FILONOVA PREMICA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2020): 01A20, 51M15, 51M16, 51M25

Filonova premica skozi izbrano točko v notranjosti danega kota seka njegova kraka tako, da je razdalja med presečiščema najmanjša. Geometrijska konstrukcija Filonove premice na splošno ni mogoča samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Problem vodi do kubične enačbe, katere edini pozitivni koren natančno določa Filonovo premico. Pojasnili bomo njene glavne lastnosti. Do Filonove premice pridemo tudi s presečiščem krožnice in hiperbole.

THE PHILON LINE

The Philon line through a selected point inside a given angle intersects its two arms in such a way that the distance between the intersections is the shortest. In general, the geometric construction of a Philon line is not possible only with an unlabelled ruler and pair of compasses. The problem leads to a cubic equation, whose only positive root exactly determines the Philon line. We will explain its main properties. The Philon line is also obtained by the intersection of a circle and a hyperbola.

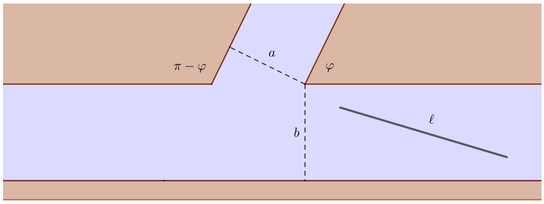
Uvod

Zamislimo si vodna kanala (slika 1). Prvi ima smer vzhod–zahod in je širok b, drugi, ki je širok a, pa vstopa vanj pod kotom φ. Na vodi plava tanka ravna lesena letvica dolžine ℓ. Kako dolga je še lahko letvica, da lahko neovirano prehaja med kanaloma? V skrajnem primeru se letvica lahko dotakne vogalov, krajišči pa robov kanalov. To pomeni, da je treba poiskati najmanjšo dolžino letvice, ki ravno še dopušča tak ekstremen položaj. Na sliki je $\varphi < \pi - \varphi$, zato je iskana ekstremna dolžina večja, če letvica oplazi vrh kota $\pi - \varphi$, kot če se dotakne vrha kota φ.

Primer, ko je kot φ pravi, pogosto najdemo med nalogami poglavja o ekstremih funkcije ene spremenljivke v matematični analizi. Spoznali bomo, da naloga za splošne kote ni nič težja, če se jo lotimo prav.

V prispevku bomo nalogo reševali za kote med 0 in π in ugotovili, da pri tem igra pomembno vlogo tako imenovana *Filonova premica*, ki je dobila ime po antičnem mehaniku, matematiku in pisatelju Filonu iz Bizanca, tudi Filonu Mehaniku, ki je živel v 3. stoletju pr. n. št.

O samem Filonu je malo znanega. Večinoma je deloval v Aleksandriji, verjetno v slovitem Muzejonu, in na Rodosu. Napisal je delo *Priročnik mehanike*, ki ga je sestavljalo 9 knjig, v katerih je obravnaval tudi nekaj



Slika 1. Problem plavajoče letvice in kanalov.

matematičnih problemov, najbolj pa se je posvetil gradnji pristanišč, mehaniki, katapultom, oblegovalnim in obrambnim napravam ter menda celo tajnopisom (glej [1]). V celoti je ohranjena v grščini le 4. knjiga, nekatere pa v arabskem prevodu. V matematiki je reševal problem podvojitve kocke in dal nekaj alternativnih dokazov trditev iz Evklidovih Elementov (eden od teh je objavljen v [5]).

