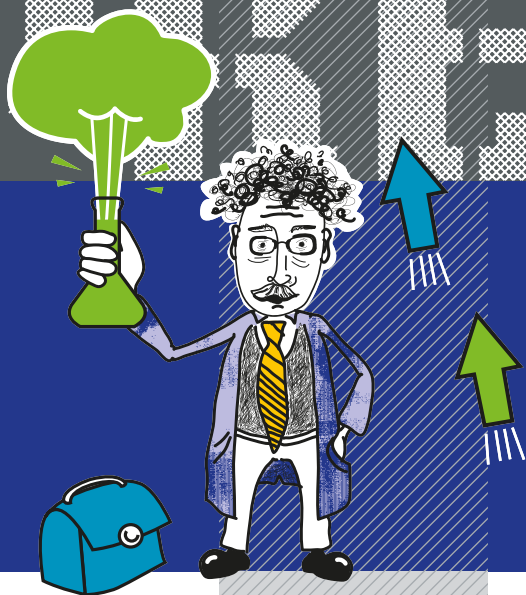




PRESEK



- ZNANO IN MANJ ZNANO
O ŠTEVILU π
- BOHROVA DEDIŠČINA
- NARAVNO SVETLIKANJE NEBA
- DOMINANTNO ŠTEVILO

ISSN 0351-6652



9 770351 665043

Optimalno brušenje dragih kamnov



→ Brusilci diamantov in drugih dragih kamnov so pri svojem zahtevnem delu soočeni z nasprotujočima si zahtevama: s kamna morajo z brušenjem odstraniti vse nepravilnosti, pri tem pa mora obrušen kamen ostati čim težji. Pri diamantih so odločitve lažje, ker je te običajno treba obrusiti v vnaprej predpisano obliko. Pri drugih dragih kamnih, npr. pri rubinih in safirjih, pa je to veliko težje, ker se smejo oblikovati na stotine različnih načinov. Matematiki so s pomočjo geometrije, analize v več spremenljivkah in optimizacijskih tehnik uspeli razviti postopke za izdelavo natančnih načrtov, ki hkrati maksimizirajo sijaj in tudi izplen obrušenih kamnov.

Algoritmi skušajo predvideti končni izdelek kot sestavni del neobrušenega kamna. Možnih je neskončno mnogo kandidatov, leg in orientacij, zato ima maksimizacijski problem zelo veliko število spremenljivk, ki jih povezuje neskončno omejitvev. Takšne probleme znamo rešiti s posebno tehniko, ki ji pravimo polneskončna optimizacija. Zelo izkušeni brusilci uspejo po občutku izdelati umetnine, ki tehtajo približno tretjino teže surovega kamna. Avtomatizirani algoritmi pa izplen povečajo nad 40%, kar je, glede na vrednost dragih kamnov, izjemna izboljšava. Če bi parafrazirali Marilyn Monroe, bi lahko rekli, da je polneskončna optimizacija dekletova (ali fantova) najboljša prijateljica.

Več o tej temi lahko preberete v reviji SIAM News, kjer so oktobra 2008 objavili članek Karla-Heinza Küferja, Oliverja Steina in Antona Winterfelda *A Deterministic Approach to Gemstone Cutting*.

× × ×



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 40, šolsko leto 2012/2013, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2012/2013 je za posamezne naročnike 16,69 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Tehnična urednica Tadeja Šekoranja

Oblikovanje in ilustracija Polona Šterk Košir

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1500 izvodov

© 2013 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1890

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevi naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Optimalno brušenje dragih kamnov

MATEMATIKA

- 4-8** Znano in manj znano o številu π
(Irena Kosi – Ulbl)

FIZIKA

- 9-12** Bohrova dediščina
(Janez Strnad)
- 12-13** Poizkuševalnica v kuhinji –
Obrnjena vodna ura – Odgovor naloge
(Mojca Čepič in Ana G. Blagotinšek)
- 14** Poizkuševalnica v kuhinji – Pločevinka
(Mojca Čepič)
- 14** Razmisli in poskusi
(Mitja Rosina)

ASTRONOMIJA

- 21-25** Naravno svetlikanje neba
(Matic Smrekar)
- 20** Astronomski tabor Vegova 2013
- 20** Tabor SMART 2013

RAČUNALNIŠTVO

- 26-29** Dominantno število
(Polona Pavlič)

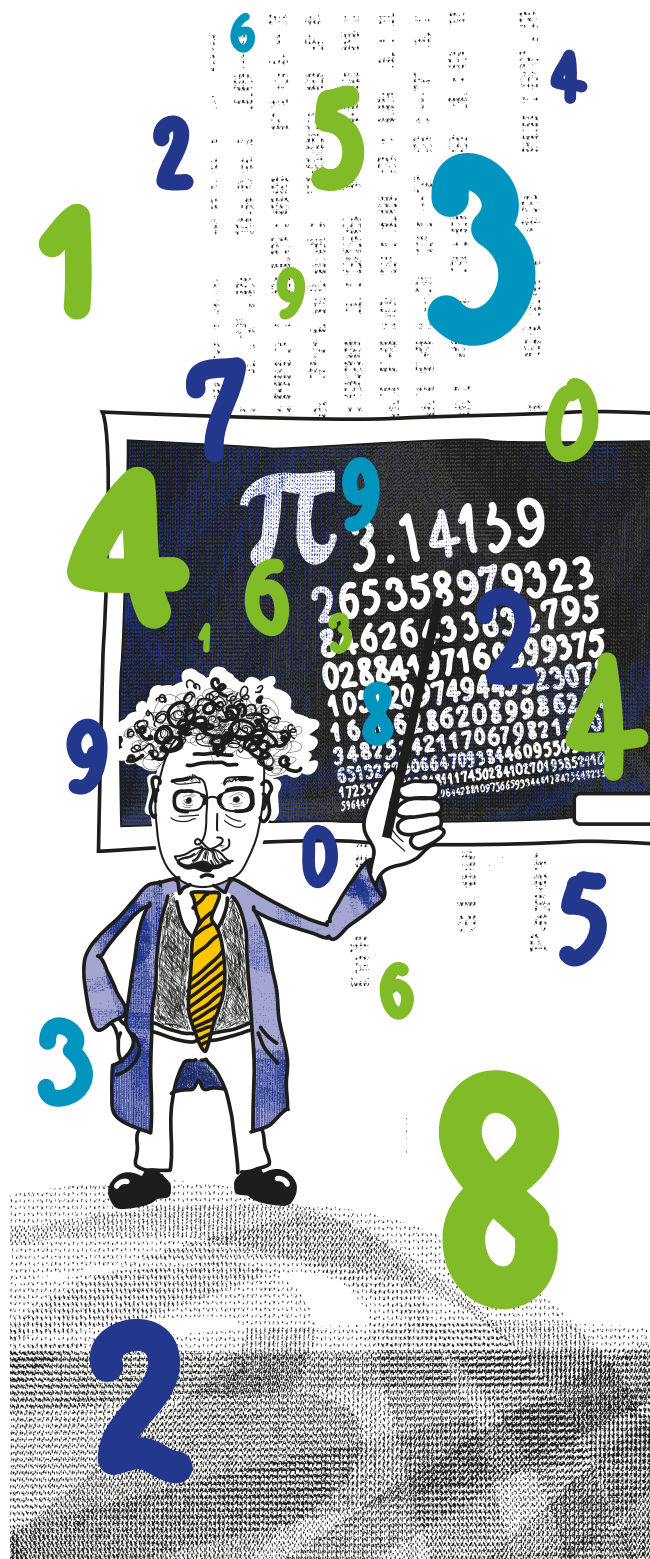
RAZVEDRILO

- 31** Naravoslovna fotografija –
Totalni odboj
(Aleš Mohorič)
- 16-17** Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 40/3
(Marko Bokalič)
- 8,12** Barvni sudoku

TEKMOVANJA

- 15,18** 32. tekmovanje iz znanja fizike
za Stefanovo priznanje
(Barbara Rovšek)
- 19** 43. mednarodna fizikalna olimpijada
v Talinu in Tartuju, Estonija
(Ciril Dominko)
- priloga** 3. tekmovanje v znanju astronomije za
učence osnovnih šol – šolsko tekmovanje
- priloga** 3. tekmovanje v znanju astronomije za dijake
srednjih šol – šolsko tekmovanje
- priloga** 3. tekmovanje v znanju astronomije za
učence osnovnih šol – državno tekmovanje
- priloga** 3. tekmovanje v znanju astronomije za dijake
srednjih šol – državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Večerni pogled proti vzhodu odkriva rdeče oblake, ki jih je živo obarvalo za hrbtom zahajoče Sonce. Sončna svetloba je bela, kar pomeni, da jo sestavljajo vse mavrične barve. Sonce je na videz belo, če ga opazujemo opoldne (zaradi zaščite oči, tega ne naredite zares, rajši opazujte svetlobo na belem papirju). Proti večeru se Sonce spusti nizko proti obzorju in pot žarkov skozi atmosfero se podaljša. V atmosferi se sončna svetloba sipa. Sipanje pomeni, da del svetlobe, ki gre mimo delcev v zraku, spremeni smer. Kako močno se svetloba sipa, je odvisno od njene valovne dolžine. Modra svetloba se siplje močneje in zato je nebo modro. Zaradi istega razloga je neposredna večerna sončna svetloba rdeča, saj v prvotno beli barvi manjka več modre.



Znano in manj znano o številu π



IRENA KOSI – ULBL

→ Verjetno je prvo srečanje večine osnovnošolcev s številom π povezano z računanjem obsega in plosčine kroga. Uporaba števila π se nato razširi na računanje površin in prostornin geometrijskih teles. Nadaljnje poglobljanje v matematiko pa razkrije prav presenetljivo pogosto pojavljanje tega števila. Po pričakovanjih srečamo število π na najrazličnejših področjih našega življenja: radijski, televizijski, telefonski signali, navigacija in številna druga področja tehnike, kvantna mehanika, splošna teorija relativnosti.

In kje se zgodba o številu π sploh začne?

Zgodovina

Število π je zelo staro število. Zgodovinarji ocenjujejo, da so matematiki že 2000 let pr. n. št. vedeli, da je razmerje med obsegom in premerom kroga enako za vse kroge. Ugotovitev je temeljila na ideji o proporcionalnosti: Če podvojimo razdaljo „čez krog“, podvojimo tudi razdaljo „okoli kroga“. V današnjem algebralnem zapisu imamo torej formulo

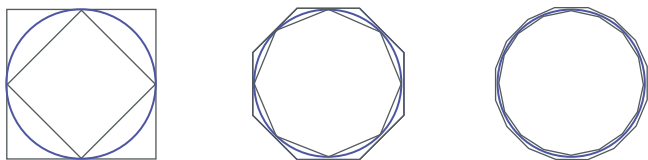
$$\pi = \frac{\text{obseg}}{\text{premer}}$$

Moč tega odkritja je bila velika. Kroge so ljudje namreč opazili povsod: v Soncu, Luni, v človekovem očesu, v različnih predmetih, ki jih je naredil človek, v osnovnih religioznih ritualih. Ostajalo pa je nerešeno vprašanje – kolikšna je numerična vrednost števila π ?

