PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 2
Strani 82–85

Marija Vencelj:

MALE SKRIVNOSTI ENAKOSTRANIČNEGA TRIKOTNIKA

Ključne besede: matematika, ravninska geometrija, enakostranični trikotnik, lastnosti.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1432-Vencelj.pdf

MALE SKRIVNOSTI ENAKOSTRANIČNEGA TRIKOTNIKA

Da ima enakostranični trikotnik same enake stranice, pove že njegovo ime. Posledično ima tudi skladne notranje kote, vsak od njih meri 60°.

Kako iz dolžine stranice izračunamo njegovo višino ali ploščino, sodi med obvezna znanja učenca, ki zaključuje osnovno šolo. Tam se nauči še včrtati enakostranični trikotnik v dano krožnico in izve, da je polmer očrtane krožnice dvakrat olikšen kot polmer včrtane krožnice ter da je obeh skupaj natanko za trikotnikovo višino.

Ima pa enakostranični trikotnik še vrsto preprostih lastnosti, tudi takih, ki so značilne samo zanj in po katerih ga lahko prepoznamo, ne da bi posebej izračunali in primerjali njegove stranice ali kote.

— — —

Najbolj znana je gotovo lastnost, da **leže središče trikotniku očrtane krožnice, središče včrtane krožnice, višinska točka in težišče (pa npr. tudi središče Eulerjeve krožnice) v isti točki**. To točko običajno označimo z O in jo imenujemo kar središče enakostraničnega trikotnika.

Enakostranični trikotnik je tudi edini trikotnik, v katerem naštete točke sovpadajo. Še več. Je edini trikotnik, v katerem sovpadata poljubni dve od navedenih točk. Če se namreč ujemata dve od zgornjih točk, se ujemajo vse. Povedano za vajo dokažite sami!

— — —

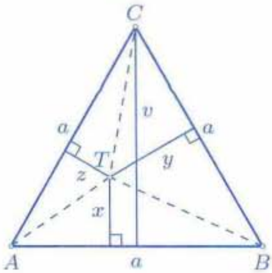
Drugo preprosto, pa zelo uporabno lastnost[1] opisuje naslednja trditev:

Vsota razdalj poljubne notranje točke enakostraničnega trikotnika od njegovih stranic je neodvisna od izbrane točke. Enaka je višini trikotnika.

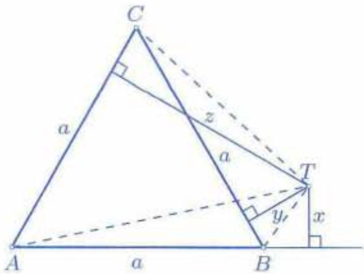
Izrek lahko preprosto dokažemo. Kot na sliki 1 označimo z a in v stranico in višino enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$, z x, y in z pa oddaljenosti poljubne notranje točke T od trikotnikovih stranic. Ker je ploščina trikotnika $\triangle ABC$ enaka vsoti ploščin trikotnikov $\triangle ABT$, $\triangle BCT$ in $\triangle CAT$, velja

$$\frac{1}{2}av = \frac{1}{2}(ax + ay + az) \qquad \text{in od tod} \qquad x + y + z = v\,.$$

[1] Nekaj let nazaj je bila ta lastnost skrita v nalogi na enem od tekmovanj za Vegova priznanja.



Slika 1.



Slika 2.

Trditev velja tudi, če leži točka T na robu trikotnika. Če je T oglišče trikotnika, sta dve razdalji enaki nič in tretja v. Če pa leži T na stranici, je ena od razdalj enaka nič; da je vsota preostalih dveh v, dokažemo kot zgoraj, le da razpade v tem primeru trikotnik $\triangle ABC$ samo na dva trikotnika.

Tudi v primeru, ko je T zunanja točka trikotnika, lahko izrek smiselno posplošimo. Če leži točka T na istem bregu nosilke posamezne stranice, kot tej stranici nasprotno oglišče, vzamemo razdaljo točke T od te nosilke v naši formuli s pozitivnim predznakom, sicer jo pomnožimo z -1. Za primer s slike 2 torej velja $x - y + z = v$. Dokaz (podoben je zgornjemu) izpeljite sami.

Tudi ta lastnost je značilna lastnost enakostraničnih trikotnikov. To so edini trikotniki z lastnostjo, da je vsota razdalj poljubne notranje točke trikotnika od nosilk trikotnikovih stranic neodvisna od izbrane točke. Za ostale trikotnike velja, da je vsota navedenih razdalj po velikosti vedno med najkrajšo in najdaljšo višino trikotnika[2].

— — —

Vrnimo se k enakostraničnemu trikotniku. Še vedno naj bo T poljubna točka in x, y, z njene oddaljenosti od trikotnikovih stranic. Njihova vsota $x + y + z$ je konstantna, produkt xyz pa očitno ne. Če se točka T bliža robu trikotnika, se produkt bliža vrednosti nič, in je na robu enak nič. Za točke v notranjosti trikotnika je pozitiven in po zelo grobi oceni ne preseže v^3, saj je vsaka od razdalj x, y, z manjša od v. Zanima nas, kje produkt doseže največjo možno vrednost in kolikšna je. Videli bomo, da velja:

Produkt razdalj xyz doseže največjo vrednost v središču enakostraničnega trikotnika in je enak $\frac{1}{27}v^3$.

