

Prejeto/Received:
December 2010

Popravljen/Revised:
Januar 2011

Sprejeto/Accepted:
Februar 2011

NAČELO NEARBITRAŽNOSTI IN VREDNOTENJE TERMINSKIH POGODB

The Principle of No-Arbitrage and Pricing of Forward and Futures Contracts

Janko Marovt

Univerza v Mariboru, Ekonomsko-poslovna fakulteta
janko.marovt@uni-mb.si

Izvleček

Načelo nearbitražnosti je temeljno načelo v finančni matematiki. Izključitev arbitražnih priložnosti v matematičnih modelih je dovolj dober približek realnih dogajanj na finančnih trgih. Izkaže se, da gre za najpomembnejšo in najplodnejšo predpostavko. Cilj članka je predstaviti načelo nearbitražnosti in ga uporabiti pri vrednotenju terminskih pogodb.

Ključne besede: načelo nearbitražnosti, nestandardizirane terminske pogodbe, standardizirane terminske pogodbe, izpolnitvena cena, terminska cena, čas izpolnitve pogodbe

Abstract

The principle of no-arbitrage represents the most fundamental principle of financial mathematics. The exclusion of arbitrage opportunities in the mathematical models is extremely close to the reality of financial markets, making it the most important and fruitful assumption. The aim of this paper is to present the principle of no-arbitrage and use it in the context of pricing forward and futures contracts.

Keywords: principle of no-arbitrage, forward contracts, futures contracts, forward price, futures price, delivery time

1 Uvodne predpostavke in definicije

Prihodnja vrednost vsakega premoženja je vsaj do določene mere nepredvidljiva. Tudi bančni depoziti niso popolnoma varna investicija. Kljub temu bomo investirana sredstva delili v dve skupini:

- *netvegana sredstva*,
- *tvegana sredstva*.

Med netvegana sredstva bomo uvrščali tista investirana sredstva, za katera obstaja zanemarljivo majhno tveganje izgube, hkrati pa lahko napovemo njihovo prihodnjo ceno. Osnovna primera netveganega premoženja sta bančni depozit in državna obveznica, tipični predstavnik tveganih sredstev pa je delnica. Dogovorimo se, da bomo enoto netveganih sredstev imenovali obveznica, enoto tveganih sredstev pa delnica. S $S(n)$ bomo označevali ceno delnice v času n , z $A(n)$ pa ceno obveznice v času n . Predpostavili bomo, da čas teče diskretno in je merjen v letih, mesecih, dnevih, minutah ali (pri mrzličnem trgovanju) celo v sekundah, torej $n=0, 1, 2, \dots$ let, mesecev, dni, minut oz. sekund.

Predpostavimo, da investitor trguje z m delnicami. Njihove cene v časih $n=0, 1, 2, \dots$ bomo označili s $S_1(n), S_2(n), \dots, S_m(n)$. Denimo, da ima investitor v času n x_1 delnic s ceno $S_1(n)$, x_2 delnic s ceno $S_2(n)$, $\dots$, x_m delnic s ceno $S_m(n)$ in y obveznic s ceno $A(n)$. Skupna vrednost investitorjevih sredstev je v času n enaka

$$V(n) = \sum_{j=1}^m x_j S_j(n) + y A(n).$$

Kot vsak matematični model tudi modeli denarnega trga temeljijo na določenih predpostavkah. Preden predstavimo temeljno predpostavko, tj. načelo nearbitražnosti, omenimo še nekaj predpostavk, na katerih bodo temeljili naši nadaljnji razmisleki.

Predpostavka 1. Prihodnje cene delnic $S_1(n), S_2(n), \dots, S_m(n)$ so slučajne spremenljivke za vsak $n=1, 2, 3, \dots$. Prihodnje cene obveznic $A(n)$ so za vsak n znana števila.

Predpostavka 2. Vse cene delnic in obveznic so strogo pozitivne: $S(n) > 0$ in $A(n) > 0$ za $n=0, 1, 2, \dots$

Predpostavka 3. Investitor lahko kupi, proda ali obdrži poljubno število x_k , $k=1, 2, \dots, m$ delnic in poljubno število obveznic y . V splošnem so $x_1, x_2, \dots, x_m$ in y poljubna realna števila.

V vsakem časovnem koraku lahko torej kupimo ali prodamo poljubno število delnic in/ali obveznic, kar pomeni, da nam predpostavka 3 zagotavlja likvidnost trga. Negativna vrednost y pomeni, da si je investitor izposodil denar (npr. z izdajo in prodajo obveznic).

Tudi vrednosti $x_j(n)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, so lahko negativne, in sicer če pri delnicah investitor zavzame *kratko pozicijo* (angl. short position) oz. delnice *kratko proda*. *Kratka prodaja delnice* ali *prodaja na prazno* (angl. short selling) pomeni, da si investitor delnico izposodi (ponavadi od borznega posrednika ali banke) in jo proda (ter pridobljena sredstva uporabi za začetek neke druge investicije). Pri tem lastnik delnice obdrži vse pravice, npr. prejema dividende. Lastnik lahko delnico tudi kadarkoli proda, zato mora imeti investitor vedno zadostna sredstva, da *zapre kratko pozicijo*, kar pomeni, da na trgu ponovno kupi delnico in jo vrne lastniku.