Stari Egipčani in Babilonci so vedeli za obstoj „konstante π “, vendar vrednosti števila π niso poznali prav posebej natančno. Babilonci so za število π uporabljali približek $3\frac{1}{8}$ (3,125), stari Egipčani pa vrednost $4 \cdot (8/9)^2$ (3,1605), s katero je bilo nekoliko težje računati. V sakralnih knjigah Jainov (indijska religiozna sekta) najdemo za približek števila π število $\sqrt{10} = 3,16227766\dots$

Grki v antiki so za število π uporabljali približek $\frac{22}{7} = 3,142857143\dots$, v starih kitajskih zapisih pa je za približek števila π naveden ulomek $\frac{355}{113} = 3,14159292\dots$, kar je presenetljiva stopnja natančnosti. To vemo danes, ko lahko izračunamo veliko decimalnih mest števila π .

V petem in četrtem stoletju pred našim štetjem so grški matematiki za določanje približne vrednosti števila π predlagali idejo računanja obsegov krogu očrtanih in včrtanih pravilnih večkotnikov. Ugotovili so namreč, da je obseg krogu očrtanega pravilnega večkotnika večji, obseg krogu včrtanega pravilnega večkotnika pa manjši od obsega tega kroga (slika 1). Z naraščanjem števila stranic krogu očrtanega oz. včrtanega pravilnega večkotnika se obsega obeh likov poljubno približata, zato se približujeta tudi obsegu kroga. S to idejo se je veliko ukvarjal Arhimed, ko je izračunal obsege krogu včrtanega in očrtanega pravilnega 6-, 12-, 24-, 48- in 96-kotnika. Na osnovi rezultatov je ugotovil, da je število π med številoma $3\frac{1137}{8069}$ in $3\frac{2669}{18693}$, to je med vrednostima 3,1409097 in 3,1427807.



SLIKA 1.

Geometrijski prikaz metode krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov za določevanje približkov števila π za 4-, 8- in 12-kotnik.

Ptolomej, ki ni znan le po odkritju heliocentričnega planetarnega sistema, ampak je bil tudi dober matematik, je z izračunom obsega krogu včrtanega pravilnega 720-kotnika dobil za približek števila π ulomek $\frac{377}{120} = 3,141666\dots$. Naslednji korak je bil narejen 15 stoletij kasneje: francoski matematik

Viète je z računanjem obsega včrtanega in očrtanega pravilnega $3 \cdot 2^{17} = 393216$ -kotnika prišel do ocene

$$\blacksquare \quad 3,1415926535 < \pi < 3,1415926537,$$

kar pomeni, da je izračunal vrednost števila π na 10 decimalnih mest natančno. Leta 1579 je v delu *Knjiga matematičnih smernic* število π izrazil tudi kot neskončni produkt:

$$\blacksquare \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{k=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^k} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \cdots =$$

$$\blacksquare \quad = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdots$$

Nizozemski matematik Adrian van Roomen je z omejeno metodo izračunal približek števila π na 17 decimalnih mest natančno (uporabil je krog včrtani pravilni 2^{30} -kotnik). Zadnji, ki se je poslužil Arhimedove ideje, je bil nemški matematik Ludolf van Ceulen. Za računanje obsegov krogu včrtanih pravilnih večkotnikov je porabil 10 let; število π pa je zaokrožil na 20 decimalnih mest natančno. Svoje delo je zaključil z besedami: „Kdor želi, naj nadaljuje“. Pa je nadaljeval kar sam in pridobil celo 35 natančnih decimalnih mest števila π . Po njem se število π tudi imenuje: Ludolfovo število.

Še en zanimiv prikaz števila π je konec 17. stoletja predstavil matematik John Wallis, ki je na desni strani izraza zapisal neskončni produkt:

$$\blacksquare \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots,$$

v katerem je jasno izražen vzorec sodih in lihih števil v števcih oziroma imenovalcih faktorjev.

Angleški matematik Abraham Sharp je na prehodu iz 17. v 18. stoletje opazil, da iz prej omenjene vrste za funkcijo $\arctg x$ pri $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dobimo

$$\blacksquare \quad \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \cdots \right).$$

Z upoštevanjem le prvih šestih členov v tej vrsti dobimo približek za število π z napako, manjšo od 0,0005.

Simbol π je v našem modernem smislu prvič uporabil William Jones, prijatelj Isaaca Newtona, ko je leta 1706 zapisal: „Razmerje med premerom in obsegom kroga je enako razmerju med številom 1 in številom



$$\rightarrow \blacksquare \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} \right) - \dots = 3,14159\dots = \pi.$$

Zakaj število π označuje ravno grška črka pi in ne na primer alfa ali omega ali katera druga grška črka? Simbol izhaja iz prve črke grške besede $\pi\epsilon\rho\mu\epsilon\tau\rho$, ki pomeni perimenter (obseg).

Z določanjem približkov števila π se je ukvarjal tudi Leonard Euler. Uporabil je izraz

$$\blacksquare \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

in ugotovil, da je francoski matematik Lagny, ki je pred tem izračunal približek števila π na 128 decimalnih mest natančno, naredil napako na 113. mestu, prav tako so bila napačna mesta, ki temu sledijo. Euler je nato za izračun približka števila π uporabil zvezo

$$\blacksquare \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Rekord svojega časa je postavil tudi naš matematik Jurij Vega, ki je konec 18. stoletja izračunal prvih 140 decimalnih mest števila π . Pri tem je uporabil izraz (ki je enak Eulerjevemu izrazu iz leta 1755)

$$\blacksquare \frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}.$$

Njegov dosežek je bil izboljšán šele po 52-ih letih.

V sredini 19. stoletja se je število natančnih decimalnih mest števila π povzpelo iz 200 na okoli 500. Sto let kasneje, s pojavom računalnika, pa je to število začelo strmo naraščati. Danes je znanih že več kot $13 \cdot 10^{15}$ natančnih decimalnih mest števila π , njihovo iskanje pa je postalo bolj šport kot pa matematična aktivnost. Matematično – računalniški entuziasti prirejajo tekmovanja v iskanju čim več pravih decimalnih mest, rekordi pa so bili objavljeni tudi v Guinnessovi knjigi rekordov.

Število π ni racionalno število

Število $\pi = 3.1415926535897932384626433832975028841971\dots$ je matematike privlačilo več tisoč let, ko so ga poskusili predstaviti kot razmerje dveh naravnih števil. Ker danes obstaja dokaz, da je število π iracionalno število, so bili seveda vsi ti poskusi obsojeni na neuspeh. Iracionalnost števila π

je leta 1761 prvi dokazal nemški matematik in fizik Johann Heinrich Lambert. Leta 1882 je nemški matematik Ferdinand von Lindemann dokazal, da je število π transcendentno število. To pomeni, da število π ni rešitev nobene enačbe z racionalnimi koeficienti. Tako števila π ne moremo izraziti le s končnim številom celih števil, ulomkov ali njihovih korenov. Ta lastnost števila π razreši tudi znameniti starogrški problem kvadrature kroga: samo z uporabo ravnila in šestila je nemogoče konstruirati kvadrat, katerega ploščina je enaka ploščini danega kroga. Z uporabo ravnila in šestila lahko namreč skonstruiramo le daljice, katerih dolžine so algebrska (torej ne transcendentna) števila.

Zanimivosti

■ Nekaj zanimivih matematičnih enačb, ki vsebujejo število π :

1. *Enačba petih znamenitih števil (Eulerjeva formula)*, ki povezuje pet najpomembnejših števil (0, 1, e – osnova naravnega logaritma, π in i – imaginarna enota):

$$\blacksquare e^{i\pi} + 1 = 0$$

2. *Normalna ali Gaussova porazdelitev* slučajne spremenljivke s parametroma a (matematično upanje) in σ (standardna deviacija) ima gostoto verjetnosti

$$\blacksquare p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Parameter a je poljubno realno število, parameter σ pa poljubno pozitivno število.

3. *Stirlingova enačba*:

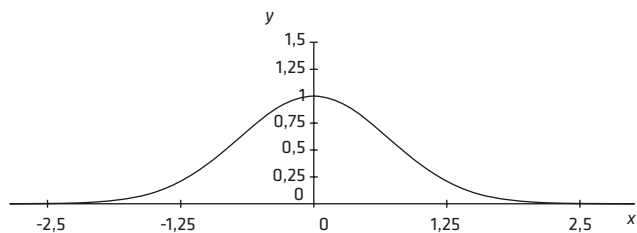
$$\blacksquare n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

4. Ploščina lika pod krivuljo e^{-x^2} (slika 2):

$$\blacksquare \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

■ Kako si zapomniti decimalna mesta števila π ?

V številnih jezikih so ljubitelji števila π ustvarili povedi, verze, mini drame, komične epizode, ki s številom črk posamezne besede ponazarjajo številke



SLIKA 2.

Graf funkcije $f(x) = e^{-x^2}$

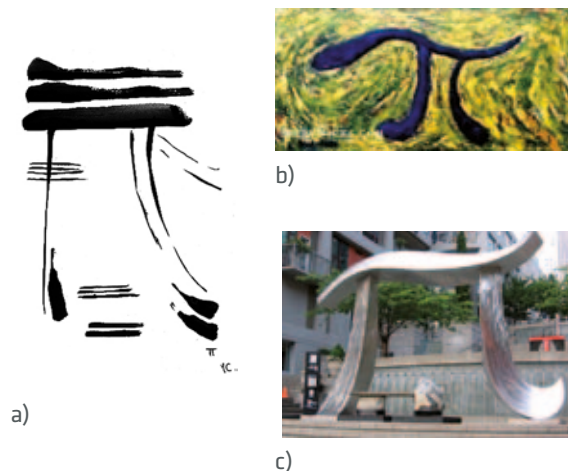
na decimalnih mestih števila π . Slovenski dosežek je: „Kdo o tebi z glavo razmišlja, da spomni števek teh?“ (3,141592653). In še angleška poved za približek števila π : „How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!“ Na 32. decimalnem mestu števila π je številka 0. Za njeno kodiranje je bilo tako potrebno v spominske pripomočke vključiti tudi besedo z desetimi črkami... Eden najdaljših tekstov, ki omogoča pomnjenje 740 decimalk števila π , temelji na pesmi *The Raven* (*Krokar*), ki jo je napisal ameriški pesnik, pisatelj in kritik Edgar Allan Poe.

■ Nekateri ljudje vidijo v številu π različne inspiracije (npr. zapisovanje števila v različnih bazah, ne le desetiški), nekateri mu pripisujejo celo religiozni pomen. Prirejajo tudi tekmovanja v poznavanju čim večjega števila decimalnih mest števila π na pamet (svetovni rekord je leta 2007 postavil Japonec, ki je decimalna mesta števila π recitiral okoli 16 ur in tako pravilno povedal okoli 42 000 prvih decimalk števila π). Ljubitelji števila π pravijo, da lahko sam sebe imenuješ π -fan, če znaš na pamet vsaj njegovih prvih 100 decimalnih mest.

