Igre s kartami – trojke

Nada Razpet in Jurij Kovič

→ Igre s kartami so že od nekdaj priljubljene, pa naj jih igramo v družbi ali sami s seboj na računalniku. Tokrat si bomo podrobneje ogledali igro, ki jo bomo imenovali TROJKE, v tujini je znana kot The Game of Set. Njen nastanek sega v leto 1974. Genetičarka Marsha Falco je raziskovala, zakaj nekateri organizmi zbolijo za določeno boleznijo. Ker je imela veliko podatkov, jih je želela prikazati tako, da bi lahko hitro ugotovila, kaj imajo organizmi skupnega. Ustvarila je slikovne simbole, ki so ji pomagali prepoznavati značilnosti. Ko je o odkritjih govorila s sodelavci, je kartice s simboli razporejala po tabli. Kmalu so sodelavci (in domači) ugotovili, da bi iz teh kartic lahko nastala zanimiva igra. Tako je prvo različico objavila leta 1991. Sledile so izboljšave in igra je postala priljubljena. Gospa Falco je prejela številne prestižne nagrade. Igra je avtorsko zaščitena [1].

Priprava na matematično obravnavo lastnosti kart

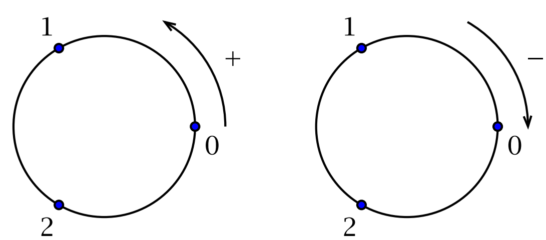
Na začetku se najprej spomnimo, kako seštevamo in odštevamo cela števila. Zapišimo samo tiste tri lastnosti, ki jih bomo kasneje uporabili. Za seštevanje veljajo lastnosti:

- $a + b = b + a, \qquad a + 0 = a, \qquad a + (-a) = 0.$

Prvi zapis pomeni, da je seštevanje komutativno (ni važen vrstni red), drugi, da je 0 nevtralni element (če številu prištejemo 0, je vsota enaka prejšnjemu številu), in tretji, da je $(-a)$ nasprotni element od a (če seštejemo element in njegov nasprotni element, je vsota enaka nevtralnemu elementu, v našem primeru 0).

Cela števila predstavimo na številski premici. Tudi seštevanje celih števil lahko predstavimo na številski premici. Prišteti številu a število $b > 0$ pomeni, da gremo od točke, ki predstavlja število a, za b enot v desno. Odšteti pa pomeni, da gremo od a za b enot v levo. Namesto vseh celih števil nas zanimajo le tista cela števila, ki so ostanki po deljenju s številom 3. Množico ostankov po deljenju s številom 3 zapišemo kot $\mathcal{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Naša množica ima torej le tri elemente. Tudi to množico lahko predstavimo grafično tako, da številsko premico navijemo na krožnico. Števila 0, 1, in 2 so predstavljena s tremi točkami na krožnici. In kako računamo v množici $\mathcal{Z}_3$? Prišteti 1 (ali 2) pomeni pomakniti se za eno mesto (za dve mesti) v pozitivni smeri (nasprotni smeri urinega kazalca). Odšteti 1 (odšteti 2) pa pomeni pomakniti se za eno (dve) mesti v smeri urinega kazalca.

SLIKA 1.
Igralne karte in igralne kocke



SLIKA 2.
Seštevanje in odštevanje v množici ostankov $\mathcal{Z}_3$

Zapišimo še tablico seštevanja v množici $\mathcal{Z}_3$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Seštevanje ostankov po deljenju s številom 3 v matematični obliki zapišemo takole:

- $1+1 \equiv 2 \pmod 3, \quad 1+2 \equiv 0 \pmod 3,$ $2+2 \equiv 1 \pmod 3. \qquad (1)$

Vsota števil $1+2=3$, ostanek po deljenju s številom 3 je 0. Vsota števil $2+2=4$, ko 4 delimo s 3, je ostanek 1.