Filonova premica

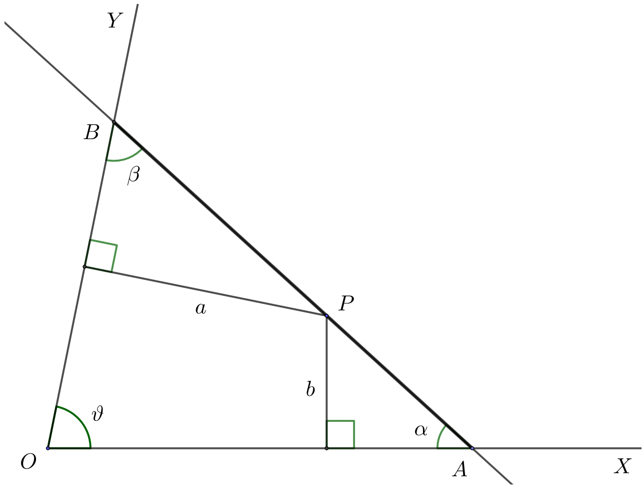
Problema letvice in kanalov se lotimo najprej geometrijsko. Dovolj je obravnavati kot $\vartheta = \angle XOY$ z vrhom O in krakoma OX in OY (slika 2). Pri tem je $0 < \vartheta < \pi$. Znotraj kota naj bo točka P, ki je od kraka OX oddaljena za b, od kraka OY pa za a. Skozi P načrtamo premico, ki seka krak OX v točki A, krak OY pa v točki B. Poiskati je treba tisto premico, za katero je razdalja $|AB|$ najmanjša. Tej premici rečemo *Filonova premica* skozi točko P v kotu ϑ. Filonova premica je odvisna od kota in od točke v njem. S preprostim sklepanjem ugotovimo, da obstaja taka premica. Če namreč A dovolj oddaljimo od O, lahko razdalja $|AB|$ doseže poljubno veliko vrednost, če pa jo približujemo O, se B oddaljuje od O in spet $|AB|$ doseže poljubno veliko vrednost. Kasneje bomo to potrdili tudi z računom.

V trikotniku OAB označimo kota ob ogliščih A in B z α in β. Seveda velja zveza $\alpha + \beta + \vartheta = \pi$ in relaciji $0 < \alpha < \pi - \vartheta$ ter $0 < \beta < \pi - \vartheta$. Razdaljo $\ell(\alpha) = |AB| = |AP| + |PB|$ izrazimo s kotom α:

$$\ell(\alpha) = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin(\pi - \vartheta - \alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin(\alpha + \vartheta)}.$$

S tem smo na intervalu $(0, \pi - \vartheta)$ definirali pozitivno funkcijo $\ell : \alpha \mapsto \ell(\alpha)$. Njena prva dva odvoda sta

$$\ell'(\alpha) = -\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{a\cos(\alpha + \vartheta)}{\sin^2(\alpha + \vartheta)} = \frac{a\cos\beta}{\sin^2\beta} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$



Slika 2. Presečnica kota skozi dano točko.

$$\ell''(\alpha) = \frac{b(1+\cos^2\alpha)}{\sin^3\alpha} + \frac{a(1+\cos^2\beta)}{\sin^3\beta}.$$

Enačba $\ell'(\alpha) = 0$ ima na intervalu $(0, \pi - \vartheta)$ eno samo rešitev α_0, v kateri je očitno lokalni minimum funkcije ℓ. S kotom α_0 je Filonova premica natančno določena. Kot ob oglišču B pa je tedaj $\beta_0 = \pi - \vartheta - \alpha_0$.

