SREDINE SREDIN

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 26D15

Obravnavamo relacije med nekaterimi sredinami vrstic in stolpcev matrik s pozitivnimi realnimi elementi. Uporabimo dobro znano neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih realnih števil.

THE MEANS OF MEANS

We discuss relations between some means related to rows and columns of matrices with positive real entries. We use the well-known inequality between arithmetic and geometric mean of positive real numbers.

Uvod

Neenakosti so v matematiki vsekakor zelo pomembne. Z njimi si pomagamo na primer v analizi, geometriji, aritmetiki, verjetnostnem računu, teoriji števil in v numerični ter računalniški matematiki. Nekatere neenakosti so že dolgo znane, še vedno pa odkrivajo nove. Med najbolj znanimi je trikotniška neenakost, ki jo spoznamo najprej pri realnih, nato pri kompleksnih številih in pri običajnih vektorjih, kasneje pa v metričnih, normiranih in drugih prostorih. Dokazovanje neenakosti poteka različno: včasih z metodo popolne indukcije, včasih direktno z uporabo aksiomatike realnih števil, tu pa tam si pomagamo z že dokazanimi neenakostmi, pogosto pa uporabljamo prijeme z različnih matematičnih področij.

Zelo znana je tudi neenakost med geometrično in aritmetično sredino dveh pozitivnih realnih števil. Aritmetična sredina pozitivnih realnih števil a in b je po definiciji število $A(a,b) = (a+b)/2$, geometrična pa $G(a,b) = \sqrt{ab}$. Brez težav dokažemo, da je vedno $G(a,b) \leq A(a,b)$, enačaj v tej relaciji pa velja samo tedaj, ko je $a = b$. Definiciji obeh sredin lahko posplošimo na poljubno, toda končno mnogo pozitivnih realnih števil.

Definicija 1. Aritmetična in geometrična sredina pozitivnih realnih števil $u_1, u_2, \ldots, u_r$ sta števili

$$A(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_r}{r}, \tag{1}$$

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}. \tag{2}$$

Ni pa nič kaj lahko dokazati, da velja znana relacija

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_r) \tag{3}$$

pri poljubnih pozitivnih realnih številih $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Obstaja več načinov, kako dokazati (3), noben od njih pa ni posebno preprost. Pogosto najdemo dokaz v zbirki nalog, na primer v [2], seveda pa tudi v specializiranih knjigah, na primer v [1, 3]. Avtor dela [3] je zbral prek 20 različnih dokazov o njeni veljavnosti. V prispevku ji bomo posvetili malo več pozornosti, ker glavni rezultat navsezadnje sloni ravno na njej. Morda je za šolsko rabo še najpreprostejši tisti dokaz, ki je posledica naslednje leme:

Lema 1. *Če so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poljubna pozitivna realna števila, katerih produkt je enak 1, potem je njihova vsota večja ali enaka n:*

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1 \Longrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Enačaj v tej relaciji pa nastopi natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Dokaz. Lemo dokažemo z metodo popolne indukcije glede na naravno število n. Za $n = 1$ je trditev očitna. Predpostavimo, da trditvi v lemi držita za n $(n > 1)$ kakršnihkoli pozitivnih realnih števil, katerih produkt je 1. Vzemimo poljubna pozitivna števila $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$, za katera je tudi $y_1 y_2 \ldots y_n y_{n+1} = 1$. Pri tem ne morejo biti hkrati vsi faktorji večji od 1, pa tudi ne vsi hkrati manjši od 1, kajti v prvem primeru bi bil produkt večji od 1, v drugem pa manjši od 1. Torej obstaja vsaj en faktor v produktu, ki ne presega 1, in vsaj en faktor, ki je velik vsaj 1. Brez škode za splošnost lahko vzamemo, da je $0 < y_n \leq 1$ in $y_{n+1} \geq 1$.

Potem lahko zapišemo $y_1 y_2 \cdots y_n y_{n+1}$ kot produkt $y_1 y_2 \cdots y_{n-1}(y_n y_{n+1}) = 1$, v katerem je n faktorjev. Po indukcijski predpostavki je zato $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n y_{n+1} \geq n$, iz česar sledi najprej $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \geq n - y_n y_{n+1}$ in nato $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \geq n - y_n y_{n+1} + y_n + y_{n+1}$. Po preureditvi izraza na desni strani neenačaja dobimo:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \geq (n+1) + (1 - y_n)(y_{n+1} - 1) \geq n + 1.$$

S tem nam je uspelo narediti indukcijski korak. Neenakost v lemi velja za vsak naraven n.

