PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 2
Strani 100–104

Anton Cedilnik:

VSAKDANJE FUNKCIJE

Ključne besede: matematika, analiza, realne funkcije, celi del, signum.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1259-Cedilnik.pdf

VSAKDANJE FUNKCIJE

Matematika v srednjih šolah je včasih na prvi pogled čudna. Učiti se moramo nekaterih zelo kompliciranih funkcij; kot primer naj služi tale dijakova nočna mora

$$f(x) = \sqrt{\log(1 - x^2)},$$

ki je skoraj zagotovo ne bomo nikoli srečali v praktičnem življenju. Po drugi strani pa bode v oči, da so v srednjih šolah zelo redko predstavljene nekatere funkcije, ki jih vsakodnevno srečujemo. Nekaj teh bomo v nadaljevanju opisali. Nikakor pa ne želimo trditi, da premlevanje kompliciranih funkcij ni smiselno, pravzaprav je res ravno obratno!

Ena od "vsakodnevnih funkcij" je **celi del**. Ta funkcija poljubnemu realnemu številu priredi tisto celo število, ki mu je od spodaj najbližje, torej največje celo število, ki ni večje od x:

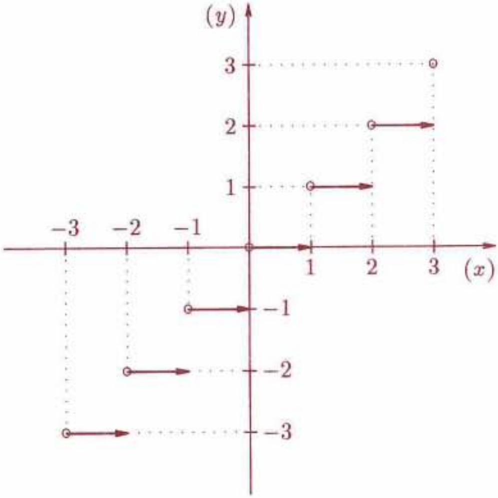
$$\mathrm{int}(x) = \max\{n | n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x\}.$$

Oznaka int je prišla iz računalništva in je uspešno izrinila starejšo oznako; njen izvor je angleška beseda *integer* = celo število (dejanski izvor besede pa je seveda latinski).

x	$\mathrm{int}(x)$	$\mathrm{frac}(x)$	$\mathrm{sgn}(x)$
3	3	0	1
3,14	3	0,14	1
3,99	3	0,99	1
0	0	0	0
-4	-4	0	-1
$-4,1$	-5	0,9	-1
$-4,8$	-5	0,2	-1

Tabela 1

Nekaj primerov vrednosti te in naslednjih dveh funkcij je v tabeli 1. Graf $y = \mathrm{int}(x)$ pa je na sliki 1.



Slika 1. $y = \mathrm{int}(x)$

Ne smemo zamenjati te funkcije z zaokroževanjem na cela mesta. Zaokrožitev števila 3,99 je namreč 4 in ne 3, zaokrožitev števila -4,1 pa je -4 in ne -5. Res pa je, da zaokroževanje zahteva že določen miselni napor, ki mu nekateri niso kos. To izrabljajo trgovci, ki na izdelek napišejo ceno npr. 798 tolarjev, možgansko len kupec pa namesto cene 800 vidi 700 tolarjev in zmotno domneva, da je nakup ugoden. Da je to res, lahko vsak preskusi sam. Gre naj v trgovino in si zapiše nekaj deset cen, potem pa naj doma ugotovi pogostost posameznih števk; skoraj gotovo bo največkrat nastopala devetka (ki je sicer najbolj sitna za računanje na pamet), kar dokazuje, da trgovci dobro poznajo opisani psihološki trik.

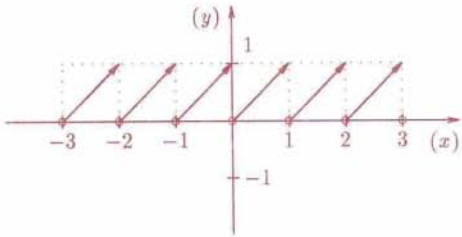
Funkcijo celi del zlahka in, kot se izkaže, smiselno razširimo tudi na kompleksna števila takole:

$$\mathrm{int}(a + ib) = \mathrm{int}(a) + i \cdot \mathrm{int}(b) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Iz celega dela izpeljemo **mantiso** (latinsko: pridatek, dodatek):

$$\mathrm{frac}(x) = x - \mathrm{int}(x),$$

kjer je x poljubno realno ali celo kompleksno število. Simbol frac spet prihaja iz latinščine preko angleščine (fraction = ulomek, odlomek). Mantiso so pred izbruhom kalkulatorjev srednješolci srečali pri iskanju logaritmov iz tabel. Nekaj primerov funkcijskih vrednosti je v tabeli 1, graf $y = \mathrm{frac}(x)$ pa je na sliki 2. Iz grafa se vidi zanimiva lastnost: mantisa je periodična funkcija.

