Eksponentne vragolije

Simon Čopar

Uvod

S funkcijami se pri matematiki nevede soočimo, še preden nam jih uradno predstavijo. Najbolj smo navajeni funkcij ene spremenljivke, ki preslikajo realno število v novo realno število in jih znamo lepo ponazoriti z grafom. Pomislimo na funkcije, sestavljene iz osnovnih aritmetičnih operacij, kot so: število množimo z 2 ali število kvadriramo. Polinomom, ki jih lahko sestavimo zgolj z osnovnimi aritmetičnimi operacijami, se v višjih razredih osnovne in kasneje tudi srednje šole, pridružijo še druge funkcije, ki jih najdemo na žepnem računalu. Te funkcije – trigonometrične funkcije, kot so sinus, kosinus, tangens, njihove inverzne funkcije ter eksponentna in logaritemska funkcija imenujemo tudi elementarne funkcije.

Ko rišemo grafe funkcij, smo omejeni praktično le z velikostjo papirja ter s svojo domišljijo, prav tako pa lahko v nedogled kombiniramo funkcije, ki jih imamo na voljo. Verjetno je marsikateri bralec v razvedrilo med urami matematike pritiskal po računalu in sestavljal funkcije, kot so $\log(\sin(x^2))$ ali x^x. Obstajajo še kakšne funkcije, ki jih z njim ne moremo izraziti?

V tem prispevku vas bom peljal po zaviti poti, polni nenavadnih funkcij, na katero me je v gimnazijskih časih zavedla radovednost o enačbi $2^x = x^2$. Ogledali si bomo izraze, ki zadevajo potenciranje, in medtem spoznali tudi, kako lahko s šolskim računalom izračunamo vrednosti funkcij, ki nimajo svojega gumba in jih tudi ne moremo sestaviti iz elementarnih funkcij.

Reševanje enačb

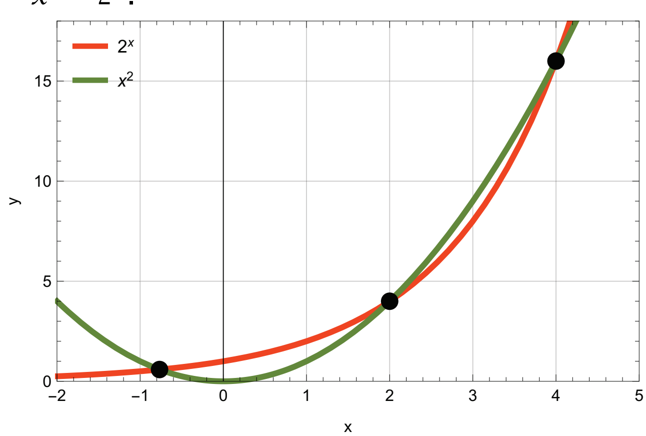
Najenostavnejša uporaba funkcij je kar vstavljanje. Če imamo funkcijo $f(x) = x^2$, ji lahko kot argument podamo npr. število $x = 2$ in dobimo vrednost $f(2) = 4$. Argument funkcije pa ni vedno znano število, običajno moramo za reševanje matematičnih problemov rešiti tudi kakšno enačbo. Grafično to pomeni iskanje presečišč dveh krivulj. Kadar rešujemo kvadratno enačbo $ax^2 + bx + c = 0$, iščemo presečišče parabole (leva stran) in vodoravne osi (desna stran). Za ta primer znamo s pomočjo znanega obrazca presečišči izračunati analitično:

- $x = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$.

V tem obrazcu nastopa funkcija kvadratnega korena, ki nam omogoči, da dobimo obe presečišči z vstavljanjem števil v računalo. Podobno npr. enačbo $2^x = 4$, če rešitve že ne uganemo, rešimo z uporabo dvojiškega logaritma $x = \ln_2 4 = 2$. Pri tem moramo seveda paziti, da presečišča sploh obstajajo.

Lahko vsako enačbo, v kateri nastopajo elementarne funkcije, rešimo z uporabo elementarnih funkcij? Na žalost je odgovor v večini primerov negativen. Oglejmo si igrivo enačbo, ki se vpraša, v katerem primeru nam menjava osnove in eksponenta ne spremeni rezultata

- $x^2 = 2^x$.