Opomba 1. Veliko nastajajočih trgov (angl. emerging markets) ne omogoča kratkih prodaj. Tudi v Sloveniji kratke prodaje niso dovoljene.

2 Načelo nearbitražnosti

Predpostavkam iz prejšnjega poglavja bomo v nadaljevanju dodali še temeljno predpostavko. Predpostavili bomo, da trg ne dovoljuje dobičkov brez tveganja izgube. Najprej si oglejmo naslednji primer.

Primer 1. Predpostavimo, da je trgovec A iz New Yorka dal ponudbo, po kateri bo čez eno leto pripravljen kupiti britanske funte po tečaju $d_A=1,58$ dolarja za en funt. Denimo, da je trgovec B iz Londona takoj pripravljen prodati britanske funte po tečaju $d_B=1,56$ dolarja za en funt. Predpostavimo še, da si lahko investitor dolarje izposodi po 4,5-odstotni letni efektivni obrestni meri in da lahko britanske funte investira v bančni depozit pri letni efektivni obrestni meri 4 odstotke.

Opazimo lahko, da v našem primeru obstaja možnost zaslužka brez tveganja izgube. Investitor si npr. lahko izposodi 10.000 dolarjev in jih s pomočjo trgovca B pretvori v 6.410,26 funta. Ta znesek za eno leto investira v bančni

depozit. Glavnica po enem letu obrestovanja naraste na 6410,26·1,04=6666,67 funta, ki jih s pomočjo trgovca A pretvori v 10533,34 dolarja. (Investitor mora v ta namen v začetku leta skleniti dogovor s trgovcem A .) Investitor po enem letu odplača kredit v znesku 10000·1,045=10450 dolarjev, kar pomeni, da mu je ostalo 83,34 dolarja. Ta znesek predstavlja iskani *netvegani dobiček*, saj je investitor ustvaril dobiček in pri tem ni tvegala izgube.

Pri določanju menjalnega tečaja je očitno naredil napako eden izmed trgovcev ali pa sta jo naredila celo oba. To napako lahko izkoristijo investitorji. Povečano povpraševanje po storitvah trgovcev A in B sčasoma povzroči, da trgovca ustrezno spremenita in prilagodita vrednosti d_A in/ali d_B ter tako izniči priložnosti za netvegane dobičke.

V nadaljevanju bomo zapisali formalno definicijo načela nearbitražnosti, še pred tem pa v ta namen vpeljimo nekaj novih pojmov.

Definicija 1. *Portfelj* je vektor $p_n=(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), y(n))$, ki ponazarja število delnic in obveznic, ki jih ima investitor v lasti med časoma $n-1$ in n . Zaporedju portfeljev $\{p_n\}$, kjer je $n=1, 2, 3, \dots$, pravimo *trgovska strategija* (angl. investment (trading) strategy). *Vrednost trgovske strategije* (ali *vrednost premoženja*) v času $n \geq 1$ je enaka

$$V(n) = \sum_{j=1}^m x_j(n) S_j(n) + y(n) A(n).$$

V času $n=0$ je *začetna vrednost premoženja* (angl. initial wealth) enaka

$$V(0) = \sum_{j=1}^m x_j(1) S_j(0) + y(1) A(0).$$

Definicija 2. Trgovska strategija je *samovzdrževalna* (angl. self-financing), če je portfelj, ki je konstruiran v času $n \geq 1$ in ki ga bo investitor obdržal do časa $n+1$, v celoti financiran z vrednostjo premoženja $V(n)$ v času n . To pomeni, da je

$$V(n) = \sum_{j=1}^m x_j(n+1) S_j(n) + y(n+1) A(n).$$

Trgovska strategija je torej samovzdrževalna, če je vrednost investitorjevega premoženja, tik preden v času n investitor oblikuje portfelj p_{n+1} (angl. rebalancing portfolio), enaka vrednosti tega premoženja takoj po oblikovanju portfelja p_{n+1} .

Opomba 2. Označimo z $\Delta S(n)$, $n=0, 1, 2, \dots$, spremembo cene delnice in z $\Delta A(n)$ spremembo cene obveznice med časoma n in $n+1$. Tako je $\Delta S(n)=S(n+1)-S(n)$ in $\Delta A(n)=A(n+1)-A(n)$. Naj bo $\Delta V(n)=V(n+1)-V(n)$. Za $n \geq 1$ je

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= \sum_{j=1}^m x_j(n+1) S_j(n+1) + y(n+1) A(n+1) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^m x_j(n) S_j(n) - y(n) A(n). \end{aligned}$$

Ugotovimo lahko, da je trgovska strategija samovzdrževalna natanko tedaj, ko je

$$\Delta V(n) = \sum_{j=1}^m x_j(n+1) \cdot \Delta S_j(n) + y(n+1) \cdot \Delta A(n).$$

Po predpostavki 1 so prihodnje cene delnic $S_1(n)$, $S_2(n)$, ..., $S_m(n)$ slučajne spremenljivke za vsak $n=1, 2, 3, \dots$, iz česar sledi, da investitor, ki oblikuje portfelj v času n , ne ve, kakšne bodo cene delnic za čase $t \geq n+1$. Seveda tudi ni dovoljeno trgovanje na podlagi notranjih informacij. Ta razmislek se odraža v naslednji definiciji.

