PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 1
Strani 34–37

Marko Lovrečič Saražin:

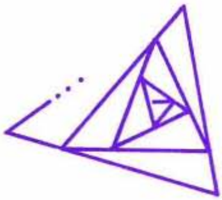
BREZNO TRIKOTNIKOV

Ključne besede: matematika, geometrija, vgnezdeni trikotniki, podobnost, težiščnica, popularizacija matematike.

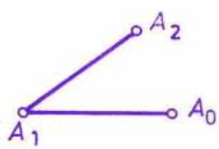
Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1160-Lovrecic.pdf

BREZNO TRIKOTNIKOV

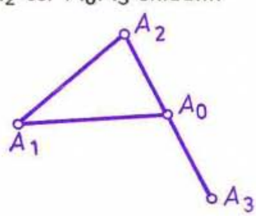
Kadar sedim za mizo s svinčnikom in papirjem ter tuhtam, mozgam, pa nič pametnega ne pogruntam, se večkrat zalotim pri risanju takihle figur:



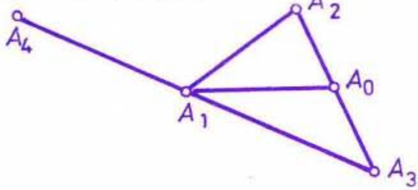
Hvaležna tema za psihologe, kajne? Pustimo jim, da me študirajo po mili volji, in skušajmo iz risbice narediti kaj matematike. Vzemimo za začetek v ravnini dve daljici A_0A_1 in A_1A_2:



Na zveznici točk A_0 in A_2 si izberimo točko A_3 tako, da A_0 leži med A_2 in A_3 in sta daljici A_0A_2 ter A_0A_3 skladni:

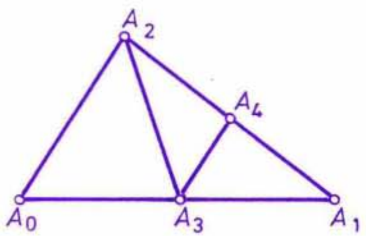


Ponovimo postopek s točkama A_1 in A_3. Izberimo novo točko A_4 tako, da bo A_1 med A_3 in A_4 ter $A_1A_3 \cong A_1A_4$:

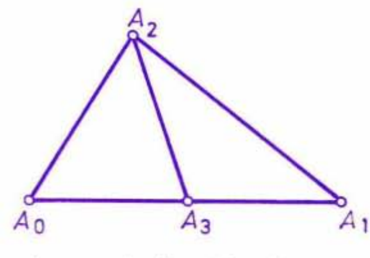


Nato konstruiramo točko A_5 z lastnostjo, da je A_2 med A_4 in A_5 ter $A_2A_4 \cong A_2A_5$ itd. Na ta način pridelamo zaporedje točk A_n ($n = 1, 2, \ldots$). Naj bo T_n trikotnik z oglišči A_n, A_{n+1}, A_{n+2} ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Iz konstrukcije je razvidno, da je daljica $A_{n-1}A_n$ ravno težiščnica trikotnika T_n. Se pravi, da je v zaporedju T_n vsak trikotnik ploščinsko dvakrat večji od prejšnjega. Ploščine trikotnikov torej rastejo čez vse meje.

Zdaj pa zadevo obrnimo na glavo! Naj bo $T_0 = A_0A_1A_2$ neki trikotnik v ravnini in A_3 razpolovišče stranice A_0A_1:



Ker je A_2A_3 težiščnica v T_0, je trikotnik $T_1 = A_1A_2A_3$ ravno polovica trikotnika T_0. Razpolovišče stranice A_1A_2 naj bo A_4:



In tako naprej. V splošnem bodi točka A_{n+1} razpolovišče stranice $A_{n-2}A_{n-1}$, trikotnik z oglišči A_n, A_{n+1}, A_{n+2} pa označimo s T_n. Tokrat je daljica $A_{n+2}A_{n+3}$ težiščnica v T_n, torej je T_{n+1} natanko pol tolikšen kot T_n. To pomeni, da je T_{n+1} vsebovan v T_n. Recimo, da ima T_0 ploščino 1. Potem je ploščina T_n enaka 2^{-n} za vsak n in vidimo, da ploščine trikotnikov z rastočim n "bežijo" proti 0.

