je zaradi minimalnosti enaka svoji podalgebri $\mathcal{C}$. ∎

Družina matrik $\mathcal{A}$ je *trikotljiva*, če obstaja taka obrnljiva matrika S, da je za vsako matriko $A \in \mathcal{A}$ matrika SAS^{-1} zgornjetrikotna. Z drugimi besedami, družina je trikotljiva, če je simultano podobna poddružini zgornjetrikotnih matrik. O trikotljivosti je Obzornik že pisal v članku [6]. Družina matrik $\mathcal{A}$ je *razcepna*, če obstaja taka obrnljiva matrika S in tako naravno število $k < n$, da ima za vsako matriko $A \in \mathcal{A}$ matrika SAS^{-1}

obliko

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je } B \in \mathbb{M}_k(\mathbb{F}) \text{ in } D \in \mathbb{M}_{n-k}(\mathbb{F}).$$

Drugače povedano, družina je razcepna, če je simultano podobna poddružini bločno zgornjetrikotnih matrik. Družina matrik $\mathcal{A}$ je *nerazcepna*, če ni razcepna. Družina matrik je razcepna natanko tedaj, kadar imajo vse matrike iz družine skupen pravi netrivialen invarianten podprostor. Če so matrike napisane v taki bazi, da imajo bločno zgornjetrikotno obliko, je ta skupen invarianten prostor napet na prvih k standardnih baznih vektorjev. Pojma trikotljivosti in razcepnosti sta zelo pomembna pri študiju družin matrik. Včasih se namreč lastnosti družine ali njenih članov prenašajo na diagonalne bloke ali pa z diagonalnih blokov na celotne matrike. Take lastnosti lahko potem pri razcepnih družinah obravnavamo induktivno.

V posledici 2 smo videli, da je minimalna poltranzitivna družina matrik nad algebraično zaprtim obsegom vedno trikotljiva. O nekaterih posplošitvah poltranzitivnih algeber lahko preberemo v člankih [3] in [5].

Poltranzitivni vektorski prostori

Naj bo $\mathcal{A}$ vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Vektor $x \in \mathbb{F}^n$ je *ciklični* vektor za družino $\mathcal{A}$, če je prostor $\mathcal{A}x = \{Ax; A \in \mathcal{A}\}$ enak $\mathbb{F}^n$. Iz definicije je očitno, da je za vsak tranzitiven vektorski prostor matrik vsak neničeln vektor cikličen. Naslednji izrek pove, da ima tudi vsak poltranzitiven vektorski prostor matrik ciklični vektor.

Izrek 3. *Naj bo $\mathcal{A}$ poltranzitiven vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad poljubnim obsegom $\mathbb{F}$. Potem obstaja vektor $x \in \mathbb{F}^n$, ki je cikličen za $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Ločimo dva primera:

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ je končen obseg s q elementi. Denimo, da ne obstaja cikličen vektor za $\mathcal{A}$. Potem je za vsak $x \in \mathbb{F}^n$ dimenzija prostora $\mathcal{A}x$ največ $n-1$. Ker je družina $\mathcal{A}$ poltranzitivna, za vsak par neničelnih vektorjev $x, y \in \mathbb{F}^n$ velja, da je $y \in \mathcal{A}x$, ali pa je $x \in \mathcal{A}y$. Urejen par (x, y) torej leži v množici $\{x\} \times (\mathcal{A}x - \{0\}) \cup (\mathcal{A}y - \{0\}) \times \{y\}$. Tako imamo

$$(\mathbb{F}^n - \{0\}) \times (\mathbb{F}^n - \{0\}) \subset \bigcup_{0 \neq u \in \mathbb{F}^n} (\{u\} \times (\mathcal{A}u - \{0\}) \cup (\mathcal{A}u - \{0\}) \times \{u\}).$$

Zato je

$$(q^n-1)^2 = |(\mathbb{F}^n-\{0\})\times(\mathbb{F}^n-\{0\})| \leq 2\sum_{0\neq u\in\mathbb{F}^n} |\{u\}\times(\mathcal{A}u-\{0\})| =$$

$$= 2\sum_{0\neq u\in\mathbb{F}^n} |(\mathcal{A}u-\{0\})| \leq 2(q^n-1)(q^{n-1}-1).$$

Od tod sledi, da je $2q^{n-1}\geq q^n+1$, kar je protislovje.