Definicija 3. Trgovska strategija je *predvidljiva* (angl. predictable), če je za vsak $n=0, 1, 2, \dots$ portfelj $(x_1(n+1), x_2(n+1), \dots, x_m(n+1), y(n+1))$, ki je konstruiran v času n , odvisen samo od dogodkov na trgu do vključno časa n .

Primer 2. Naj bo

$$S_1(0) = 60, S_1(1) = 65,$$

$$S_2(0) = 20, S_2(1) = 15,$$

$$A(0) = 100, A(1) = 110.$$

Denimo, da investitor vloži $V(0)=100$ denarnih enot v portfelj, kjer je $x_1(1)=-12$, $x_2(1)=31$ in $y(1)=2$. V času $t=1$ je vrednost portfelja negativna:

$$V(1) = -12 \cdot 65 + 31 \cdot 15 + 2 \cdot 110 = -95.$$

Opisani portfelj bi bilo v praksi nemogoče sestaviti. Kot smo že omenili, mora imeti investitor vedno zadostna sredstva, da zapre kratko pozicijo – če je potrebno, s prodajo drugih sredstev v portfelju. To pomeni, da mora biti investitorjeva vrednost premoženja vseskozi nenegativna.

Definicija 4. Trgovska strategija je *dopustna* (angl. admissible), če je samovzdrževalna, predvidljiva in če je za vsak $n=0, 1, 2, \dots$ $V(n) \geq 0$ z verjetnostjo 1.

S pomočjo pravkar zapisanih definicij lahko zapišemo načelo nearbitražnosti (angl. no-arbitrage principle).

Predpostavka 4. Načelo nearbitražnosti: *Ne obstaja takšna dopustna strategija, da je $V(0)=0$ in $V(n)>0$ s pozitivno verjetnostjo za neki $n=1, 2, 3, \dots$*

Načelo nearbitražnosti torej pravi, da investitor ne more pričakovati netveganega dobička brez začetnega investicijskega vložka. Če obstaja portfelj, ki krši načelo nearbitražnosti, potem pravimo, da na trgu obstaja *arbitražna priložnost* (angl. arbitrage opportunity).

V praksi so arbitražne priložnosti redke. Če že obstajajo, so dobički v primerjavi z obsegom (denarnih) poslov zelo majhni, kar pomeni, da so te priložnosti za majhne investitorje praktično nedosegljive. Arbitražne priložnosti je tudi težko zaznati, hkrati pa trajajo zelo kratek čas. Aktivnosti investitorjev, imenovanih *arbitražniki* (angl. arbitrageurs), ki iščejo arbitražne priložnosti, namreč take priložnosti hitro izničijo.

Izključitev arbitražnih priložnosti v matematičnih modelih je dovolj dobra aproksimacija realnih dogajanj na finančnih trgih. V resnici predstavlja načelo nearbitražnosti najpomembnejšo in najplodnejšo predpostavko, ki je v finančni matematiki glavno orodje pri dokazovanju trditev in izrekov.

3 Vrednotenje terminskih pogodb

3.1 Nestandardizirane terminske pogodbe

Nestandardizirana terminska pogodba (angl. forward contract) je pogodba med dvema strankama o nakupu ali prodaji določenega sredstva po vnaprej dogovorjeni ceni in na točno določen dan v prihodnosti oz. čez točno določen čas. Ta čas imenujemo *čas do dospetja* ali *čas izpolnitve pogodbe* (angl. delivery time). Z 0 bomo označevali čas sklenitve pogodbe in s T čas izpolnitve pogodbe. Vnaprej dogovorjeno ceno, ki jo bomo imenovali *izpolnitvena cena* (angl. forward price), bomo označevali s $F(0, T)$.

Pravimo, da stranka, ki se v pogodbi zaveže, da bo sredstvo v času T prodala, *vstopi v pogodbo s kratko pozicijo* ali *zavzame kratko pozicijo* (angl. short forward position). Stranka, ki se zaveže, da bo sredstvo v času T kupila, *vstopi v pogodbo z dolgo pozicijo* ali *zavzame dolgo pozicijo* (angl. long forward position). S $S(t)$ označimo ceno sredstva, ki je predmet pogodbe, v času t . Če je $S(T) > F(0, T)$, potem to koristi stranki, ki zavzame dolgo pozicijo. Ta stranka lahko v času T kupi sredstvo za ceno $F(0, T)$ in jo proda po tržni ceni $S(T)$, s čimer ustvari dobiček $S(T) - F(0, T)$. Stranka, ki zavzame kratko pozicijo, utрпи v tem primeru izgubo v višini $F(0, T) - S(T)$. Če je $F(0, T) > S(T)$, utрпи izgubo v višini $F(0, T) - S(T)$ stranka z dolgo pozicijo, medtem ko stranka s kratko pozicijo ustvari dobiček $F(0, T) - S(T)$. Razliki $S(T) - F(0, T)$ bomo rekli *izplačilo* (angl. payoff) *ob dospetju za dolgo pozicijo*, razliki $F(0, T) - S(T)$ pa *izplačilo ob dospetju za kratko pozicijo*.

