PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 5
Strani 290–292

Vilko Domajnko:

PETKOTNI TANGRAMSKI LIKI

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1097-Domajnko.pdf

PETKOTNI TANGRAMSKI LIKI

O tem, kako močna je vez med tangramom in kombinatoriko, smo se seznanili že v prejšnji številki revije. Tokrat bomo poskusili tovrstno znanje še razširiti. Spet se bomo spoprijeli z enim izmed lažjih kombinatoričnih problemov v tangramu in sicer z vprašanjem:

Koliko je vseh petkotnih tangramskih likov?

Nanj je prvi odgovoril ameriški matematik **Ronald C. Read**, njegov odgovor pa je objavil znani Martin Gardner leta 1974 v reviji Scientific American. Oglejmo si Readovo idejo preštevanja vseh petkotnih tangramskih likov. Te bomo poslej zaradi krajšega imenovali kar petalí-ji.

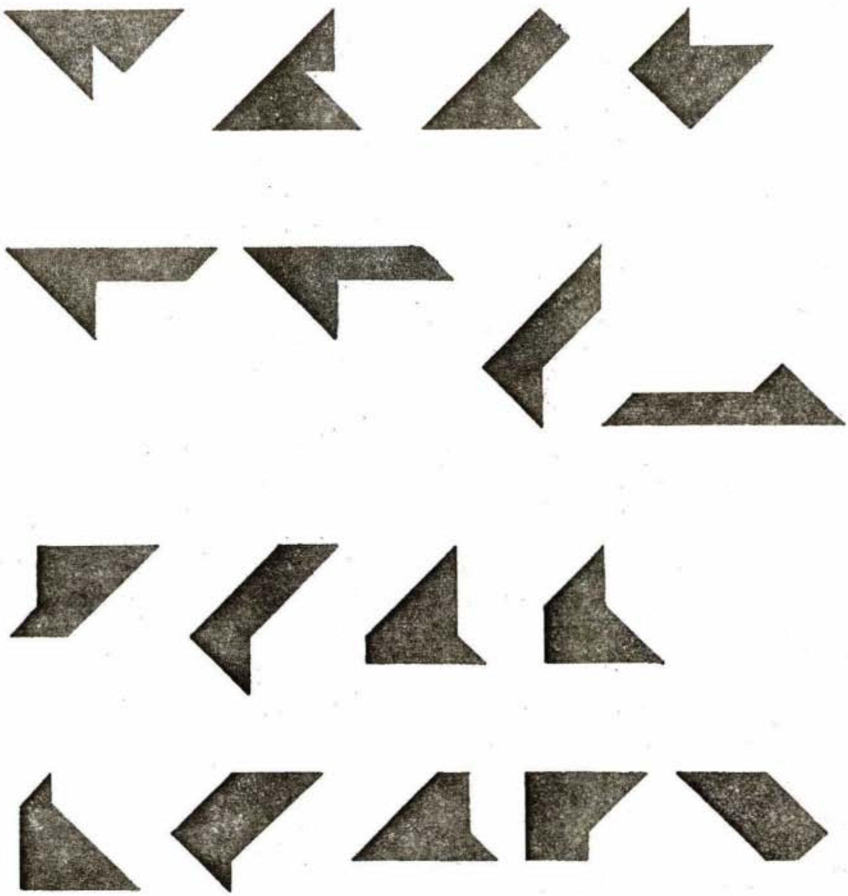
Recimo, da imamo pred seboj neki petalí. Opazujmo njegove notranje kote. Vsak izmed njih je večkratnik kota 45°. Obiščimo v katerikoli smeri urinega kazalca zapovrstjo vse kote petalíja in sproti zapisujmo te večkratnike. Na tak način bomo dobili zaporedje petih naravnih števil, s katerimi je pomnožen kot 45°.

