PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 1
Strani 4–7, I

Boris Lavrič:

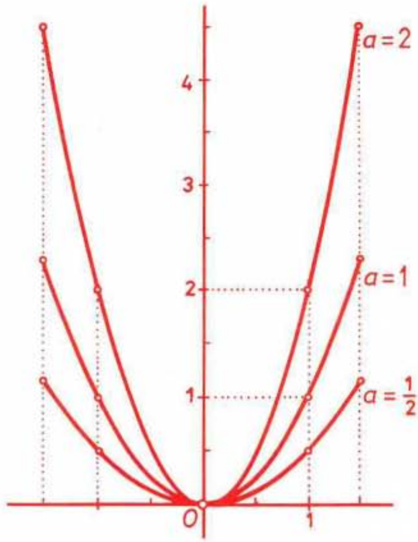
PROSTORNINA PARABOLOIDA

Ključne besede: matematika, geometrija, prostornina paraboloida.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/923-Lavric.pdf

PROSTORNINA PARABOLOIDA

Beseda parabola dandanes ni več tako tuja ušesu kot nekoč. Če ne drugače, je marsikomu sedla v besedni zaklad zaradi svojih tehničnih modelov – zrcala v avtomobilskih žarometih ponekod imenujejo po domače kar parabole; parabolična antena pa je najbrž najmodernejši tak primer. Lahko bi še nadaljevali z naštevanjem, a raje pobrskajmo nekoliko po matematičnem slovarju in poglejmo, kaj nam bo ta povedal o paraboli. Krivulja je to. Vsa leži v eni ravnini, zato rečemo, da je ravninska. Kako bi jo opisali? Med mnogimi možnostmi se odločimo za funkcijsko predstavitev. Ravnino, na kateri parabola leži, opremimo s pravokotnim koordinatnim sistemom, kot smo že vajeni. Če koordinatni osi postavimo dovolj spretno, postane parabola graf kvadratne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podan s predpisom

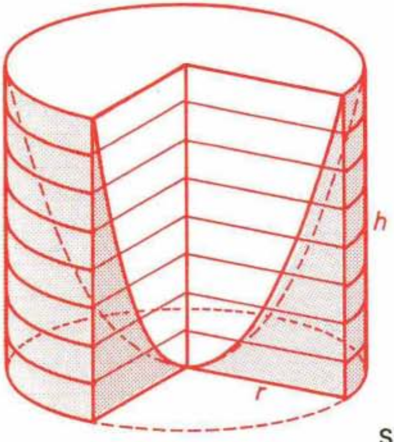


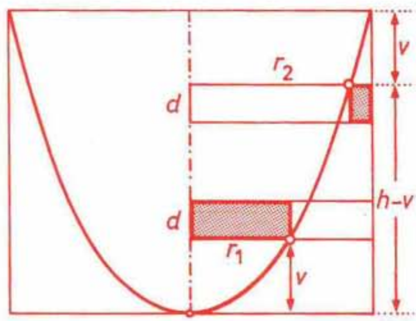
Slika 1

$$f(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{kjer je } a > 0$$

Spomnimo se še, da graf funkcije f sestavljajo točke $(x, f(x))$. Torej našo parabolo določa množica $\{ (x, ax^2), x \in \mathbb{R} \}$, ki jo brez težav skiciramo – na sliki 1 so načrtani kosi treh parabol (za $a = 1/2$, $a = 1$ in $a = 2$). Opazimo, da je krivulja somerna glede na ordinatno os in da poteka skozi koordinatno izhodišče. Čimvečji koeficient a vzamemo, bolj je koničasta, čeprav prave konice nima nikjer.

Vrnimo se na začetek in že lahko odkrijemo zvezo med tam navedenimi primeri in pojmom parabole, ki smo ga pravkar opisali. Če zavrtimo parabolo (krivuljo) okrog njene osi simetrije, opiše ploskev, ki je prisotna tako pri zrcalu kot pri anteni. Tej ploskvi rečemo rotacijski paraboloid (*rotacija* – vrtenje). Ima naslednjo zanimivo ter uporabno lastnost: na njegovi osi obstaja taka





Slika 2

točka, da se vsi žarki, ki gredo skoznjo, odbijejo od paraboloida vzporedno z osjo. Tej točki rečemo gorišče. Zaradi omenjene lastnosti so nekatera zrcala in antene paraboloidne oblike.

