Astronomsko tekmovanje petih dežel 2021

↓↓↓
Vid Kavčič

→

Kratek uvodnik

Med 27. in 29. avgustom 2021 je v **Baji na Madžarskem** potekalo tekmovanje petih dežel v znanju astronomije, ki je nekakšna pripravljalnica za Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike. Naši tekmovalci so se odlično odrezali in domov prinesli bogat šopek medalj. **Simon Bukovšek** je zasedel **3. mesto** in prejel **zlato medaljo**, **srebrno medaljo** so prejeli **Urban Razpotnik**, **Peter Andolšek** in **Tian Strmšek**, **Vito Levstik** je prejel **bronasto medaljo**, **Miha Brvar** pa **pohvalo**; slovensko ekipo je zastopala tudi **Marija Judež.** Ekipo so vodili **Dunja Fabjan**, **Andrej Guštin** in **Krištof Skok.**

Sam se tekmovanja zaradi drugih obveznosti nisem mogel udeležiti, kljub vsemu pa sem se odločil v prispevku predstaviti rešene **naloge teoretičnega dela tekmovanja**, s katerimi so se tekmovalci spopadali **tri ure.** Za razumevanje nalog in tudi rešitev potrebno poglobljeno poznavanje ter razumevanje osnov astronomije in astrofizike.

Bralce in bralke vabim, da poskusijo astronomske orehe najprej streti sami, saj samostojno reševanje prinese mnogo več užitkov in zadovoljstva kot zgolj pasivno prebiranje rešitev.

SLIKA 1.
Slovenska astronomska ekipa z osvojenimi odličji (Foto: Andrej Guštin)

1. naloga. Povprečen čas med trki galaksij v jati galaksij

Jata galaksij v Berenikinih kodrih obsega 1000 galaksij znotraj krogle s polmerom 1,5 Mpc. Naj bo srednji presek galaksije 10^{-3} Mpc^2. Disperzija hitrosti galaksij v jati je 880 km/s. Izračunaj povprečen čas med trki galaksij v jati.

Podatki: $N = 1000$, $R = 1{,}5$ Mpc, $\Sigma = 10^{-3}$ Mpc^2, $\sigma = 880$ km/s

Za izračun povprečnega časa med trki bomo najprej določili povprečno oddaljenost med galaksijami v jati. Z drugimi besedami, izračunali bomo **srednjo prosto pot** l. Označimo z $n = \frac{N}{V}$ številčno gostoto galaksij v jati. Razvijmo enačbo za srednjo prosto pot:

- $$l = \frac{1}{n\Sigma} = \frac{V}{N\Sigma} = \frac{4\pi R^3}{3N\Sigma},$$

kjer smo uporabili enačbo za prostornino krogle $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Povprečen čas med trki preprosto izračunamo kot

- $$t = \frac{l}{\sigma} = \frac{4\pi R^3}{3N\Sigma\sigma} = 1{,}57 \cdot 10^{10} \text{ let.}$$

→

2. naloga. Svetlost in izsev sistema treh zvezd

Sistem treh zvezd se nahaja na razdalji 150 pc od Sonca. Na Zemlji izgleda kot ena zvezda z navidezno bolometrično magnitudo 8,00. Izsev prve zvezde je 4,54 $L_\odot$, navidezna bolometrična magnituda druge zvezde pa je 9,41. Izračunaj navidezno in absolutno magnitudo ter izsev tretje zvezde.

Podatki: $r = 150$ pc, $m = 8{,}00$, $L_1 = 4{,}54\ L_\odot$, $m_2 = 9{,}41$

Absolutno magnitudo druge zvezde izračunamo kot

- $M_2 = m_2 + 5 - 5 \log r = 3{,}53.$

Izsev druge zvezde izračunamo iz Pogsovega zakona:

- $L_2 = 10^{0{,}4(M_\odot - M_2)} L_\odot = 3 L_\odot,$

kjer smo upoštevali, da je absolutna magnituda Sonca $M_\odot = 4{,}83$.