(ii) Naj bo zdaj $\mathbb{F}$ neskončen obseg. Naj bo $x_1, x_2, ..., x_n$ baza za $\mathbb{F}^n$. Če je vsaj eden od vektorjev x_i cikličen, potem izrek velja. Sicer je $\mathcal{A}x_i$ pravi podprostor v $\mathbb{F}^n$ za vsak i. Ker je obseg neskončen, prostora $\mathbb{F}^n$ ne moremo zapisati kot končno unijo pravih podprostorov. Zato obstaja vektor $u\in\mathbb{F}^n$, ki ne leži v nobenem od podprostorov $\mathcal{A}x_i$. Zaradi poltranzitivnosti sedaj vsak od vektorjev x_i leži v prostoru $\mathcal{A}u$, iz česar sledi, da je $\mathcal{A}u=\mathbb{F}^n$. Torej je vektor u cikličen za $\mathcal{A}$, ker je $\mathcal{A}$ vektorski prostor. ■

Če je $\mathcal{A}$ vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ in $x\in\mathbb{F}^n$ cikličen vektor za $\mathcal{A}$, je dimenzija prostora $\mathcal{A}x$ enaka n, zato mora biti dimenzija prostora $\mathcal{A}$ vsaj n. Iz pravkar dokazanega izreka takoj sledi tale posledica:

Posledica 4. *Dimenzija poljubnega poltranzitivnega vektorskega prostora matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad poljubnim obsegom je vsaj n.*

Izrek 5. *Naj bo $\mathcal{A}$ poltranzitiven vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad poljubnim obsegom $\mathbb{F}$. Če $\mathbb{F}$ vsebuje vsaj n elementov, potem $\mathcal{A}$ vsebuje obrnljivo matriko.*

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na velikost matrik n. Za $n=1$ je trditev trivialna. Naj bo $n>1$ in naj bo $\mathcal{A}\subset\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ poltranzitiven vektorski prostor. Po indukcijski predpostavki vsak poltranzitiven vektorski prostor matrik v $\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ vsebuje obrnljivo matriko. Za vsako matriko $A\in\mathcal{A}$ si ogledamo njen levi zgornji $(n-1)\times(n-1)$ blok. Matriko torej napišemo v obliki

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & a_1 \\ a_2^T & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer je $A_1\in\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ podmatrika matrike A, $a_1, a_2\in\mathbb{F}^{n-1}$ sta vektorja, α pa je skalar. Podmatriko A_1 imenujemo *kompresija* matrike A na prvih

$n-1$ baznih vektorjev. Iz vseh kompresij matrik iz družine $\mathcal{A}$ sestavmo novo množico

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ A_1 \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{F}); \begin{bmatrix} A_1 & a_1 \\ a_2^T & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Očitno je množica $\mathcal{A}_1$ spet vektorski prostor in je poltranzitivna v dimenziji $n-1$. Naj bosta namreč $x, y \in \mathbb{F}^{n-1}$ poljubna neničelna vektorja. Vsakemu od njiju dodamo na koncu ničlo, da dobimo vektorja $x', y' \in \mathbb{F}^n$. Zaradi poltranzitivnosti vektorskega prostora $\mathcal{A}$ obstaja matrika $A \in \mathcal{A}$, ki preslika x' v y' ali obratno. Njena kompresija $A_1 \in \mathcal{A}_1$ potem preslika x v y ali obratno.

Po indukcijski predpostavki množica $\mathcal{A}_1$ vsebuje obrnljivo matriko. Naj bo $B \in \mathcal{A}$ taka matrika, da je njena kompresija B_1 obrnljiva. Če je tudi matrika B obrnljiva, je dokaz končan. Denimo torej, da ni. Izberimo neničeln vektor x v jedru matrike B. Od zdaj naprej gledamo matrike v bazi, ki jo sestavlja prvih $n-1$ standardnih baznih vektorjev in vektor x. S tem ne spremenimo kompresij na prvih $n-1$ baznih vektorjev. Imamo

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ b_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je prostor $\mathcal{A}$ poltranzitiven, obstaja matrika $C \in \mathcal{A}$, za katero velja $Cx = x$, torej je