Kako pa izračunamo nasprotna števila? Za nasprotna števila velja $m+(-m) \equiv 0 \pmod 3$. Ker je v našem primeru $1+2 \equiv 0 \pmod 3$, sta si 1 in 2 nasprotni števili. Torej velja:

- $-1 \equiv 2 \pmod 3, \quad -2 \equiv 1 \pmod 3. \qquad (2)$

Matematiki poznajo različne množice, v katere vpeljejo matematične operacije, za katere se sprva zdi, da nimajo praktičnega pomena, a se kasneje izkaže, da nam pri nekaterih predstavitvah pridejo prav. Tudi naša množica ostankov nam bo v nadaljevanju skrajšala zapise in pomagala pri ugotavljanju povezav med kartami.

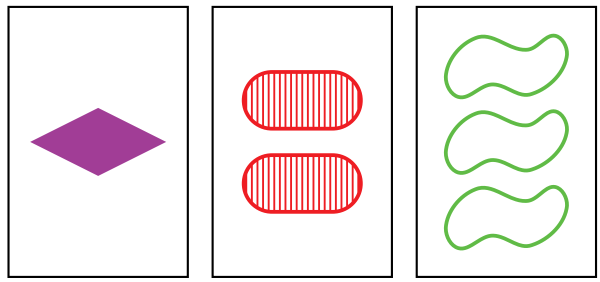
Predstavitev kart

Igra ima 81 med seboj različnih kart (obstaja tudi različica s kockami, glej sliko 1). Vsaka karta ima štiri lastnosti:

- **število**: 1, 2, 3 (oznake 1, 2, 0),
- **barvo**: zelena (1), vijolična (2), rdeča (0),
- **polnilo**: prazen (1), črtast (2) ali poln (0),
- **obliko**: oval (1), piškot (2), karo (0).

Vsaki lastnosti smo priredili tri številske vrednosti 0, 1 ali 2, da bomo lahko kasneje lastnosti zapisovali v matematični obliki. Če ima karta npr. en sam simbol, to označimo z 1; če ima dva simbola, z 2; če ima tri simbole, pa v skladu z dogovorom, da se bomo gibali v množici ostankov po deljenju s številom 3, z 0. Tudi ostalim lastnostim na enak način priredimo števila iz množice $\mathcal{Z}_3$. Vsako karto torej opišemo s štirimi števili. Ta štiri števila lahko pomenijo koordinate točke v štirirazsežnem prostoru oz. krajevni vektor (vektor od koordinatnega izhodišča do izbrane točke $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$). Zapišemo ga kot $\vec{a}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Oznake x_i po vrsti pomenijo število, barvo, polnilo, obliko.

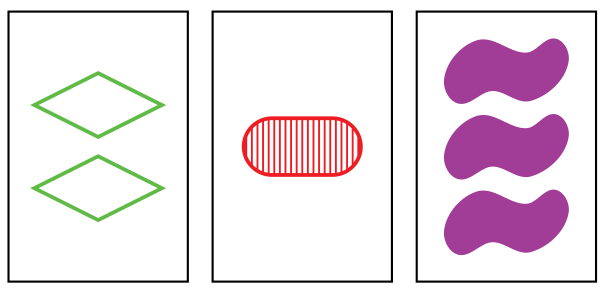
Oglejmo si primer:



SLIKA 3.
Simboli na karticah

Za karte na sliki 3 velja: $\vec{a}_1 = (1,2,0,0)$, $\vec{a}_2 = (2,0,2,1)$ in $\vec{a}_3 = (0,1,1,2)$.

Trojko predstavljalo tri karte, na katerih so si simboli po vsaki od lastnosti bodisi enaki bodisi povsem različni



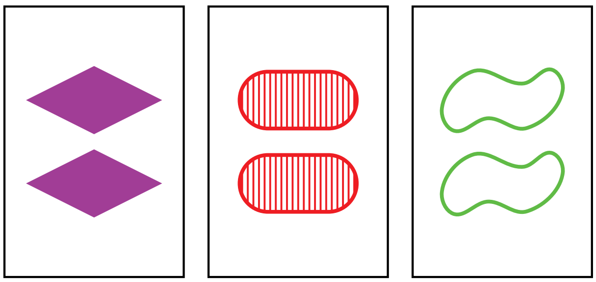
SLIKA 4.
Izbrali smo tri karte.