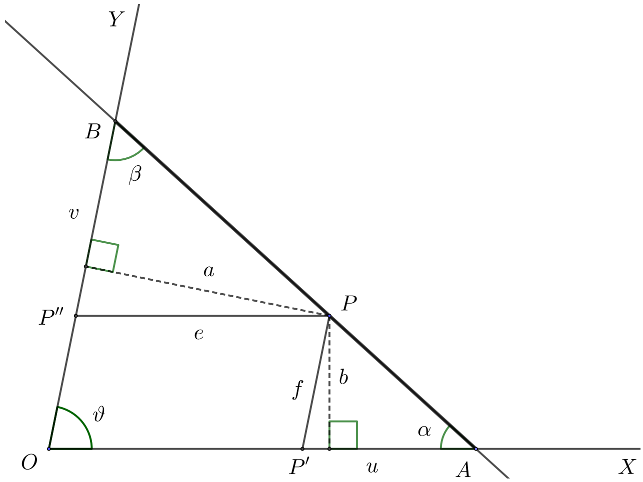
Koordinatna obravnava

S funkcijo ℓ se da izpeljati lastnosti Filonove premice. Težava nastopi pri reševanju trigonometrične enačbe $\ell'(\alpha) = 0$. Laže pa vsa obravnava Filonove premice poteka z uporabo koordinat. Točko P v kotu ϑ bomo opisali s poševnokotnima koordinatama, tako kot kaže slika 3. Točko P projiciramo vzporedno s krakoma OY in OX v točki P' in P''. Označimo $e = |P''P|$ in $f = |P'P|$, ki ju imenujemo *poševnokotni koordinati* točke P za kot ϑ. Nato vpeljemo še $u = |P'A|$ in $v = |P''B|$, ki ju bomo imeli za spremenljivki. Kot bomo videli, sta med seboj odvisni. Pri tem seveda veljata zvezi $a = e\sin\vartheta$ in $b = f\sin\vartheta$.

Ploščino trikotnika OAB izrazimo kot vsoto ploščin paralelograma $OP'PP''$ in trikotnikov $P'AP$ ter $P''PB$:

$$ef\sin\vartheta + \frac{1}{2}uf\sin\vartheta + \frac{1}{2}ve\sin\vartheta = \frac{1}{2}(e+u)(f+v)\sin\vartheta.$$

Po poenostavitvi dobimo preprosto zvezo med u in v: $uv = ef$.



Slika 3. Poševnokotni koordinati točke.

Kvadrat dolžine daljice $|AB|$ izrazimo s kosinusnim izrekom:

$$|AB|^2 = (e+u)^2 + (f+v)^2 - 2(e+u)(f+v)\cos\vartheta.$$

Zaradi zveze $uv = ef$ lahko izločimo v in dobimo najprej

$$z(u) = |AB|^2 = (e+u)^2 + (f+ef/u)^2 - 2(e+u)(f+ef/u)\cos\vartheta,$$

nato pa s poenostavitvijo

$$z(u) = \frac{(e+u)^2}{u^2}(u^2 + f^2 - 2fu\cos\vartheta).$$

Funkcija $z : u \mapsto z(u)$ je definirana, zvezna in odvedljiva na poltraku $(0, \infty)$, njen odvod pa je

$$z'(u) = \frac{2(e+u)}{u^3}(u^3 - fu^2\cos\vartheta + efu\cos\vartheta - ef^2).$$

Potreben pogoj za ekstrem funkcije z je enačba

$$u^3 - (f\cos\vartheta)u^2 + (ef\cos\vartheta)u - ef^2 = 0, \qquad (\star)$$

ki ima zagotovo vsaj en pozitiven koren, ker je za $u = 0$ izraz na njeni levi strani negativen, za dovolj velik pozitiven u pa pozitiven. Eksistenco minimuma funkcije z zagotavlja eksistenca minimuma funkcije ℓ.

Če so u_1, u_2, u_3 koreni enačbe ($\star$), veljajo zanje Viètove formule

$$u_1 + u_2 + u_3 = f\cos\vartheta, \quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = ef\cos\vartheta, \quad u_1u_2u_3 = ef^2.$$

Zadnja formula dopušča, da so vsi trije koreni pozitivni ali pa dva negativna in en pozitiven ali pa dva konjugirano kompleksna in en pozitiven. Pokažimo, da prva možnost ne pride v poštev. Iz Viètovih formul dobimo

$$\frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \cdot \frac{1}{3}(1/u_1 + 1/u_2 + 1/u_3) = \frac{1}{9}\cos^2\vartheta.$$