Nam tudi narava kdaj postreže s paraboloidom? Marsikateri pojav se da opisati s pomočjo parabole. Zadržimo se le pri enem – predstavljen in fizikalno utemeljen je v prispevku na strani 17 . V posodo ujeto nestisljivo tekočino zavrtimo okrog navpične osi. Pri stalni (kotni) hitrosti vrtenja se njena gladina ustali in ima obliko rotacijskega paraboloida.

Denimo, da je posoda valjaste oblike (lonec) napolnjena do višine h_1, pri vrtenju pa se je tokočina dvignila ob robu do višine h_2 in je ni nič izteklo iz lonca. Kolikšna je tedaj globina tekočine na sredini posode? Prostornina tekočine se pri vrtenju ni spremenila, zato na vprašanje ne bo težko odgovoriti, če bomo le našli obrazec za izračun prostornine (prisekanega) rotacijskega paraboloida. Torej se lotimo te naloge.

Rotacijski paraboloid, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) = ax^2$ ($a > 0$) okrog navpične ordinatne osi, zaprimo na višini h z vodoravnim krožnim pokrovom polmera r. Izračunali bomo prostornino V nastale posode. V ta namen jo vložimo v valj z višino h in s skupno (zgornjo) osnovno ploskvijo. Valj vzporedno z njo razrežimo na enake rezine debeline d. Njegovo prostornino označimo z U. Vsako rezino razdelimo na dele (zgornjo in spodnjo na dva, ostale pa na tri) takole:

– notranji del rezine naj bo največja okrogla plošča, ki je še vsebovana v paraboloidu;

– zunanji del naj bo največji (robati) obroč, ki leži zunaj paraboloida;

– vmesni del je obroč, ki ostane.

Pokažimo, da ima notranji del rezine s spodnjo osnovno ploskvijo na višini v enako prostornino kot zunanji obroč rezine z zgornjo osnovno ploskvijo na višini $h - v$.

Poglejmo na sliko 2.

Prvi del — krožna plošča — ima polmer osnovne ploskve r_1. Potem velja $v = ar_1^2$, njegova prostornina pa meri $\pi dv/a$. Drugi del — robati obroč — ima notranji polmer r_2. Tedaj je $h - v = ar_2^2$ in zaradi zveze $h = ar^2$ še $v = a(r^2 - r_2^2)$. Prostornina obroča je enaka $\pi dr^2 - \pi dr_2^2 = \pi dv/a$, torej sovpada s prostornino krožne plošče.

Združimo vse notranje dele rezin. Njihova skupna prostornina A je po prejšnjem enaka prostornini stopničastega telesa, ki ga sestavljajo vsi zunanji obroči. Poleg tega je manjša od iskane prostornine V, skupaj s prostornino B vseh vmesnih obročev pa presega V. Vmesne obroče spustimo na ravnino in dobimo krožno ploščo s polmerom r, debelino d in prostornino $B = \pi r^2 d$. Torej veljata zvezi

$$A < V < A + B \quad \text{in} \quad 2A + B = U$$

od koder dobimo oceno

$$U - B < 2V < U + B$$

Če izberemo debelino $d > 0$ dovolj majhno, je tudi prostornina B majhna, kot le želimo. Zato velja $U = 2V$. Prisekani paraboloid torej zavzema pol prostornine očrtanega valja.