■ Obstaja tudi π - dan, praznik, namenjen številu π , ki ga ljubitelji števila π praznujejo 14. marca (verjetno ni težko ugotoviti, zakaj so izbrali ravno ta datum). Ideja o prazniku prihaja iz San Francisca, sicer pa tekmovanja v zvezi s številom π na ta dan potekajo tudi pri nas (recitiranje decimalk števila π , inovativno računanje števila π).

■ Frekvenca števk 0, 1, 2, ..., 9, ki se pojavljajo na decimalnih mestih števila π , je približno enaka – torej ni nobena številka zastopana bolj ali manj.

■ Številu π se posvečajo tudi umetniki različnih smeri (slika 3):



SLIKA 3.

Na zgornjih slikah je risarska oz. slikarska upodobitev števila π neznanih avtorjev, na spodnji sliki pa je prikazana skulptura v centru Seattlea.

Čeprav je človeštvo spoznavanju števila π namenilo že več tisoč let, bo to število ostalo privlačno še za mnoge generacije matematikov in drugih ljubiteljev „zanimivih“ števil.

Literatura

- [1] *Kaleidoscope: Nonrepeating, patternless, and perpetually approximated*, QUANTUM, nov./dec. 2000, vol. 11, 2, str. 28–29.
- [2] <http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pi.html>
Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [3] <http://mathforum.org/isaac/problems/pi1.html>
Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [4] <http://mathforum.org/library/drmath/view/-52543.html> Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [5] <http://mathforum.org/library/drmath/view/-57045.html> Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [6] <http://mathforum.org/library/drmath/view/-57543.html> Povzeto dne: 13. 2. 2013

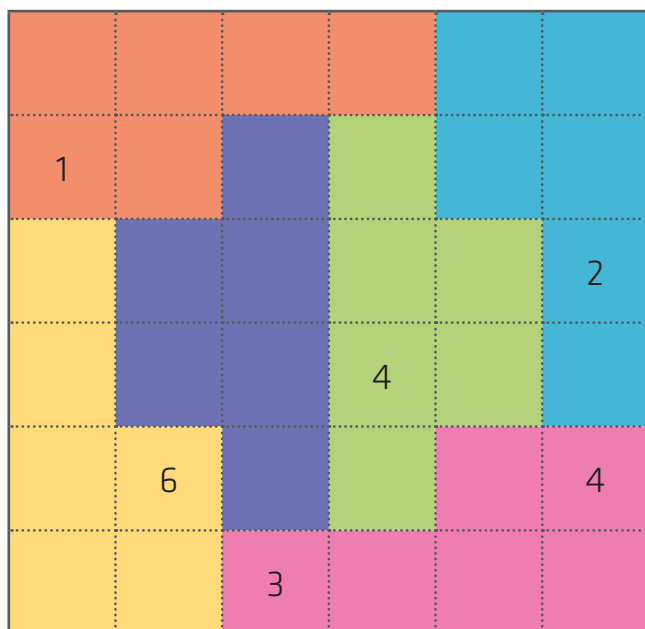
- [7] <http://oldweb.cecm.sfu.ca/pi/pi.html>
Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [8] http://www.maa.org/mathland/mathland_3_11.html
Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [9] <http://www.thefreelibrary.com/Biting+off+a+recordbreaking+piece+of+pi.-a07703265>
Povzeto dne: 13. 2. 2013
- [10] http://www.artbywicks.com/abstract_art_interior_decorating.html
Povzeto dne: 13. 2. 2013

xxx

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 6×6 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve nastopalo vseh 6 števil.



xxx



Bohrova dediščina

↓ ↓ ↓

JANEZ STRNAD

→ Kvantna mehanika je najbolj uporabna in najmočnejša teorija od vseh, ki so si jih fiziki zamislili.

N. David Mermin, 2012

Preteklo stoletje je obogatilo fiziko s teorijo relativnosti in kvantno mehaniko. V Preseku sta obe bolj slabo zastopani, druga slabše kot prva. Znani fizik Richard Feynman je menil, da je kvantna mehanika „prismuknjena“ in da je „nihče ne razume.“ S tem je verjetno poskusil pritegniti pozornost in izraziti občutek, da se kvantna mehanika močno razlikuje od klasične mehanike, ki gradi na vsakdanjih izkušnjah. Max Planck je nekoč izjavil, da se nove zamisli uveljavijo, ko zastopniki starih „postopno izumrejo in je [novost] doraščajočemu rodu domača od vsega začetka.“ Zato kaže znanje o kvantni mehaniki širiti med mladimi. Dobro priliko za to ponuja stoletnica dosežka Nielsa Bohra.

Na začetku prejšnjega stoletja so fiziki sprejeli misel, da so atomi delci z velikostjo desetmilijonine milimetra. Spoznanje, da je v atomu toliko pozitivnih osnovnih nabojev, kot je vrstno število elementa, ter prav toliko elektronov z negativnim osnovnim nabojem in veliko manjšo maso, se še ni uveljavilo. Atom so si tedaj večinoma predstavljali kot potico pozitivnega naboja z elektroni v vlogi rozin. V laboratoriju Ernesta Rutherforda na univerzi v Manchesteru so se zbirali fiziki z vsega sveta, podobno kot danes v CERNu v Ženevi. Rutherfordova mlajša sodelavca sta raziskovala prehod delcev α , ki jih oddajajo radioaktivne snovi, skozi zelo tanke kovinske lističe. Ugotovila sta, da se maloštevilni delci α odklonijo za velik kot. Izid je presenetil Rutherforda, ki je po njem ugotovil, da je pozitiven naboj, v katerem tiči skoraj vsa masa atoma, zbran v *atomske jedru*, stotisočkrat manjšem od atoma. Delec α je jedro helijevega atoma.



SLIKA 1.

Niels Bohr (1885–1962) je študiral v rodnem Københavnu in leta 1911 obranil doktorsko delo o elektronih v kovini. S štipendijo se je odpravil v Cambridge v Anglijo, a z okoliščinami v laboratoriju ni bil zadovoljen. Leta 1912 je prešel k Rutherfordu v Manchester. Najprej se je ukvarjal s poskusi z radioaktivnostjo, potem se je odločil za teorijo, ko je naključje

preusmerilo njegovo pozornost k zgradbi atomov. Leta 1913 je pojasnil stanja vodikovega atoma in frekvence spektralnih črt. Do leta 1922 je obvladal zgradbo drugih atomov in periodno preglednico elementov povezal s kvantno mehaniko. Pozneje se je ukvarjal z jedrsko fiziko in leta 1939 ugotovil, kako nevtroni cepijo uranova jedra. Leta 1922 je dobil Nobelovo nagrado za „raziskovanja zgradbe atomov in sevanja, ki ga odajajo“. (*Stoletnica Bohrovega rojstva*, Presek 13 (1985/86) 144–151.)

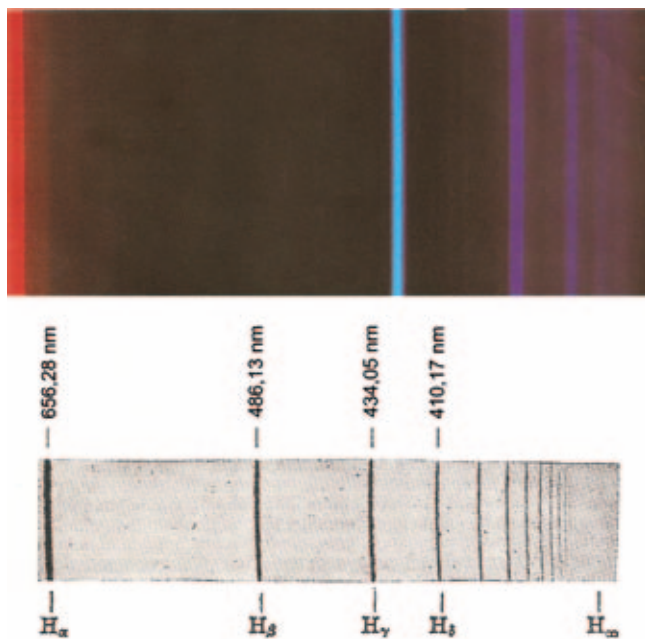
Predstava, da atom spominja na osončje in se v njem okoli jedra elektroni gibljejo kot planeti okoli Sonca, pa je imela resno pomanjkljivost. Gibanje po sklenjeni tirnici je pospešeno in pospešeni naelektreni delci sevajo elektromagnetno valovanje ter s tem izgubljajo energijo. Atomi bi tedaj nenehno sevali in naposled padli v jedro. Toda atomi so obstojni in ne sevajo, dokler jih ne zmotimo. Potem pa atomi v plinih sevajo svetlobo z določeno frekvenco ali valovno dolžino. O tem pričajo svetlobni napisi izrazitih barv.

Planck je raziskoval sevanje črnega telesa, ki od vseh teles pri dani temperaturi najmočnejše seva in vse vpadlo sevanje absorbira. Leta 1900 je pojasnil sevanje črnega telesa s privzetkom, da telo oddaja ali prejema energijo v obrokih, *kvantih*. Energija kvanta $W_1 = h\nu$ je sorazmerna s frekvenco ν , sorazmernostni koeficient je *Planckova konstanta* $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js, značilna za zamisel o kvantih. Energija sevanja je $W = nh\nu$, če je n število kvantov, ki jim danes rečemo *fotoni*, v sevanju.

Težave s predstavo atoma kot osončja so pritegnile Nielsa Bohra. Izkušnje z elektroni v kovini so ga prepričale, da pojavov v svetu atomov ni mogoče zajeti s klasičnimi zakoni. Po tem se je razlikoval od večine tedanjih fizikov, ki so se ukvarjali z atomi.



→ Lotil se je vodikovega atoma, v katerem se en sam elektron giblje okoli jedra s 1836-krat večjo maso. Vzemimo, da ima jedro veliko maso in miruje v izhodišču, elektron z majhno maso m pa se okoli njega giblje po krogu s polmerom r . Polno energijo sestavljata kinetična energija elektrona $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ s hitrostjo v in potencialna energija elektrona in jedra $W_p = -C/r$. Med delcema deluje električna privlačna sila v vlogi centripetalne sil $F = C/r^2 = mv^2/r$. Polna energija $W = W_k + W_p = -W_k = \frac{1}{2}W_p$ je tako kot potencialna energija negativna, kar je povezano s tem, da je elektron vezan na jedro. Klasično imajo lahko vse tri energije katero koli vrednost. Če se hitrost v ali polmer r zelo malo spremenita, se vsaka od njih tudi zelo malo spremeni. Če bi to obveljalo, bi atomi nenehno sevali in ne bi bili obstojni.



SLIKA 2.

Štiri spektralne črte vodika v vidnem delu spektra, ki so Johanna Jakoba Balmerja v letu Bohrovega rojstva pripeljale do osnovne enačbe. To je Johannes Robert Rydberg leta 1890 dopolnil v enačbo (3). R_y je Rydbergova konstanta (zgoraj). Valovne dolžine prvih štirih črt dobimo, če v enačbo vstavimo $n' = 2$ in po vrsti $n = 3, 4, 5 \dots$ ter upoštevamo, da je v/c enako $1/\lambda$. Z naraščajočim n se manjša razmik med sosednjimi črtami (spodaj). Posnetek zgornje slike je naredil Marjan Smerke.