Na sliki 4 so tri izbrane karte: $\vec{a}_1 = (2,1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (1,0,2,1)$ in $\vec{a}_3 = (0,2,0,2)$. Da bodo razlike vidnejše, jih zapišimo v tabelo:

število	barva	polnilo	oblika
2	1	1	0
1	0	2	1
0	2	0	2

Vse karte imajo različno število elementov, prav tako so različnih barv, polnil in oblik (v vsakem stolpcu so vedno vse tri možnosti: 0, 1 in 2). Te tri karte torej predstavljajo trojko.

Izberimo nove tri karte (slika 5).



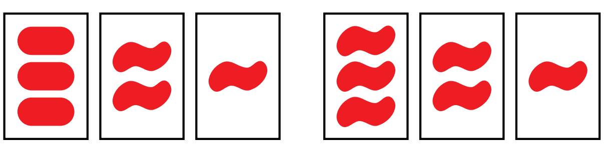
SLIKA 5.
Število simbolov na kartah je enako.

Z vektorji jih zapišemo takole: $\vec{a}_1 = (2,2,0,0)$, $\vec{a}_2 = (2,0,2,1)$ in $\vec{a}_3 = (2,1,1,2)$. Zapis v tabeli:

število	barva	polnilo	oblika
2	2	0	0
2	0	2	1
2	1	1	2

Na vseh treh kartah je enako število simbolov, po vseh drugih lastnostih pa se razlikujejo. Torej predstavljajo trojko.

Poglejmo si še karte na sliki 6.



SLIKA 6.
Leve tri karte ne predstavljajo trojke, desne tri pa so trojka.

Leve tri karte na sliki 6 zapišemo z vektorji: $\vec{b}_1 = (0,0,0,1)$, $\vec{b}_2 = (2,0,0,2)$ in $\vec{b}_3 = (1,0,0,2)$, v tabeli pa takole:

število	barva	polnilo	oblika
0	0	0	1
2	0	0	2
1	0	0	2

Števila v prvem stolpcu so vsa različna, v drugem in tretjem stolpcu so enaka (vsi simboli so rdeči in polni), v zadnjem stolpcu sta dve številki enaki, ena pa je drugačna. Torej to ni trojka.

Desne tri karte pa so trojka.

Zapišimo pravilo trojk natančneje

a) Če sta si dve karti po neki lastnosti enaki, mora imeti tudi tretja karta to lastnost enako prejšnjima dvema.

b) Če sta si dve karti po neki lastnosti različni, mora imeti tudi tretja karta to lastnost drugačno od prejšnjih dveh.

Označimo prvo karto v trojki z $\vec{a}_1$, drugo z $\vec{a}_2$ in tretjo z $\vec{a}_3$. Potem lahko karte v splošnem zapišemo kot vektorje

- $\vec{a}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{a}_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\vec{a}_3 = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Karte predstavljajo trojko o takrat, ko za indekse $i = 1,2,3,4$ velja bodisi $x_i = y_i = z_i$ bodisi $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0,1,2\}$. Prvi zapis pomeni, da se karte v določeni lastnosti ujemajo, drugi pa, da so si po določeni lastnosti različne.

Ker smo vse lastnosti označevali s števili, lahko preverimo, kdaj tri karte predstavljajo trojko tudi računsko. Seštejemo števila, ki določajo lastnost i: $x_i + y_i + z_i$. Kakšne so lahko vsote teh števil?

- $0+1+2=3$,
  $0+0+0=0$, $1+1+1=3$, $2+2+2=6$,
  $0+0+1=1$, $1+1+0=2$, $2+2+0=4$,
  $0+0+2=2$, $1+1+2=4$, $2+2+1=5$.

