UDK 539.42:669
Izvirni znanstveni članek

ISSN 1580-2949
MATER. TEHNOL. 34(1-2)043(2000)

POVEZAVA MED PODAJNOSTJO IN DOLŽINO RAZPOKE ZA RAZLIČNE LOMNOMEHANSKE PREIZKUŠANCE

CONNECTION BETWEEN THE COMPLIANCE AND THE CRACK LENGTH FOR SOME FRACTURE MECHANICS SPECIMENS

Igor Kovše
Inštitut za metalne konstrukcije, Mencingerjeva 7, 1001 Ljubljana, Slovenija

Prejem rokopisa - received: 1999-11-23; sprejem za objavo - accepted for publication: 1999-12-20

Pri lomnomehanskih preizkusih je treba meriti dolžino razpoke v preizkušancu v realnem času, med potekom preizkusa. Za učinkovito meritev dolžine razpoke iz podajnosti preizkušanca je treba narediti tri korake: (a) računsko, po metodi končnih elementov, določiti funkcijo podajnosti v odvisnosti od dolžine razpoke; (b) s primernim algoritmom določiti navedeni funkciji inverzno funkcijo; (c) primerjati numerično določeno dolžino razpoke z izmerjeno in kalibrirati numerični postopek in preizkus za dosego čim večje natančnosti. Prispevek podaja primerjavo izmerjenih in po navedenem postopku numerično določenih dolžin razpok za nekatere lomnomehanske preizkušance.

Ključne besede: mehanika loma, razpoka, podajnost, metoda končnih elementov, utrujenostni preizkusi

During a fracture mechanics experiment the real time crack length measurement has to be done. Three steps are necessary for an effective crack length determination from the measured compliance: (a) numerical determination (by FEM) of the compliance versus crack length function; (b) finding the inverse function; (c) comparison of the numerically determined crack length with the measured crack length (by some other method) and calibration of both. The paper present the comparison of the measured crack length with the crack length determined by the mentioned procedure for some specimens of fracture mechanics.

Key words: fracture mechanics, crack, compliance, finite element method, fatigue experiments

1 UVOD

Rezultati navadnih mehanskih preizkusov so količine, ki se dajo izračunati iz izmerjene sile, pomika, raztezka, energije in temperature. Za vse te količine obstajajo relativno zanesljive in natančne merilne metode.

Za določitev lomnih parametrov kovinskih materialov, kot so lomna žilavost K_{Ic}, kritični integral J_c ali zakon hitrosti rasti razpoke *da/dN*, je treba meriti še dolžino razpoke v preizkušancu. Večkrat moramo to meritev izvesti v realnem času, med potekom preizkusa. Razvitih je nekaj metod, od katerih ima vsaka svoje prednosti in pomanjkljivosti.

Ta prispevek obravnava metodo meritve dolžine razpoke iz podajnosti preizkušanca. Za tako meritev je treba iz znane zveze med podajnostjo *c*, silo *P* in dolžino razpoke *a*, *c=c(P,a)*, izračunati dolžino razpoke *a*. Za tak izračun je treba narediti naslednje:

1. Določiti zvezo *c=c(P,a)*. Ta je za vsako obliko preizkušanca drugačna in v splošnem jo je mogoče določiti le po metodi končnih elementov.
2. Določiti algoritem za izračun dolžine razpoke *a* iz zveze *c=c(P,a)*. Gre za reševanje nelinearnega problema.
3. Primerjati numerično določeno dolžino razpoke z izmerjeno pri preizkusu in kalibrirati numerični postopek ter preizkus za dosego čim večje natančnosti.