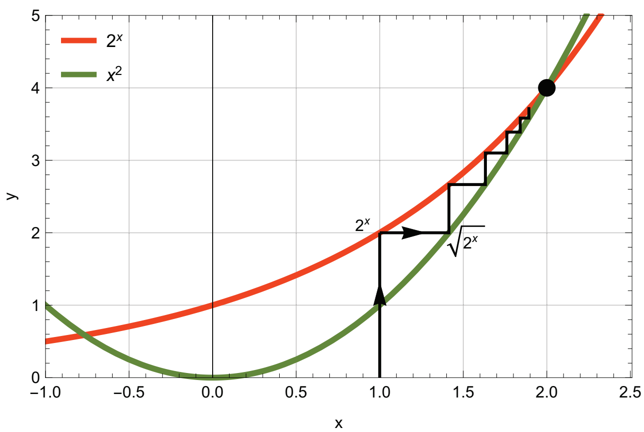


SLIKA 1.
Leva in desna stran enačbe $x^2 = 2^x$. Opazimo tri presečišča: pozitivni pri $x = 2$ in $x = 4$ ter eno negativno, ki ga bomo še izračunali.

Grafa funkcij na levi in desni strani enačaja (slika 1) nam namigneta, da lahko pričakujemo tri presečišča – eno pri negativnem x in dve pozitivni. Ena pozitivna rešitev, $x = 2$, je očitna, saj velja $2^2 = 2^2$. Drugo, $x = 4$, za ta primer lahko uganemo; če se še tako trudimo, pa spremenljivke x ne moremo izraziti. Največ, kar lahko naredimo, je, da enačbo korenimo in vzamemo pozitivno vrednost. Na desni strani še vedno nastopa naša neznanka, lahko pa dobljeni izraz razumemo kot preslikavo, ki vstavljeno vrednost na desni preslika v novo vrednost

- $x \mapsto \sqrt{2^x}$.

Sosledje operacij potenciranja in korenjenja na sliki prepoznamo kot sledenje od vrednosti x navpično do krivulje 2^x, pozitivni koren pa odgovori na vprašanje, kje vodoravnica skozi ravnokar dobljeno točko seka desno polovico krivulje x^2. Slika 2 nas hitro prepriča, da je dobljeno število bližje presečišču kot prejšnje.



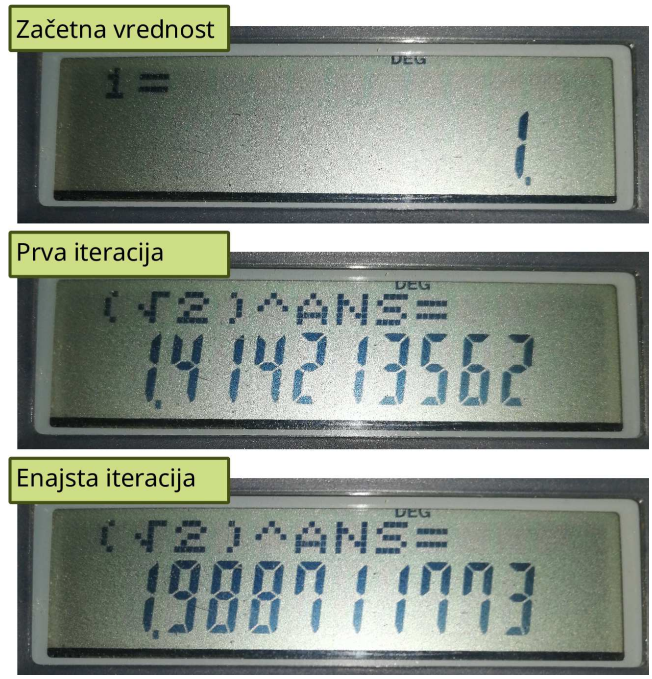
SLIKA 2.
Iterativno iskanje presečišča z začetno vrednostjo $x = 1$. Če sledimo izračunom, navpične črte izračunajo 2^x iz trenutnega približka, vodoravne pa rezultat korenijo. Po zadostnem številu ponovitev se poljubno približamo rešitvi $x = 2$.