V prvi vrstici je zapisan primer, ko imajo karte različno izbrano lastnost, v drugi pa, ko imajo karte enako izbrano lastnost. Vse te vsote so deljive s tri, ostanek je 0. V tretji in četrti vrstici pa imata po dve karti enako lastnost, tretja karta pa se po tej lastnosti razlikuje. Vsote niso deljive s 3. Nimamo trojk.

Trojke torej dobimo natanko takrat, kadar je vsota števil, ki določajo i-to lastnost treh kart, deljiva s tri. V matematični obliki to zapišemo takole: $x_i + y_i + z_i \equiv 0 \pmod 3$.

Pri zapisu z vektorji karte predstavljajo trojko, če je vsota vektorjev **ničelni vektor**, torej če zanje velja: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (0,0,0,0)$. Pri tem seveda upoštevamo pravila za seštevanje v $\mathbb{Z}_3$.

Za karte, ki so na sliki 4 levo, velja: $\vec{a}_1 = (2,1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (1,0,2,1)$ in $\vec{a}_3 = (0,2,0,2)$,

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 &= (2,1,1,0) + (1,0,2,1) + (0,2,0,2)\\ &= (0,0,0,0).\end{aligned}$$

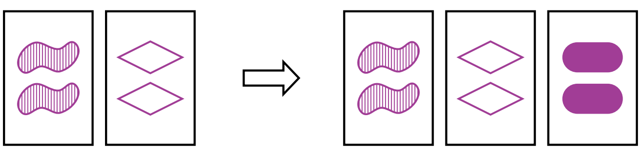
Če torej prvima dvema kartama priredimo vektorja $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$, je tretja karta natanko določena z vektorjem: $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Torej v našem primeru:

$$\begin{aligned}-\vec{a}_1 &= -(2,1,1,0) = (1,2,2,0),\\ -\vec{a}_2 &= -(1,0,2,1) = (2,0,1,2),\\ \vec{a}_3 &= -\vec{a}_1 - \vec{a}_2\\ &= (1,2,2,0) + (2,0,1,2) = (0,2,0,2).\end{aligned}$$

To pa je ravno tretja karta.

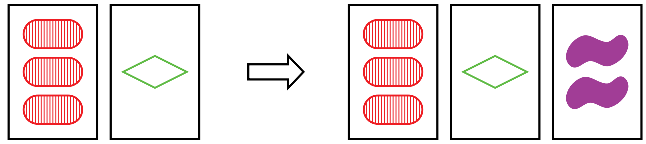
Kako pogoste so trojke?

Koliko možnosti imamo, da izberemo karto tako, da dobimo trojko (slika 7)?



SLIKA 7.
Karti smo dopolnili do trojke.

Ker se na sliki 7 karti ujemata v barvi in številu, mora imeti tretja karta dva elementa, elementi morajo biti vijolični, polnilo mora biti drugačno, na voljo je torej le polni znak, ki mora biti drugačen tudi po obliki, torej oval. Torej smo imeli le eno možnost, da karto dopolnimo do trojke.



SLIKA 8.
Karti smo dopolnili do trojke.

Na sliki 8 se prvi dve karti razlikujeta po vseh štirih lastnostih, torej se mora tudi tretja po vseh lastnostih razlikovati od prvih dveh, če želimo dobiti trojko. Taka karta je ena sama.

Ker ima vsaka lastnost le tri možne vrednosti, je z dvema kartama tretja natanko določena. Po izboru dveh kart ostane še 79 kart. Torej je možnost, da izvlečemo pravo karto, $\frac{1}{79}$ (temu rečemo, da je verjetnost za izbiro prave karte enaka $\frac{1}{79}$) ali približno 1,3 %. Pravzaprav malo, kajne?

Vsaka dvojica kart, ki nastopa v trojki, se ujema v največ treh lastnosti (v nobeni, v eni, v dveh ali v treh lastnostih). Če bi se namreč dvojici ujemali v vseh štirih lastnostih, bi bili enaki.

Koliko različnih trojk lahko sestavimo iz 81-ih (med seboj različnih) kart?