[2] To je dokazal že italijanski matematik in fizik Viviani (1622 - 1703), ki je sam sebe štel za zadnjega Galileovega učenca.

Trditev lahko po nekoliko daljši poti direktno dokažemo, mi pa se bomo ovinku izognili z uporabo naslednjega izreka za pozitivna števila:

Geometrijska sredina pozitivnih števil je manjša ali kvečjemu enaka njihovi aritmetični sredini. Obe sredini sta med seboj enaki natanko v primeru, ko so števila med seboj enaka.

Izrek bomo uporabili za oddaljenosti x, y, z poljubne notranje točke enakostraničnega trikotnika od njegovih stranic, saj so te razdalje pozitivne. Torej:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x+y+z)$$

in enačaj velja natanko v primeru, ko je $x = y = z$.

Ker vemo, da je za notranje točke enakostraničnega trikotnika $x + y + z = v$, oceno lahko poenostavimo:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}v\,,$$

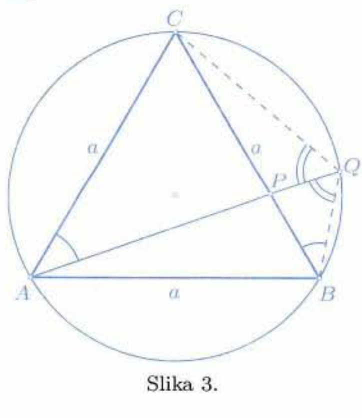
od koder sledi

$$xzy \leq \frac{1}{27}v^3\,.$$

Produkt torej ni večji od vrednosti $\frac{1}{27}v^3$. Pa to vrednost sploh doseže? Če jo, se to lahko zgodi le v točki, za katero velja $x = y = z = \frac{1}{3}v$. Taka točka v enakostraničnem trikotniku res obstaja in je ena sama. To je prav središče O enakostraničnega trikotnika. Trditev je torej dokazana.

— — —

Za razumevanje zadnje lastnosti si oglejmo sliko 3. Enakostraničnemu trikotniku $\triangle ABC$ smo očrtali krožnico in na njej izbrali poljubno točko Q, različno od oglišč. Na sliki je izbrana na tistem loku s krajiščema B in C, na katerem ne leži oglišče A. To ne predstavlja nobene izgube splošnosti, saj lahko sicer trikotnik preoznačimo. Daljica, ki veže Q z ogliščem A, naj seka stranico BC v točki P.



Slika 3.

Velja trditev:

Če premica, ki poteka skozi oglišče A enakostraničnega trikotnika, seka nasprotno stranico BC v točki P in trikotniku očrtano krožnico v točki Q, potem je

$$\frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\overline{BQ}} + \frac{1}{\overline{CQ}}\,.$$

Za dokaz potrebujemo nekaj znanja iz ravninske geometrije. Najprej ugotovimo, da sta trikotnika $\triangle BQP$ in $\triangle AQC$ podobna, saj imata enake kote. Vidimo namreč, da je $\sphericalangle QBP = \sphericalangle QAC$, saj sta to obodna kota nad istim lokom QC, in da je $\sphericalangle BQA = \sphericalangle AQC = 60°$. Zato imata trikotnika sorazmerne stranice in velja

$$\overline{BQ} : \overline{AQ} = \overline{PQ} : \overline{CQ} \quad \text{ali} \quad \overline{BQ} \cdot \overline{CQ} = \overline{PQ} \cdot \overline{AQ}\,.$$

V nadaljevanju uporabimo za tetivni štirikotnik[3] $ABQC$ Ptolomejev izrek, ki pravi:

V tetivnem štirikotniku je produkt diagonal enak vsoti produktov nasprotnih stranic.

Ker je $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = a$, sledi

$$a \cdot \overline{AQ} = a \cdot \overline{CQ} + a \cdot \overline{BQ}$$

in zato

$$\overline{AQ} = \overline{CQ} + \overline{BQ}\,.$$

Če vstavimo vrednost za $\overline{AQ}$ v enačbo, ki smo jo dobili s podobnostjo trikotnikov, sledi

$$\overline{BQ} \cdot \overline{CQ} = \overline{PQ} \cdot \overline{BQ} + \overline{PQ} \cdot \overline{CQ}\,.$$

Enakost še delimo s produktom $\overline{BQ} \cdot \overline{CQ} \cdot \overline{PQ}$ in dobimo napovedani rezultat.

Primer: Naj bo enakostranični trikotnik včrtan v krožnico s polmerom r in Q razpolovišče loka BC. Potem je $\overline{BQ} = \overline{CQ} = r$ in sledi $\frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$, od koder sledi $\overline{PQ} = \frac{r}{2}$. Od tod takoj dobimo znani rezultat, da je polmer enakostraničnemu trikotniku včrtane krožnice enak polovici polmera očrtane krožnice.

Marija Vencelj

[3] Tetivni štirikotnik je tak štirikotnik, ki mu lahko očrtamo krožnico.