Da pa bo v prejšnji relaciji obveljala enakost $y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1} = n+1$, mora biti $y_n = 1$ ali $y_{n+1} = 1$. Ne da bi kaj izgubili na splošnosti, lahko vzamemo $y_{n+1} = 1$. Potem je $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = n$ in $y_1 y_2 \ldots y_{n-1} y_n = 1$. Iz indukcijske predpostavke takoj sledi $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$. S tem imamo nazadnje $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y_{n+1} = 1$. ∎

Sedaj z lahkoto dokažemo neenakost (3), povemo pa tudi lahko, natanko kdaj v njej velja enačaj.

Izrek 2. *Za poljubna pozitivna realna števila $u_1, u_2, \ldots, u_r$ velja relacija*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r \geq r\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}, \tag{4}$$

v kateri velja enačaj natanko tedaj, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$.

Dokaz. Izrek dokažemo z uporabo leme 1, če vpeljemo:

$$x_1 = \frac{u_1}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}},\ x_2 = \frac{u_2}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}},\ \ldots,\ x_r = \frac{u_r}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}}.$$

Očitno je $x_1 x_2 \ldots x_r = 1$, iz česar sklepamo:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_r}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}} \geq r.$$

Iz dobljene relacije pa takoj sledi

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r \geq r\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}.$$

Enačaj v (4) velja natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_r$, to se pravi, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$. ■

Definicija 2. Harmonična sredina pozitivnih realnih števil $u_1, u_2, \ldots, u_r$ je število

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_r) = (A(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1}. \tag{5}$$

Vse tri sredine imajo lastnost homogenosti glede na pozitivne faktorje λ:

$$\begin{aligned}
A(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_r) &= \lambda A(u_1, u_2, \ldots, u_r), && (6)\\
G(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_r) &= \lambda G(u_1, u_2, \ldots, u_r), && (7)\\
H(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_r) &= \lambda H(u_1, u_2, \ldots, u_r).
\end{aligned}$$

Ne glede na število enk v oklepaju je seveda $G(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Geometrična sredina ima tudi lastnost multiplikativnosti. Če so namreč števila $u_1, u_2, \ldots, u_r$ in $v_1, v_2, \ldots, v_r$ pozitivna, ni težko dokazati, da veljajo enakosti:

$$\begin{aligned}
G(u_1 v_1, u_2 v_2, \ldots, u_r v_r) &= G(u_1, u_2, \ldots, u_r) G(v_1, v_2, \ldots, v_r), && (8)\\
G(u_1/v_1, u_2/v_2, \ldots, u_r/v_r) &= G(u_1, u_2, \ldots, u_r)/G(v_1, v_2, \ldots, v_r), && (9)\\
G(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}) &= (G(u_1, u_2, \ldots, u_r))^{-1}. && (10)
\end{aligned}$$

Tako kot lahko primerjamo med seboj aritmetično in geometrično sredino istih števil, lahko primerjamo tudi harmonično in geometrično sredino. Vse tri sredine so v relaciji, o kateri govori naslednji izrek:

Izrek 3. *Za poljubna pozitivna realna števila* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *velja relacija*

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq G(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_r) \tag{11}$$

in v njej prevladata enačaja natanko takrat, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$*.*

Dokaz. Po definiciji harmonične sredine in po (3) je

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_r) = (A(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1} \leq (G(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1}.$$

Naprej pa je seveda po (10)

$$(G(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1} = G(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_r).$$

S tem je relacija (11) dokazana. Da pa v njej prevladata enačaja natanko takrat, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$, pa tudi takoj vidimo. ∎

V nadaljevanju bomo pokazali, kako lahko obravnavane sredine in njihove lastnosti s pridom uporabimo pri matrikah. Izkazalo se bo, da osrednji izrek, izrek 4, da nekatere zanimive posledice.

Aritmetična, geometrična in harmonična sredina pri matrikah

Matrika, ki ima same pozitivne realne elemente, postane zanimiva, ker lahko zanjo primerjamo sredine po vrsticah in stolpcih ter sredine teh sredin. Da bosta beseda in dokaz laže tekla, je koristno vpeljati za matriko

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

ki ima same pozitivne realne elemente, aritmetične sredine vrstic

$$A_i = A(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

geometrične sredine stolpcev

$$G_j = G(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ter harmonične sredine vrstic

$$H_i = G(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sedaj lahko zapišemo glavni izrek v tem prispevku.