Izsev tretje zvezde prav tako izpeljemo iz Pogsonovega zakona:

- $$m_2 - m = 2{,}5 \log \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_2} \right)$$
  $$L_3 = \left(10^{0{,}4(m_2 - m)} - \frac{L_1}{L_2} - 1 \right) L_2$$
  $$\therefore L_3 = 3{,}45\ L_\odot.$$

Za absolutno magnitudo tretje zvezde velja

- $M_3 = M_\odot - 2{,}5 \log \dfrac{L_3}{L_\odot} = 3{,}38,$

za njeno navidezno magnitudo pa

- $m_3 = M_3 - 5 + 5 \log r = 9{,}26.$

3. naloga. V sistemu Jupitrovih lun

Dne 15. aprila 2020 je bil Jupiter v kvadraturi. Takrat smo z Zemlje videli njegovo luno Kalisto kot zvezdo z navideznim sijem +6,467. Pri reševanju naloge predpostavi, da je faza Kalista za opazovalca na Zemlji 100 %.

1. Izračunaj največjo kotno velikost Kalista in navidezno magnitudo, ko je najsvetlejši, za opazovalca, ki stoji na površju lune Evropa.

   Srednja premera Kalista in Evrope sta zaporedoma $d_C = 4806$ km in $d_E = 3130$ km. Veliki polosi in ekscentričnosti orbit Kalista in Evrope so zaporedoma $a_C = 1{,}883 \cdot 10^6$ km, $e_C = 0{,}007$ in $a_E = 6{,}7108 \cdot 10^5$ km, $e_E = 0{,}01$. Srednja oddaljenost Jupitra od Sonca je 5,204 ae. Predpostavi, da sta Zemljina in Jupitrova orbita krožni in da je oddaljenost Kalista od Zemlje enaka oddaljenosti Jupitra v trenutku opazovanja.

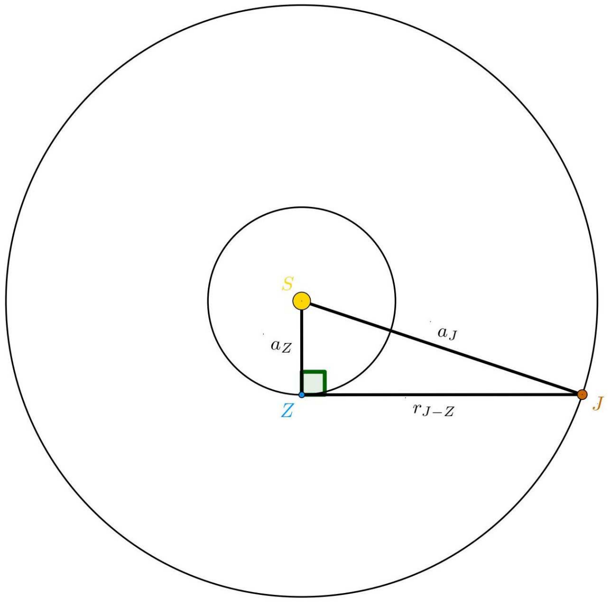
2. Ali je *polni* Kalisto na nebu lune Evropa večji ali manjši kot polna Luna na Zemljinem nebu?

Podatki: $m_1 = +6{,}467$, $d_C = 4806$ km, $d_E = 3130$ km, $a_C = 1{,}883 \cdot 10^6$ km, $e_C = 0{,}007$, $a_E = 6{,}7108 \cdot 10^5$ km, $e_E = 0{,}01$, $a_J = 5{,}204$ ae

1. Najprej moramo izračunati oddaljenost Jupitra v kvadraturi. Takrat je kot Jupiter-Zemlja-Sonce pravi. Z dobro skico (slika 1) ugotovimo, da za izračun zadostuje Pitagorov izrek, pri čemer upoštevamo, da je srednja oddaljenost Zemlje od Sonca po definiciji $a_Z = 1$ ae, kar ustreza približno $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. Imamo torej

   - $r_{1C} = r_{J-Z} = \sqrt{a_J^2 - a_Z^2} = 7{,}640 \cdot 10^{11}$ m.