Ko izberemo prvo karto (81 možnosti), imamo za izbor druge karte še 80 možnosti. Kakor koli izberemo dve različni karti, ju le ena karta dopolnjuje do trojke. Poljubni dve karti imata namreč določeno lastnost bodisi enako bodisi različno. V prvem primeru mora tudi tretja karta imeti to lastnost enako, v drugem primeru pa tudi vemo, kakšna je tretja karta. Vemo, da lahko drugo karto izberemo poljubno, tretja pa je s prvima dvema natančno določena, kar sledi tudi iz enačbe $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Vseh možnosti je torej

$$n_1 = 81 \cdot 80 \cdot 1 = 6480. \tag{3}$$

Pri tem smo upoštevali tudi vrstni red kart. Pri iskanju trojk pa vrstni red ni pomemben. To pa pomeni, da moramo še preveriti, koliko teh trojk je enakih.

Permutacije množice z n elementi

Tri karte a, b in c lahko razporedimo v zaporedje treh kart na več načinov. Taki razporeditvi rečemo permutacija množice s tremi elementi. Število teh permutacij je $P_3 = 3! = 6$ (ali splošno: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, kar beremo kot n fakulteta). Zapišimo teh šest načinov:

- (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c),
  (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Vseh različnih trojk iz 81 kart je torej šestkrat manj kot vseh zaporedij (permutacij) treh kart:

$$n = \frac{n_1}{6} = \frac{6480}{6} = 1080. \tag{4}$$

Vseh različnih trojk je 1080.

V koliko trojkah pa nastopa določena karta?

Izberemo eno karto, ostane jih še 80. Ker ostali dve karti nastopata v paru, je torej še 40 možnosti. Vsaka karta nastopa v 40-ih trojkah.

Kako igramo igro?

Delilec premeša karte in na mizo v pravokotnik dimenzij 3×4 zloži 12 kart s slikami navzgor. Igralec, ki najprej vidi trojko, vzklikne »trojka«, in pobere tri karte. Če se ostali igralci strinjajo, da je res našel trojko, dobi eno točko. Delilec na mizo doda k ostalim kartam nove tri karte iz kupa nerazdeljenih kart. Na mizi je torej zopet 12 kart. Trojke je potrebno pobrati takoj po klicu »trojka«, (v nekaj sekundah). Dokler igralec ne pobere kart, drugi igralci ne smejo napovedovati trojk.

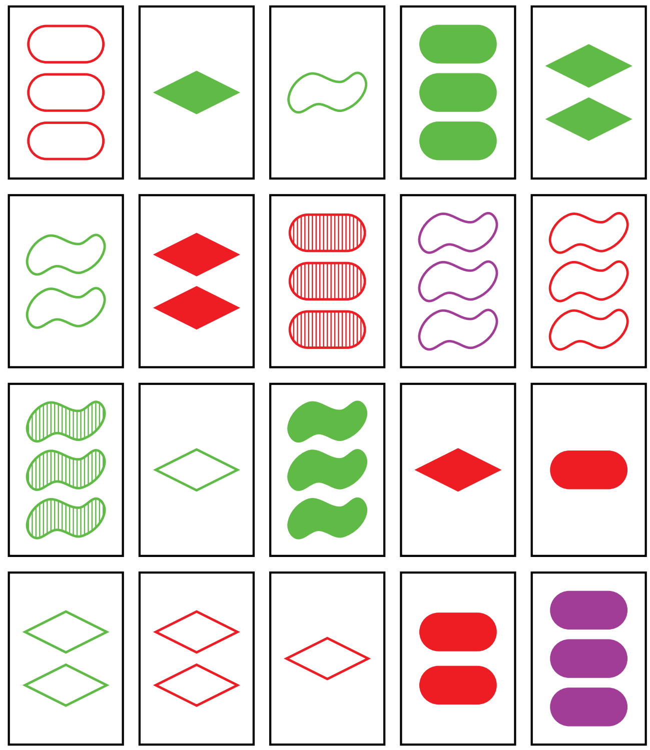
Če se je igralec zmotil, torej če nima trojke, mora karte vrniti na kup. Igralci zopet iščejo trojke med prvotnimi 12-timi kartami. Če nihče ne najde trojke, delilec doda nove tri karte (zdaj je na mizi 15 kart). Če nekdo od igralcev najde trojko, pobere tri karte, ki predstavljajo trojko, in dobi točko. Novih kart se na mizo v tem primeru ne dodaja. Igralci zopet izbirajo trojke izmed 12-ih kart, ki so ostale na mizi. Če ne najdejo trojke, potem delilec doda nove tri karte. Če še vedno ne najdejo trojke, doda delilec še tri nove karte.