Če je pogodba sklenjena v času $t \leq T$, $t \neq 0$, bomo izpolnitveno ceno označili s $F(t, T)$. V tem primeru je izplačilo ob dospetju za dolgo pozicijo $S(T) - F(t, T)$ in za kratko pozicijo $F(t, T) - S(T)$.

3.1.1 Izpolnitvena cena

S pomočjo načela nearbitražnosti lahko najdemo formulo za določitev izpolnitvene cene. Pri tem se bomo omejili na sredstva, ki jih lahko hranimo z zanemarljivo majhnimi stroški in ki investitorju ne prinašajo dohodkov (razen morda kapitalskih dobičkov, ki izhajajo iz naključnih nihanj cene). Tipičen primer takšnih sredstev so delnice, pri katerih se ne izplačujejo dividende (stroške vodenja trgovanja računa zanemarimo). Iz tega razloga bomo sredstvo, ki je predmet pogodbe, od sedaj naprej imenovali delnica.

V nadaljevanju bomo privzeli, da je obrestovanje netveganih sredstev konformno in dekurzivno. Pri tem bomo z i označevali letno obrestno mero, za katero bomo predpostavili, da je na časovnem intervalu $[0, T]$ konstantna in enaka tako za primer posojanja sredstev kot za primer izposoja-

nja sredstev. Obrestno mero i imenujemo tudi *netvegana obrestna mera* (angl. risk-free interest rate). Spomnimo se, da glavnica G denarnih enot, ki jo investiramo v depozit v času 0, naraste v času t na $G \cdot r^t$ denarnih enot, kjer je $r=1+i$ letni dekurzivni obrestovalni faktor in je t čas, izražen v letih.

V dokazih trditev in izrekov bomo v nadaljevanju privzeli, da finančni trg zadošča vsem štirim predpostavkam, ki smo jih predstavili v prvem in drugem poglavju. Dodatno bomo predpostavili, da pri trgovanju ni transakcijskih stroškov in da lahko investitor kadarkoli vstopi v terminsko pogodbo (s kratko ali z dolgo pozicijo).

Izrek 1. Za delnico, pri kateri se ne izplačujejo dividende, je izpolnitvena cena enaka

$$F(0,T)=S(0) \cdot r^T.$$

Če je pogodba sklenjena v času $t \leq T$, potem je

$$F(t,T)=S(t) \cdot r^{T-t}.$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $F(0,T) > S(0) \cdot r^T$. Izdelajmo strategijo, ki bo v nasprotju z načelom nearbitražnosti. V času 0:

- si izposodimo $S(0)$ denarnih enot;
- kupimo delnico za ceno $S(0)$;
- vstopimo v (nestandardizirano terminsko) pogodbo s kratko pozicijo (se dogovorimo, da bomo v času T prodali delnico za ceno $F(0,T)$).

V času T :

- prodamo delnico za ceno $F(0,T)$;
- vrnemo kredit z obrestmi v znesku $S(0) \cdot r^T$.

V času T tako ustvarimo (netvegani) dobiček v znesku $F(0,T) - S(0) \cdot r^T > 0$, kar je v nasprotju z načelom nearbitražnosti.

Predpostavimo sedaj, da je $F(0,T) < S(0) \cdot r^T$. V času 0:

- kratko prodamo delnico za ceno $S(0)$;
- investiramo dobljeni znesek $S(0)$ v depozit;
- vstopimo v pogodbo z dolgo pozicijo in izpolnitveno ceno $F(0,T)$.

V času T :

- dvignemo privarčevani denar v znesku $S(0) \cdot r^T$;
- na osnovi terminske pogodbe kupimo delnico za ceno $F(0,T)$;
- delnico vrnemo lastniku (zaključimo kratko prodajo delnice).

S to strategijo ustvarimo dobiček $S(0) \cdot r^T - F(0,T) > 0$, kar je spet v nasprotju z načelom nearbitražnosti. Dokazali smo, da je $F(0,T) = S(0) \cdot r^T$.

Dokaz enakosti $F(t,T) = S(t) \cdot r^{T-t}$ je enak, le da nadomesti mo čas 0 s časom t , pri čemer je čas do dospelja enak $T-t$.

Primer 3. Naj bo $S(0)=40$ denarnih enot, čas do dospelja nestandardizirane terminske pogodbe naj bodo trije meseci in naj bo netvegana obrestna mera i enaka 5 odstotkov. Privzemimo, da so meseci enako dolgi in da je izpolnitvena cena enaka $F(0,T) = F\left(0, \frac{3}{12}\right) = 43$ denarnih enot.

Opazimo lahko, da je $F(0,T) > S(0) \cdot r^T$, saj je $S(0) \cdot r^T = 40 \cdot 1,05^{\frac{3}{12}} = 40,49$ denarnih enot. Izdelajmo strategijo, ki nas bo pripeljala do arbitražne priložnosti. V času 0:

- si izposodimo 40 denarnih enot za tri mesece pri 5-odstotni letni obrestni meri;
- kupimo delnico za ceno $S(0)=40$ denarnih enot;
- vstopimo v (nestandardizirano terminsko) pogodbo s kratko pozicijo, s časom izpolnitve čez tri mesece in z izpolnitveno ceno 43 denarnih enot.

Čez tri mesece:

- na osnovi terminske pogodbe prodamo delnico za 43 denarnih enot;
- vrnemo kredit z obrestmi v višini $40 \cdot 1,05^{\frac{3}{12}} = 40,49$ denarne enote.