   Da bi dobili kotno navidezno velikost Kalista za opazovalca na Evropi, moramo določiti najmanjšo možno razdaljo med površjem Evrope in Kalistom r_{2C}. Upoštevamo, da sta si Evropa in Kalisto najbližje, ko je Kalisto v **perijoviju**,



SLIKA 2.
Jupiter v kvadraturi (skica ni v merilu).

Evropa pa v **apojoviju.** Perijovijsko razdaljo Kalista izrazimo kot $r_{C,peri} = (1-e_C)\, a_C$, apojovijsko razdaljo Evrope pa kot $r_{E,apo} = (1+e_E)\, a_E$. Hkrati pa pri izračunu r_{2C} upoštevamo še polmer Evrope $r_E = \frac{d_E}{2}$. Sledi

- $r_{2C} = r_{C,peri} - r_{E,apo} - r_E = (1-e_C)\, a_C - (1+e_E)\, a_E - \dfrac{d_E}{2}$

  $\therefore r_{2C} = 1{,}191 \cdot 10^9$ m.

Zdaj, ko poznamo dve razdalji in podatek o magnitudi Kalista za eno od njiju, nam ostane le še preračunati magnitudo Kalista za opazovalca na Evropi m_2, seveda s Pogsonovo definicijo magnitud:

- $$m_2 = m_1 - 2{,}5 \log \frac{j_1}{j_2} = m_1 - 2{,}5 \log \frac{r_{2C}^2}{r_{1C}^2} = m_1 + 5 \log \frac{r_{1C}}{r_{2C}}$$

  $\therefore m_2 = -7{,}57$.

2. Ker je premer Kalista v primerjavi z njegovo oddaljenostjo od površja Evrope relativno majhen, lahko njegovo kotno velikost izračunamo kar kot

   - $\varphi \approx \dfrac{d_C}{r_{2C}} = 0{,}2313^\circ = 13'53''$.

   Ker je kotna velikost polne Lune na našem nebu približno $0{,}5^\circ$, takoj vidimo, da je *polni* Kalisto na nebu Evrope navidezno manjši od polne Lune na našem nebu.

4. naloga. Zvezdne poti po Galaksiji

Sonce pripada tankemu disku naše Galaksije. Gibanje takih zvezd okoli središča Galaksije navadno približno opišemo s tremi periodičnimi gibanji: krožnim gibanjem okoli Galaktične ravnine po krožnici s polmerom R_m, harmoničnim nihanjem v radialni smeri in harmoničnim nihanjem v smeri pravokotno na Galaktično ravnino. Ker zvezda ni vedno v isti ravnini, se vse komponente njene vrtilne količine ne ohranjajo. Projekcija vrtilne količine na os z (pravokotnica na Galaktično ravnino) je edina, ki se ohranja.

Dan je tanek disk zvezd, o katerem veš naslednje: specifična vrtilna količina (vrtilna količina, preračunana na enoto mase) je $|h_z| = 1938$ kpc km/s (količina, ki se ohranja), na največji oddaljenosti od osi z, označimo jo R_a, je komponenta hitrosti $|v_p|(R_a) = 199{,}8$ km/s ($v^2 = v_r^2 + v_t^2 + v_z^2 = v_p^2 + v_z^2$), $R_m = 8{,}8$ kpc, komponenta hitrosti v smeri z v trenutku, ko zvezda prečka Galaktično ravnino $|v_z|(0) = 7$ km/s, največja oddaljenost od Galaktične ravnine $|z|_{max} = 100$ pc, hitrost kroženja na oddaljenosti R_m je $u_c(R_m) = 220$ km/s, krožna frekvenca harmoničnega nihanja v radialni smeri $\kappa_p(R_m)$ in kotna hitrost kroženja pri $R = R_m$, oznaka $\omega_c(R_m)$, sta povezani z enačbo $\kappa_p(R_m) = \sqrt{2}\omega_c(R_m)$.

Določi amplitudo a harmoničnega nihanja glede na R_m in tri periode: periodo kroženja pri $R = R_m$, P_{circ}, periodo harmoničnega nihanja v radialni smeri P_R in periodo harmoničnega nihanja v pravokotni smeri glede na Galaktično ravnino, P_z.