Konstanta $C = e_0^2/(4\pi\epsilon_0)$ vsebuje kvadrat obeh nabojev in električno konstanto ϵ_0 . Za planet, ki kroži okoli Sonca, veljajo enake enačbe, le da je $C = GmM$ z gravitacijsko konstanto G , maso planeta m in maso Sonca M .

Bohr je po Planckovem zgledu dodal zahtevo

$$\blacksquare W_k = \beta h \nu_{kr}, \quad (1)$$

ki je ni poskusil podrobneje utemeljiti. Njenega učinka vnaprej ni poznal, zato je dodal neznan štetiški koeficient β . Z enačbo (1) je frekvenco kroženja $\nu_{kr} = v/(2\pi r)$ povezal s kinetično energijo. Iz enačbe $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ sledi hitrost $v = \sqrt{2W_k/m}$ in iz enačbe $W_k = C/(2r)$ polmer $r = C/(2W_k)$. To vstavimo v izraz za frekvenco kroženja in nazadnje upoštevamo Bohrov privzetek (1):

$$\blacksquare \nu_{kr} = \frac{v}{2\pi r} = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} \cdot \frac{2W_k}{2\pi C} = \sqrt{\frac{4W_k^3}{\pi m C^2}} = \frac{W_k}{\beta n h}.$$

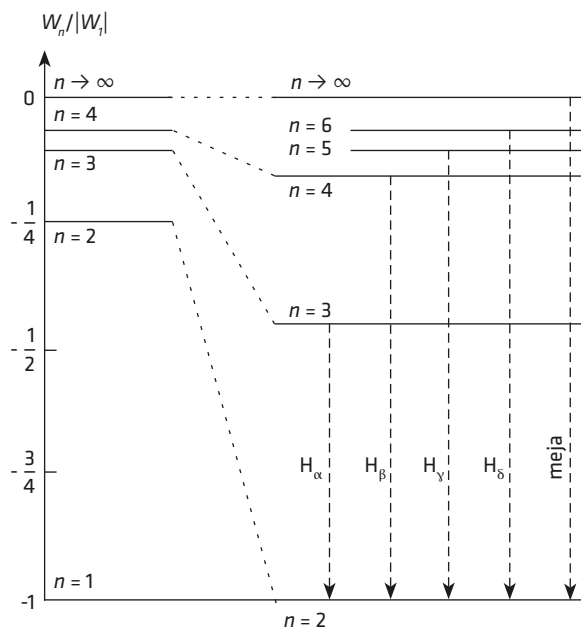
Enačbo kvadriramo in poenostavimo:

$$\blacksquare W_k = -W = \frac{\pi^2 m C^2}{2\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (2)$$

Do te enačbe je Bohr prišel brez težav, potem pa se je zataknilo. Sredi leta 1912 se je vrnil iz Manchesterja v København in začel predavati na univerzi. Decembra je zaprosil za dopust in se umaknil na deželo. Februarja 1913 je odposlal dokončani članek *O zgradbi atomov in molekul*, ki je izšel v julijski številki Philosophical Magazine. Tega leta sta sledili še dve nadaljevanji. Kaj se je v kratkem času dogodilo? Februarja je srečal danskega fizika, ki je sicer v Göttingenu raziskoval spektre svetlobe. Bohr se za sevanje ni zanimal, češ da so spektralne črte preveč zapletena zadeva, da bi si bilo z njo mogoče pomagati. Znanec mu je oporekel in ga opozoril na enačbo za frekvenco črt v spektru vodikovega atoma, ki je Bohr dotlej ni poznal. Brž ko je v knjigi poiskal enačbo

$$\blacksquare \nu = cR_y \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3)$$

je vedel, kaj mora narediti. Najprej je ugotovil, da je v enačbi (1) $\beta = \frac{1}{2}$ in je to poskušal posebej pojasniti. Elektronu zelo daleč od jedra ustreza frekvenca 0, potem pa seva frekvenco ν . Povprečna vrednost je $(0 + \nu)/2 = \frac{1}{2}\nu$ in v enačbo (1) je treba vstaviti $\beta\nu = \frac{1}{2}\nu$.



SLIKA 3.

Lestvica stanj vodikovega atoma z nakazanimi prehodi

Atom ima *stanja* z določeno energijo, ki jih znamuje celo *kvantno število* n . Atom ne more imeti energije, ki bi ustrezala nečemu številu n . V *osnovnem stanju* $n = 1$ ima atom najmanjšo mogočo energijo, v vzbujenih stanjih $n > 1$ ima večjo energijo. V stanju n ima atom energijo

$$\blacksquare W_n = -W_k = -\frac{\pi^2 m C^2}{2h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

in ne seva. Ob prehodu v stanje $n' < n$ pa seva kvant z energijo $h\nu$, ki prevzame razliko energij začetnega in končnega stanja:

$$\blacksquare h\nu = W_n - W_{n'} = \frac{2\pi^2 m C^2}{h^2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{me_0^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (4)$$

Bohru te enačbe ni bilo treba preizkušati s frekvencami vodikovih spektralnih črt. Zadostovalo je, da je ugotovil, da se enačba (4) sklada s (3). Za koeficient $cR_y = 2\pi^2 m C^2 / h^3 = me_0^4 / (8\varepsilon_0^2 h^3)$ je izračunal $3,1 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, kar se je v okviru dosegljive natančnosti ujemalo s tedanjo izmerjeno vrednostjo $3,29 \cdot 10^{15}$

s^{-1} . Današnja vrednost je $3,2898 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Ne da bi se bilo treba sklicevati na sevanje, so se prepričali, da se $hcR_y = W_R = me_0^4 / (8\varepsilon_0^2 h^2) = 13,6 \text{ eV}$ ujema z *ionizacijsko energijo* vodikovega atoma (1 elektronvolt je $1,6 \cdot 10^{-19}$ joula). To je najmanjša energija, ki jo moramo dovesti vodikovemu atomu v osnovnem stanju, da odtrgamo elektron in ga spremenimo v ion. Z enačbo (4) so pojasnili frekvenco številnih spektralnih črt vodika in helijevega iona He^+ . Enačba je uporabna tudi za druge ione, ki jim je preostal en sam elektron. V razpravi s fiziki, ki so natančno merili frekvenco spektralnih črt, je Bohr spoznal, da jedro ne miruje, ampak se giblje okoli skupnega težišča jedra in elektrona.

Z zgradbo atomov so se ukvarjali tudi drugi fiziki. Že leta 1910 je eden od njih po enotah ugotovil, da je koeficient cR_y mogoče izraziti z e_0 , h in m . Drugi je prišel do enačbe (2) in še korak dlje, a je vztrajal pri klasičnem spoznanju, da atom seva svetlobo s frekvenco kroženja. Bohr ni prvi uporabil Planckove zamisli za delce snovi. Albert Einstein je z njo leta 1907 pojasnil temperaturno odvisnost specifične toplote kristalov (*Einsteinov prvi prispevek h kvantni mehaniki*, Presek 33 (2005/2006) 10-13 (3)).

Ne bi bilo prav, če bi zamolčali, da je Bohr mislil, da se v določenem stanju elektron v vodikovem atomu giblje po krožnici z določenim polmerom. *Bohrov polmer* $r_B = C / (2W_R) = \varepsilon_0 h^2 / (\pi e_0^2 m) = 5,28 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ je še danes pripravna enota za merjenje velikosti atomov. Od leta 1927 pa vemo, da gibanja elektrona ni mogoče opisati s tirnico. Tudi nekatere druge Bohrove zamisli, med njimi enačba (1), niso obveljale. Ugotovitev, da imajo vezani sistemi delcev – enako kot vodikov atom in atomi drugih elementov – v kvantni mehaniki stanja z določeno energijo, pa je obveljala in bila temeljni kamen za razvoj kvantne mehanike.

Izpeljimo potencialno energijo, če deluje med telesoma privlačna sila, obratno sorazmerna s kvadratom razdalje $F = C/r^2$. Vzemimo, da telo z veliko maso miruje, majhno telo pa premaknemo iz oddaljenosti r_1 v večjo oddaljenost r . Razliko potencialne energije v končni in v začetni točki vpeljemo kot negativno delo privlačne sile. Negativni znak porabimo, ker ima sila nasprotno smer



↓ premika. Delo je sila krat pot, pri tem upoštevamo, da se sila z razdaljo spreminja:

$$\blacksquare W_p - W_{p1} = C \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} + C \frac{r_3 - r_2}{r_2 r_3} + \dots$$

$$= C \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \dots - \frac{1}{r} \right) = C \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

$$= -\frac{C}{r} - \left(-\frac{C}{r_1} \right).$$

Pri tem smo v imenovalcu nadomestili kvadrat r_1^2 s srednjo geometrijsko vrednostjo $1/(r_1 r_2)$, kar je smiselno, če je delni premik dovolj majhen. Potencialna energija je potemtakem $W_p = -C/r$. Če je celotni premik majhen v primerjavi z oddaljenostjo od središča telesa z veliko maso, je razlika potencialnih energij $-C/(r+h) + C/r = Ch/((r+h)r) = Ch/r^2 = (C/r^2)h$. To da znano razliko potencialnih energij Fh . Tako je, npr. na površju Zemlje razlika potencialnih energij mgh s težo mg in težnim pospeškom g . × × ×

↓ ↓ ↓

REŠITEV BARVNI SUDOKU S STRANI 8

6	2	5	3	4	1
1	4	6	2	5	3
5	3	4	1	6	2
2	5	1	4	3	6
3	6	2	5	1	4
4	1	3	6	2	5

× × ×

Obrnjena vodna ura

ODGOVOR NALOGE

↓ ↓ ↓

MOJCA ČEPIČ IN ANA G. BLAGOTINŠEK

→ Z vzgonom smo se v preteklih poizkuševalnicah že igrali ob taljenju ledu v olju [1] in ob opazovanju površinske napetosti [2]. Pri tokratni poizkuševalnici smo vzgon uporabil na prav poseben način.

Najprej povzemimo, kako je potekal poizkus. V eno plastenko smo nalili olje, v drugo vodo. Z nekaj spretnosti smo eno plastenko postavili na drugo in s trajno elastičnim kitom zatesnili stik vratov obeh plastenk tako, da iz njih ni iztekalo nič – ne olje ne voda ne oboje (slika 1). To konstrukcijo smo poimenovali obrnjena vodna ura. Zakaj vodna ura? Včasih so namreč izdelovali ure, ki so bile podobne peščenim, v njih pa se je namesto peska pretakala voda. Tako je bilo tudi pri našem poizkusu, le da smo zrak v vodni uri nadomestili z oljem.

Če smo uro postavili na mizo tako, da je bila v spodnji plastenki voda, v zgornji pa olje, se ni zgodilo nič. Če smo uro postavili tako, da je bilo v spodnji plastenki olje, v zgornji pa voda, se je olje začelo pretakati v zgornjo plastenko, voda pa v spodnjo (slika 2). Zakaj tako?

Olje ima manjšo gostoto kot voda, zato olje na vodi plava. Razlika med vzgonom, ki olje v vodi potiska navzgor, in težo olja, olje dviguje. Zato se olje po prehodu skozi vrata plastenk pretaka navzgor. Voda, nasprotno, v olju potone. Njena teža je večja od vzgona, zato se iz zgornje plastenke pretaka navzdol. Ker je vrat plastenk ozek, se pretakanje zaradi viskoznosti upočasni; proces lahko v miru opazujemo.