Če postopek dovolj časa ponavljamo, dobimo poljubno dober približek rešitve – temu postopku rečemo tudi iteracija. S tem postopkom dobimo zaporedje izrazov

- $x \mapsto \sqrt{2}^x \mapsto \sqrt{2}^{\sqrt{2}^x} \mapsto \cdots \mapsto \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

Spomnimo še, da pri stolpu potenc izvajamo operacije od zgoraj navzdol, torej $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.

Z običajnim šolskim računalom, ki dovoljuje vnos izrazov, lahko rezultat dobimo na zelo preprost način z gumbom $\boxed{\text{Ans}}$, ki ponazarja rezultat prejšnjega računa. Vstavimo začetni približek, npr. $x = 1$, pritisnemo $\boxed{=}$, vpišemo zgornjo enačbo z $\boxed{\text{Ans}}$ namesto x ter pritiskamo enačaj, kot kaže slika 3, dokler se številke ne spreminjajo samo še na decimalnih mestih, ki nas ne zanimajo več. Tabela 1 prikazuje, kako se vrednosti približujejo rešitvi $x = 2$.



SLIKA 3.
Iteracija z računalom. Prvi korak si zapomni začetno število $x = 1$ kot prejšnji rezultat, na katerega se potem sklicuje $\boxed{\text{Ans}}$. Z nekaj pritiski na enačaj dobimo poljubno natančen rezultat.

Podobno lahko s slike vidimo, da, če vzamemo negativni kvadratni koren, iščemo presečišče z levo stranjo parabole, s čimer najdemo skrivnostno negativno rešitev

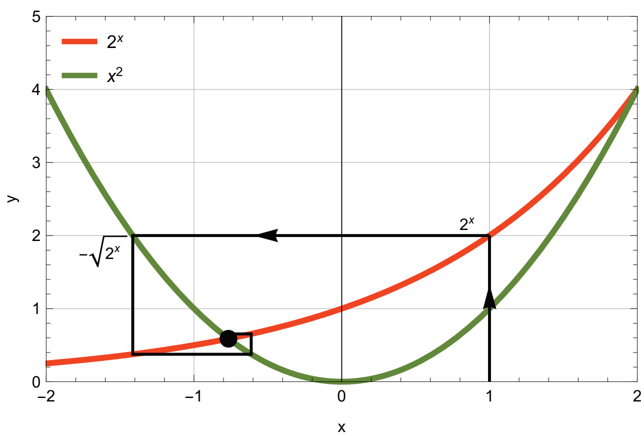
- $x \mapsto -\sqrt{2}^x \mapsto -\sqrt{2}^{-\sqrt{2}^x} \mapsto \cdots \mapsto -\sqrt{1/2}^{\sqrt{1/2}^{\sqrt{1/2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

Uporabili smo še dejstvo, da minusi v potenci pomenijo obratne vrednosti osnove, kar porabi vse minuse

iteracija	$x \to \sqrt{2}^x$	$x \to \sqrt{1/2}^x$	$x \to 1{,}5^x$
1	1,414213562373	0,707106781187	1,500000000000
2	1,632526919438	0,782654027356	1,837117307087
3	1,760839555880	0,762427988549	2,106203352149
4	1,840910869291	0,767791240292	2,349005318612
5	1,892712696829	0,766365425098	2,592025704908
6	1,926999701847	0,766744218071	2,860441497461
7	1,950034773806	0,766643566773	3,189324761899
8	1,965664886517	0,766670310130	3,644283987905
9	1,976341754410	0,766663204247	4,382546732246
10	1,983668399304	0,766665092319	5,911914873331
50	1,999999993049	0,766664695962	napaka
∞	2,000000000000	0,766664695962	/

TABELA 1.
Vmesni rezultati iteracije potenciranja za tri različne osnove. Prvi dve konvergirata k vrednostima funkcije $T(\sqrt{2})$ ter $T(\sqrt{1/2})$, tretja pa ne konvergira.

razen tistega spredaj. V drugem stolpcu tabele 1 najdemo zaporedne vrednosti te iteracije brez sprednjega minusa, začneši s približkom $x = 1$.



