PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 1
Strani 48–52

Aleksander Turnšek:

VSOTA POTENC NARAVNIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1284-Turnsek.pdf

VSOTA POTENC NARAVNIH ŠTEVIL

Bralcem je verjetno znana formula za vsoto prvih n naravnih števil:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Dostikrat srečamo tudi formuli za vsoto kvadratov in kubov:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

in

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Opazimo, da se vsota prvih n naravnih števil izraža kot polinom druge stopnje, vsota kvadratov kot polinom tretje stopnje in vsota kubov kot polinom četrte stopnje. Vsakokrat je vsota polinom spremenljivke n, katerega stopnja je za 1 večja od eksponentov seštevanih potenc prvih n naravnih števil. V tem prispevku bi radi pokazali, da to ni slučajno, pokazali pa tudi, kako take formule izpeljemo.

Odvod polinoma

O odvodu polinoma je Presek že pisal v 6. številki letnika 1993-94. Ponovimo na kratko osnovna pravila.

Polinom ene spremenljivke je izraz oblike

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Če privzamemo, da je prvi koeficient a_n različen od nič, potem število n imenujemo stopnja polinoma P.

Odvod polinoma P je polinom P', ki ima za ena nižjo stopnjo kot polinom P. Pravila za odvajanje so naslednja:

(1) Odvod konstantnega polinoma je enak nič.
(2) Odvod potence x^k je enak kx^{k-1}.
(3) Odvod vsote polinomov je vsota odvodov. Torej $(P_1+P_2)' = P_1' + P_2'$.
(4) Odvod s konstanto c pomnoženega polinoma je s to isto konstanto pomnožen odvod prvotnega polinoma. Torej $(cP)' = cP'$.

Naj bo d realno število in k naravno število. Potem je izraz $(x+d)^k$ polinom stopnje k. Postavimo še peto pravilo.

(5) Odvod polinoma $(x+d)^k$ je enak $k(x+d)^{k-1}$.

Poglejmo si zgled računanja odvoda: Naj bo $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Z uporabo zgornjih pravil izračunajmo odvod polinoma

$$P(x + d) = (x + d)^2 + 2(x + d) - 3.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} P'(x + d) &= ((x + d)^2)' + (2(x + d)^1)' - (3)' = \\ &= 2(x + d) + 2((x + d)^1)' - 0 = \\ &= 2(x + d) + 2(x + d)^0 = 2(x + d) + 2. \end{aligned}$$

Sedaj si postavimo tole vprašanje: Kaj lahko povemo o polinomih $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ in $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, če sta njuna odvoda enaka? Po pravilih za odvajanje dobimo

$$n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 = m b_m x^{m-1} + \ldots + b_1.$$

Iz primerjave stopenj in koeficientov dobimo $m = n$ in $a_j = b_j$ za vsak j med 1 in n. Edino za koeficienta a_0 in b_0 ne moremo trditi, da sta enaka. Torej, če sta odvoda dveh polinomov enaka, se ta dva polinoma razlikujeta kvečjemu pri konstantnem členu. Pokažimo sedaj izrek:

Izrek. *Naj bo d realno število različno od nič in k naravno število. Potem obstaja polinom P stopnje $k + 1$, tako da velja*

$$P(x + d) - P(x) = (x + d)^k.$$

Dokaz. Dokazovali bomo z indukcijo. Najprej naj bo $k = 1$. Vzemimo polinom $p(x) = \frac{1}{2d}x^2 + \frac{1}{2}x + a_0$, kjer je število a_0 poljubno. Potem izračunamo

$$p(x + d) - p(x) = \frac{1}{2d}(x + d)^2 + \frac{1}{2}(x + d) - \frac{1}{2d}x^2 - \frac{1}{2}x = x + d.$$

Torej smo za $k = 1$ tak polinom že našli. Denimo, da smo našli polinom $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ stopnje k, tako da velja

$$p(x + d) - p(x) = (x + d)^{k-1}.$$

Potem je a_0 spet poljuben, saj se v izrazu $p(x+d)-p(x)$ odšteje. Vzemimo polinom

$$P(x)=\frac{1}{k+1}a_k x^{k+1}+\frac{1}{k}a_{k-1}x^k+\ldots+\frac{1}{2}a_1x^2+a_0x.$$