Pri poizkusu nam jo lahko zagode površinska napetost. Če so plastenke in voda res čiste, se včasih zgodi, da vodna ura tudi v pravem položaju ne de-



SLIKA 1.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

luje. Tedaj se lahko igrate tako, da v vodi delate „mehurčke“ olja (slika 3). Če stisnete spodnjo plastenko, se bo v zgornji plastenki oblikovala kaplja olja, ki se bo odtrgala in odplavala v vrhnji del posode. Že majhna sprememba površinske napetosti pa tako igranje prepreči. Dovolj je, da plastenko predhodno operemo z detergentom in jo dvakrat ali trikrat speremo z vodo. Že zelo majhna koncentracija detergenta zmanjša površinsko napetost vode in vodna ura deluje.

Žal vodne ure ne bomo mogli uporabljati dalj časa, saj se rade zaredijo plesni in podobne packarije.

Literatura

- [1] Čepič M. in Gostinčar-Blagotinšek A., *Olje, voda in led: odgovor naloge*, Presek, 2009/2010, 37, 2, 18–19.
- [2] Čepič M. in Tarman G., *Kako plavajo?*, Presek, 2009/2010, 37, 5, str. 18.

× × ×

www.presek.si

Pločevinka

↓↓↓

MOJCA ČEPIČ

→ Pri tem poizkusu boste morda potrebovali pomoč odrasle osebe, ki je vešča z vročimi lonci. Če boste poizkus delali sami, bodite previdni: vroči predmet morate prijeti s prijemalkami za vročo posodo.

Kaj potrebujemo

- prazno pločevinko,
- prijemalke za vročo posodo,
- korito, napolnjeno z mrzlo vodo.



V pločevinko nalijemo malo vode; malo pomeni 4–5 velikih žlic vode. V pločevinki naj voda ne bo več kot 1 cm visoko. V pomivalno korito nalijemo mrzlo vodo, 5 do 10 cm visoko.

Pločevinko postavimo na plinski ali električni grelec. Počakamo, da voda v pločevinki zavre, potem plin oz. električno ploščo ugasnemo. Pločevinko primemo s prijemalkami, jo prenesemo nad vodo v koritu in jo, postavljeno na glavo, potopimo z robom za centimeter ali dva pod vodo.

- Kaj se zgodi?
- Kaj menite, zakaj je proces hiter? _____ × × ×

Razmisli in poskusi

↓↓↓

MITJA ROSINA

→

52. Ali led plava na alkoholu?

Vsi vemo, da led plava na vodi. Plava zaradi vzgona, saj ima voda gostoto 1000 kg/m^3 , led pa le 900 kg/m^3 . Kaj pa, če damo kocko ledu v posodico s špiritom (etanolom)? Poskusi, ali plava ali potone. Kaj sklepaš iz tega? Pri koliko procentni mešanici etanola in vode kocka ravno še lebdi v posodi? Poskusi tudi s kepo snega.

ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ PREJŠNJE ŠTEVILKE PRESEKA

46. Stopinje in tračnice v snegu

Ko hodimo po sveže zasneženi poljani, pustimo za seboj več centimetrov globoke stopinje. Za smučarjem pa ostanejo globoke „tračnice“. Pod posebnimi pogoji zagledamo presenečeni čez nekaj dni ali čez kak teden, da stopinje in tračnice štrlijo nekaj centimetrov ven iz okoliškega snega.

ODGOVOR. Na to vprašanje dolgo nisem odgovoril, ker sem čakal, da bi ta pojav sam fotografiral. Pa je bila lanska zima zelo skromna in takih sledi nisem opazil. Morda bo letošnja zima boljša.

Presenečeni smo zato, ker se sneg na prostem ne more sam od sebe usesti globlje kot tisti, ki smo ga mi stisnili. Tudi ne stali se hitreje od stisnjene snega, saj ga varuje rahli „snežni kožušček“, ki slabše prevaja toploto kot stisnjen sneg. Torej je posredi nekaj drugega. Pojav lahko razložimo z erozijo zaradi vetra, če je sneg zelo rahel (pršič). Stopinje so trde in v vetru na površini zamrznejo, veter ničesar ne odpihne. Na prostem pa veter odpihne sneg drugam.

Ko greste v zimsko naravo s fotografskim aparatom, bodite pozorni na ta pojav in nam pošljite kako „trofejo“! _____ × × ×

32. tekmovanje iz znanja fizike za Stefanova priznanja



BARBARA ROVŠEK

→ Šolskega tekmovanja iz znanja fizike se je v šolskem letu 2011/2012 udeležilo 9195 učencev osmih in devetih razredov. Na področnem tekmovanju je v 17-ih regijah sodelovalo 1830 učencev. Na državnem tekmovanju, ki je potekalo 14. aprila 2012 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter na Osnovni šoli dr. Bogomirja Magajne v Divači, je 121 učencev osvojilo zlata priznanja. Povedano malo drugače: od 300-tih udeležencev šolskega tekmovanja so si zlato priznanje prislužili štirje učenci.



SLIKA 1.

Pred tekmovanjem v Mariboru

Državno tekmovanje je kot vsako tekmovanje razburljivo in naporno. Traja štiri šolske ure. Med tekmovanjem sta en ali dva kratka odmora, med katerima tekmovalci zamenjajo prizorišče. Iz učilnice, kjer rešujejo teoretične naloge, se preselijo najprej v prvo in potem še v drugo učilnico s poskusi (ali obratno). Vse tekmovalne pole je tudi letos pregledovala skupina ocenjevalcev v Ljubljani. Tekmovanje se je pričelo ob 10. uri dopoldne in končalo ob 10. uri zvečer, ko so bile ocenjene vse pole in objavljeni neuradni rezultati.

8. RAZRED

I. nagrada

- MARUŠA KERENČIČ, OŠ Gradec, mentorica Astrid Žibert,
- VID PRIMOŽIČ, OŠ Križe, mentorica Polonca Mohorčič.

II. nagrada

- FILIP LJEVAR, OŠ Slave Klavore Maribor, mentor Silvo Muršec,
- ANA MATOS, OŠ Sostro, mentorica Urška Vidmar.

III. nagrada

- URBAN OGRINEC, OŠ Toma Brejca, Kamnik, mentorica Sergeja Miklavc,
- DAVID POPOVIČ, OŠ Valentina Vodnika, mentor Branko Cedilnik,
- LARA PRIJON, OŠ Kolezija, Ljubljana, mentorica Tatjana Ponikvar Lazič.

9. RAZRED

I. nagrada

- UROŠ PREŠERN, OŠ Otočec, mentorica Andreja Grom.

II. nagrada

- ROK KRUMPAK, OŠ Šmarje pri Jelšah, mentorica Martina Petauer,

18

nadaljevanje
na strani





NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnico pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do **31. marca 2013**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli **Presekov paket**.

× × ×



15

nadaljevanje
s strani

- MIHAEL RAJH, OŠ Polzela, mentorica Danica Gobec,
- MILE VRBICA, OŠ Pirniče, mentorica Marjeta Jensenko.

III. nagrada

- ALJAŽ ERŽEN, OŠ Ivana Tavčarja, Gorenja vas, mentorica Irena Krmelj Krivec,
- TOMAŽ CVETKO, OŠ Zalog, mentorica Marjeta Cikajlo,
- KATARINA ČERNAČ, OŠ Miroslava Vilharja, Postojna, mentor Gregor Antloga,

- LOVRO PEČNIK, OŠ Jurija Dalmatina Krško, mentorica Jasmin Ilc,
- ERIK PLEŠKO, OŠ Antona Šibelja-Stjenka, Komen, mentor Tomaž Mavrič,
- MIHAEL TRAJBARIČ, OŠ Zadobrova, mentor Tomi Brečko.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov se zahvaljuje vsem mentorjem in staršem, ki spodbujajo naravoslovno radovednost svojih učencev in otrok, ter vsem, ki so pri izvedbi tekmovanj sodelovali. Učencem in učenkam čestitamo za osvojena priznanja ter jim želimo še veliko veselja ob ukvarjanju s fiziko.

SLIKA 1.

Nagrajenci 32. tekmovanja za Stefanova priznanja prihajajo iz krajev, označenih na zemljevidu. Letos jih je bilo veliko iz Ljubljane.



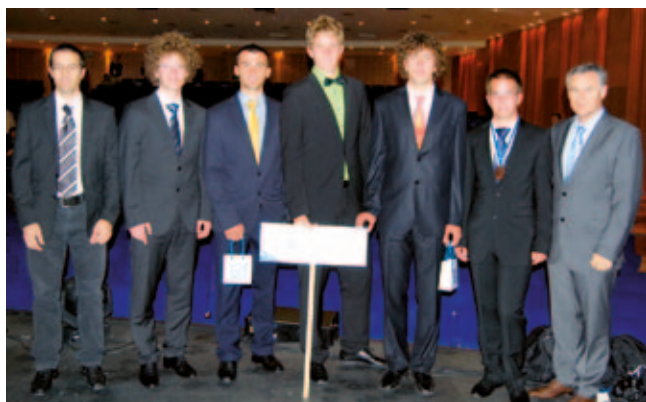
XXX

43.mednarodna fizikalna olimpijada v Talinu in Tartuju, Estonija

↓↓↓

CIRIL DOMINKO

→ Po regijskem in državnem tekmovanju srednješolcev iz fizike ter po izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na olimpijado uvrstili: Domen Ipavec in Jan Šuntajs z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Jurij Tratar in Matevž Marinčič s Srednje šole Josipa Jurčiča Ivančna Gorica in Miha Zgubič z II. gimnazije Maribor. Tako kot v prejšnjih letih je vse stopnje tekmovanja tudi v šolskem letu 2011/12 organiziralo in izvedlo *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA Slovenije)*.



SLIKA 1.

Slovenska olimpijska ekipa po svečani podelitvi priznanj. Z leve proti desni: Jurij Bajc (vodja), Jan Šuntajs, Miha Zgubič (pohvala), Matevž Marinčič, Jurij Tratar (pohvala), Domen Ipavec (bronasta medalja) in Ciril Dominko (vodja).

Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sva bila dr. Jurij Bajc s *Pedagoške fakultete v Ljubljani* in mag. Ciril Dominko, *DMFA Slovenije*. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *DMFA Slovenije* in *Ministrstvo za izobraževanje, znanost, kulturo in šport*.

Olimpijada je potekala med 15. in 24. julijem 2012 v dveh estonskih mestih; v Talinu, kjer so delali in bili nastanjeni strokovni vodje ekip, in v Tartuju, kjer so tekmovali in bili nastanjeni tekmovalci. Sodelovalo je 378 tekmovalcev iz 81-ih držav. Naši tekmovalci so osvojili **eno bronasto medaljo** in **dve pohvali**. Bronasto medaljo je osvojil **Domen Ipavec**, pohvali pa **Jurij Tratar** in **Miha Zgubič**.