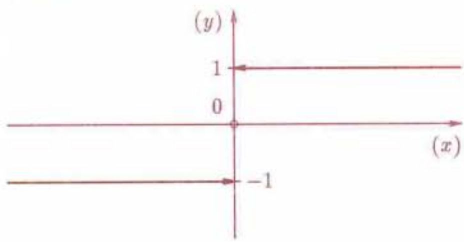


Slika 2. $y = \mathrm{frac}(x)$

Naslednja zanimiva funkcija je **signum** realnega števila.

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (\mathrm{x} > 0), \\ 0 & (\mathrm{x} = 0), \\ -1 & (\mathrm{x} < 0). \end{cases}$$

Latinska besega *signum* (iz katere pride tudi angleški *sign*, ki se pojavlja na nekaterih kalkulatorjih) pomeni znak, v tem kontekstu predznak. Vedno, kadar hočemo, da je neko število pozitivno ali negativno, dejansko uporabimo to funkcijo; to pa storimo, kdo ve kolikokrat na dan. Zato je ta preprosta funkcija s samo tremi vrednostmi pomembna. Njen graf $y = \mathrm{sign}(x)$ je na sliki 3.



Slika 3. $y = \mathrm{sign}(x)$

Funkcija signum je v tesni zvezi z absolutno vrednostjo; za vsak realen x namreč velja:

$$x = |x| \cdot \mathrm{sgn}(x),$$

$$|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x).$$

Signum nima smiselne posplošitve na kompleksna števila.

Nazadnje še opozorimo na nenavadno lastnost prikazanih treh funkcij. Nezvezne so, njihovi grafi so v nekaterih točkah "pretrgani". Če skušamo to povedati natančneje: v nekaterih točkah se lahko funkcijske vrednosti že pri poljubno majhni spremembi argumenta močno spremenijo.

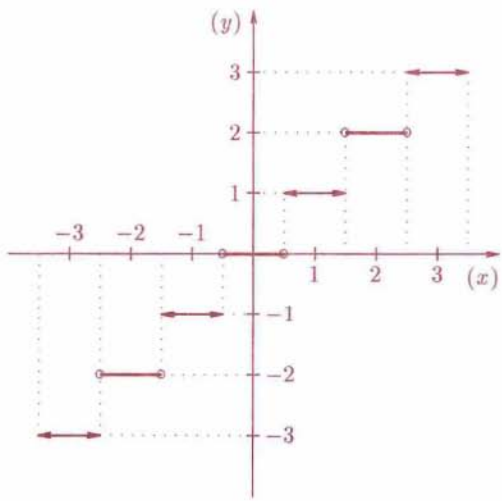
Tako! Tri funkcije, ki jih (mnogokrat podzavestno) uporabljamo v vsakdanjem življenju, smo opisali, četrto bomo pa prepustili za nalogo bralcu. Zagotovo jo poznate, celo njeno ime veste. Njen simbol ni ustaljen, zato bomo uporabili pač enega, ki je v uporabi. Za poljuben realen x naj bo:

$$< x >_n = \left[b - c\frac{1-(-1)^b}{2} \right] \cdot 10^{-n}, \tag{1}$$

kjer so:

$$\begin{aligned} a &= x \cdot 10^n + \frac{1}{2} \\ b &= \mathrm{int}(a), \\ c &= 1 - \mathrm{sgn}(a-b). \end{aligned}$$

Indeks n je lahko poljubno celo število in je tako pomemben, da ga omenjamo celo v imenu te funkcije. Za $n = 0$ je graf $y =< x >_0$ prikazan na sliki 4.



Slika 4. $y =< x >_0$

Da boste laže odkrili, za kaj gre pri tej funkciji, svetujemo, da izračunate

$$< 7329,8545 >_n$$

za vse n od -5 do 5. Ker pa je, kot smo omenili, funkcija tudi čisto praktično pomembna, naj še dodamo, da je zelo preprost približek za to, sicer dokaj komplicirano funkcijo, takle:

$$< x >_n \approx \mathrm{int}(x \cdot 10^n + \frac{1}{2}) \cdot 10^{-n}. \tag{2}$$

Kdaj se ta približek sploh razlikuje od natančne vrednosti?

Anton Cedilnik