Ustvarili smo (netvegani) dobiček v višini $43 - 40,49 = 2,51$ denarne enote.

Opomba 3. Za obdobja, ki so krajša od enega leta, v izreku 1 nadomestimo letni obrestovalni faktor z ustreznim konformnim (dekurzivnim) obrestovalnim faktorjem. Če je čas izražen v dnevih, vzamemo dnevni konformni faktor: $r_d = \sqrt[365]{r}$ (če leto ni prestopno).

Izrek 2. Izpolnitvena cena za delnico, pri kateri se izplačuje dividenda v višini div denarnih enot v času t , kjer je $0 < t < T$, je enaka

$$F(0,T) = (S(0) - r^{-t} \cdot div) \cdot r^T.$$

Za dokaz izreka 2, ki je podoben dokazu izreka 1, gl. Capinski in Zastawniak (2003, 129).

3.2 Standardizirane terminske pogodbe

Z nestandardiziranimi terminskimi pogodbami se običajno ne trguje na borzah. Tako je v praksi obveznosti iz nestandardizirane terminske pogodbe v času med sklenitvijo in izpolnitvijo pogodbe T težko prenesti na drugo osebo. Prav tako bo gotovo ena izmed strank v nestandardizirani terminski pogodbi v času T imela izgubo. Obstaja nevarnost, da ta pogodbeni stranka v času T ne zmore udeležiti obveznosti iz terminske pogodbe. Te pomanjkljivosti nestandardiziranih terminskih pogodb so odpravljene s *standardiziranimi terminskimi pogodbami* (angl. futures contracts).

Standardizirane terminske pogodbe so – tako kot nestandardizirane terminske pogodbe – pogodbe o nakupu ali prodaji določenega sredstva, ki ga bomo imenovali delnica, po vnaprej dogovorjeni ceni in čez določen čas T . Kot smo

to storili že v prvem poglavju, bomo predpostavili, da teče čas na diskretni način, kjer je fiksni časovni korak ponavadi en dan. Pri standardiziranih terminskih pogodbah določa trg poleg cen delnic $S(n)$ tudi t. i. *terminske cene* $f(n, T)$ (angl. futures prices) za vsak $n=0, 1, 2, \dots$, kjer je $n \leq T$. V času 0 so za $n=1, 2, 3, \dots$ te cene neznane in jih lahko obravnavamo kot slučajne spremenljivke.

Pri nestandardiziranih terminskih pogodbah je izplačan samo en znesek v višini $|S(T) - F(0, T)|$. Ta znesek je izplačan v času izpolnitve pogodbe T . Standardizirane terminske pogodbe vključujejo tudi denarni tok v času pred dospeljem pogodbe. V vsakem koraku $n=1, 2, 3, \dots$, kjer je $n \leq T$ bo stranka, ki zavzame dolgo pozicijo, prejela od stranke, ki zavzame kratko pozicijo, znesek v višini

$$f(n, T) - f(n-1, T),$$

če je ta znesek pozitiven, oz. ga bo plačala stranka s kratko pozicijo, če je ta znesek negativen. Pri tem mora biti zadoščeno naslednjima pogojema:

1. Za terminsko ceno $f(T, T)$ ob dospelju pogodbe velja, da je enaka ceni delnice, ki je predmet pogodbe: $f(T, T) = S(T)$.
2. V vsakem koraku $n=0, 1, 2, \dots$, kjer je $n \leq T$, je vrednost standardizirane terminske pogodbe enaka 0. To pomeni, da investitor ne plača premije, če v poljubnem časovnem koraku med časoma 0 in T vstopi v terminsko pogodbo (odpre pozicijo v terminski pogodbi) ali iz nje izstopi (v terminski pogodbi zapre pozicijo).

Opomba 4. S standardiziranimi terminskimi pogodbami se trguje na borzah. Pogosto se stranki iz standardizirane terminske pogodbe ne poznata, zato mora biti zagotovljen mehanizem, ki zagotavlja, da bodo obveznosti iz terminske pogodbe spoštovane. Zaradi zavarovanja pred možnostjo neplačila mora vsak investitor, ki vstopi v standardizirano terminsko pogodbo, ob vstopu plačati t. i. *začetno kritje* (angl. initial margin), ki ga kot zavarovanje obdrži klirinška hiša. V primeru dolge pozicije v vsakem časovnem koraku n (ponavadi enkrat na dan) prištejejo k začetnemu kritju znesek v višini $f(n, T) - f(n-1, T)$, če je znesek pozitiven, oz. ta znesek odštejejo, če je negativen. V primeru kratke pozicije je prištet oz. odštet nasprotni znesek $f(n-1, T) - f(n, T)$. Vsak znesek, ki predstavlja presežek začetnega kritja, lahko investitor dvigne. Če pa investitorjev depozit pri klirinški hiši pade pod določeno mejo, imenovano *vzdrževalno kritje* (angl. maintenance margin), pozove klirinška hiša investitorja (ponavadi prek borznega posrednika), da plača znesek, s katerim povrne depozit na raven začetnega kritja. Če investitorju ne uspe povrniti depozita do začetnega kritja, bo klirinška hiša (prek borznega posrednika) takoj »zaprla« njegovo pozicijo, kar pomeni, da bo borzni posrednik prodal pogodbo drugemu investitorju. S tem je odstranjena nevarnost neplačila pogodbenih obveznosti. Investitor lahko tudi sam kadarkoli, v poljubnem časovnem koraku, izstopi iz terminske pogodbe. V tem primeru mu ob izstopu klirinška hiša povrne depozit.

