PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 2
Strani 92–95

Anton Cedilnik:

NEKOMUTATIVNE IN NEASOCIATIVNE OPERACIJE

Ključne besede: matematika, algebra, nekomutativne operacije, neasociativne operacije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1216-Cedilnik.pdf

NEKOMUTATIVNE IN NEASOCIATIVNE OPERACIJE

Živo se še spominjam svojih občutkov, ko sem na začetku gimnazije prvič slišal za komutativnost in asociativnost seštevanja in množenja. Ne da bi ne verjel, da res veljajo te lastnosti; nasprotno, preveč sem verjel vanje, da bi se mi sploh zdelo vredno o tem govoriti.

Da niso bili samo moji občutki taki, dokazuje šala, ki je že tako stara, da je večina bralcev Preseka verjetno ne pozna, pa naj mi jo bo zato dovoljeno povedati!

Smrkavec priveka iz šole: "Cvek sem dobil!"
Oče: "Kaj si bil pa vprašan?"
Sin: "Koliko je 3×4."
Oče: "In kaj si odgovoril?"
Sin: "Ja, 12!"
Oče: "Dobro. Kaj pa je bilo potem?"
Sin: "Učiteljica je vprašala, koliko je 4×3."
Oče skomigne: "Isto sranje."
Sin še bolj zajoka: "No, ata, jaz sem tudi tako rekel!"

Da razmišljanje o komutativnosti in asociativnosti ni od muh, se zavemo šele takrat, ko naletimo na operacije, ki teh lastnosti nimajo. Namen tega zapisa je pokazati, da je takšnih operacij nič koliko in da nekatere spoznamo celo že v osnovni šoli. Preden pa začnemo s primeri, razčistimo s terminologijo: Kaj je operacija in kaj asociativnost?

Imejmo neprazni množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. **Premi (kartezični) produkt** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ je množica vseh urejenih parov elementov iz teh dveh množic:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(a, b) \mid (a \in \mathcal{A}) \wedge (b \in \mathcal{B})\}.$$

Z izrazom urejeni par hočemo povedati, da je točno določeno, kateri element v paru je prvi in kateri drugi.

Dvočlena (binarna) operacija je povsod na $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ definirana preslikava v neko tretjo množico $\mathcal{C}$, torej predpis, ki vsakemu paru iz $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ priredi točno določen element iz $\mathcal{C}$. Elementoma iz para recimo **operanda**, njima predpisani element C pa **rezultat**. Pri konkretnih operacijah so imena seveda tudi konkretna. Tako sta naprimer pri seštevanju operanda seštevanca, rezultat pa vsota; pri odštevanju je prvi operand zmanjševanec, drugi je odštevanec in rezultat razlika. Rezultat često označimo tako, da med operanda vstavimo kak znak: $a + b$, $a \cdot b$ $(= ab)$, $a \circ b$, a/b, ...

Vzemimo sedaj, da je $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ in da neka operacija vsakemu paru $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ priredi rezultat $a * b \in \mathcal{C}$. Ta operacija je **komutativna**, če velja enačba

$$a * b = b * a$$

za poljubna a, b iz $\mathcal{A}$. Mimogrede, enačbi, ki velja za vse vrednosti spremenljivk v njej, pravimo **identiteta**.

Zahtevajmo še $\mathcal{C} = \mathcal{A}$. Potem je **asociativnost** operacije definirana z identiteto

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

V nadaljevanju bom navedel 16 operacij tipa $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$; nekatere so asociativne ali komutativne, druge ne. Predlagam bralcu, da izdela dokaze za tiste lastnosti, ki veljajo. Oglejmo pa si protiprimere za tiste, ki ne veljajo:

Najprej štiri komutativne asociativne operacije.

1. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^+$ (pozitivna cela števila); $a * b := m(a, b)$ (najmanjša skupna mera),
2. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ (realna števila); $a * b := min\{a, b\}$ (manjši od obeh),
3. $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ (kompleksna števila); $a * b := a + b - ab$ (kvaziprodukt),
4. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (realne kvadratne matrike z dvema vrsticama);

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{bmatrix} \text{ (vsota matrik)}$$

Naslednje štiri operacije so asociativne, niso pa komutativne.