Vzemimo za primer petalí, ki ga vidimo na sliki 1 prvega v prvi vrsti - torej povsem zgoraj levo. Temu liku pripada zaporedje 72111. Seveda mu pripada tudi katerakoli izmed cikličnih permutacij tega zaporedja (21117, 11172, 11721, 17211). Z zapisovanjem večkratnikov lahko začnemo namreč v poljubno izbranem oglišču tega petalíja. Prav tako je zaporedje 72111 enakovredno zaporedju v obrnjeni smeri 11127 in še vsem njegovim cikličnim permutacijam 11271, 12711, 27111 in 71112. Vsa ta zaporedja namreč ustrezajo istemu petalíju, od prvotnih se ločijo le po smeri štetja oglišč.

Zlahka se da videti, da se bodo v prirejenih zaporedjih kateregakoli petalíja pojavljala kvečjemu števila 1, 2, 3, 5, 6 ali pa 7. Število 4 pri tem izpade, ker pač 180° $(=4 \cdot 45^\circ)$ ni koto v petalíju.

Vemo že, da je vsota vseh notranjih kotov poljubno izbranega petkotnika enaka 540°. In ker je $540 = 12 \cdot 45$, mora biti vsota vseh petih števil petalíju pripadajočega zaporedja enaka 12.

Sedaj lahko že zapišemo vsa možna zaporedja, ki so določena s petalíji.



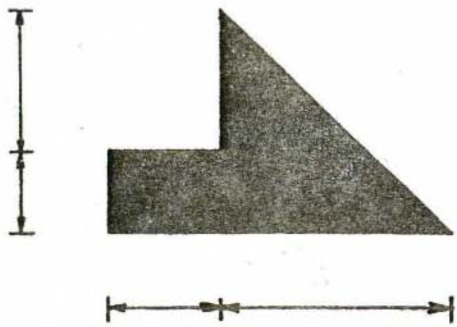
Slika 1.

"Samo" dvajset jih je:

72111	62211	53112	52122
71211	63111	51312	33213
62112	61311	51321	33231
62121	53211	52311	33222
61221	53121	51222	32322

Iskanje vseh petalíjev je s to tabelo že precej olajšano. Vendar pa - bodimo pozorni! Še zmeraj namreč ne vemo ničesar o tem, koliko različnih petalíjev določa posamezno zaporedje iz te tabele.

Poskusimo zatorej razrešiti ta problem za zaporedje 62211. Slika 2 nam prikazuje zelo približno skico morebitnega petalíja, ki bi ga to zaporedje lahko določalo.



Slika 2.

Števila x, y in z naj predstavljajo dolžine stranic petalíja, kot na sliki 2.

Ker je ta petalí sestavljen iz šestnajstih bazičnih trikotnikov (glej članek v prejšnji številki revije), je njegova ploščina seveda enaka 8. Ploščina skiciranega petalíja s slike 2 pa je $\frac{x^2}{2} + yz$. Če sestavimo obe trditvi v enačbo in jo uredimo, dobimo

$$x^2 + 2yz = 16.$$

Iz članka v prejšnji številki Preseka že vemo, da so stranice skiciranega petalíja ali vse cela števila ali pa vse celi večkratniki števila $\sqrt{2}$.

Edina cela rešitev, ki bi utegnila predstavljati 61122-petalí, je trojka $x = 2, y = 6$ in $z = 1$. Toda že kratek preizkus s sestavljanjem ploščic bi pokazal, da se po njenem receptu ne da sestaviti petalíja.

Rešitvi $x = 2, y = 2, z = 3$ in $x = 2, y = 3, z = 2$ ne prideta v poštev, ker je $x - z \leq 0$. Edina racionalna rešitev zgornje enačbe, ki da petalí, je: $x = 2\sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}, z = \sqrt{2}$. Petalí, ki ustreza tej rešitvi, najdemo na sliki 1 v prvi vrsti na tretjem mestu.

Podobno bi poiskali tudi preostale petalíje z obravnavanjem preostalih devetnajstih enačb, ki jih določajo petalíjevska zaporedja.

Po taki poti je Read ugotovil, da je vseh petalíjev osemnajst. Objavljeni so na sliki 1 - s tem da je eden izmed njih izpuščen. Zato, da bi ga bralec sam poiskal. V pomoč mu prišepnimo, da ga lahko najde s pomočjo zadnjega izmed dvajsetih objavljenih zaporedij.

Vilko Domajnko