Igra je končana, ko je vseh 81 kart razdeljenih in na mizi ni nobene trojke več.

Nov igro začne nov delilec. Ko so vsi igralci že bili delilci, se točke seštejejo. Igralec z največ točkami je zmagovalec.

Ali se lahko zgodi, da je na mizi več kot 15 kart in ni trojke?

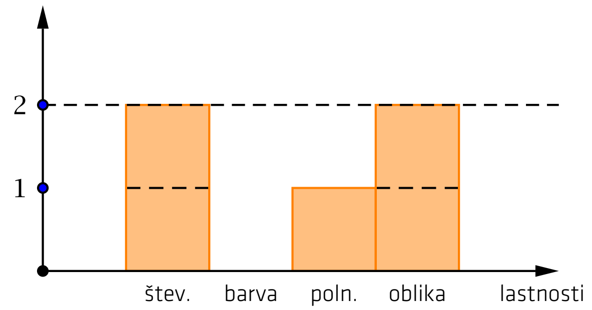
Seveda. Izkaže se, da je lahko na mizi največ 20 kart brez trojk. Eden od primerov je na sliki 9.



SLIKA 9.
20 kart, ni trojk.

Igro lahko igrate tudi na spletu, obstajajo tudi prosto dostopne verzije igre. Preprosto vtipkajte *The set card game*. Obstajajo tudi druge različice pravil igre.

Karte lahko predstavimo tudi s stolpci, kot na sliki 10. Na os x nanašamo lastnosti, na os y pa ustrezno vrednost za to lastnost 0, 1 ali 2.



SLIKA 10.
Predstavitev lastnosti s stolpci.

Kartam lahko damo tudi drugačne interpretacije. Karte lahko predstavljajo npr. štiri izbrane lastnosti, ki jih ima vsak matematik v večji ali manjši meri (merjene s tristopenjsko lestvico 2-1-0), npr.: računska spretnost, sposobnost logičnega sklepanja, sposobnost reševanja problemov, domišljija. Katera je tedaj »vaša« karta, če se sami realno ocenite po tej lestvici?

Sami poskusite najti kartam še kakšne druge interpretacije!

V razmislek: Ali lahko namesto trojk izbiramo četverke (peterke, n-terke)? Koliko lastnosti bi morale imeti v teh primerih ustrezne karte?

Literatura

[1] Copyright ©1988–2004 M. J. Falco in R. E. Falco, *SET®, The family game of visual perception*, www.setgame.com, dostopano 7. 8. 2014, Set is a registered trademark of SET Enterprises, Inc.

[2] B. Coleman in K. Hartshorn, *Game, Set, Math*, Mathematics Magazine **85**, 2, April 2012, MAA.

[3] B. L. Davis in D. Maclang, *The card game set*, www.aimath.org/~kaur/misc/set.pdf, dostopano 7. 8. 2014.

× × ×

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

			3		2		1
						3	
3	8	2					5
	7						6
			5		1	4	
	4					6	
8		5					
		4		5	7		

REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	6	8	3	7	2	5	1
2	5	7	1	6	8	3	4
3	8	2	6	1	4	7	5
5	7	1	4	8	3	2	6
7	2	6	5	3	1	4	8
1	4	3	2	8	5	6	7
8	3	5	7	4	6	1	2
6	1	4	2	5	7	8	3

× × ×