5. $\mathcal{A}$ je poljubna množica z vsaj dvema elementoma; $a * b := a$ (prvi operand). Protiprimer:

$$p \neq q; \quad p * q = p; \quad q * p = q.$$

6. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix} \text{ (produkt matrik)}$$

Protiprimer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (povsod definirane realne funkcije); $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ (kompozitum dveh funkcij). Protiprimer:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1;$$
$$(f \circ g)(x) = (x+1)^2; \quad (g \circ f)(x) = x^2 + 1.$$

8. $\mathcal{A} = G(\mathbb{R}^2)$ (gibanja v ravnini; to so preslikave, ki ohranjajo razdalje med točkami in kote med premicami; mednje spadajo tudi vzporedni premiki, vrtenja in zrcaljenja); če sta operanda g_1 in g_2 dve gibanji, naj bo rezultat $g_1 g_2$ sestavljeno gibanje: najprej g_2, nato pa g_1.
   Protiprimer: Imejmo na ravnini ortonormiran koordinatni sistem, g_1 naj bo premik za 1 v pozitivni smeri abscisne osi, g_2 pa zrcaljenje preko ordinatne osi;
   $g_1 g_2 : O(0,0) \xrightarrow{g_2} O(0,0) \xrightarrow{g_1} A(1,0);$
   $g_2 g_1 : O(0,0) \xrightarrow{g_1} A(1,0) \xrightarrow{g_2} B(-1,0).$

Naslednji štirje primeri so komutativni, niso pa asociativni.

9. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$; $a * b := (a+b)/2$ (aritmetična sredina).
   Protiprimer: $(1 * 0) * 2 = 5/4$; $1 * (0 * 2) = 1$.
10. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$; $a * b := |a - b|$ (razdalja med operandoma).
    Protiprimer: $(1 * 1) * 2 = 2$; $1 * (1 * 2) = 0$.
11. $\mathcal{A}$ naj bo množica, ki vsebuje število 0 in vsa tista racionalna števila, ki jih lahko napišemo z decimalnim zapisom

$$\pm 0, d_1 d_2 d_3 \cdot 10^a,$$

pri čemer so d_1, d_2, d_3 poljubne tri decimalke, le $d_1 \neq 0$, eksponent a pa je poljubno celo število. S temi števili računamo kot z vsemi realnimi števili, le da rezultat spet spravimo v zahtevano obliko in pri tem po potrebi zaokrožimo; takemu računanju pravimo aritmetika s plavajočo vejico. Še operacija: kar običajno seštevanje! Protiprimer:

$$[(-0,500) \cdot 10^2 + 0,501 \cdot 10^2] + 0,499 \cdot 10^{-1} = 0,150 \cdot 10^0$$
$$(-0,500) \cdot 10^2 + [0,501 \cdot 10^2 + 0,499 \cdot 10^{-1}] = 0,100 \cdot 10^0.$$

12. $\mathcal{A}$ naj bo množica vseh racionalnih števil, ki imajo v decimalnem zapisu cela mesta in prve tri decimalke poljubne, ostala decimalna mesta pa zasedajo ničle in jih zato sploh ne pišemo. Z njimi računamo tako kot z realnimi števili, le rezultat vedno zaokrožimo na tri decimalke. Takemu računanju pravimo aritmetika z nepremično vejico. Operacija naj bo tokrat kar navadno množenje. Protiprimer:

$$\begin{aligned}(0,100 \cdot 0,002) \cdot 50,000 &= 0,000;\\ 0,100 \cdot (0,002 \cdot 50,000) &= 0,010.\end{aligned}$$

Pripomba! Zadnja dva primera operacij sta še posebej zanimiva, saj v praksi vedno računamo na en ali drug način. Neasociativnost torej srečamo tako rekoč na vsakem koraku.

Zadnje štiri operacije, ki pa niso niti komutativne niti asociativne.

13. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ (cela števila); operacija je odštevanje. Protiprimer:

$$\begin{gathered}1-0=1;\ 0-1=-1.\\ (1-0)-1=0;\ 1-(0-1)=2.\end{gathered}$$

14. $\mathcal{A} = \mathbb{Q}^*$ (neničelna racionalna števila); operacija je deljenje. Protiprimer:

$$\begin{gathered}1:2=\frac{1}{2};\ 2:1=2.\\ (2:1):2=1;\ 2:(1:2)=4.\end{gathered}$$

15. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+$ (pozitivna realna števila), $a * b := a^b$. Protiprimer:

$$\begin{gathered}1*2=1;\ 2*1=2.\\ (2*1)*3=8;\ 2*(1*3)=2.\end{gathered}$$

16. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ (tridimenzionalni vektorski prostor), operacija je vektorski produkt. Protiprimer: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ naj bodo paroma pravokotni vektorji z dolžino 1, ki ležijo zaporedoma na koordinatnih oseh $(x), (y), (z)$, z isto orientacijo kot te osi.

$$\begin{gathered}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}.\\ (\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}=-\vec{i};\ \vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})=\vec{0}.\end{gathered}$$

Anton Cedilnik