Naslednja, 44. mednarodna fizikalna olimpijada, bo od 7. do 15. julija 2013 v Kopenhagenu, na Danskem. × × ×

www.presek.si

www.dmfa.si

↓↓↓

OBVESTILA

- Zahvaljujemo so bralcem, ki so nam z donacijami priskočili na pomoč.
- V prejšnji številki je prišlo do napake pri geslu križanke. Med poslanimi rešitvami smo upoštevali vse smiselne odgovore.
- V članku Merjenje razdalje do Lune, Tine Golež, Presek 40 3, je prišlo do napake. Na strani 24 v desnem stolpcu spodaj bi morale biti namesto koordinat (5572, 376, -3562) zapisane koordinate (5572, 1317, -2792).

× × ×

Astronomski tabor Vegova 2013



Elektrotehniško-računalniška strokovna šola in gimnazija Ljubljana (Vegova) vabi srednješolske profesorje na astronomski tabor in delavnice, ki bodo med 12. in 14. aprilom 2013 na ČŠOD Medved (Medvedje Brdo).

Na Vegovi teče pilotski projekt **Izbirni predmet astronomija v 3. letniku gimnazije**. Na preizkusu je v letošnjem šolskem letu sprejeti učni načrt, ki po skoraj štirih desetletjih vrača astronomijo v gimnazije. Tabor je namenjen predvsem praktičnemu delu pouka astronomije.

Na tabor so vabljeni tudi profesorji srednjih šol oz. gimnazij, ki bi se radi pogloblje seznanili s potekom uvajanja astronomije v srednje šole, ki bi radi svoje astronomsko znanje in praktične izkušnje delili s kolegi ali bi svoje znanje radi izpopolnili. Tabor je lahko tudi prvi korak pri načrtovanju uvedbe izbirnega predmeta astronomija na domači šoli.

Več informacij in prijave na

- planica.vegova@gmail.com.



Tabor SMART 2013



SMART – Mladinski astronomski raziskovalni tabor je največji tovrstni tabor v Sloveniji. Namenjen je tako popolnim začetnikom kot izkušenim astronomom, saj program prilagajamo predznanju in željam posameznika. SMART je namenjen poznavanju astronomije, neba, zvezd, teleskopov in raziskovanju v okolju, polnem sproščenega in veselega druženja.

Tabor SMART bo potekal na Medvedjem Brdu med 6. in 15. avgustom 2013. Vodilo ga bo deset izkušenih mentorjev, ki bodo poskrbeli, da bo tabor za vse udeležence postal nepozaben dogodek.

Delovne skupine na taboru bodo: Uvod v astronomijo, Astronomska opazovanja, Astrofizika in astronomske simulacije, Astrofotografija, Meteorji, Temno nebo.

Vse informacije o taboru, delovnih skupinah, mentorski ekipi in o prijavi najdete na spletni strani: www.ADL.si.



Naravno svetlikanje neba

↓↓↓

MATIC SMREKAR

→ Med astronomi je pojav naravnega svetlikanja neba bolj poznan kot natural airglow (ne smemo ga zamenjati z žarenjem neba oz. "skyglow", ki ga povzroča svetlobno onesnaženje). S prostim očesom ga lahko opazimo le kot nežno brezbarvno svetlobo, običajno blizu obzorja. Precej lažje je naravno svetlikanje neba opaziti na fotografijah. Na širokokotnih oz. panoramskih fotografijah, kjer v objektiv zajamemo veliko območje neba, je običajno vidno kot nenavaden zelenkast oblak tik nad obzorjem. Neizkušeni opazovalec ga bo zlahka zamenjal s svetlobnim onesnaženjem, ki se prav tako najbolj intenzivno pojavlja blizu obzorja. Na fotografijah pa se oranžno svetlobno onesnaženje zlahka loči od izrazite svetlo zelene svetlobe naravnega svetlikanja neba.

Nastanek svetlikanja

Svetlikanje neba nastane zaradi sevanja vzbujenih atomov kisika (najbolj pogosto), natrija ali molekul OH, N₂ in O₂ v vrhnjih plasteh ozračja. Največkrat imamo priložnost opazovati zelenkasto svetlobo vzbujenih kisikovih atomov, ki se pojavi med 90 in 100 km visoko (termosfera). Atomi in molekule prehajajo v vzbujeno stanje zaradi dnevnega Sončevega obsevanja z ultravijolično svetlobo Sonca. Pri vračanju v osnovno stanje atomi oz. molekule oddajajo svetlobo značilnih barv. Kisikovi atomi najpogosteje



→ oddajajo svetlo zeleno svetlobo z valovno dolžino 557,7 nm. To je podobna svetlobi zelenih laserskih kazalnikov (532 nm).

Opazovanja

Pojav svetlikanja neba je bil do leta 2011 iz naših krajev redko opažen in dokumentiran. Svetloba je zelo šibka (šibkejša od zimskega dela Rimske ceste) in se v značilnih vlaknih lahko razpenja tudi preko celotnega neba. Najbolje jo vidimo 10 do 15 stopinj nad obzorjem. Pod to višino se izgubi zaradi absorpcije v ozračju in svetlobnega onesnaženja. V predelih neba bližje zenitu pa gledamo skozi tanjšo plast ozračja in je te svetlobe posledično bistveno manj.

Intenzivnost in obseg svetlikanja neba sta odvisna od Sončeve aktivnosti in sledita Sončevemu 11-letnemu ciklu aktivnosti. Takrat je Zemlja deležna tudi najbolj intenzivnega bombardiranja z UV svetlobo in s Sončevimi izbruhi (ti npr. povzročajo polarni sij). Sicer je svetlikanje neba običajen pojav v krajih z naravno temnim nebom, vsakršno svetlobno onesnaženje pa ga hitro presvetli.

Od konca junija leta 2011, ko smo ta pojav iz Slovenije lahko opazovali celo s prostimi očmi, ga lahko vidimo na nočnih panoramskih fotografijah skoraj v vsaki jasni noči. Za vizualna opazovanja pa potrebujemo nekaj sreče, opazovalnih izkušenj in kakovostno opazovalno lokacijo z malo svetlobnega onesnaženja. Zares temne lokacije v Sloveniji žal ni,

SLIKA 1.

Na levi strani fotografije je vidna značilna zelena svetloba naravnega svetlikanja neba, na desni pa svetlobno onesnaženje enega od večjih mest na otoku La Palma. S prostim očesom je oboje videti skoraj enako. Svetlobno onesnaženje proti desni postaja v območju izven fotografije (vzhodno nebo) sicer vedno bolj intenzivno. La Palma, 16. september 2012, foto: Matic Smrekar.





SLIKA 2.

V eni od opazovalnih noči se je na severnem delu neba, ki je na tej lokaciji sicer povsem brez svetlobnega onesnaženja, pojavila intenzivna oranžna svetloba. Glede na razporeditev in intenzivnost je edini možen vir te svetlobe svetlikanje natrijevih atomov. Po barvi pa ga hitro zamenjamo s svetlobnim onesnaženjem, zato je opazovanje tega pojava iz Slovenije skoraj nemogoče. La Palma, 16. september 2012, foto: Matic Smrekar.

saj je svetlobno onesnaženje prisotno celo na najbolj oddaljenih krajih. Poleg tega potrebujemo čim bolj prosojno ozračje, daleč od naselij in na čim večji nadmorski višini.

Kako ključna je kombinacija izbire lokacije in sreče z vremenom ter intenzivnostjo svetlikanja, smo najlepše spoznali ob opazovanjih samih. Prvo opazovanje pojava smo opravili na Krimu 28. junija 2011. „Pomotoma“ smo opazili, da se na fotografijah pojavlja zelena svetloba, ki je v noči postajala vse bolj intenzivna. Kasneje se je celo videla s prostimi očmi, čeprav smo opazovali iz svetlobno onesnaženega Krima.

Zelo intenzivno se je naravno svetlikanje neba pojavljalo na astronomskem taboru SMART 2011, avgusta tega leta. Takrat smo lahko preizkušali svoje fotografske veščine. Pomagalo je seveda, da smo opazovali s Pohorja, čeprav je tudi ta lokacija v zadnjih letih že močno svetlobno onesnažena.

Najboljša opazovanja pojava pa smo naredili na astronomski odpravi na Kanarske otoke, na La Palmi, septembra 2012. Opazovali smo na nadmorski višini 2400 metrov, kjer stoji tudi nekaj največjih teleskopov na svetu. Lokacija je namreč za astronomska opazovanja zelo ugodna – velika nadmorska višina, zelo malo svetlobno onesnažena, prosojno in







← LEVA STRAN REVIJE ZGORAJ

SLIKA 3.

Naravno svetlikanje neba, kot ga vidijo iz Mednarodne vesoljske postaje. Vidimo značilno zeleno svetlobo kisikovih atomov, tik pod tem pa rumenkasto svetlobo natrijevih atomov. Foto: Mednarodna vesoljska postaja.

← LEVA STRAN REVIJE SPODAJ

SLIKA 5.

Tako je videti naravno svetlikanje neba na povsem neonesnaženem nebu. Značilni temni oblaki, močna zelena kisikova svetloba in nekaj oranžne natrijeve svetlobe. Tik nad oblaki je oje Velikega voza. La Palma, 16. september 2012, foto: Matic Smrekar.

↖ DESNA STRAN REVIJE

SLIKA 4.

Fotografija naravnega svetlikanja na taboru SMART 2011. Pohorje, 5. avgusta 2011. V spodnjem delu fotografije, tik nad smrekami, je opazno močno svetlobno onesnaženje. Foto: Nina Smrekar.

običajno precej mirno ozračje.

Več kot besede zagotovo povedo fotografije. Najbolj intenzivno je bilo svetlikanje zvečer, do polnoči, potem pa je proti jutru počasi slabelo. Prav zaradi tega je bilo nebo nekatere noči svetlejše, kot smo od te lokacije pričakovali, posebej na severnem obzorju. V nekaterih nočeh pa naravnega svetlikanja praktično nismo opazili. S prostim očesom tudi takrat, ko je bilo svetlikanje najbolj intenzivno, nismo zaznali zelenkaste barve svetlobe.