Če bi bili vsi koreni pozitivni, potem bi bil prvi faktor v tej relaciji njihova aritmetična sredina, drugi faktor pa obrat njihove harmonične sredine. Ker harmonična sredina ne presega aritmetične sredine, je leva stran večja ali enaka 1, kar bi pomenilo, da je $\cos^2\vartheta \geq 9$, kar je protislovje. To pomeni, da ima enačba ($\star$) natančno en pozitiven koren ξ. Za Filonovo premico je torej $|P'A| = \xi$ in $|P''B| = \eta = ef/\xi$. Hitro se da pokazati, da je η edini pozitivni koren enačbe

$$v^3 - (e\cos\vartheta)v^2 + (ef\cos\vartheta)v - e^2 f = 0. \tag{$\star\star$}$$

Za razdaljo $|AB|$ dobimo izraza

$$|AB| = \frac{e+\xi}{\xi}\sqrt{f^2 + \xi^2 - 2f\xi\cos\vartheta} = \frac{f+\eta}{\eta}\sqrt{e^2 + \eta^2 - 2e\eta\cos\vartheta}. \tag{$\star\star\star$}$$

Do podobnega izraza pridemo, če namesto koordinat e in f uporabimo razdalji $a = e\sin\vartheta$ in $b = f\sin\vartheta$:

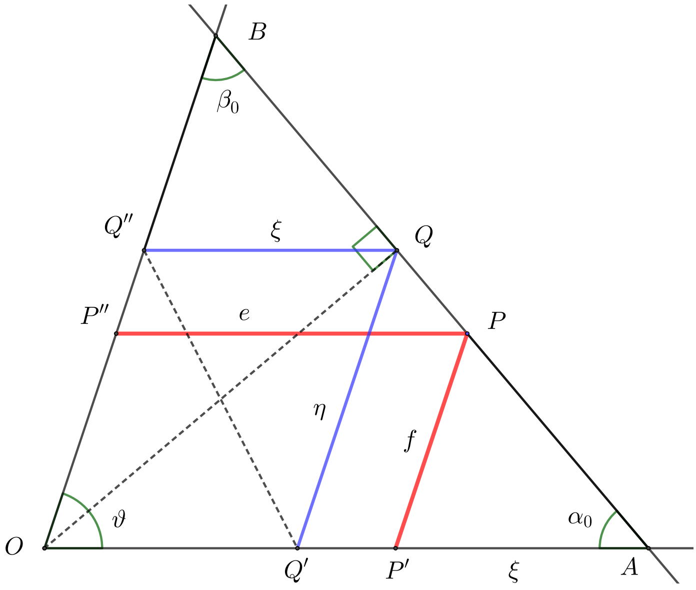
$$|AB| = \frac{a+\zeta}{\zeta\sin\vartheta}\sqrt{b^2 + \zeta^2 - 2b\zeta\cos\vartheta}, \tag{$\star\star\star'$}$$

pri čemer je ζ pozitivni koren enačbe

$$w^3 - (b\cos\vartheta)w^2 + (ab\cos\vartheta)w - ab^2 = 0, \tag{$\star'$}$$

V posebnem primeru, ko leži točka P na simetrali kota ϑ, je $e = f = \xi = \eta$ in $|AB| = 4e\sin(\vartheta/2)$. Takrat je Filonova premica kar pravokotnica v P na kotno simetralo.

Ko imamo Filonovo premico, vzporedno premaknemo trikotnik $P'AP$ tako, da pade P v B, A v Q in P' v Q'' (slika 4). Točka Q'' je seveda na daljici OB. Iz zvez $|OB| = f + \eta = f + |OQ''|$ sledi $|OQ''| = \eta$. Ker pa je še $|Q''Q| = \xi$, sta ξ in η poševnokotni koordinati točke Q za kot ϑ.



Slika 4. Filonova premica skozi dano točko.

Lastnosti Filonove premice

V prispevku nekajkrat uporabimo paralelogramsko enakost, ki pove, da je v paralelogramu vsota kvadratov stranic enaka vsoti kvadratov diagonal.

