

gibati po loku $\widehat{DB}$. Kota se s spremembo lege točke C spreminjata, pri tem je $\alpha \leq \beta$, njuna vsota pa je konstantna. Če izberemo lego točke C drugače, velja drugačna relacija med koti in moramo vloge kotov v nadaljevanju ustrezno spremeniti.

Trikotniku včrtamo krožnico, poiščemo presečišče te krožnice s simetralama kotov α in β . V teh točkah narišemo pravokotnice na te simetrale. Pravokotnice sekajo stranici c in b oziroma a . Dobimo nove trikotnike AB_1C_1 , AB_2C_2 in B_3BC_3 , v katere zopet včrtamo krožnice.

Vsoto plosččin rdečega (p_r), modrega (p_m) in vijoličnega (p_v) kroga označimo s p_1 , vsoto plosččin rdečega, modrega in zelenega (p_z) kroga pa s p_2 , če je $p_v > p_z$ je $p_1 > p_2$. V koordinatni sistem (na desno strani slike 6) rišemo sled točke $T_1(\sin(\alpha/2), p_v)$, vijolična krivulja, in sled točke $T_2(\sin(\alpha/2), p_z)$, zelena krivulja, ko se oglišče C giblje po loku $\widehat{DB}$. Program riše obe sledi hkrati. Ordinati odebeljenih pik na krivuljah kažeta, kolikšna je ploščina vijoličnega oz. zelenega kroga za trenutno izbrana kota α in β .

Bralci naj še premislijo, kolikšna sta kota α in β , ko je $p_1 = p_2$.

Kaj smo se naučili? Pri geometrijskih nalogah se pogosto zgodi, da pri reševanju upoštevamo odnose med količinami, ki jih razberemo s slike. Ta pa nas lahko zavede, zato je vedno dobro, da rešitev preverimo tudi na kakšnih posebnih primerih, kot v našem primeru na enakostraničnem trikotniku ali pa na zelo dolgem in ozkem trikotniku.

Literatura

- [1] M. Andreatta, A. Bedzek, J. P. Boronski, *The Problem of Malfatti: Two Centuries of Debate*, The Mathematical Intelligencer, Springer, 2010.
- [2] H. Lob, H. W. Richmond, *On the solution to Malfatti's problem for a triangle*, Proc. Lond. Mat. Soc, 2, 30, 287-304, 1930.
- [3] M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, Mathematics Magazine 40, 241-427, 1967.
- [4] V. A. Zalgaller, G. A. Los, *The solution of Malfatti's problem for a triangle*, Journal of the Mathematical Science, 72, No. 4, 3163-3177, 1994.

× × ×

0 pitagorejskih trojicah malo drugače

↓↓↓

MARJAN JERMAN

→ V pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo c velja Pitagorov izrek, ki pravi, da je

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Če dodatno zahtevamo, da so števila a , b in c naravna, trojici (a, b, c) rečemo **pitagorejska trojica**. Posebej slavna pitagorejska trojica, s pomočjo katere so v starem Egiptu načrtovali prave kote, je trojica $(3, 4, 5)$.

Kadar stranice a , b in c nimajo skupnega faktorja, rečemo, da je pitagorejska trojica (a, b, c) *primitivna*. Na primer, $(6, 8, 10)$ je pitagorejska trojica, ki ni primitivna in je dobljena s celoštevilskim raztegom trojice $(3, 4, 5)$.

Pokažimo, da je v vsaki primitivni pitagorejski trojici ena kateta soda in ena liha.

Če sta obe kateti v pitagorejski trojici sodi, je soda tudi hipotenuza. Zato takšna trojica ni primitivna.

Če bi bili obe kateti lihi, enačba

$$(2k - 1)^2 + (2\ell - 1)^2 = 4(k^2 - k + \ell^2 - \ell) + 2$$

pove, da bi dal kvadrat hipotenuze ostanek 2 pri deljenju s 4. Ker kvadrat sodega števila da pri deljenju s 4 ostanek 0, kvadrat lihega števila $(2k - 1)^2 = 4(k^2 - k) + 1$ pa ostanek 1, takšna hipotenuza ni mogoča.

S pomočjo zadnje trdive lahko, recimo, pokažemo, da je $(3, 4, 5)$ najmanjša Pitagorejska trojica.

Ker iščemo najmanjšo pitagorejsko trojico, mora biti iskana trojica (a, b, c) primitivna. Glede na trditev





lahko dodatno privzamemo, da je kateta a liha, kateta b pa soda in zato hipotenuza c liha. Po Pitagorovem izreku velja $b^2 = c^2 - a^2$, kvadrata lihih števil pa se razlikujeta vsaj za $3^2 - 1^2 = 8$, zato je $b^2 \geq 8$ in je $b \geq 4$. Če poskusimo z najmanjšima možnima katetama $a = 1$ in $b = 4$, dobimo necelo hipotenuzo $c = \sqrt{17}$. Naslednja možnost $a = 3$ in $b = 4$ pa da iskano trojico $(3, 4, 5)$.