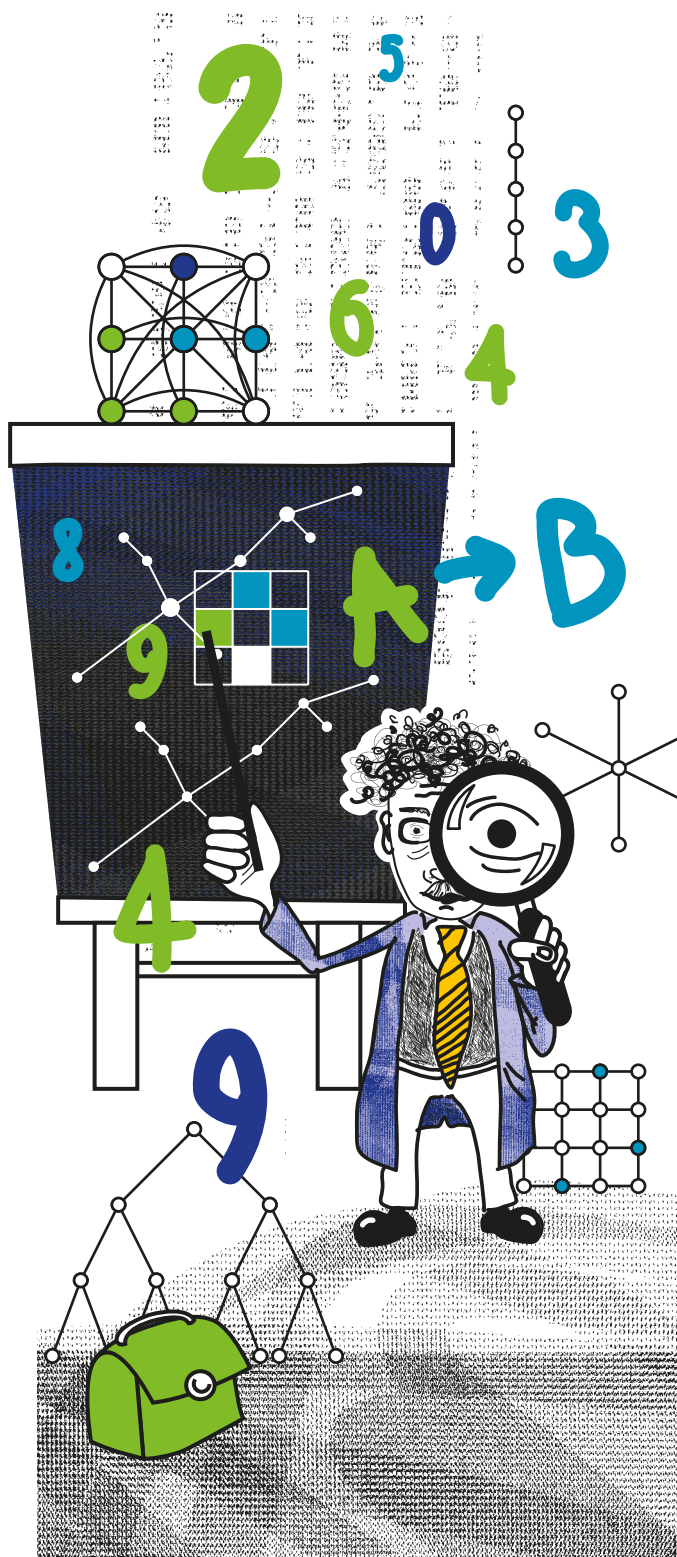
Sklep

Opazovanje, predvsem pa fotografiranje svetlikanja neba, je dokaj nezahtevno, zanj ne potrebujemo teleskopov ali kakšnega posebnega znanja. Tako se naravnega svetlikanja neba lahko loti prav vsak. Bistvena pa je izbira primerne opazovališča in še aktivno Sonce. Malo sreče pa zagotovo nikoli ne škodi.

× × ×

www.dmfa.si

www.dmfa-zaloznistvo.si



Dominantno število

↓↓↓

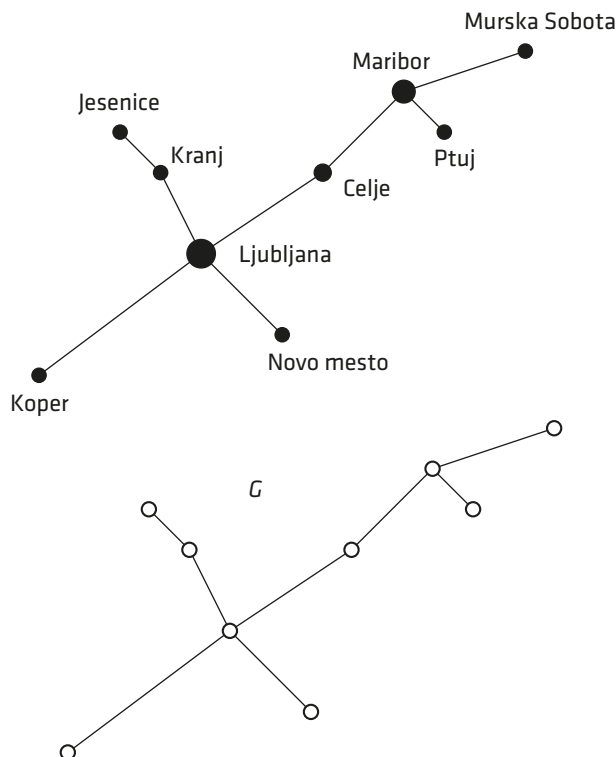
POLONA PAVLIČ

→ V času vse večjih podnebnih sprememb smo pričča naraščajočemu številu vremenskih ujm. Zadnja takšna se je v Sloveniji zgodila novembra 2012, ko so naše kraje zajele katastrofalne poplave. V takih primerih je dobro, da imajo vsaj večja mesta zagotovljene organizirane oblike pomoči, kot je npr. Civilna zaščita. Zaradi vsesplošnega varčevanja je jasno, da je potrebno enote pomoči postaviti po državi tako, da jih bo potrebnih čim manj, hkrati pa bodo te preudarno postavljene. V nadaljevanju se bomo vprašali, kako najti finančno ter prostorsko čim bolj ugodno rešitev za poljubno razporeditev mest v katerih naj bi bile enote za pomoč, ter povezav med njimi. Za manjši primer bi z nekaj razmišljanja lahko hitro našli ugodno rešitev zastavljenega problema. Za večje primere pa ne moremo več z gotovostjo trditi, da je naša rešitev najboljša možna – morda obstaja razporeditev z manj enotami. Poskusimo problem zapisati formalno in ugotoviti, kako se reši za splošen primer.

Matematični pogled

V jeziku veje matematike, ki jo imenujemo *teorija grafov*, lahko probleme tega tipa zapišemo takole: mislimo si, da mesta predstavimo s točko, imenujemo jo *vozlišče*. Ceste, ki vodijo od enega do drugega mesta, pa predstavimo s črto, imenujemo jo *po-*

vezava. Množico vseh vozlišč V (angleško *vertices*), skupaj s pripadajočimi povezavami E (angleško *edges*), imenujemo *graf* in ga označimo z $G = (V, E)$. Če med dvema vozliščema obstaja povezava, pravimo, da sta *sosednji*. Primer grafa za predstavitev zemljevida slovenskih mest, ki jih neposredno povezuje avtocesta, je prikazan na sliki 1.



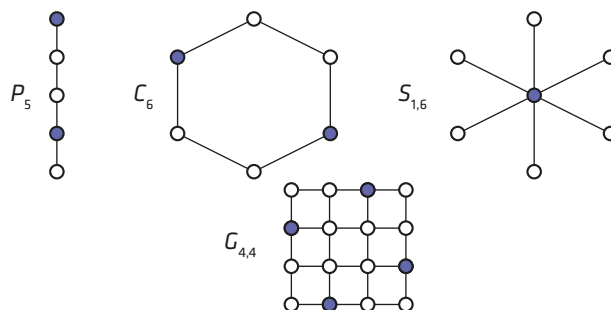
SLIKA 1.

Zemljevid večjih slovenskih mest in pripadajoči graf G

Za učinkovito postavitve organiziranih enot pomoči v mesta želimo pobarvati vozlišča pripadajočega grafa tako, da bo vsako vozlišče bodisi pobarvano samo bodisi bo sosednje s pobarvanim vozliščem. Pri tem pobarvano vozlišče pomeni, da je v tistem mestu na voljo enota pomoči, vsako mesto, ki ni pobarvano, pa mora imeti vsaj enega pobarvanega sosedo. To pomeni, da lahko v to mesto dovolj hitro pride pomoč. Množici tako pobarvanih vozlišč grafa pravimo *dominantna množica*. Številu vozlišč v dominantni množici, ki ima med vsemi možnimi dominantnimi množicami najmanj elementov, pravi-

vimo *dominantno število* grafa in ga označimo $\gamma(G)$. Dominantno množico, ki ima najmanjše možno število vozlišč ($\gamma(G)$), imenujemo *najmanjša dominantna množica*. Za vozlišče grafa bomo včasih rekli, da je *dominirano*, če je bodisi v dominantni množici bodisi je sosednje z vozliščem iz dominantne množice grafa. Za graf slovenskih mest na sliki 1 je dominantno število 3. Poskusite sami poiskati optimalno razporeditev enot za ta primer. Preverite tudi trditev, da z dvema vozliščema ne moremo zadostiti pogoju.

Na sliki 2 so obarvana vozlišča najmanjših dominantnih množic predstavljenih grafov. Prvi graf imenujemo poti na n vozliščih (v našem primeru je $n = 5$). Bi znali sami določiti dominantno število poti za poljubni n ? Opazimo lahko, da mora biti v dominantni množici vsaj vsako tretje vozlišče. Tako pridemo do rezultata $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Podobno velja tudi za grafe, ki jih imenujemo cikli na n vozliščih, C_n . Na drugem primeru na sliki 2 je cikel C_6 , katerega dominantno število je 2. Tretji graf na sliki je primer zvezde, $S_{1,n}$; v našem primeru je $n = 6$, v splošnem pa centralno vozlišče povežemo z n dodatnimi vozlišči. Očitno je za zvezdo vedno dovolj, da pobarvamo le centralno vozlišče. Torej je $\gamma(S_{1,n}) = 1$ za vsako naravno število n . Zadnji graf s slike 2 imenujemo mreža ali grid. Tukaj je določitev dominantnega števila nekoliko bolj zahtevna. Za primer na sliki je rezultat 4, medtem ko je bil rezultat za mrežo dolžine n vozlišč in širine m vozlišč dolga leta neznan, dokazan pa leta 2011.



SLIKA 2.

Dominantna števila poti, cikla, zvezde in mreže

Preden nadaljujemo, premislite še naslednje: Ali lahko v vsakem izmed primerov na sliki 2 najdete tudi tako dominantno množico, ki jo sestavljajo dru-

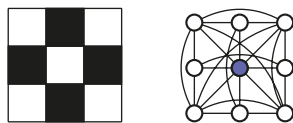


→ ga vozlišča grafa tako da bo ta množica še vedno najmanjša?

Dodajmo še, da je bil problem dominantnega števila pred časom že predstavljen v Preseku [1], vendar v nekoliko drugačni obliki. Avtor je predstavil, kako na šahovsko desko razporediti najmanjše število kraljic tako, da bodo kraljice pokrivalo vsako polje šahovnice – bodisi je na polju kraljica bodisi lahko do polja pride z dovoljenim premikom (levo, desno, gor, dol ali po diagonalah). Če vsakemu polju šahovnice priredimo svoje vozlišče, dve vozlišči pa povežemo s povezavo, kadar lahko s kraljico pridemo iz enega na drugo polje, bo tako dobljeni graf ustrezal premikom kraljice po šahovski plošči. Dominantno število takega grafa pa bo ravno najmanjše število kraljic, ki jih moramo razporediti na polja tako, da bo vsako polje bodisi pokrito s kraljico bodisi pa bo kraljica do tega polja lahko prišla (glej sliko 3).

SLIKA 3.