Polinom P je izbran tako, da je njegov odvod enak polinomu p. Potem je $P(x+d)-P(x)$ polinom, katerega odvod je enak $p(x+d)-p(x) = (x+d)^{k-1}$. Toda tudi odvod polinoma $\frac{1}{k}(x+d)^k$ je enak $(x+d)^{k-1}$. Torej se polinoma $P(x+d)-P(x)$ in $\frac{1}{k}(x+d)^k$ razlikujeta kvečjemu za konstantni člen. Tedaj lahko zapišemo

$$P(x+d)-P(x)=\frac{1}{k}(x+d)^k+c.$$

V dobljeni izraz vstavimo $x=-d$ in dobimo $P(0)-P(-d)=c$. Nadalje je $P(0)=0$ in

$$P(-d)=\frac{1}{k+1}a_k(-d)^{k+1}+\frac{1}{k}a_{k-1}(-d)^{k-1}+\ldots+\frac{1}{2}a_1d^2-a_0d.$$

Toda a_0 imamo še na razpolago, zato ga določimo tako, da bo $P(-d)=0$. Potem pa je $c=0$. Polinom kP je stopnje $k+1$ in zanj velja

$$kP(x+d)-kP(x)=(x+d)^k.$$

Indukcijski korak je narejen in dokaz je končan.

V enačbo $P(x+d)-P(x)=(x+d)^k$ vstavimo po vrsti $x=a-d, a, a+d, \ldots, a+(n-2)d$. Dobimo

$$\begin{aligned}
P(a)-P(a-d)&=a^k\\
P(a+d)-P(a)&=(a+d)^k\\
P(a+2d)-P(a+d)&=(a+2d)^k\\
&\vdots\\
P(a+(n-1)d)-P(a+(n-2)d)&=(a+(n-1)d)^k\,.
\end{aligned}$$

Zgornje enačbe seštejemo in dobimo

$$P(a+(n-1)d)-P(a-d)=a^k+(a+d)^k+\ldots+(a+(n-1)d)^k,$$

kjer je polinom P stopnje $k+1$. Povejmo še drugače. Formula za vsoto

$$a^k + (a+d)^k + \ldots + (a+(n-1)d)^k$$

k-tih potenc aritmetičnega zaporedja je oblike $P(a+(n-1)d) - P(a-d)$, kjer je P polinom stopnje $k+1$. Kako formulo res izpeljemo, si poglejmo na nekaj primerih.

Izpeljimo formulo za vsoto $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$. Tukaj je $a = 1$ in $d = 2$. Vzemimo polinom $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ stopnje 3 in zapišimo

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 &= P(2n-1) - P(-1) = \\ = a_3(2n-1)^3 + a_2(2n-1)^2 &+ a_1(2n-1) + a_0 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0. \end{aligned}$$

V zgornjo enačbo vstavimo $n = 1, 2, 3$ in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2a_3 + 2a_1 &= 1 \\ 28a_3 + 8a_2 + 4a_1 &= 10 \\ 126a_3 + 24a_2 + 6a_1 &= 35\,. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $a_1 = \frac{1}{2}(1 - 2a_3)$ in ga vstavimo v preostali dve enačbi. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 24a_3 + 8a_2 &= 8 \\ 120a_3 + 24a_2 &= 32\,. \end{aligned}$$

Postopamo enako kot prej. Iz prve enačbe izrazimo $a_2 = 1 - 3a_3$ in vstavimo v drugo. Dobimo enačbo $48a_3 = 8$. Torej je $a_3 = \frac{1}{6}$. Nadalje je $a_2 = \frac{1}{2}$ in $a_1 = \frac{1}{3}$. Tako smo izpeljali formulo

$$\begin{aligned} 1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 &= \frac{1}{6}(2n-1)^3+\frac{1}{2}(2n-1)^2+\frac{1}{3}(2n-1)+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \\ &= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1). \end{aligned}$$

Tudi formulo za vsoto potenc naravnih števil izpeljemo enako. Po zgornjih ugotovitvah je

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k = P(n) - P(0),$$

saj je $a = d = 1$, stopnja polinoma P pa je enaka $k+1$. Če zapišemo $P(x) = a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_1 x + a_0$, je

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k = a_{k+1}n^{k+1} + \ldots + a_1 n.$$

V enačbo vstavimo po vrsti $n = 1, 2, \ldots, k+1$ in dobimo $k+1$ enačb za $k+1$ neznank.

Za primer $k = 1$ dobimo enačbi

$$a_2 + a_1 = 1 \qquad \text{in} \qquad 4a_2 + 2a_1 = 3.$$

Iz prve enačbe dobimo $a_1 = 1 - a_2$. Vstavimo v drugo enačbo in dobimo $2a_2 = 1$.Torej je $a_2 = a_1 = \frac{1}{2}$ in

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

dobro znana formula za vsoto prvih n naravnih števil.

Enako izračunamo formule za vsote višjih potenc naravnih števil. Formuli za vsoto kvadratov in kubov smo navedli že na začetku prispevka. Formuli za vsoto četrtih in petih potenc pa se glasita

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

in

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

Aleksej Turnšek