Točka Q je na Filonovi premici in ima, glede na to, kako smo do nje prišli, lastnost $|AP| = |QB|$. Dokazali pa bomo, da je Q pravokotna projekcija vrha O kota ϑ na Filonovo premico. V ta namen zapišemo paralelogramsko enakost za paralelogram $OQ'QQ''$:

$$2\xi^2 + 2\eta^2 = |OQ|^2 + |Q'Q''|^2.$$

Nato zapišemo še kosinusna izreka za trikotnika $Q''Q'Q$ in $Q''QB$:

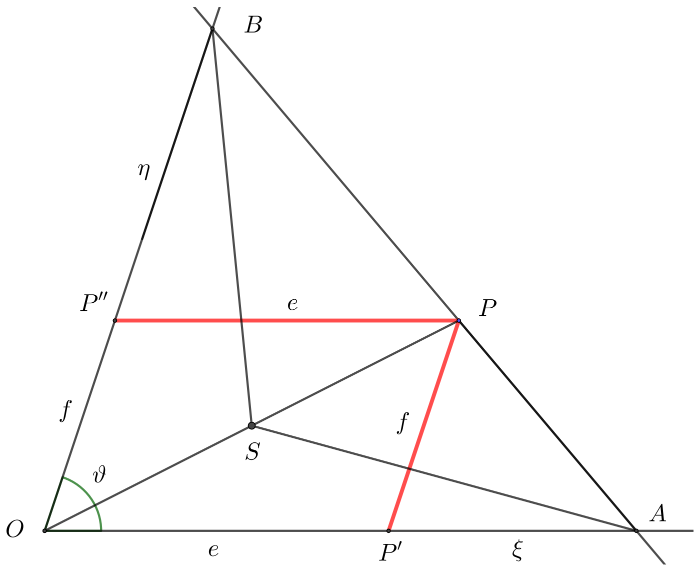
$$|Q'Q''|^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\vartheta, \quad |QB|^2 = \xi^2 + f^2 - 2\xi f\cos\vartheta.$$

Nazadnje izračunamo:

$$|OQ|^2 + |QB|^2 - |OB|^2 = 2(\xi^2 + \eta^2) - (\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\vartheta) +$$

$$+(\xi^2 + f^2 - 2\xi f\cos\vartheta) - (f + \eta)^2 = \frac{2}{\xi}(\xi^3 - (f\cos\vartheta)\xi^2 + (ef\cos\vartheta)\xi - ef^2) = 0.$$

Pri tem smo upoštevali zvezo $\xi\eta = ef$ in enačbo $(\star)$, ki ji zadošča ξ. Torej velja relacija $|OQ|^2 + |QB|^2 = |OB|^2$ in trikotnik OQB je pravokoten s pravim kotom ob oglišču Q.



Slika 5. K dokazu enakosti $|SA| = |SB|$.

Naj bo S središče daljice OP. Če skozi P poteka Filonova premica, ki preseka kraka kota ϑ v točkah A in B, potem sta razdalji $|SA|$ in $|SB|$ enaki. Ti dve razdalji sta dolžini težiščnic v trikotnikih OAP in OPB na skupno stranico OP. Kot posledico paralelogramske enakosti dobimo (slika 5)

$$(2|SA|)^2+|OP|^2 = 2|OA|^2+2|AP|^2, \quad (2|SB|)^2+|OP|^2 = 2|OB|^2+2|BP|^2.$$

Enakost $|SA| = |SB|$ bomo dokazali, čim dokažemo, da je

$$\delta = (|OA|^2 + |AP|^2) - (|OB|^2 + |BP|^2) = 0.$$

Dvakrat uporabimo kosinusni izrek in dobimo:

$$\delta = (e+\xi)^2 + \xi^2 + f^2 - 2\xi f\cos\vartheta - (f+\eta)^2 - \eta^2 - e^2 + 2\eta e\cos\vartheta.$$

Dobljeni izraz preoblikujemo v

$$\delta=\frac{2}{\xi}(\xi^3-(f\cos\vartheta)\xi^2+(ef\cos\vartheta)\xi-ef^2)-\frac{2}{\eta}(\eta^3-(e\cos\vartheta)\eta^2+(ef\cos\vartheta)\eta-e^2f),$$

pri čemer upoštevamo, da je $\xi\eta = ef$. Ker ξ zadošča enačbi $(\star)$, η pa enačbi $(\star\star)$, je $\delta = 0$ in $|SA| = |SB|$.