Iskanje pitagorejskih trojic je navdihovalo mnoge civilizacije. Iz glinenih tablic iz let med 1900 in 1600 pred našim štetjem lahko upravičeno sklepamo, da so že Babilonci poznali pravila za njihovo tvorbo.

Če sta m in n naravni števili, je lahko preveriti, da je

$$\blacksquare (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2, \quad (1)$$

zato lahko za naravni števili $m > n$ neskončno pitagorejskih trojic dobimo s pravilom

$$\blacksquare a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2. \quad (2)$$

Presenetljivo je, da so se že v stari Grčiji vprašali tudi obratno: Ali je vsaka pitagorejska trojica zgornje oblike?

Dokončen odgovor daje lema v deseti knjigi Evklidovih Elementov iz let približno 300 pred našim štetjem, ki bi jo v današnjem matematičnem jeziku zapisali takole:

Trojica naravnih števil (a, b, c) je primitivna pitagorejska trojica natanko takrat, ko obstajata tuji števili m in n različne parnosti, $m > n$, da velja (2).

O pitagorejskih trojicah je bilo v Preseku že veliko napisanega. Pogledate si lahko na primer članka prof. Edvarda Kramarja (letnik 16, 1988/89, str. 274–280) in prof. Ivana Puclja (letnik 5, 1977/78, str. 195–197). V članku, ki ga je napisala prof. Milena Strnad (letnik 17, 1989/90, str. 8–11), najdete tudi moderno različico Evklidovega dokaza. Originalni dokaz je zapisan v geometrijskem jeziku in temelji na zviti uporabi elementarnih lastnosti deljivosti naravnih števil.

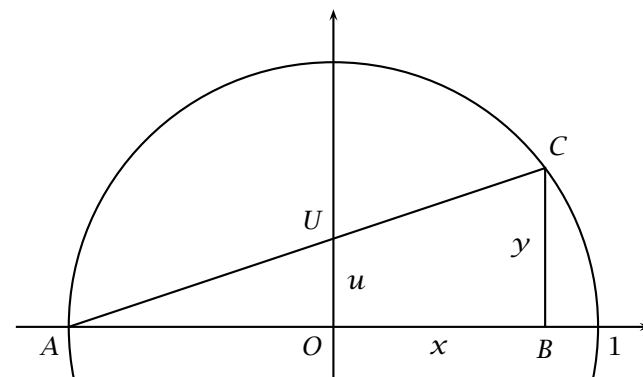
V tem prispevku bi radi prikazali zanimiv in eleganten dokaz s pomočjo analitične geometrije, ki smo ga našli kot 18. nalogo v prvem poglavju knjige A. Ostermana in G. Wannerja, *Geometry by Its History*. Sorodna metoda je pogosto uporabljena za iskanje racionalnih točk na stožnicah.

Najprej privzemimo, da za tuji števili različne parnosti $m > n$ velja $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ in $c = m^2 + n^2$. Pokažimo, da je (a, b, c) primitivna pitagorejska trojica.

Števila a , b in c so zaradi veljavnosti enačbe (1) stranice pravokotnega trikotnika.

Pokazati je treba še, da so paroma tuja. Če neko praštevilo p hkrati deli števili $a = m^2 - n^2$ in $c = m^2 + n^2$, deli tudi njuno vsoto in razliko: $p \mid (a + c) = 2m^2$ in $p \mid (c - a) = 2n^2$. Ker sta števili a in c zaradi različne parnosti m in n lihi, je $p \neq 2$ in hkrati deli m^2 in n^2 . To pa je v nasprotju s tujostjo števil m in n .

Ker števila a , b in c zadoščajo Pitagorovemu izreku, praštevilo, ki deli b in c , deli tudi a . Podobno, praštevilo, ki deli a in b , deli tudi c . V prejšnjem odstavku smo pokazali, da praštevilo, ki bi hkrati delilo števili a in c , ne obstaja.



SLIKA 1.