Izrek 4. *V poljubni matriki s pozitivnimi realnimi elementi je geometrična sredina aritmetičnih sredin vrstic večja ali enaka aritmetični sredini geometričnih sredin stolpcev:*

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_m) \geq A(G_1, G_2, \ldots, G_n). \tag{13}$$

V poljubni matriki s pozitivnimi realnimi elementi je harmonična sredina geometričnih sredin stolpcev večja ali enaka geometrični sredini harmoničnih sredin vrstic:

$$H(G_1, G_2, \ldots, G_n) \geq G(H_1, H_2, \ldots, H_m). \tag{14}$$

Enakost nastopa v (13) in (14) samo tedaj, kadar so si vse vrstice matrike proporcionalne.

Zgornji trditvi ostaneta veljavni, če v njih povsod med seboj zamenjamo besedi vrstica in stolpec.

Dokaz. Najprej zapišimo:

$$1 = \frac{nA_i}{nA_i} = \frac{1}{nA_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{A_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nato seštejmo, zamenjajmo vrstni red vsot in upoštevajmo (4):

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} mA(a_{1j}/A_1, a_{2j}/A_2, \ldots, a_{mj}/A_m)$$

$$\geq \frac{m}{n}\sum_{j=1}^{n} G(a_{1j}/A_1, a_{2j}/A_2, \ldots, a_{mj}/A_m).$$

Po krajšanju z m in po lastnosti (9) imamo:

$$1 \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{G(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})}{G(A_1, A_2, \ldots, A_m)} = \frac{1}{G(A_1, A_2, \ldots, A_m)} \cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} G_j.$$

Iz zgornje relacije pa že lahko razberemo:

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_m) \geq A(G_1, G_2, \ldots, G_n).$$

Kdaj v pravkar dokazani relaciji velja enačaj? Iz izpeljave vidimo, da natanko tedaj, ko je

$$\frac{a_{1j}}{A_1} = \frac{a_{2j}}{A_2} = \ldots = \frac{a_{mj}}{A_m} = \lambda_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pri tem so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pozitivna realna števila. Za poljubna indeksa $i, k = 1, 2, \ldots, m$ je

$$\frac{a_{ij}}{a_{kj}} = \frac{A_i \lambda_j}{A_k \lambda_j} = \frac{A_i}{A_k} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

kar pomeni, da sta si i-ta in k-ta vrstica matrike $\mathcal{A}$ proporcionalni. Vsaka vrstica je torej proporcionalna vsaki drugi.

Ni težko dokazati, da velja tudi obratno, v relaciji velja enačaj, če so si vrstice matrike $\mathcal{A}$ proporcionalne. Vzemimo, brez škode za splošnost, da so proporcionalne kar prvi vrstici:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = (\mu_i a_{11}, \mu_i a_{12}, \ldots, \mu_i a_{1n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pri tem so $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ pozitivna realna števila in $\mu_1 = 1$. Tedaj imamo

$$A_i = \mu_i A_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in zato za vse indekse i in j velja:

$$\frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{\mu_i a_{1j}}{\mu_i A_1} = \frac{a_{1j}}{A_1} = \lambda_j.$$

Vsi kvocienti a_{ij}/A_i so torej neodvisni od i. Že prej pa smo zapisali, da je to tudi zadosten pogoj za to, da velja enakost

$$A(G_1, G_2, \ldots, G_n) = G(A_1, A_2, \ldots, A_m).$$

Relacija (13) je s tem dokazana.

Če ima matrika $\mathcal{A}$ same pozitivne realne elemente, ima tudi matrika

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \ldots & a_{1n}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \ldots & a_{2n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{-1} & a_{m2}^{-1} & \ldots & a_{mn}^{-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

same pozitivne realne elemente.