Lastnosti Filonove premice

$$|AP| = |QB|, \quad OQ \perp AB, \quad |SA| = |SB|$$

so poznali že antični matematiki Filon iz Bizanca, Apolonij iz Perge in Heron iz Aleksandrije. Za $\vartheta = \pi/2$ so jih uporabili za reševanje problema podvojitve kocke.

Filonova premica, krožnica in hiperbola

Točka Q na Filonovi premici točke P v kotu $\vartheta = \angle XOY$ leži po Talesovem izreku na krožnici $\mathcal{K}$, ki ima za premer daljico OP. Če vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy, kjer je krak OX pozitivni del abscisne osi, os y pa v O pravokotna nanjo in orientirana na običajni način, ima $\mathcal{K}$ središče v točki $S((e + f\cos\vartheta)/2, (f\sin\vartheta)/2)$ in enačbo

$$x^2 + y^2 - (e + f\cos\vartheta)x - (f\sin\vartheta)y = 0. \qquad (\mathcal{K})$$

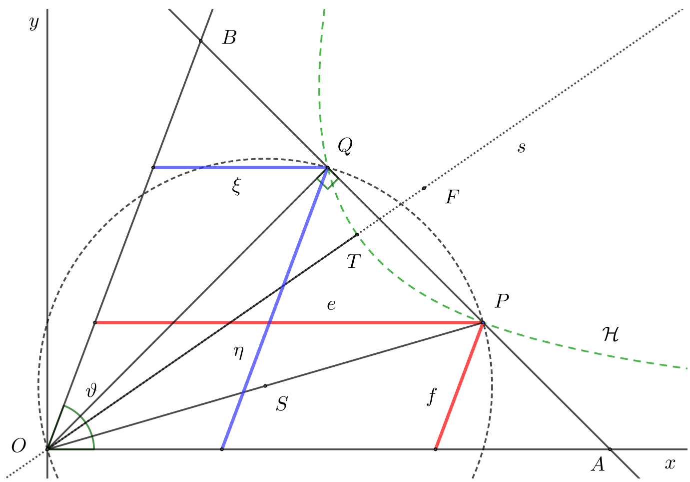
Kraka kota ϑ, podaljšana v premici z enačbama $y = 0$ in $x\sin\vartheta - y\cos\vartheta = 0$ sta asimptoti hiperbole

$$y(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) = c,$$

kjer je $c \neq 0$ poljubna konstanta. Skozi točko $P(e + f\cos\vartheta, f\sin\vartheta)$ poteka ena veja hiperbole $\mathcal{H}$, ki ima enačbo

$$y(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) = ef\sin^2\vartheta. \qquad (\mathcal{H})$$

Teme T te veje leži na simetrali s kota ϑ in je od O oddaljeno $2\sqrt{ef}\cos(\vartheta/2)$, gorišče F pa $2\sqrt{ef}$ (slika 6).



Slika 6. Določitev Filonove premice s krožnico in hiperbolo.

Izračunajmo drugo presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in hiperbole $\mathcal{H}$. Iz enačbe $(\mathcal{H})$ izrazimo x in ga vstavimo v enačbo $(\mathcal{K})$, preuredimo in dobimo enačbo za y:

$$\frac{y - f\sin\vartheta}{y\sin^2\vartheta}(y^3 - (e\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2 + (ef\sin^2\vartheta\cos\vartheta)y - e^2 f\sin^3\vartheta) = 0.$$