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ c_2^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika $B_1^{-1}C_1$ ima največ $n-1$ različnih lastnih vrednosti. Ker ima obseg $\mathbb{F}$ vsaj n elementov, obstaja element $\lambda \in \mathbb{F}$, ki ni lastna vrednost matrike $B_1^{-1}C_1$. Zato je matrika

$$C - \lambda B = \begin{bmatrix} C_1 - \lambda B_1 & 0 \\ c_2^T - \lambda b_2^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

obrnljiva. Dokaz je končan. ■

Predpostavka o moči obsega $\mathbb{F}$ v prejšnjem izreku je potrebna. Če je namreč $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q\}$ obseg s q elementi in je

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,q+1} \\ 0 & b+\alpha_1 a & c_{2,3} & \cdots & c_{2,q+1} \\ 0 & 0 & b+\alpha_2 a & \ddots & c_{3,q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b+\alpha_q a \end{bmatrix} ; \quad a, b, c_{i,j} \in \mathbb{F} \right\} \subset \mathbb{M}_{q+1}(\mathbb{F}),$$

se lahko podobno kot za algebro iz (1) prepričamo, da je $\mathcal{A}$ poltranzitiven vektorski prostor. Poleg tega ne vsebuje nobene obrnljive matrike. Če je namreč $a = 0$, je ničeln prvi element na diagonali, če pa je $a \neq 0$, je ničeln diagonalni element $b + \alpha_i a$, pri katerem je $\alpha_i = -b/a$. Vsaka od matrik iz $\mathcal{A}$ ima tako ničelno determinanto.

Poltranzitivnih vektorskih prostorov je veliko več kot poltranzitivnih algeber. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra, definirana v (1), in $C = [c_{i,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ poljubna matrika z neničelnimi elementi. Potem je

$$\mathcal{B} = \{B = [b_{i,j}]; b_{i,j} = c_{i,j} a_{i,j}, A = [a_{i,j}] \in \mathcal{A}\}$$

minimalen poltranzitiven vektorski prostor matrik, ki ni simultano podoben $\mathcal{A}$, če je le $c_{i,i} \neq c_{j,j}$ za kaka indeksa i in j. Jasno je namreč, da je B vektorski prostor matrik dimenzije n, za katerega se lahko prepričamo, da je poltranzitiven. Po posledici 4 je zato tudi minimalen.

Minimalni poltranzitivni vektorski prostori matrik v nasprotju s poltranzitivnimi algebrami niso vedno trikotljivi. Še razcepni niso vedno.

Izrek 6. *Za vsak $n \geq 3$ obstaja poltranzitiven vektorski prostor matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, ki nima netrivialnega invariantnega podprostora.*

Dokaz. Zgled bomo konstruirali v primeru $n = 3$, za $n \geq 4$ ga konstruiramo podobno. Naj bo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 & a \end{bmatrix} ; \quad a, b, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F} \right\}.$$

Dokažimo, da je prostor $\mathcal{B}$ poltranzitiven. Z $\{e_1, e_2, e_3\}$ označimo standardno bazo prostora $\mathbb{F}^3$. Vzemimo poljubna neničelna vektorja $x = \alpha_1 e_1 +$

$\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ in $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. Naj bo α_i prvi neničelni koeficient v vektorju x in β_j prvi neničelni koeficient v vektorju y. Če je $i \leq j$, bomo dokazali, da je $y \in \mathcal{B}x$, sicer pa zamenjamo vlogi vektorjev x in y.

Najprej vzemimo, da je $i = 1$. Dokazati moramo, da je vektor $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, za katerega je $\alpha_1 \neq 0$, cikličen. Zares, če vzamemo $a = 1$ in ostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3 \in \mathcal{B}x$, če vzamemo $b = 1$ in preostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2 \in \mathcal{B}x$, če pa vzamemo $x_2 = 1$ in preostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_1 e_3 \in \mathcal{B}x$. Torej je res $\mathcal{B}x = \mathbb{F}^3$.

Naj bo zdaj $i = 2$. Imamo $x = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ in $\alpha_2 \neq 0$. Dokazati moramo, da vektorja e_2 in e_3 ležita v $\mathcal{B}x$. Res, če vzamemo $x_1 = 1$ in preostale elemente enake 0, dobimo, da je $\alpha_2 e_2 \in \mathcal{B}x$, če pa vzamemo $x_3 = 1$ in preostale elemente enake 0, pa dobimo, da je $\alpha_2 e_3 \in \mathcal{B}x$. Če pa je $i = 3$, je $x = \alpha_3 e_3$ in $\alpha_3 \neq 0$. Če vzamemo $a = 1$ in preostale elemente enake 0, vidimo, da je $\alpha_3 e_3 \in \mathcal{B}x$. Torej je prostor $\mathcal{B}$ res poltranzitiven.