Primer 4. Naj bo začetno kritje 10 odstotkov in vzdrževalno kritje 5 odstotkov od terminskih cen. V tabeli je predstavljen scenarij spreminjanja terminskih cen $f(n, T)$. Stolpca »kritje 1« in »kritje 2« prikazujeta investitorjev depozit pri klirinški hiši ob začetku in ob koncu vsakega dne. Stolpec »plačilo« prikazuje investitorjeva vplačila (negativna števila) in izplačila (pozitivna števila).

n	$f(n, T)$	denarni tok	kritje 1	plačilo	kritje 2
0	140	odpiranje:	0	-14	14
1	138	-2	12	0	12
2	130	-8	4	-9	13
3	140	10	23	9	14
4	150	10	24	9	15
		zapiranje:	15	15	0
			skupaj:	10	

Na začetku (dan 0) investitor »odpre« dolgo pozicijo v terminski pogodbi in plača $140 - 0,1 = 14$ denarnih enot depozita. Prvi dan pade terminska cena za dve denarni enoti, kar odštejejo od depozita, ki sedaj znaša 12 denarnih enot. Drugi dan pade terminska cena za nadaljnjih 8 denarnih enot, ki jih odštejejo od depozita, ki znaša ob začetku dne 4 denarne enote. Ker je $4 < 130 \cdot 0,05 = 6,5$, pozove klirinška hiša investitorja, da povrne depozit na 10 odstotkov od trenutne terminske cene. Iz $130 \cdot 0,1 = 13$ sledi, da mora investitor vplačati 9 denarnih enot. Tretji dan naraste terminska cena za 10 enot, kar pomeni, da lahko investitor dvigne 9 denarnih enot. Ob koncu četrtega dne se investitor odloči, da bo »zaprl« svojo pozicijo v terminski pogodbi, zato dvigne znesek, ki predstavlja končno stanje depozita, tj. 15 denarnih enot. Opazimo lahko, da je vsota vseh investitorjevih vplačil in izplačil enaka prirastku terminske cene med dnevoma 0 in 4.

Opomba 5. Kot smo že omenili, so terminske cene $f(n, T)$ za $n \geq 1$ v času 0 neznane vrednosti. V nasprotju s tem je v času 0 terminska cena $f(0, T)$ znana. Izkaze se (Cox, Ingersoll in Ross 1981), da je takrat, ko je netvegana obrestna mera i na časovnem intervalu $[0, T]$ konstantna, izpolnitvena cena $F(0, T)$ nestandardizirane terminske pogodbe enaka terminski ceni $f(0, T)$. Torej:

$$F(0, T) = f(0, T).$$

Bralcu prepuščamo izziv, da skuša s pomočjo načela ne-arbitražnosti sam dokazati to enakost.

3.3 Vrednotenje nestandardiziranih terminskih pogodb

Ob sklenitvi (standardizirane in nestandardizirane) terminske pogodbe pogodbeni stranka drugi pogodbeni stranki ne plača provizije. Pravimo, da je vrednost terminske pogodbe ob sklenitvi pogodbe enaka 0. V prejšnjem

poglavju smo spoznali, da investitor ne plača provizije, če v poljubnem časovnem koraku odpre pozicijo v standardizirani terminski pogodbi ali če le-to zapre. Vrednost standardizirane terminske pogodbe je torej na vsakem časovnem koraku enaka 0. Ali lahko isto trdimo tudi za nestandardizirane terminske pogodbe?

S časom se cena delnice, ki je predmet nestandardizirane terminske pogodbe, spreminja in z njo se zaradi odsotnosti posrednika (borzni posrednik in klirinška hiša) spreminja tudi vrednost nestandardizirane terminske pogodbe. *Vrednost nestandardizirane terminske pogodbe* $C(t)$ v času t , kjer je $0 \leq t \leq T$, bomo definirali kot znesek, ki bi ga v času t investitor plačal pogodbeni stranki z dolgo pozicijo, če je ta znesek pozitiven, ali bi ga od nje prejel, če je znesek negativen, če bi v času t v pogodbi prevzel njeno (dolgo) pozicijo.

Vrednost terminske pogodbe $C(T)$ v času T je enaka izplačilu $S(T) - F(0, T)$ ob dospetju za dolgo pozicijo. Kot smo že ugotovili, je lahko ta vrednost pozitivna ali negativna ali pa je enaka 0. V nadaljevanju bomo zapisali predpis, s katerim bomo opisali vrednost nestandardizirane terminske pogodbe $C(t)$ v času t , kjer je $0 \leq t \leq T$, ob (sicer teoretični) predpostavki, da lahko investitor kadarkoli vstopi v nestandardizirano terminsko pogodbo. Pri tem bomo privzeli, da je čas izražen v dnevih (gl. opombo 3).