2 RAČUN IN MERITEV PODAJNOSTI TELESA Z RAZPOKO

2.1 Togost in podajnost telesa

Preden se lotimo obravnavanja razpok, si oglejmo primer poljubnega telesa, obremenjenega s silo *P*. Naj sila monotono narašča od začetne vrednosti P_0 do poljubne *P*. Sila povzroča pomik delcev telesa, ki ga označimo z *u*, od začetnega u_0 do poljubnega *u*. Silo in pomik bomo jemali kot skalarja, saj nas bo v nadaljnjem zanimala samo ena dimenzija teh, sicer vektorskih količin. Med silo in pomikom obstaja funkcijska povezava *P=f(u)*. Odvodu te fukcije, *k(u)=f'(u)=dP/du*, rečemo togost. Ta je za nelinearen material v splošnem odvisna od pomika. Inverzna funkcija k togosti je podajnost telesa *c*. Zapišemo jo takole:

$$c(P) = u'(P) = \frac{du}{dP} = \frac{1}{k(u)} \tag{2.1}$$

in je v splošnem odvisna od sile *P*. Togost in podajnost sta torej recipročni vrednosti in sta tukaj definirani v širšem smislu. Definicija v ožjem smislu postavlja pogoj, da imata sila in pomik enako usmeritev in delujeta v isti točki telesa.

2.2 *Togost in podajnost telesa z razpoko*

Predpostavimo sedaj, da ima telo razpoko dolžine a. Opazujmo to telo pri spreminjaju dolžine razpoke (ali pri rasti razpoke) od začetne dolžine a_0 do poljubne a. Zveza med u in P bo sedaj odvisna tudi od a: $P=f(u,a)$. Togost je sedaj:

$$k(u,a) = \frac{dP}{du} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial u} \qquad (2.2)$$

Podoben izraz velja za podajnost. Predpostavimo, da se dolžina razpoke ne spreminja pri spreminjanju sile oziroma pomika. Ker nas bo zanimala predvsem relativno počasna rast razpoke pri utrujanju, je ta predpostavka upravičena. S tem smo izločili tako imenovano stabilno rast razpoke pri naraščajoči sili (pomiku). Lahko tudi rečemo, da nas zanima togost pri fiksni dolžini a. Zadnji člen na desni strani zgornje enačbe tedaj odpade.

V intervalu linearne elastičnosti sta pri fiksni dolžini razpoke a togost in podajnost konstantni, tj. neodvisni od pomika oziroma sile:

$$\frac{dP}{du} = k(a), \quad \frac{du}{dP} = c(a) = \frac{1}{k(a)} \qquad (2.3)$$

2.3 *Meritev podajnosti*

Naj indeks c_M označuje merjeno količino. Tedaj z meritvijo pomika u_M in sile P_M izačunamo podajnost c_M takole:

$$c_M = \frac{\Delta u_M}{\Delta P_M} \qquad (2.4)$$

kjer sta Δu_M in ΔP_M razliki pomika in sile v dveh različnih točkah - pri dveh različnih obremenitvah. Pri meritvi pomika in sile v obeh točkah je pomembno naslednje:

a) Obe točki sta znotraj intervala linearne elastičnosti preizkušanca.
b) Obe količini, pomik in silo, merimo ob istem času.
c) Točki izberemo tako, da sta reprezentativni za podajnost oziroma togost preizkušanca. Pogosto to pomeni, da nista preblizu meji linearnosti oziroma točki $(u,P)=(0,0)$, pa tudi ne preblizu skupaj.

Omenimo še, da je pomembno, da podajnost računamo iz dveh točk in ne samo iz ene točke po enačbi $c_M=u_M/P_M$. Ta enačba je sicer teoretično pravilna, vendar predpostavlja, da je ena od točk v točki (0,0), s tem pa krši priporočilo *(c)*. Pri majhnih silah ima namreč mehanizem vpetja preizkušanca pogosto velik vpliv na podajnost (preizkušanec ni "uležan").

2.4 *Določanje dolžine razpoke*

Dolžino razpoke določimo posredno iz podajnosti. S kombinacijo enačb (2.3b) in (2.4) namreč dobimo $c_M=c(a)$, in ta enačba nam rabi za določitev dolžine razpoke a pri znani funkciji $c(a)$ in znani izmerjeni vrednosti c_M.