Naj bo $\mathcal{A}$ minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathcal{B}$. Dokazali bomo, da matrike iz $\mathcal{A}$ nimajo skupnega pravega netrivialnega invariantnega podprostora. Pa denimo nasprotno. Naj bo $\mathcal{U}$ pravi netrivialni podprostor $\mathbb{F}^3$, za katerega je $\mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Izberimo si neničeln vektor $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathcal{U}$. Dokažimo, da obstaja v $\mathcal{U}$ tudi tak neničeln vektor, ki ima prvo komponento enako 0, torej $y = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \in \mathcal{U}$. To je očitno, če je $\alpha_1 = 0$, ker lahko vzamemo kar $y = x$. Naj bo torej $\alpha_1 \neq 0$. Spomnimo se, da je prostor $\mathcal{A}$ poltranzitiven. Zato mora za par vektorjev x in e_2 veljati $x \in \mathcal{A}e_2$ ali pa $e_2 \in \mathcal{A}x$. Za vse matrike $A \in \mathcal{A}$ je $Ae_2 \neq x$, zato mora obstajati matrika $A \in \mathcal{A}$, za katero je $Ax = e_2$. Torej je $e_2 \in \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ in smo našli neničeln vektor $y = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \in \mathcal{U}$.

Podobno zdaj dokažemo, da je $e_3 \in \mathcal{U}$. Če je $\beta_2 = 0$, je to očitno. Naj bo torej $\beta_2 \neq 0$. Za par vektorjev y in e_3 mora veljati $y \in \mathcal{A}e_3$ ali pa $e_3 \in \mathcal{A}y$. Za vse matrike $A \in \mathcal{A}$ je $Ae_3 \neq y$, zato mora obstajati matrika $A \in \mathcal{A}$, za katero je $Ay = e_3$. Torej je $e_3 \in \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$.

Dokažimo še, da tudi vektorja e_1 in e_2 ležita v $\mathcal{U}$. Zaradi poltranzitivnosti mora veljati, da je $e_2 \in \mathcal{A}e_1$ ali pa $e_1 \in \mathcal{A}e_2$. Za vse matrike $A \in \mathcal{A}$ je $Ae_2 \neq e_1$, zato mora obstajati matrika $B \in \mathcal{A}$, za katero je $Be_1 = e_2$. Matrika B ima tako prvi stolpec enak $[0\ 1\ 0]^T$, torej je $a = 0$ in $b = 1$. Zato velja tudi $Be_3 = e_1$. Tako je $e_1 \in \mathcal{A}e_3 \subset \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ in nadalje $e_2 = Be_1 \in \mathcal{A}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Prostor $\mathcal{U}$ tako vsebuje vse tri bazne vektorje e_1, e_2 in e_3 in je zato enak $\mathbb{F}^3$, kar je protislovje. Dokaz je končan. ∎

Videli smo torej, da za vsak $n \geq 3$ obstaja nerazcepen poltranzitiven vektorski prostor matrik $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. V algebraično zaprtem obsegu in pri $n = 2$ so stvari preprostejše.

Naj bo $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg. Vsak poltranzitiven podprostor $\mathcal{A}$ v $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$, ki ni tranzitiven, je trikotljiv. Vsak minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ je simultano podoben prostoru

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & ca \end{bmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

za neki fiksen skalar $c \neq 0$. Dokaze teh trditev izpustimo, bralec jih lahko najde v članku [9]. Predpostavka, da je $\mathbb{F}$ algebraično zaprt obseg, je bistvena, kot smo videli že pri poltranzitivnih algebrah. V tem primeru je torej vsak minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ trikotljiv in dvodimenzionalen. Nič od tega pa ni res za $n \geq 3$. V izreku 6 smo videli, da ni nujno trikotljiv. Naslednji izrek pa pokaže, da minimalen trikotljiv poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nima nujno dimenzije n.

Izrek 7. *Prostor*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & a \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$$

je minimalen poltranzitiven podprostor v $\mathbb{M}_3(\mathbb{F})$ *dimenzije* 4.