Podatki: $|h_z| = 1938$ kpc km/s, $|v_p|(R_a) = 199{,}8$ km/s, $R_m = 8{,}8$ kpc, $|v_z|(0) = 7$ km/s, $|z|_{max} = 100$ pc, $u_c(R_m) = 220$ km/s

Na poljubni razdalji R od osi z velja $|h_z| = R|v_t|(R)$, od koder lahko izračunamo

- $$R_a = \frac{|h_z|}{|v_t|(R)} = 9{,}7 \text{ kpc}.$$

Ker je R_a največja oddaljenost, mora biti $v_r = 0$, tako da velja $v_p(R_a) = v_t(R_a)$. Amplitudo a izračunamo kot

- $$a = R_a - R_m = 0{,}9 \text{ kpc}.$$

Periodo P_{circ} dobimo z

- $$P_{circ} = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi R_m}{u_c(R_m)} = 2{,}39 \cdot 10^8 \text{ let}.$$

Po podatku iz nalog je perioda $P_R = \frac{P_{circ}}{\sqrt{2}} = 1{,}69 \cdot 10^8$ let.

Da dobimo zadnjo periodo, moramo upoštevati, da za harmonično nihanje velja

- $$\frac{1}{2}v_z^2 + \frac{1}{2}\kappa_Z^2 Z^2 = \frac{1}{2}\kappa_Z^2 |Z|^2_{max},$$

kjer smo z Z označili odmik. Ker poznamo hitrost $|v_z|(0) = 7$ km/s, v zgornji enačbi upoštevamo $Z = 0$ in to hitrost. Od tod lahko izrazimo κ_Z, če pa upoštevamo še, da je $\kappa_Z = \frac{2\pi}{P_Z}$, dobimo končni odgovor $P_Z = 8{,}55 \cdot 10^7$ let.

5. naloga. Medplanetarni polet s Hohmannovim prehodom

Hohmannov prehod orbite je eliptični prehod med dvema koplanarnima krožnima orbitama z radijema r_1 in r_2, ki zajema dva impulza (hitri spremembi hitrosti). Prehod poteka po eliptični **prehodni** oziroma **Hohmannovi orbiti** s periheljem na notranji krožni orbiti in afelijem na zunanji krožni orbiti. Osnovna predpostavka, na kateri temelji Hohmannov prehod, je, da na telo, ki nas zanima, deluje gravitacija le enega telesa (v našem primeru Sonca).

Da bi odpotovali na zunanji planet, potrebuje plovilo hitrost, večjo od orbitalne hitrosti Zemlje, zato potrebujemo pozitivno izstrelitveno hitrost (impulz): $\Delta v_p > 0$. Hitrost plovila na Hohmannovi orbiti ob prihodu je manjša od orbitalne hitrosti izbranega zunanjega planeta, zato pri drugem delu prehoda prav tako potrebujemo pozitivno spremembo hitrosti: $\Delta v_a > 0$. Hohmannov prehod je med drugim tudi dober model za prehod vesoljskega plovila z Zemlje na Mars.

1. Pokaži, da je čas poleta vesoljskega plovila po Hohmannovi orbiti z Zemlje na nek zunanji planet s polmerom krožne orbite r_2 enak

   - $$T = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2},$$

   kjer je r_1 polmer Zemljine krožne orbite, čas poleta T pa izražen v letih.
2. Naj bosta v_1 in v_2 zaporedoma orbitalna hitrost Zemlje in izbranega zunanjega planeta. Označimo spremembi hitrosti, ki sta potrebni, da plovilo usmerimo na Hohmannovo orbito oziroma ga izrinemo iz nje na orbito izbranega planeta z $\Delta v_p = v_p - v_1$ in $\Delta v_a = v_2 - v_a$, kjer sta v_p in v_a zaporedoma hitrosti plovila v periheliju in afeliju Hohmannove orbite. Pokaži, da velja

   - $$\Delta v_p = v_1\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) \quad \text{in}$$
   $$\Delta v_a = v_2\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right).$$

3. Z drugim Keplerjevim zakonom pokaži, da velja

   - $$h^2 = GM_\odot\, a(1 - e^2),$$

   kjer je G gravitacijska konstanta, $M_\odot$ masa Sonca, h specifična vrtilna količina (vrtilna količina na enoto mase) ter a in e zaporedoma velika polos in ekscentričnost Hohmannove orbite.