Slika k dokazu

Naj bo sedaj (a, b, c) primitivna pitagorejska trojica. Vemo, da je ena od katet soda, druga pa liha. Brez škode za splošnost privzemimo, da je kateta b soda. Ker drži $a^2 + b^2 = c^2$, za strogo pozitivni racionalni števili $x = \frac{a}{c}$ in $y = \frac{b}{c}$, ki sta zapisani z okrajšanima ulomkoma, velja:

$$\blacksquare x^2 + y^2 = 1.$$

Z drugimi besedami: točka $C(x, y)$ v prvem kvadrantu ima racionalni koordinati in leži na krožnici s središčem v izhodišču in polmerom 1. Skozi točki $A(-1, 0)$ in C potegnimo premico, ki seka ordinatno os v točki $U(0, u)$, $u \in (0, 1)$. Označimo še točki $O(0, 0)$ in $B(x, 0)$ (glej sliko 1).

Pravokotna trikotnika AOU in ABC sta si podobna, zato je

$$\frac{OU}{BC} = \frac{u}{y} = \frac{1}{1+x} = \frac{AO}{AB}.$$

Od tu dobimo zvezo $y = u(1+x)$, ki med drugim pove, da je tudi število

$$u = \frac{y}{1+x} = \frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{a}{c}} = \frac{b}{a+c}$$

racionalno.

Točka $(x, y) = (x, u(1+x))$ leži hkrati na premici $y = u(1+x)$ in na krožnici $x^2 + y^2 = 1$, zato zadošča enačbi

$$\begin{aligned} x^2 + u^2(1+x)^2 &= 1, \\ x^2(u^2 + 1) + 2u^2x + u^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Tudi točka $A(-1, 0)$ leži na isti premici in krožnici, zato je $x = -1$ ena od rešitev te kvadratne enačbe. S pomočjo znane ničle lahko zadnjo kvadratno enačbo enostavno razstavimo na linearna faktorja

$$(x+1)((u^2+1)x + (u^2-1)) = 0,$$

od koder vidimo še drugo rešitev

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}. \quad (3)$$

Zato je

$$y = u(1+x) = \frac{2u}{1+u^2}. \quad (4)$$

Radoveden bralec lahko premisli, da ima kvadratna enačba z racionalnimi koeficienti, ki ima eno ničlo racionalno, racionalno tudi drugo ničlo. Zato metoda s presečno premico skozi eno racionalno točko deluje le za krivulje drugega reda.

Ker je u strogo pozitivno racionalno število, ga lahko zapišemo v obliki $u = \frac{n}{m}$ za primerni tuji naravni števili m in n , $m > n$. Po tej zamenjavi enačbi (3) in (4) preideta v

$$x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad \text{in} \quad y = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Ker sta števili m in n tuji, nista obe sodi. Pokažimo, da nista niti obe lihi. V primeru, ko sta obe števili m in n lihi, ima ulomek

$$y = \frac{b}{c} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

sodi števec in sodi imenovalac. Zato lahko dvojko v števcu in imenovalcu pokrajšamo in v števcu ostane liho število mn . Ulomek

$$\frac{mn}{\frac{m^2+n^2}{2}}$$

pokrajšajmo, kolikor se da. Po opravljenem krajšanju bo v števcu ostalo liho število. Ker je ta okrajšani ulomek enak okrajšanemu ulomku $\frac{b}{c}$, je to v nasprotju s sodostjo b . Zato imata števili m in n različno parnost.

Enako kot v obratni smeri dokaza sedaj vidimo, da so števila $m^2 - n^2$, $2mn$ in $m^2 + n^2$ tuja. Zato so ulomki

$$\frac{a}{c} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad \text{in} \quad \frac{b}{c} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

okrajšani in velja (2). To pa smo želeli pokazati.

Prispevek povzemimo s trditvijo:

Vse pitagorejske trojice (a, b, c) so natanko oblike

$$a = k(m^2 - n^2), \quad b = 2kmn, \quad c = k(m^2 + n^2),$$

kjer je k neko naravno število, $m > n$ pa tuji naravni števili različne parnosti.

Trojico precej dolgih celoštevilskih stranic pravokotnega trikotnika (12709, 13500, 18541) na babilonski tablici je, recimo, dobljena z izbiro $k = 1$, $m = 125$ in $n = 54$.

Na koncu bralcem postavimo še zanimivi vprašanja: *Katera naravna števila so lahko katete primitivnih pitagorejskih trojic? Katera števila so lahko hipotenuze?*

Za odgovor je seveda zelo koristno uporabiti naš najpomembnejši rezultat (2). Za katete si pomagajte z enačbo

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

za hipotenuze pa poskušajte uporabite pomemben izrek iz teorije števil, ki pravi:

Naravno število $n \neq 1$ lahko napišemo kot vsoto dveh kvadratov naravnih števil natanko tedaj, ko v razcepu n na produkt praštevil vsako praštevilo, ki da pri deljenju s 4 ostanek 3, nastopa v sodi potenci.

× × ×