Izrek 3. Vrednost nestandardizirane terminske pogodbe, ki je bila sklenjena v času 0, je v času t , kjer je $0 \leq t \leq T$, enaka

$$C(t) = (F(t, T) - F(0, T)) \cdot r_d^{-(T-t)}.$$

Dokaz. Vrednost $C(t)$ je lahko negativna, pozitivna ali enaka 0. Naj bo najprej $C(t) < 0$. Vrednost $-C(t)$ lahko torej štejemo kot znesek, ki bi ga prejeli od stranke z dolgo pozicijo, ki je pogodbo sklenila v času 0, če bi v času t v pogodbi prevzeli njeno (dolgo) pozicijo. Predpostavimo še, da je $C(t) < (F(t, T) - F(0, T)) \cdot r_d^{-(T-t)}$. Konstruirajmo strategijo, ki nas bo pripeljala do nasprotja z načelom nearbitražnosti. V času t :

- vstopimo v (nestandardizirano terminsko) pogodbo z dolgo pozicijo z izpolnitveno ceno $F(0, T)$ (ker je $C(t) < 0$, pri vstopu prejmemo $-C(t)$ denarnih enot, ki jih investiramo v depozit);
- vstopimo v pogodbo (za isto delnico) s kratko pozicijo in z izpolnitveno ceno $F(t, T)$; ker je čas vstopa t v terminsko pogodbo tudi čas sklenitve pogodbe, pri vstopu stranki z dolgo pozicijo ne plačamo provizije (oz. je od nje ne prejmemo).

V času T :

- izvršimo pogodbo z dolgo pozicijo, kar pomeni, da kupimo delnico za ceno $F(0, T)$;
- izvršimo pogodbo s kratko pozicijo, kar pomeni, da prodamo delnico za ceno $F(t, T)$.

Ker znaša v času T depozit z obrestmi $-C(t) \cdot r_d^{T-t}$ je končno stanje na našem računu v času T enako znesku

$$F(t, T) - F(0, T) - C(t) \cdot r_d^{T-t}.$$

Ta znesek je pozitiven, saj je po predpostavki $(F(t, T) - F(0, T)) \cdot r_d^{-(T-t)} - C(t) > 0$. Prišli smo v nasprotje z načelom nearbitražnosti.

Ob predpostavki, da je $C(t) < 0$, naj bo sedaj $C(t) > (F(t, T) - F(0, T)) \cdot r_d^{-(T-t)}$. V času t :

- si izposodimo $-C(t)$ denarnih enot in vstopimo v pogodbo s kratko pozicijo in izpolnitveno ceno $F(0, T)$ (pri vstopu plačamo $-C(t)$ denarnih enot);
- brez stroškov vstopimo v pogodbo z dolgo pozicijo in z izpolnitveno ceno $F(t, T)$.

V času T :

- vrnemo izposojeni denar z obrestmi v višini $-C(t) \cdot r_d^{T-t}$;
- izvršimo obe pogodbi.

Končno stanje na našem računu je

$$\begin{aligned} & -(-C(t) \cdot r_d^{T-t}) + F(0, T) - F(t, T) = \\ & = F(0, T) - F(t, T) + C(t) \cdot r_d^{T-t}. \end{aligned}$$

Po predpostavki je ta znesek pozitiven, kar nas je spet pripeljalo do nasprotja z načelom nearbitražnosti.

Podobno poteka dokaz za primer, ko je $C(t) \geq 0$. Kot smo že omenili, lahko vrednost $C(t)$ štejemo kot znesek, ki bi ga v času t plačali stranki z dolgo pozicijo, ki je pogodbo sklenila v času 0, če bi želeli v času t v pogodbi prevzeti njeno pozicijo. Predpostavimo najprej, da je $C(t) < (F(t, T) - F(0, T)) \cdot r_d^{-(T-t)}$. V času t :

- si izposodimo $C(t)$ denarnih enot, da vstopimo v pogodbo z dolgo pozicijo in izpolnitveno ceno $F(0, T)$;
- brez stroškov vstopimo v pogodbo s kratko pozicijo in z izpolnitveno ceno $F(t, T)$.

V času T izvršimo obe pogodbi in z obrestmi vrnemo izposojeni znesek. Stanje na računu znaša $-C(t) \cdot r_d^{T-t} - F(0, T) + F(t, T) > 0$, kar je v nasprotju z načelom nearbitražnosti.

Ob predpostavki, da je $C(t) \geq 0$, naj bo $C(t) > (F(t, T) - F(0, T)) \cdot r_d^{-(T-t)}$. V času t :

- vstopimo v pogodbo s kratko pozicijo in z izpolnitveno ceno $F(0, T)$ ter zato prejmemo $C(t)$ denarnih enot, ki jih investiramo v depozit;
- vstopimo v pogodbo z dolgo pozicijo in z izpolnitveno ceno $F(t, T)$.

V času T izvršimo obe pogodbi, zato znaša stanje na računu

$$C(t) \cdot r_d^{T-t} + F(0, T) - F(t, T) > 0,$$

kar je v nasprotju z načelom nearbitražnosti.

Opazimo lahko, da je po izreku 3 $C(0)=0$ in $C(T)=S(T)-F(0,T)$.