SLIKA 4.
Iteracija z začetne vrednosti $x = 1$ z negativnim korenom, $x \to -\sqrt{2}^x$, nas privede do negativnega presečišča.

Stolpi potenc

Opazimo, da smo v obeh primerih računali vrednost neskončnega stolpa enakih potenc. Namesto $\sqrt{2}$ ali $\sqrt{1/2}$ bi lahko vstavili tudi druga števila, zato si kar predpišimo funkcijo T, ki dano število postavi v neskončni stolp potenc

- $T(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

Vsaj ena točka te funkcije je očitna na pamet: $T(1) = 1$. Iteracijo lahko na računalu poskusimo s poljubnim x. Po nekaj poskusih opazimo, da nam pri prevelikih začetnih številih, npr. za število $x = 1{,}5$ v 3. stolpcu tabele 1, števila pobegnejo v neskončnost. Slika 5 prikazuje graf funkcije $T(x)$ z označenima vrednostma, ki smo ju potrebovali za izračun presečišč.

Katero je pa največje število, ki ga še lahko vstavimo v naš stolp potenc, da se iteracija še vedno ustavi? Za ta odgovor si moramo ogledati še eno sorodno funkcijo.

Lambertova funkcija

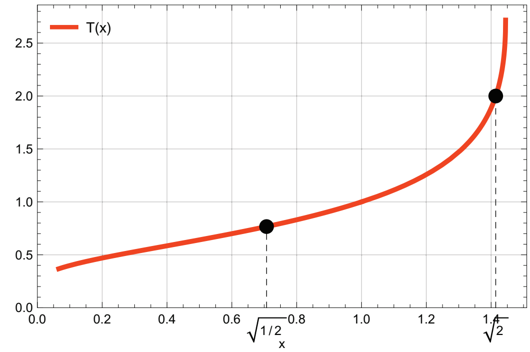
Pobližje si oglejmo funkcijo

- $f(x) = xe^x$,

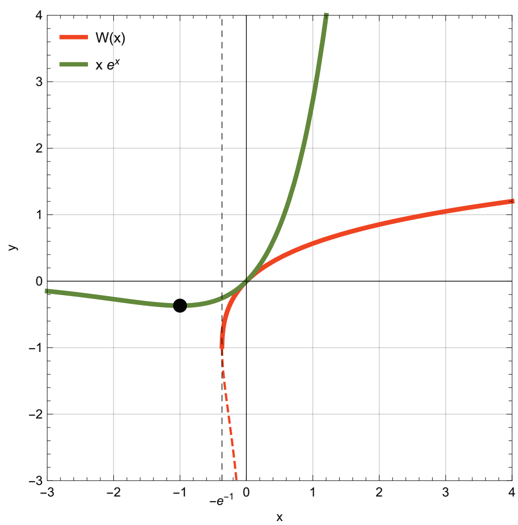
kjer je $e \approx 2{,}71828$ osnova naravnega logaritma. Želimo poiskati inverz te funkcije oz. izraziti y iz enačbe

- $x = f(y) = ye^y$.

Izkaže se, da tega ne moremo storiti zgolj z elementarnimi funkcijami. Ker se reševanje te enačbe



SLIKA 5.
Graf funkcije $T(x)$, ki jo izračunamo z neskončno iteracijo potenciranja.



SLIKA 6.
Graf funkcije $f(x) = xe^x$ ter njenega inverza, Lambertove funkcije $W(x)$. Črtkani del ne pride v poštev, saj funkcija ne more imeti dveh vrednosti.

v znanosti pogosto pojavi, so matematiki funkciji, ki enačbo reši, dali ime in oznako, četudi ni dobila svojega gumba na računalih. Vpeljemo Lambertovo funkcijo W, ki po definiciji reši zgornjo enačbo

- $y = W(x)$.

Ta funkcija nam pomaga v fiziki pri izpeljavi Wienovega zakona, pri obravnavi vezij, ki vsebujejo diode, in še kje.