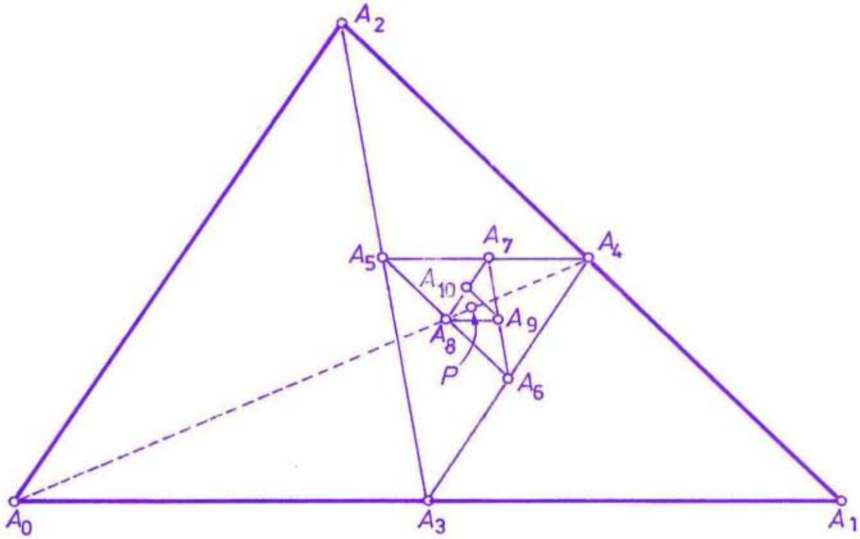
Hmm, tole je sumljivo. Ker velja $T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$, bi človek mislil, da tudi točke A_n "bežijo" proti kaki točki. Bolj učeno povedano, mogoče obstaja limita zaporedja A_n, kdove? Ob limiti pa takoj pomislimo na "težke topove" višje matematike. Ali ne bi mogli rešiti tega problema bolj preprosto?

Dejansko se dá zastavljeno nalogo rešiti le z nekaj malega znanja o raztegih v ravnini. Oglejmo si sliko 1. Ker točka A_3 razpolavlja daljico A_0A_1 in A_4 daljico A_1A_2, je A_3A_4 vzporedna z A_0A_2 in

$$\overline{A_3A_4} = \frac{1}{2}\overline{A_0A_2}.$$

Toda A_6 razpolavlja A_3A_4, kar pomeni, da je

$$\overline{A_4A_6} = \frac{1}{4}\overline{A_0A_2}.$$



Slika 1

Točka A_5 leži na sredini med A_2 in A_3, zato je A_4A_5 vzporedna daljici A_1A_3 in le pol toliko dolga. Ker je A_1A_3 polovica daljice A_0A_1, ugotovimo, da je

$$\overline{A_4A_5} = \frac{1}{4}\overline{A_0A_1}.$$

Kaj pa A_5A_6? Oglejmo si natančneje trikotnik $A_2A_3A_4$. Ker A_5 razpolavlja A_2A_3 in A_6 razpolavlja A_3A_4, je A_5A_6 vzporedna A_2A_4 in

$$\overline{A_5A_6} = \frac{1}{2}\overline{A_2A_4}.$$

Od tod sledi, da je dolžina daljice A_5A_6 le četrtina dolžine daljice A_1A_2.

Naše razmišljanje nam pravzaprav pové, da sta si trikotnika T_0 in T_4 podobna v razmerju 4:1 in da je T_4 dobljen iz T_0 z ravninskim raztegom (v resnici s skrčitvijo) s središčem v neki točki P, ki seveda leži med A_0 in A_4. Koeficient raztega je $-\frac{1}{4}$, zato je

$$\overline{A_0P} : \overline{PA_4} = 4 : 1.$$

Z drugimi besedami, razdalja med P in A_4 znaša eno petino dolžine težiščnice A_0A_4.

Na podoben način je trikotnik T_8 dobljen iz T_4 z raztegom, katerega središče je recimo točka P', koeficient pa je spet enak $-\frac{1}{4}$. Torej je

$$\overline{A_8P'} = \frac{1}{5}\overline{A_4A_8}$$

oziroma

$$\overline{A_4P'} = \frac{4}{5}\overline{A_4A_8}.$$

Ampak $\overline{A_4A_8}$ znaša le četrtino dolžine težiščnice A_0A_4, od koder sledi, da je

$$\overline{A_4P'} = \frac{4}{5}\overline{A_4A_8} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\overline{A_0A_4} = \frac{1}{5}\overline{A_0A_4}.$$

Torej je $P' = P$. Z nadaljnjim razmišljanjem ugotovimo, da je v splošnem trikotnik T_{4k+4} dobljen iz T_{4k} z raztegom z vedno istim središčem v P in koeficientom $-\frac{1}{4}$. Očitno je točka P vsebovana v vsakem trikotniku T_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Ker velja $T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$ in se stranice trikotnikov zmanjšujejo proti 0, je P ravno tista točka, proti kateri bežijo točke A_n z rastočim n. P leži na štirih petinah težiščnice A_0A_4, merjeno od oglišča A_0.

Marko Lovrečič Saražin

Matrični tiskalniki so zadnji KRIK tehnike.