Funkcija $c(a)$ je v nekaterih primerih znana v analitični obliki, v splošnem pa samo kot tabela vrednosti (a_i,c_i), $i=1,..,n$ (uporabili smo oznako $c_i=c(a_i)$). Tako tabelo naredimo po metodi končnih elementov (MKE) z računskim modelom preizkušanca, pri katerem spreminjamo dolžino razpoke. Nato iz tabele vrednosti zgradimo interpolacijsko funkcijo $c(a)$. Za določitev dolžine razpoke potrebujemo inverzno funkcijo $a(c)$ k funkciji $c(a)$. Dolžino razpoke a_M, ki ustreza podajnosti c_M, lahko sedaj dobimo na dva načina:

- Poiščemo ničlo a_M funkcije $F(a)=c(a)-c_M$.
- Iz tabele a_i,c_i zgradimo interpolacijsko funkcijo $a=a(c)$ in poiščemo njeno vrednost v točki c_M: $a_M=a(c_M)$.

Prvi način je reševanje nelinearnega sistema in je v splošnem iterativni postopek. Ko moramo računati dolžino razpoke med preizkusom v čim krajšem času, bomo praviloma uporabili drugi način, saj je to direktni izračun z manjšim številom računskih operacij.

Interpolacijska funkcija je najpogosteje polinom, katerega koeficiente določimo po metodi najmanjših kvadratov. Večkrat pa uporabljamo pri konstrukciji interpolacijske funkcije tudi tako imenovano transferno funkcijo $U(c)$, s katero najprej transformiramo podajnost c. Interpolacijsko funkcijo za dolžino razpoke $a(U(c))$ v tem primeru določimo iz tabele vrednosti $(a_i,U(c_i))$, $i=1,...,n$. Transferno funkcijo uporabimo takrat, kadar se tabela vrednosti (a_i,c_i) ne da zadovoljivo aproksimirati s polinomom.

Merilo za kakovost interpolacije $a(U(c))$ je relativna napaka, ki jo izračunamo iz točk tabele $(a_i,U(c_i))$ po enačbi:

$$e = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a(U(c_i)) - a_i}{a_i}\right)^2} \qquad (2.5)$$

Na kratko opišimo postopek za določanje dolžine razpoke iz podajnosti še enkrat!

1) Pred preizkusom določimo interpolacijsko funkcijo $a=a(c)$.
2) Med preizkusom merimo silo P_M in pomik u_M.
3) Iz P_M in u_M izračunamo podajnost c_M po enačbi (2.4).
4) Iz aproksimacijske funkcije izračunamo dolžino razpoke $a_M=a(c_M)$. V primeru, da uporabimo transferno funkcijo, izračunamo najprej $U(c_M)$, nato pa dolžino razpoke $a_M=a(U(c_M))$.

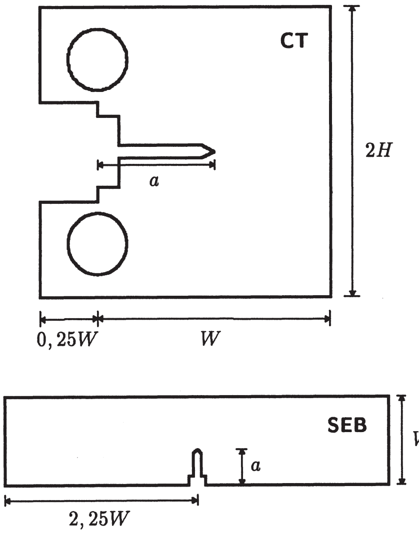
3 ZGLEDI

V naslednjih zgledih bomo za dva tipa preizkušancev pokazali način določanja interpolacijske funkcije $a=a(c)$, oceno kakovosti te interpolacije in primerjavo med optično izmerjeno dolžino razpoke in izračunano po opisanem postopku iz izmerjene podajnosti.