Graf kraljice za šahovsko desko velikost 3×3



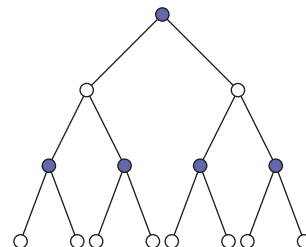
Določitev dominantnega števila je težek problem

S temo dominacije grafov se ukvarja veliko matematikov, napisanih je bilo že na tisoče člankov, zelo hitro pa je postalo jasno, da je problem določitve dominantnega števila grafa izjemno težek problem. Pravimo, da je ta problem, kot še mnogo zanimivih matematičnih problemov, NP-poln. To pomeni, da lahko za nekatere grafe z nekaj truda poiščemo dominantno število, vendar pa za poljubni graf tega ne moremo narediti, vsaj ne dovolj hitro (v polinomskem času). Dovolj hitro lahko samo preverimo, če je neka množica vozlišč res dominantna, to pa je tudi vse. Zato so se različni avtorji ukvarjali z določitvijo dominantnega števila nekaterih družin grafov. Tukaj bomo predstavili hiter algoritem (teče v linearnem času), ki poišče dominantno število drevesa. *Drevo* je povezan graf, ki je brez ciklov. Z drugimi besedami, v drevesu med poljubnima dvema vozliščema obstaja natanko ena pot (iz nekega vozlišča lahko prek ostalih vozlišč in povezav do drugega vozlišča pridemo na en sam način). Poseben primer drevesa, ki ga imenujemo tudi dvojiško drevo, je pri-

kazan na sliki 4. Tudi graf slovenskih mest iz slike 4 je primer drevesa.

SLIKA 4.

Dvojiško drevo in njegova najmanjša dominantna množica



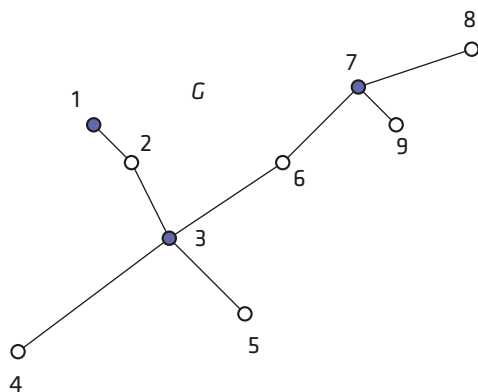
Algoritem za drevesa

Poglejmo sedaj kako najti najmanjšo dominantno množico za poljubno drevo T . Razdelimo njegova vozlišča v tri skupine, V_1, V_2 in V_3 . Pri tem vsako izmed vozlišč spada v natanko eno izmed skupin. Množico V_1 imenujemo množica *prostih vozlišč*, vozlišča iz V_2 naj bodo *mejna*, vozlišča iz V_3 pa *potrebna*. Za množico vozlišč D pravimo, da je *opcijsko dominantna množica*, če vsebuje vsa potrebna vozlišča (iz V_3) in dominira vsa mejna vozlišča (vsako vozlišče iz V_2 je sosednje z nekim iz D ali pa je v D). Za vozlišča iz V_1 ni pogojev, torej v opcijski dominantni množici niso niti nujno dominirana, lahko pa so ali v D ali pa sosednja z nekom iz D .

Razmislite, da je v primeru, ko je $V_1 = \emptyset$, $V_2 = V$ in $V_3 = \emptyset$, opcijsko dominantno število grafa enako običajnemu dominantnemu številu grafa. Zato algoritem za iskanje velikosti najmanjše opcijske dominantne množice grafa zadošča za iskanje dominantnega števila grafa.

Sedaj imamo pripravljeno vse, da se lahko lotimo algoritma za iskanje dominantnega števila drevesa. Izberimo poljubno vozlišče drevesa, imenujemo ga koren, in ga oštevilčimo z 1. Nato vsa nadaljnja vozlišča po vrsti oštevilčimo z zaporednimi naravnimi števili – najprej vse njegove sosesde, nato pa po vrstnem redu vse sosesde sosedov, itd. Tak način oštevilčevanja vozlišč je bil pred kratkim predstavljen pod imenom *pregled v širino* tudi v Preseku [3]. Podrobneje si za graf slovenskih mest ta postopek lahko ogledamo na sliki 5. Nadalje tvorimo polje *Starš* takole: korenu priredimo vrednost 0 ($\text{Starš}[1] = 0$), nato pa za vsako vozlišče povemo, katero od že pregledanih vozlišč je njegov sosed (starš). Za drevo s slike 5 imamo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Starš [i]	0	1	2	3	3	3	6	7	7



SLIKA 5.

Izvedba algoritma za drevo s slike 1

Sedaj bomo poskušali poiskati najmanjšo dominantno množico drevesa. To bomo naredili tako, da vsakemu vozlišču priredimo oznako, „prosto“, „mejno“ ali „potrebno“. To zapišemo v polje *Oznaka*. V začetku vsako vozlišče označimo kot „mejno“ in najmanjšo dominantno množico označimo z *D* ter jo zaenkrat pustimo prazno. Začnimo pri vozlišču *n*, torej zadnjem. Če je označeno kot „mejno“ (v začetku to gotovo je res), njegovega starša označimo kot „potrebno“, saj mora biti tudi to zadnje vozlišče dominirano. Nato nadaljujemo postopek na vozlišču *n* – 1. Če je označeno kot „mejno“, njegovega starša označimo kot „potrebno“, če pa je oznaka vozlišča *n* – 1 „potrebno“, to vozlišče dodamo v dominantno množico *D* ter njegovega starša označimo „prosto“, saj je to vozlišče že dominirano. Tak postopek nadaljujemo vse do korena. Če je koren označen „mejno“ ali „potrebno“, ga dodamo v dominantno množico, sicer pa smo že pred tem končali in dominirali celoten graf. Najmanjšo dominantno množico danega drevesa torej sestavljajo vsa vozlišča z oznako „potrebno“. Natančneje si lahko ta postopek ogledate v algoritmu 1.

Glede na to, da moramo v algoritmu samo prepotovati skozi vsa vozlišča drevesa (imamo le dve zaporedni zanki), bo ta algoritem zares tekel v zgoraj omenjenem linearnem času. Spremljajte, kako al-

Algoritem 1 Dominantno število drevesa

Vhod: Drevo *T*, ki je predstavljeno s poljem Starš [$1 \dots n$].

Izhod: Najmanjša dominantna množica *D* drevesa *T*, ki jo predstavljajo vozlišča *i* z Oznaka [*i*] = „potrebno“.

```

1:  $D \leftarrow \emptyset$ ;
2: za  $i = 1 \dots n$  naredi
3:   Oznaka [ $i$ ] = „mejno“;
4: konec
5: za  $i = n \dots 2$  naredi
6:   če Oznaka [ $i$ ] = „mejno“ potem
7:     Oznaka [Starš [ $i$ ]] = „potrebno“;
8:   sicer če Oznaka [ $i$ ] = „potrebno“ potem
9:      $D \leftarrow D \cup \{i\}$ ;
10:   če Oznaka [Starš [ $i$ ]] = „mejno“ potem
11:     Oznaka [Starš [ $i$ ]] = „prosto“;
12:   konec
13: konec
14: konec
15: če Oznaka [1] = „mejno“ ali Oznaka [1] = „potrebno“ potem
16:    $D \leftarrow D \cup \{1\}$ ;
17: konec
```

goritem 1 teče na primeru s slike 5, in videli boste, kako pridemo do obarvanih vozlišč – ta predstavljajo potrebna vozlišča, torej tista, ki tvorijo dominantno množico. Razmislite, ali ta postopek zares deluje, z drugimi besedami razmislite o tem, da je rešitev vedno najmanjša dominantna množica danega drevesa. Tukaj bomo podrobnosti izpustili.

Literatura

- [1] B. Brešar, *Kraljice napadajo!* Presek, 27 (1) 1999, 16–21.
- [2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi in P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [3] A. Taranenko, *Predstavitev grafa s seznamom sosedov in pregled v širino*. Presek, 39 (6) 2012, 27–30. [×](#) [×](#) [×](#)

www.presek.si

Totalni odboj

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ


SLIKA 1.

→ Valovanje se razširja po sredstvu, svetloba pa tudi po praznem prostoru. Smer valovanja opišemo z žarkom. Žarek je raven, dokler valovanje ne naleti na oviro; takrat se smer žarka spremeni zaradi uklona ali odboja. Smer žarka pa se spremeni tudi, ko valovanje naleti na mejo med sredstvoma, v katerih ima valovanje različni hitrosti. Na tej meji se del valovanja odbije po odbojnem zakonu, del pa ga preide v novo sredstvo, pri čemer se smer žarka spremeni po lomnem zakonu. Pri prehodu v sredstvo z večjo hitrostjo, se žarek zlomi stran od vpadne pravokotnice. V primeru, da bi bil kot lomljenega žarka večji od 90° , do loma ne pride, ampak se valovanje v celoti, totalno, odbije.

Svetloba ima v zraku hitrost $300\,000\text{ km/s}$, v vodi pa $230\,000\text{ km/s}$; če je kot med vpadnim žarkom svetlobe v vodi in pravokotnico na gladino vode večji od 49° , pride do totalnega odboja.


SLIKA 2.

Kozarec napolnjen z vodo in kapljo mleka. Voda tako postane motna in v njej lahko opazujemo potek laserskega curka.

Na sliki laserski curek z leve vstopa v kozarec, napolnjen z vodo, se na gladini totalno odbije ter kozarec zapusti na desni. Laserski curek v vodi lahko opazujemo zato, ker smo ji dodali kapljo mleka. Delci, ki zato lebdijo v vodi, povzročijo, da se svetloba močnejše sipa. Sipanje pomeni, da del svetlobe, ki gre mimo delcev v vodi, spremeni smer.

× × ×

www.presek.si
www.dmfa.si
www.dmfa-zaloznistvo.si

Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev.

John A. Adam:

**MATEMATIČNI
SPREHODI V
NARAVO**

280 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

27,31 EUR

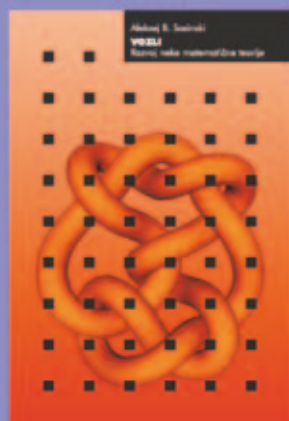


Stephen Senn:

**KOCKANJE S
SMRTJO,**
Slučajnost, tveganje
in zdravje

296 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR

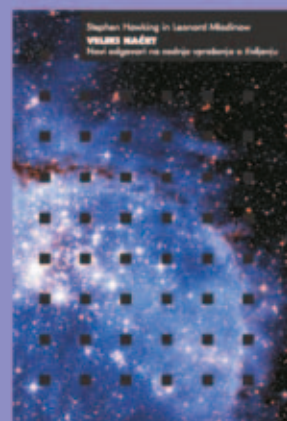


Aleksej B. Sosinski:

VOZLI,
Razvoj neke
matematične
teorije

160 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR



**Stephen Hawking in
Leonard Mlodinow:**

VELIKI NAČRT,
Novi odgovori na
zadnja vprašanja o
življenju

164 strani
format 14 x 20 cm
mehka vezava

18,69 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 45 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjižnice tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.