4. Velika polos Marsove orbite je 1,524 ae. Izračunaj ekscentričnost Hohmannove orbite, čas potovanja, opravljeno pot pri poletu plovila z Zemlje na Mars in ustrezne dodatne hitrosti.

   Namig. Če sta a in b zaporedoma velika in mala polos elipse, lahko obseg elipse na podlagi ugotovitve indijskega matematika Srnivasa Ramanujana približamo z obrazcem

   $$o \approx \pi\left(3(a+b) - \sqrt{10ab + 3(a^2+b^2)}\right).$$

5. Kje je Mars v trenutku, ko mora plovilo vzleteti z Zemlje? Njegovo lego podaj s kotom $\angle ZSM$, kjer točke Z, S in M predstavljajo zaporedoma Zemljo, Sonce in Mars.

Podatek: $a_M = 1{,}524$ ae

1. Čas poleta z Zemlje do planeta je enak polovici obhodnega časa telesa na Hohmannovi elipsi. Če merimo razdalje v astronomskih enotah, čas v letih, maso pa v Sončevih masah, potem iz tretjega Keplerjevega zakona sledi

   $$T = \frac{t_0}{2} = \frac{\sqrt{a^3}}{2},$$

   kjer je a velika polos Hohmannove elipse, za katero velja $a = \frac{r_1+r_2}{2}$. Če to enačbo vstavimo v prejšnjo, z nekaj preureditvami dobimo sledeč izraz

   $$T = \frac{1}{4\sqrt{2}} r_1^{3/2}\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}.$$

   V zgoraj definiranem sistemu enot je $r_1^{3/2}$ ravno obhodni čas Zemlje, katerega vrednost pa je jasno 1. Zato velja

   $$T = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}.$$

2. Energija prehodne orbite je večja od energije notranje orbite ($a = r_1$) in manjša od energije zunanje orbite ($a = r_2$). Hitrosti v perigeju in apogeju prehodne orbite lahko izrazimo iz enačbe za ohranitev energije kot

   $$v_p = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}}\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}$$

   oziroma

   $$v_a = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}}\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}.$$

   Orbitalni hitrosti v krožnih orbitah sta

   $$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}} \quad \text{in} \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}}.$$

   Od tod lahko izrazimo potrebni spremembi hitrosti v perigeju in apogeju:

   $$\Delta v_p = v_p - v_1 = v_1\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$
   $$\Delta v_a = v_2 - v_a = v_2\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right).$$

3. Ker je vektor hitrosti v perigeju pravokoten na pozicijski vektor, lahko kvadrat specifične vrtilne količine prehodne orbite s pomočjo ugotovitev v delu b) naloge izrazimo kot

   $$h^2 = r_1^2 v_p^2 = r_1^2 \frac{GM_\odot}{r_1}\frac{2r_2}{r_1+r_2} = GM_\odot a(1-e^2),$$

   pri čemer smo upoštevali, da je $a = \frac{r_1+r_2}{2}$.

4. Ta del naloge od nas zahteva le delo s številčnima vrednostima $r_p = r_1 = 1$ ae in $r_a = r_2 = 1{,}524$ ae. Za čas poleta dobimo $T_M = 0{,}709$ leta $= 258{,}9$ dni, za spremembi hitrosti $\Delta v_{p,M} = 2{,}95$ km/s in $\Delta v_{a,M} = 2{,}65$ km/s, ekscentričnost Hohmannove elise pa je

   $$e_M = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0{,}208.$$

Pri poletu opravljena pot je enaka polovici obsega elipse, ki ga lahko ocenimo iz Ramanujanove formule. Malo polos elipse, ki jo potrebujemo v izračunu, dobimo iz zveze $b = a\sqrt{1-e^2}$. Rezultat za pot je $l_M = 3{,}92$ ae.