Iz izreka 1 sledi, da za delnice, pri katerih se ne izplačujejo dividende, velja, da je

$$C(t) = (S(t) \cdot r_d^{T-t} - S(0) \cdot r_d^T) \cdot r_d^{-(T-t)} = S(t) - S(0) \cdot r_d^t.$$

Iz dobljene enakosti lahko sklepamo, da če bo rast cene delnice med časoma 0 in t enaka rasti cene netveganih sredstev, bo vrednost nestandardizirane terminske pogodbe v času t enaka 0. Če bo cena delnice v tem času rasla hitreje kot cena netveganih sredstev, bo vrednost $C(t)$ pozitivna, kar bo koristilo stranki, ki je vstopila v nestandardizirano terminsko pogodbo z dolgo pozicijo. V nasprotnem primeru bo imela korist stranka, ki je v pogodbi zavzela kratko pozicijo.

Sklep

Ugotovili smo (gl. izrek 1), da mora biti izpolnitvena cena terminske pogodbe v času sklenitve pogodbe enaka ceni delnice, ki jo na osnovi netvegane obrestne mere i naobrestimo iz časa sklenitve pogodbe na čas izpolnitve pogodbe T . V nasprotnem primeru se pojavi arbitražna priložnost.

S pomočjo načela nearbitražnosti smo analizirali tudi vrednost nestandardizirane terminske pogodbe v času t , ki smo jo definirali kot znesek, ki bi ga v času t investitor plačal pogodbeni stranki z dolgo pozicijo, če je ta znesek pozitiven, ali bi ga od nje prejel, če je znesek negativen, če bi v času t v pogodbi prevzel njeno (dolgo) pozicijo. Denimo, da je investitor A v času 0 vstopil v nestandardizirano terminsko pogodbo z dolgo pozicijo, s časom izpolnitve T , in da investitor B v času t , kjer je $0 < t < T$ vstopi v nestandardizirano terminsko pogodbo (za isto delnico) z dolgo pozicijo in z istim časom izpolnitve T . Predpostavimo, da se je izpolnitvena cena povečala, tj. $F(t,T) > F(0,T)$. To je dobra novica za investitorja A , saj bo v času T kupil delnico po ceni $F(0,T)$, medtem ko bo investitor B v času T kupil delnico po ceni $F(t,T)$. Investitor A bo s tem v času T pridobil $F(t,T)-F(0,T)$ denarnih enot v primerjavi z investitorjem B . Ker nas zanima vrednost

tega zneska v času t , moramo $F(t,T)-F(0,T)$ diskontirati (razobrestiti) s časa T na čas t . Ob upoštevanju, da je obrestovanje konformno in da čas merimo v dnevih, dobimo znesek

$$(F(t,T) - F(0,T)) \cdot r_d^{-(T-t)}.$$

Dobljeni znesek je enak vrednosti $C(t)$ nestandardizirane terminske pogodbe v času t . S tem intuitivnim razmislekom, ki je v dokazu izreka 3 podkrepjen s strogim »nearbitražnim« dokazom, smo ugotovili, da vrednost nestandardizirane terminske pogodbe v času t v resnici predstavlja znesek, ki ga na osnovi netvegane obrestne mere i diskontiramo s časa T na čas t in ki nam pove, koliko v času T pridobi (ali izgubi) investitor, ki je vstopil v nestandardizirano terminsko pogodbo v času 0 z dolgo pozicijo, v primerjavi z investitorjem, ki je vstopil v nestandardizirano terminsko pogodbo z dolgo pozicijo v času $t > 0$.

Na podoben način, kot smo storili za terminske pogodbe, lahko vrednotimo tudi druge izvedene finančne instrumente, npr. opcije. Bralcu v ta namen za nadaljnje branje priporočamo deli Capinskega in Zastawniaka (2003) ter Romana (2004) in svetujemo, da se najprej seznani z vrednotenjem opcij v preprostem modelu binomskega drevesa, ki je znan tudi kot Cox-Ross-Rubinsteinov model.

Literatura

1. Capinski M., Zastawniak T. (2003). *Mathematics for finance, an introduction to financial engineering*. London: Springer-Verlag.
2. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. (1981). *The relationship between forward prices and futures prices*. Journal of Financial Economics, 9: 321–346.
3. Hull J. (2003). *Options, futures and other derivatives*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
4. Roman S. (2004). *Introduction to the mathematics of finance: from risk management to options pricing*. New York: Springer-Verlag.



Janko Marovt, docent za matematiko, je od leta 2001 zaposlen na Ekonomsko-poslovni fakulteti v Mariboru. Leta 2000 je diplomiral iz matematike na Oddelku za matematiko in računalništvo na Univerzi v Mariboru, leta 2003 je magistriral in leta 2006 doktoriral ter postal doktor matematičnih znanosti. Sodeluje z Inštitutom za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani in je član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA), American mathematical society in International linear algebra society. Raziskovalno se ukvarja predvsem s funkcionalno analizo.

Janko Marovt, assistant professor of mathematics, has been employed at the Faculty of Economics and Business in Maribor since 2001. In 2000, he earned his degree in mathematics from the Department of Mathematics and Computer Science at the University of Maribor; he received his MA in 2003 and his Ph.D. in 2006, becoming a doctor of mathematical sciences. He collaborates with the Institute of mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana, and is a member of DMFA, AMS and ILAS. His research is focused mostly on functional analysis.