Ker je Lambertova funkcija inverz funkcije $f(x)$, dobimo njen graf, prikazan na sliki 6, z zrcaljenjem grafa $f(x)$ preko diagonale. Pri tem izberemo le zgornjo vejo rešitve, podobno kot to storimo pri kvadratnem korenu. Opazimo, da funkcija nima rešitve pod določeno vrednostjo. Ta najnižja vrednost $x_{\min}$, ki jo še smemo vstaviti, je enaka vrednosti funkcije $f(x)$ v njenem minimumu. Funkcija $f(x)$ ima minimum pri $x = -1$, njena vrednost v tej točki pa je $x_{\min} = f(-1) = -e^{-1}$. Bralci, ki poznajo odvod, lahko to trditev tudi sami preizkusijo, ostale pa lahko o tem prepriča slika 6.

Lambertovo funkcijo bomo sedaj uporabili za izračun lastnosti stolpov potenc. Kot je veljalo za osnovo $\sqrt{2}$, velja za funkcijo $T(x)$ v splošnem zveza

- $T(x) = x^{T(x)}$.

Če želimo uporabiti Lambertovo funkcijo, moramo enačbo preoblikovati v obliko $f(\square) = \square e^{\square} = \blacksquare$. Pomaga nam zveza $x = e^{\ln x}$, kjer je $\ln x$ naravni logaritem:

- $T(x)x^{-T(x)} = 1$
- $T(x)e^{-\ln x\, T(x)} = 1$.

Da bo v potenci stal isti izraz kot pred njo, množimo enačbo z $-\ln x$:

- $-\ln x\, T(x)e^{-\ln x\, T(x)} = -\ln x$.

Na levi prepoznamo $f(\square) = f(-\ln x\, T(x))$, od koder lahko z Lambertovo funkcijo izluščimo

- $-\ln x\, T(x) = W(-\ln x)$,

oz. v končni obliki

- $T(x) = -\dfrac{W(-\ln x)}{\ln x}$.

Če imamo na voljo funkcijo W, lahko izračunamo vrednosti neskončnih stolpov potenc tudi na ta način. V računalniškem programu Mathematica jo npr. najdemo pod imenom `ProductLog`, v programu Maple pa pod imenom `LambertW`.

Izvemo pa še nekaj več. Ker je minimalna vrednost, ki jo še dovoljuje funkcija W, enaka $-e^{-1}$, dobimo pogoj za maksimalno vrednost, ki jo smemo dati v neskončen stolp potenc:

- $x_{\max} = e^{1/e} \approx 1{,}44467$.

To ni veliko več od $\sqrt{2}$, ki smo ga vstavljali za rešitev enačbe $2^x = x^2$, ter manj od 1,5, za katerega smo videli, da iteracija uide v neskončnost.

Posplošitve

Funkciji 2^x in x^2 sta se na pozitivnih številih sekali dvakrat: enkrat pri $x = 2$, ki je bil tudi rezultat naše iteracije, in enkrat pri $x = 4$. Za konec si vprašanje še posplošimo na splošno osnovo a,