5. Iz tretjega Keplerjevega zakona določimo obhodni čas Marsa z enačbo

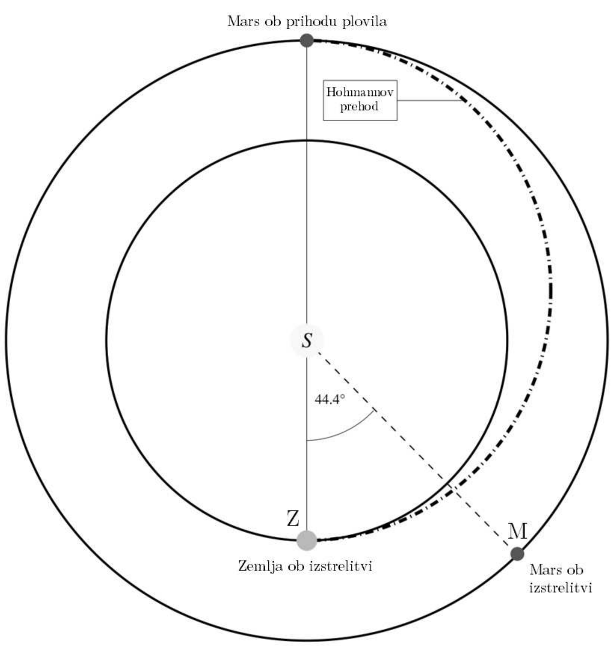
   - $t_2 = \sqrt{r_2^3}$,

   kjer je čas t_2 izražen v letih, polmer r_2 pa v astronomskih enotah.

   V času tega obhodnega časa naredi Mars polni krog, opiše torej kot 2π. Med poletom po Hohmannovi prehodni orbiti rdeči planet opiše kot $2\pi\frac{T_M}{t_2}$. Zato je kot Zemlja-Sonce-Mars v trenutku izstrelitve plovila z Zemlje enak (slika 3):

   - $\alpha = \angle ESM = \pi - 2\cdot\dfrac{T_M}{t_2} = \pi\left(1 - 2\dfrac{T_M}{t_2}\right)$

   $\therefore\ \alpha = 0{,}77 \text{ rad} = 44{,}4°$.



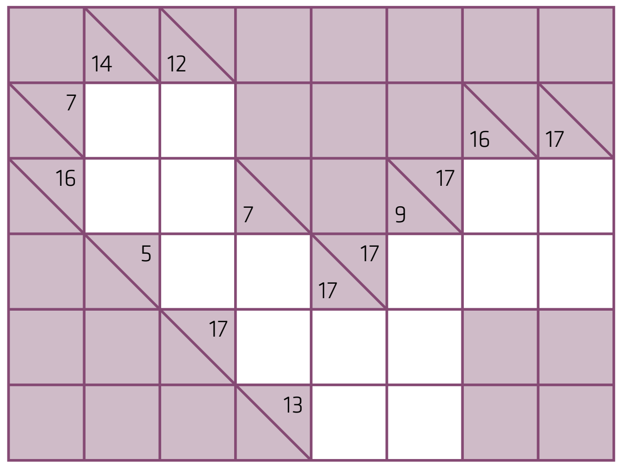
SLIKA 3.
Hohmannov prehod plovila z Zemlje na Mars

× × ×

Križne vsote

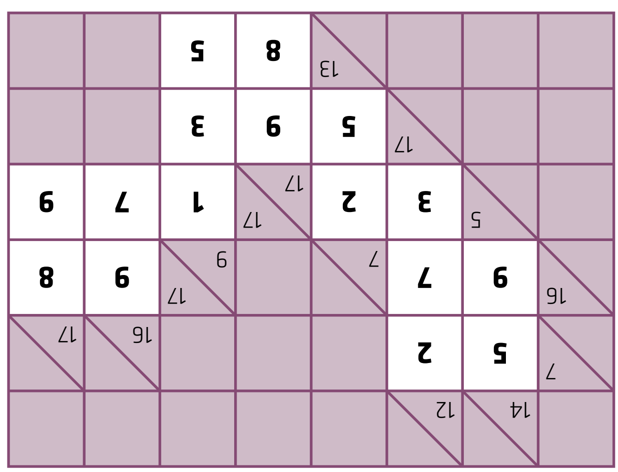
↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×