Rešitev $y_1 = f\sin\vartheta$ je ordinata točke P, ustrezen $x_1 = e + f\cos\vartheta$ pa njena abscisa. Druga rešitev je ničla drugega faktorja. Vanj vstavimo $y = \lambda\sin\vartheta$, okrajšamo in dobimo enačbo

$$\lambda^3 - (e\cos\vartheta)\lambda^2 + (ef\cos\vartheta)\lambda - e^2 f = 0.$$

Primerjamo jo z enačbo $(\star\star)$ in zapišemo edino pozitivno rešitev $\lambda = \eta$. Druga rešitev za y je zato $y_2 = \eta\sin\vartheta$. Za ustrezno absciso dobimo $x_2 = \xi + \eta\cos\vartheta$. Točka s koordinatama x_2 in y_2 pa je ravno točka Q na Filonovi premici. To pomeni, da se krožnica $\mathcal{K}$ in hiperbola $\mathcal{H}$ v primeru $e \neq f$ sekata v točkah P in Q, v primeru $e = f$ pa se v P dotikata (slika 6).

Vzemimo na obravnavani veji hiperbole $\mathcal{H}$ poljubno točko s poševnokotnima koordinatama u in v za kot ϑ. Njuni pravokotni koordinati sta $x = v\cos\vartheta + u$ in $y = v\sin\vartheta$. To upoštevamo v enačbi $(\mathcal{H})$ in dobimo: $uv = ef$.

Pri tem omenimo še eno lastnost hiperbole, ki je bila znana že Apoloniju iz Perge. Če premica preseka hiperbolo v točkah P in Q, njeni asimptoti pa v točkah A in B, potem imata daljici PQ in AB skupno središče, kar ima za posledico relacijo $|AP| = |QB|$. Analitični dokaz je na primer v [4].

Točka P natančno določa krožnico $\mathcal{K}$ in hiperbolo $\mathcal{H}$ ter njuni presečišči P in Q. Poševnokotna koordinata η točke Q je tudi koren enačbe $(\star\star)$, zato je koodinata $\xi = ef/\eta$ koren enačbe $(\star)$, kar pa pomeni, da je $z'(\xi) = 0$ in premica skozi ustrezni točki A in B je Filonova.

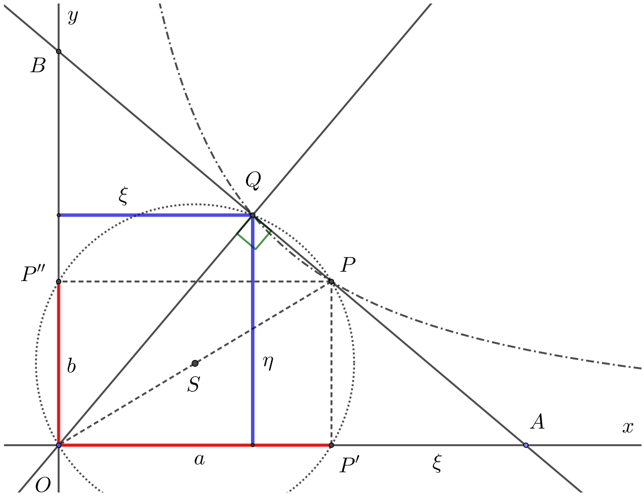
Filonova premica za pravi kot

Za pravi kot se računi poenostavijo. Tedaj je $a = e$ in $b = f$, enačbi $(\star)$ in $(\star\star)$ za ξ in η se poenostavita v $u^3 = ab^2$, $v^3 = a^2 b$, ki imata rešitvi $\xi = \sqrt[3]{ab^2}$ in $\eta = \sqrt[3]{a^2 b}$. Za razdaljo med točkama A in B pa dobimo

$$|AB| = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

Enačbi krožnice $\mathcal{K}$ in hiperbole $\mathcal{H}$ se poenostavita v

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0, \quad xy = ab.$$



Slika 7. Primer Filonove premice za pravi kot.