Tabela 1.1: Koeficienti polinomov *a=a(U(C))*

Preizkušanec	Pomik	m	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
CT	LL*	4	0,983666	-3,1602	-6,14637	44,560	-103,304	0
SEB	FF*	5	0,991334	-3,50284	-2,66482	30,5529	-61,4508	54,387

*LL - pomik v osi sile
*FF - pomik na sprednji strani preizkušanca



Slika 1.1: Geometrija preizkušancev CT in SEB
Figure 1.1: Geometry of the CT and SEB specimens

Za standardni natezni (CT) preizkušanec s **slike 1.1** smo numerično, po MKE, določili podajnost *c* za različno dolgo razpoko *a*. Na **sliki 1.2** je prikazano dobro ujemanje numeričnih rezultatov z analitičnim izrazom, ki za ta tip preizkušanca obstaja[9]. *C* je brezdimenzijska podajnost, normirana z modulom elastičnosti *E*, Poissonovim količnikom ν in debelino preizkušanca *B*:

$$C = cB\frac{E}{1-\nu^2} \tag{3.1}$$

Interpolacijsko funkcijo *a=a(U(C))* smo določili kot polinom stopnje *m*, ki se najbolje prilega izračunanim točkam:

$$\frac{a}{W} = k_0 + k_1 U + k_2 U^2 + \ldots + k_m U^m \tag{3.2}$$

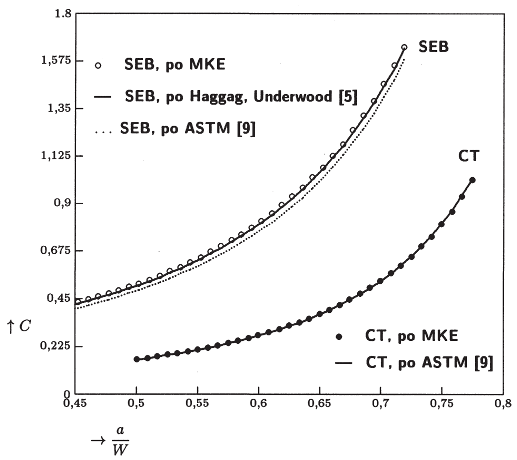
Koeficiente polinoma k_i smo določili po metodi najmanjših kvadratov, transferno funkcijo (kadar smo jo upoštevali) pa po enačbi[3]:

$$U(c) = \frac{1}{\sqrt{C}+1} \tag{3.3}$$

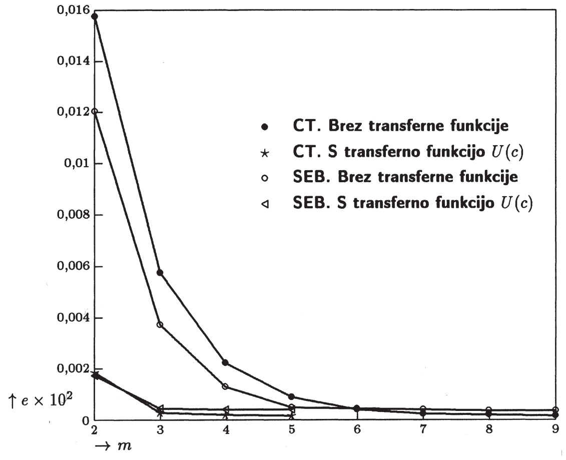
Relativna napaka *e* za tak polinom v odvisnosti od stopnje *m* je prikazana na **sliki 1.3**. Koeficienti polinoma so podani v **tabeli 1.1.**

Postopek smo ponovili za standardni upogibni (SEB) preizkušanec. Za preizkušanec SEB obstaja analitična enačba *c=c(a)*[9]. Naj samo omenimo, da ta enačba ni pravilna. Na to napako so opozorili že prejšnji raziskovalci[5,6], na **sliki 1.2** je pa tudi razvidno neujemanje te enačbe in numeričnih rezultatov po MKE. Popravljena enačba po[5] kaže dobro ujemanje z rezultati MKE.