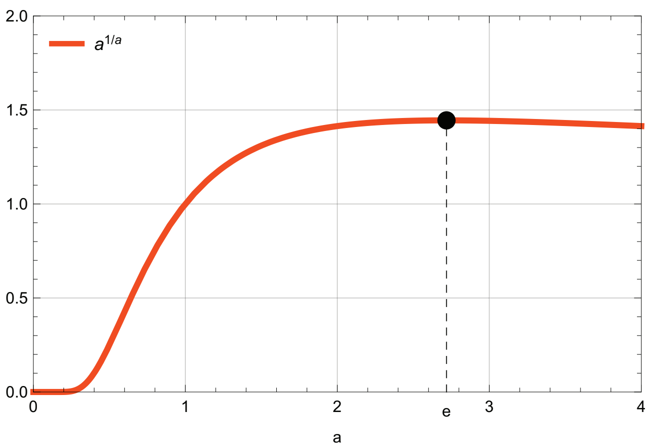
- $x^a = a^x$,

ki jo na podoben način lahko obrnemo v iteracijski postopek

- $x \to (a^{1/a})^x$

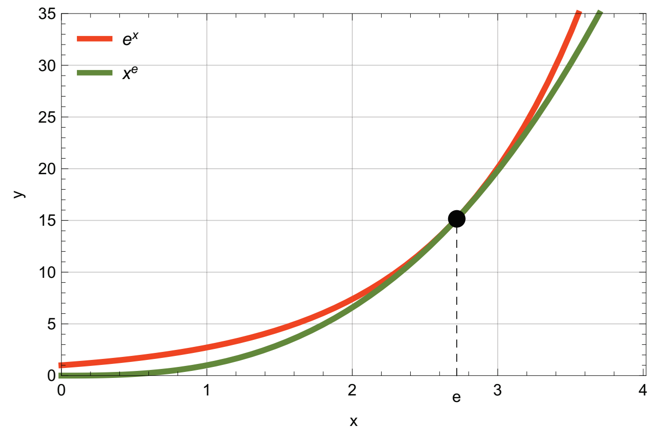
oziroma

- $x_L = T(a^{1/a})$.

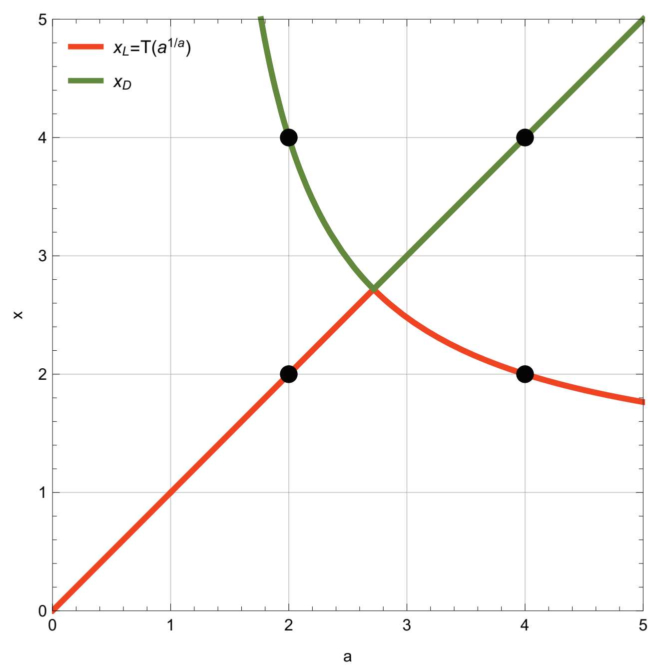


SLIKA 7.
Graf funkcije $a^{1/a}$. Maksimum ima pri $a = e$.

Pri tem smo označili rešitev z x_L, ker ta iteracija vedno vodi le do levega izmed obeh pozitivnih presečišč, tako kot se je to zgodilo na sliki 2. Funkcija $a^{1/a}$, ki nastopa v argumentu naše funkcije (slika 7), ima maksimum pri $a = e$, kjer ravno dosežemo zgornjo mejo definicijskega območja T, za katerega smo pokazali, da je pri $e^{1/e}$. Za manjše vrednosti, $a < e$, nam bo ta funkcija dala le trivialno rešitev. Kot smo videli na sliki 2, je prvo pozitivno presečišče



SLIKA 8.
Grafa funkcij e^x in x^e so ne sekata dvakrat, temveč se le dotakneta.



SLIKA 9.
Levo in desno pozitivno presečišče krivulj a^x in x^a. Zaradi simetrije problema desne rešitve pri $a < e$ ustrezajo zrcaljenju leve rešitve pri $a > e$. Označeni sta rešitvi pri $a = 2$, ki znašata $x_L = 2$ in $x_D = 4$, ter enaki rešitvi pri $a = 4$.

pri $x_L = a$. Pri $a = e$ se funkciji a^x in x^a ne sekata dvakrat, temveč se le dotakneta, kot kaže slika 8.