Relevantne točke s koordinatami so:

$$A(a+\xi,0),\ \ B(0,b+\eta),\ \ P(a,b),\ \ Q(\xi,\eta),\ \ S(a/2,b/2).$$

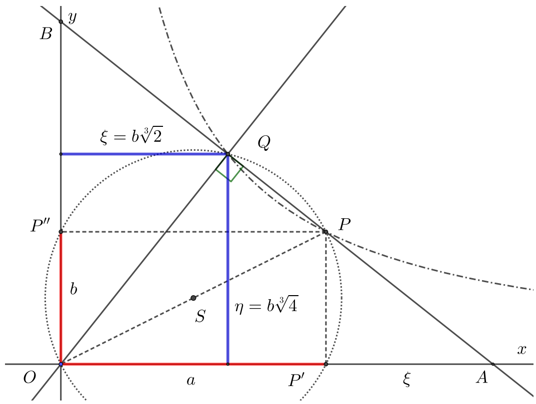
Po višinskem izreku v pravokotnem trikotniku OAQ velja relacija $\eta^2=\xi a$ oziroma $a/\eta=\eta/\xi$. Zaradi podobnosti trikotnikov $P'AP$ in $P''PB$ dobimo še relacijo $\xi/b=a/\eta$. To lahko potrdimo tudi z izrazoma za ξ in η. Našli smo relacijo

$$\frac{a}{\eta}=\frac{\eta}{\xi}=\frac{\xi}{b}.$$

Pravimo, da sta ξ in η *srednji geometrijski sorazmernici* dolžin a in b. Ker ξ in η zadoščata enačbama $y^2=ax$ in $x^2=by$, lahko srednji geometrijski sorazmernici poiščemo tudi s presekom parabol $y^2=ax$ in $x^2=by$. Tako metodo so poznali že nekateri starogrški matematiki (več o tem najdemo na primer v [3]).

Za $a=2b$ je $\xi=b\sqrt[3]{2}$, kar pomeni, da ima kocka z robom ξ za prostornino dvakratnik prostornine kocke z robom b. Takrat abscisa presečišča $Q\neq P$ krožnice $x^2+y^2-2bx-by=0$ in hiperbole $xy=2b^2$ reši star antični problem podvojitve kocke.

Filon iz Bizanca, ki še ni poznal analitične geometrije, je problem reševal tako, da je načrtal pravokotnik $OP'PP''$, mu očrtal krožnico, podaljšal stranici OP' in OP'' prek P' in P'' (tako kot na sliki 8), nato pa je premico vrtel okoli P malo v eno, malo v drugo smer, da je dosegel enakost



Slika 8. Podvojitev kocke.

$|AP| = |QB|$ oziroma se ji dovolj natančno približal. Pri tem sta A in B presečišči podaljškov s to premico, Q pa njeno presečišče s krožnico. Če je $|P'P|$ rob kocke, potem je $|P'A|$ rob podvojene kocke (v grščini in nemščini, sicer z drugačnimi oznakami, je to razloženo v [2]).

Za konec

S Filonovo premico rešimo problem plavajoče letvice v kanalih iz uvoda tega prispevka. S širinama a in b kanalov in za kot $\vartheta = \max(\varphi, \pi - \varphi)$ zapišemo enačbo $(\star')$, poiščemo njeno pozitivno rešitev ζ in nazadnje izračunamo iskano dolžino letvice po formuli v $(\star\star\star')$.

Problem je znan tudi pod drugimi imeni, na primer problem najdaljše cevi, ki jo lahko nesemo iz enega hodnika v drugega, ali problem najkrajše lestve, ki jo lahko prislonimo na zid, pred katerim je ovira, na primer omara.

LITERATURA

[1] I. Asimov, *Biografska enciklopedija znanosti in tehnike*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1978.

[2] H. Diels in E. Schramm, *Philons Belopoiika: viertes Buch der Mechanik*, Verlag der Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1919.

[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. I, Dover Publications, New York, 1981.

[4] M. Razpet in N. Razpet, *Trikotnik, enakoosna hiperbola in Bernoullijeva lemniskata*, Obzornik mat. fiz. **66** (2019), 41–53.

[5] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg in drugje, 2012.