Za matriko $\mathcal{A}'$ vpeljimo aritmetične sredine vrstic

$$A'_i = A(a_{i1}^{-1}, a_{i2}^{-1}, \ldots, a_{in}^{-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in geometrične sredine stolpcev

$$G'_j = G(a_{1j}^{-1}, a_{2j}^{-1}, \ldots, a_{mj}^{-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Iz relacij

$$G(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m) \geq A(G'_1, G'_2, \ldots, G'_n),\ A'_i = H_i^{-1},\ G'_j = G_j^{-1}$$

dokažemo z uporabo lastnosti (10) in definicij:

$$(G(H_1, H_2, \ldots, H_m))^{-1} = G(H_1^{-1}, H_2^{-1}, \ldots, H_m^{-1}) = G(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m)$$

$$\geq A(G'_1, G'_2, \ldots, G'_n) = A(G_1^{-1}, G_2^{-1}, \ldots, G_n^{-1}) = (H(G_1, G_2, \ldots, G_n))^{-1}.$$

Nazadnje je pred nami relacija

$$G(H_1, H_2, \ldots, H_m) \leq H(G_1, G_2, \ldots, G_n),$$

ki smo jo želeli dokazati.

Vemo že, da velja

$$G(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m) = A(G'_1, G'_2, \ldots, G'_n)$$

natanko tedaj, ko so si vse vrstice matrike $\mathcal{A}'$ proporcionalne. To pa je natanko tedaj, ko so si vse vrstice matrike $\mathcal{A}$ proporcionalne. Torej tudi v relaciji (14) velja enačaj natanko tedaj, ko so si vrstice matrike $\mathcal{A}$ proporcionalne. ■

Primeri

1. Naj bo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_n^2 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

pri čemer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivna realna števila. Geometrične sredine stolpcev so $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$, aritmetični sredini vrstic pa $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n$ in $(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)/n$. Zato velja po (13) neenakost

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \cdot \frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n}},$$

iz česar sledi Cauchy-Schwarzeva neenakost:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$.

Če vzamemo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, dobimo po preureditvi neenakost

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

kar je znana relacija med aritmetično in kvadratno sredino. V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Oglejmo si še

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

pri čemer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila. V matriki od vrstice do vrstice elemente ciklično zamaknemo.

Geometrične sredine vseh stolpcev so $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, aritmetične sredine vseh vrstic pa $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$. Zato velja zaradi (13) znana relacija

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko obstaja tako pozitivno realno število λ, za katero je

$$a_2 = \lambda a_1, a_3 = \lambda a_2, \ldots, a_n = \lambda a_{n-1}, a_1 = \lambda a_n.$$

Ko zmnožimo leve in desne strani vseh zgornjih enakosti, dobimo najprej $a_1a_2\ldots a_n = \lambda^n a_1a_2\ldots a_n$, po krajšanju pa $\lambda^n = 1$ in s tem $\lambda = 1$. Zato je nazadnje res tisto, kar smo pričakovali: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. S tem smo po ovinku v celoti še enkrat dokazali neenakost (3).

3. Naj bo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \tag{18}$$

pri čemer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila. Aritmetične sredine stolpcev so $(1 + a_1)/2, (1 + a_2)/2, \ldots, (1 + a_n)/2$, geometrični sredini vrstic pa 1 in $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Zato velja znana neenakost

$$1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \sqrt[n]{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)}.$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Podobna naloga je podana in rešena v [2].

4. Naj bo sedaj n naravno število in

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a^n & 1 & \ldots & 1 \\ b^n & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

pri čemer sta a in b pozitivni realni števili. V stolpcih od vključno drugega do n-tega so same enke. Aritmetične sredine stolpcev so $(a^n + b^n)/2$ in $n - 1$ enk, geometrični sredini vrstic pa a in b. Zato velja

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}},$$

iz česar sledi znana neenakost

$$(A(a, b))^n \leq A(a^n, b^n).$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a = b$. Dobljena neenakost izraža, če drugega ne, konveksnost funkcije $x \mapsto x^n$ na pozitivnem poltraku realne osi za naravne eksponente n.

5. Če sta m in n naravni števili ter $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pozitivna realna števila, lahko podobno kot v prejšnjem primeru najdemo neenakost

$$(A(a_1, a_2, \ldots, a_m))^n \leq A(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_m^n).$$

Enačaj velja le, če je $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$.

Zahvala

Zahvaljujem se prof. dr. Tomažu Pisanskemu, ki mi je dal idejo za neenakost s harmoničnimi sredinami in za prevedbo neenakosti (13) in (14) v matrični jezik.

LITERATURA

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood in G. Pólya, *Inequalities*, Academic Press, Cambridge, 1952.

[2] V. A. Krečmar, *Zadačnik po algebre*, Fizmatgiz, Moskva, 1961.

[3] D. S. Mitrinović, *Elementary inequalities*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.