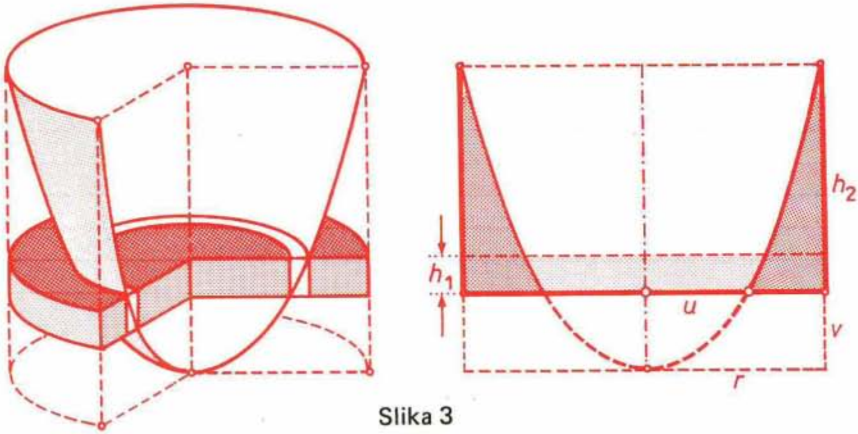
Zdaj smo že dovolj pripravljeni, da odgovorimo na vprašanje o globini tekočine v vrteči se posodi. Najprej poglejmo, kdaj sega vrtinec le na sredini do dna posode, ki naj ima polmer r. Prostornina tekočine je tedaj enaka polovici prostornine valja z višino h_2 in polmerom r osnovne ploskve, zato v tem primeru velja $h_2 = 2h_1$. Če velja $h_2 \leqslant 2h_1$ dobimo iskano globino z enakim razmislekom kot prej. Globina meri $2h_1 - h_2$. Brž ko velja $h_2 > 2h_1$, tekočine na sredini posode ni. Na postavljeno vprašanje smo s tem že odgovorili, ponuja pa se novo.

Kolikšen del dna posode ni pokrit s tekočino? Zanimal nas bo seveda primer $h_2 > 2h_1$.

Krog na dnu posode, ki ni pokrit s tekočino, naj ima polmer u. Rotacijski paraboloid, katerega del tvori površje tekočine, naj sega v globino v pod dno posode, dobimo pa ga z vrtenjem grafa funkcije $y = ax^2$. Poglejmo na sliko in pred nami sta enakosti $v = au^2$, $h_2 + v = ar^2$, ki nam dasta zvezo

$$v(r^2 - u^2) = h_2 u^2 \tag{1}$$

Mirujoča tekočina ima enako prostornino kot vrteča. Slednjo dobimo tako, da valju z višino h_2 in polmerom r osnovne ploskve odvzamemo ustrezni prise-



Slika 3

kani rotacijski paraboloid (ki je razlika dveh odsekov paraboloida). Torej velja enakost

$$\pi r^2 h_1 = \pi r^2 h_2 - [\ (\pi/2) r^2 (h_2 + v) - (\pi/2)\, u^2 v\ ]$$

Poenostavimo jo in upoštevajmo zvezo (1). Brez težav najdemo relacijo $u^2 = (1 - 2h_1/h_2) r^2$, ki nam pove, da $1 - 2h_1/h_2$ dna posode ni pokrito s tekočino.

Naloge smo rešili, pet novih pa prepuščamo bralcu v veselje.

1. V ravnini z običajnim koordinatnim sistemom naj bo p premica, dana z enakostjo $y = -1$. Pokaži, da je množica točk (na tej ravnini), ki so enako oddaljene od premice p in od točke (0, 1), parabola. Na tej osnovi poskusi formulirati geometrijsko definicijo parabole.

2. Določi množico vseh točk v prostoru, ki so enako oddaljene od dane ravnine in točke, ki ne leži na njej.

3. Od prisekanega rotacijskega paraboloida s prostornino 20 cm^3 odrežemo na polovici višine (pravokotno na os) manjši paraboloid. Kolikšno prostornino ima?

4. Mirujoča voda v valjastem loncu (z navpično osjo) je globoka 5 cm. Zavrtimo lonec okrog osi tako, da doseže voda vrhnji rob posode. Kako visoka je posoda, če je pri tem točno polovica dna pokrita z vodo?

5. V navpično postavljen kozarec paraboloidne oblike, ki drži 2 dl, nalijemo 1 dl vina. Do kam seže gladina na sredi kozarca, če kozarec miruje. Kaj pa, če ga zavrtimo tako, da vino doseže rob kozarca? Pa na zdravje!

Boris Lavrič

1

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK, 16, 1988–89