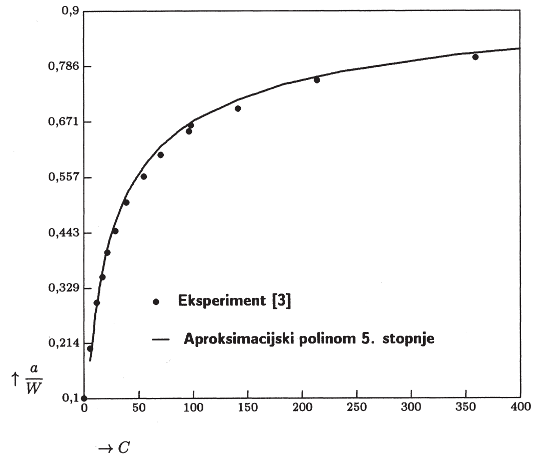
Geometrija preizkušancev CT in SEB je na **sliki 1.1**. Relativna napaka interpolacijskih polinomov je je prikazana na **sliki 1.3**. Za preizkušanec SEB smo tudi



Slika 1.2: Podajnost preizkušancev CT in SEB v odvisnosti od dolžine razpoke. Analitično in numerično
Figure 1.2: Compliance verus crack length for CT and SEB specimens. Analyticaly and numericaly



Slika 1.3: Relativna napaka e za aproksimacijske polinome *a=a(c)* za preizkušanca CT in SEB, kot funkcija stopnje polinoma *m*
Figure 1.3: Relative error e of the approximation polynoms *a=a(c)* for the CT and SEB specimens, as a function of the polynom degree *m*



Slika 1.4: Primerjava eksperimentalnih in numeričnih rezultatov za preizkušanec SEB
Figure 1.4: Comparison of the experimental and numerical results for the SEB specimen

naredili primerjavo med eksperimentalno ugotovljeno dolžino razpoke[3] in računsko določeno po opisanem postopku. Primerjava je na **sliki 1.4**.

4 SKLEP

V prispevku je opisan način določevanja dolžine razpoke iz podajnosti preizkušanca. Postopek je uporaben za meritev dolžine razpoke v realnem času, med potekom utrujenostnega preizkusa. Za tako meritev niso potrebne posebne merilne aparature: dolžino razpoke lahko določimo iz izmerjene sile in pomika, kar sta osnovni merjeni količini pri skoraj vsakem mehanskem preizkusu. Zvezo med podajnostjo in dolžino razpoke lahko po zgoraj opisanem postopku določimo za preizkušance s poljubno geometrijo, torej tudi za preizkušance nestandardnih oblik. Edina razlika med njimi se v končni fazi pozna v koeficientih (in stopnji) aproksimacijskega polinoma za dolžino razpoke. Zaradi tega je preizkus nestandardnega preizkušanca enostavno izvedljiv.

Napaka, ki se pri taki meritvi pojavi, je skoraj v celoti odvisna od natančnosti merjenja sile in pomika, ki pa sta poznani vrednosti.

5 LITERATURA

1 Hildebrand F. B., Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill, New York **1956**

2 Bohte Z., Numerical methods, DZS, Ljubljana (in slovene) **1978**

3 Jablonski D.A., Journet B., Vecchio R.S., Hertzeberg R., Compliance Functions for Various Fracture Mechanics Specimens. *Engng. Fract. Mech.*, 22 **(1985)** 5, 819

4 Shang-Xian W., Crack Length Calculation Formula for Three-Point Bend Specimens. *Int. J. Fracture*, 24 **(1984)**, R33-R35

5 Haggag F.M., Underwood H.J., Compliance of a Three-Point Bend Specimen at Load Line. *Int. J. Fracture*, 26 **(1984)**, R63-R65

6 Underwood H.J., Kapp J.A., Baratta F.I., More on Compliance of a Three-Point Bend Specimen. *Int. J. Fracture*, 28 **(1985)**, R41-R45

7 Evalds H.L., Wanhill R.J.H., Fracture mechanics, Edward Arnold in Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, **1985**

8 Measurement of Fatigue Crack Growth Rates. ASTM E 647-88 **(1988)**

9 Standard Test Method for J_{Ic}, A Measure of Fracture Toughness. ASTM E 813-87 **(1987)**