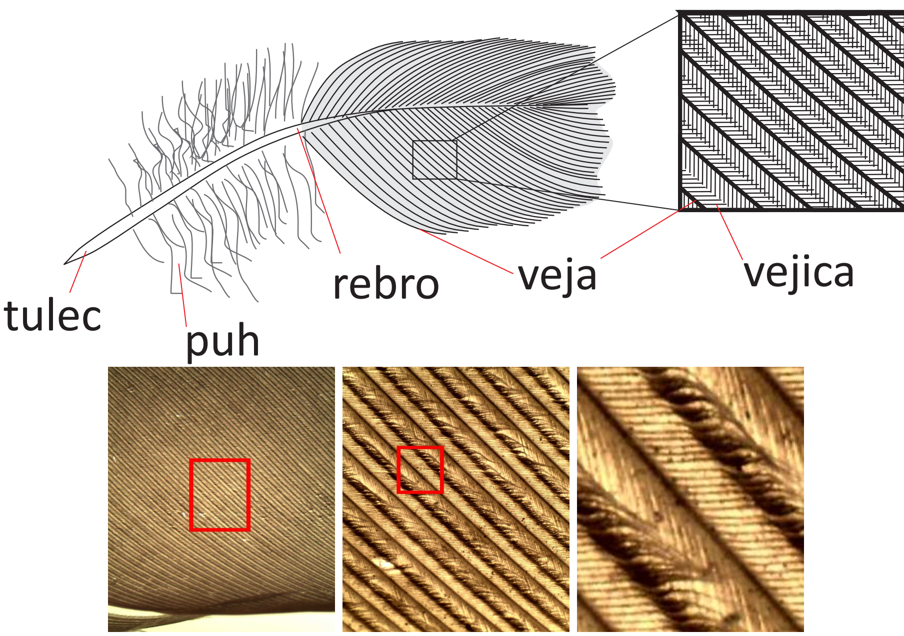
Za $a > e$ presečišči zamenjata vlogi in nam iteracijski postopek da drugo, zanimivejšo rešitev. Hkrati opazimo, da sta v enačbi $a^x = x^a$ spremenljivki x in a zamenljivi. To pomeni, da lahko z zrcaljenjem rešitev za $a > e$ dobimo drugo presečišče tudi za $a < e$, kjer bi sicer z iteracijo dobili le $x_L = a$. Slika 9 prikazuje rešitev, ki jo dobimo z iteracijo $x_L = T(a^{1/a})$, ter njeno zrcalno sliko, ki nam pomaga določiti x_D. To nam vsaj grafično pokaže vejo rešitve, ki vsebuje $x_D = 4$ s slike 1.

Pozorni bralec bo opazil, da nismo ničesar rekli o spodnji meji definicijskega območja funkcije $T(x)$. Več o tem si lahko preberete v viru [1]. Prav tako se nismo posvečali analitičnemu izrazu za desno rešitev x_D, za katerega bi potrebovali spodnjo, črtkano vejo inverza funkcije $f(x)$ s slike 6. Te ne dobimo z neskončno iteracijo potenciranja temveč z neskončno iteracijo logaritmiranja.

Iteracija je le ena izmed mnogih numeričnih metod za reševanje enačb in s tem za izračun večjega nabora funkcij. Uporaba gumba $\boxed{\text{Ans}}$ nas reši pred stalnim ročnim vstavljanjem prejšnjega približka v računalo. Na prvi pogled se zdi, da je iteracija manj natančna kot računanje z vgrajenimi funkcijami, saj delamo s približki. Zavedati pa se moramo, da se izračun vseh funkcij na koncu prevede na zaporedje seštevanj in množenj. Žepna računala in računalniki vedno vrnejo le približen rezultat z vnaprej znanim številom decimalnih mest. Tudi pri pisnem deljenju števil izvajamo zaporedje seštevanj, odštevanj in množenj, postopek pa ustavimo, ko smo z natančnostjo zadovoljni. Ločnica med elementarnimi in »specialnimi« funkcijami, kamor bi lahko šteli Lambertovo funkcijo in neskončni stolp potenc, leži torej le v dogovoru ter morda v obstoju vnaprej pripravljenih gumbov na žepnem računalu.

Literatura

[1] Luca Moroni, *The strange properties of the infinite power tower*, 2019. `arXiv:1908.05559 [math.HO]`.



SLIKA 3 K PRISPEVKU NARAVNA UKLONSKA MREŽICA.
Mikroskopska slika peresa v različnih povečavah (zgoraj). Shematski prikaz sestave peresa (spodaj).