Dokaz. Vzemimo bazo prostora $\mathcal{A}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ neničeln vektor v $\mathbb{F}^3$. Če je $\gamma \neq 0$, je x cikličen vektor, saj je $Cx = \gamma e_1$, $Ax - \alpha e_1 = \gamma e_2$ in $Dx - \beta e_2 = \gamma e_3$. Če je $\gamma = 0$ in je $\beta \neq 0$, imamo $Bx = \beta e_1$ in $Dx = \beta e_2$. Če pa je $\gamma = \beta = 0$, je $\alpha \neq 0$ in $Ax = \alpha e_1$. Tako smo dokazali poltranzitivnost. Dokažimo še, da je $\mathcal{A}$ minimalen poltranzitiven prostor. Denimo, da obstaja podprostor $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$, ki je tudi poltranzitiven. Zaradi poltranzitivnosti obstajajo matrike v $\mathcal{B}$, ki preslikajo vektor e_3 zaporedoma v vektorje e_1, e_2 in e_3. Torej so naslednje linearno neodvisne matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vse vsebovane v $\mathcal{B}$ za neke skalarje $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{F}$. Ker je dimenzija $\mathcal{B}$ enaka 3, te matrike napenjajo ves $\mathcal{B}$. Vzemimo $x = -e_2 + b_1 e_3$, če je $b_1 \neq 0$, in $x = b_2 e_1 - e_2$ sicer. Opazimo, da nobena matrika iz $\mathcal{B}$ ne preslika x v e_1, niti e_1 v x. To protislovje dokazuje minimalnost prostora $\mathcal{A}$. ∎

V prejšnjem razdelku smo videli, da poltranzitivna algebra matrik vedno vsebuje nilpotent največjega možnega indeksa. Za vektorske prostore to ne velja. Vektorski prostor v pravkar dokazanem izreku namreč ne vsebuje nobenega nilpotenta indeksa 3. Res, če je

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & a \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

nilpotentna matrika, je $a = d = 0$ in je že $A^2 = 0$, torej ima A indeks nilpotentnosti največ 2. Vendar pa nad algebraično zaprtim obsegom poltranzitiven vektorski prostor vedno vsebuje kakšen neničeln nilpotent. Dokaz te trditve najdemo v članku [9].

Nad algebraično zaprtim obsegom je vsak poltranzitiven vektorski prostor v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ dimenzije n trikotljiv. Opisati se da vse n-dimenzionalne poltranzitivne vektorske prostore v $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ nad algebraično zaprtim obsegom za $n \leq 4$. Dokaze teh in še drugih trditev o poltranzitivnih vektorskih prostorih matrik lahko bralec najde v člankih [2], [8] in [9].

LITERATURA

[1] E. A. Azoff, *On finite rank operators and preannihilators*, Memoirs of the AMS **64** (1986), št. 357.

[2] J. Bernik, R. Drnovšek, D. Kokol Bukovšek, T. Košir in M. Omladič, *Reducibility and triangularizability of semitransitive spaces of operators*, Houston J. Math. **34** (2008), 235–247.

[3] J. Bernik, R. Drnovšek, D. Kokol Bukovšek, T. Košir, M. Omladič in H. Radjavi, *On semitransitive jordan algebras of matrices*, J. Algebra Appl. **10** (2011), 319–333.

[4] J. Bernik, L. Grunenfelder, M. Mastnak, H. Radjavi in V. G. Troitsky, *On semitransitive collections of operators*, Semigroup Forum **70** (2005), 436–450.

[5] J. Bernik in M. Mastnak, *Lie algebras acting semitransitively*, preprint.

[6] R. Drnovšek, *Trikotljivost družin operatorjev na končnorazsežnih prostorih*, Obz. mat. fiz. **49** (2002), 129–139.

[7] H. Radjavi in V. G. Troitsky, *Semitransitive subspaces of operators*, Linear and Multilinear Algebra **57** (2009), 1–12.

[8] H. Rosenthal in V. G. Troitsky, *Strictly semi-transitive operator algebras*, Journal of Operator Theory **53** (2005), 315–329.

[9] Semitransitivity Working Group at LAW'05, Bled, *Semitransitive subspaces of matrices*, Electronic Journal of Linear Algebra **15** (2006), 225–238.