

Utemeljevanje pri pouku matematike

Prejeto 27.11.2020 / Sprejeto 26.02.2021

Znanstveni članek

UDK 37.091.31:51+164

KLJUČNE BESEDE: matematika, utemeljevanje, kritično mišljenje, nacionalno preverjanje znanja

POVZETEK – Argumentiranje oz. utemeljevanje pri matematiki se kot ena izmed veščin kritičnega mišljenja preverja z nalogami na nacionalnem preverjanju znanja vsaj od leta 2006 dalje. Pri nalogah utemeljevanja se prepletata tako vidik matematične kot tudi vidik bralne pismenosti. Dober pokazatelj za ugotavljanje morebitnih razlik v dosežkih učencev 6. in 9. razreda je reševanje takih nalog na nacionalnem preverjanju znanja matematike. V prispevku smo se osredotočili na reševanje tistih nalog, ki so bile dane na nacionalnem preverjanju znanja v letih 2016 in 2019, saj smo med drugim želeli ugotoviti, ali so učenci od 6. do 9. razreda kaj napredovali. Analizirali smo uspešnost reševanja nalog glede na pravilnost oz. nepravilnost reševanja ter glede na to, ali so se učenci sploh lotili reševanja. Pregledali smo tipične napake, ki so jih učenci naredili pri reševanju, ter različne primere pravilno rešenih nalog. Ugotavljamo, da bi bilo potrebno v pouk matematike vpeti take didaktične pristope in strategije, ki bi izboljšali uspešnost reševanja nalog utemeljevanja pri matematiki.

Received 27.11.2020 / Accepted 26.02.2021

Scientific paper

UDC 37.091.31:51+164

KEYWORDS: mathematics, reasoning, critical thinking, National Assessment of Knowledge

ABSTRACT – As a critical thinking skill in elementary education, reasoning or substantiation has been verified with a task in the National Assessment of Knowledge at least since 2006. In reasoning tasks, both the aspects of mathematical and of reading literacy are intertwined. Solving such tasks in the National Assessment of the Knowledge of Mathematics is a good indicator for identifying possible differences in the achievements of sixth and ninth grade pupils. In the paper we focused on the same tasks that appeared in the National Assessment of Knowledge in 2016 and 2019, as we wanted to find out, among other things, whether pupils from sixth to ninth grade had made any progress. The success in solving the tasks was analysed according to whether the tasks were solved correctly or not and whether the pupils had attempted solving them at all. Typical errors that pupils had made while solving the tasks and various examples of correctly solved tasks were reviewed. We have found that it would be necessary to incorporate such didactic approaches and strategies into the teaching of mathematics, as that would improve the success rate of solving reasoning tasks in mathematics.

1 Uvod

Utemeljevanje kot ena izmed pomembnih veščin kritičnega mišljenja postaja vse bolj pomembno v vsakdanjem življenju, zato ga vključujemo v učni proces in sistematično razvijamo. Prav utemeljevanje postopkov in strategij reševanja problemov bi moralo biti vodilo pri pouku matematike (Špijunović, Maričić, 2011, str. 73). Kritično mišljenje naj bi namreč bilo izjemnega pomena za reševanje problemov in raziskovanje problemskih situacij (Thompson, 2011, str. 1), saj učence spodbuja k samostojnemu razmišljanju in sklepanju ter reševanju problemov tako v šoli kot v vsakdanjem življenju (Jacob, 2012, str. 803). Tudi v okviru terciarnega izobraževanja je zaznati potrebo po povezovanju matematike z različnimi strokovnimi področji in poudarjanje uporabe matematike pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja (Kosi Ulbl, 2014, str. 94).

Sposobnosti kritičnega in ustvarjalnega mišljenja so temelj za učenje matematike in njeno uporabo, da torej učenci pristno razumejo matematiko, učinkovito rešujejo probleme in znajo postopke ter rešitve utemeljiti. Z reševanjem problemov in utemeljevanjem učenci matematično razmišljajo, hkrati pa usvajajo in vrednotijo svoje znanje ter odkrivajo nove strategije (Tunca, 2015, str. 182). Spretnosti kritičnega mišljenja si lahko predstavljamo kot informacijske procese, ki človeku omogočajo, da oceni oziroma presodi, ali so neke informacije primerne za pripravo argumenta utemeljevanja oziroma za rešitev nekega problema (ACARA, 2013), saj zajemajo primerjavo, kategoriziranje, analiziranje in vrednotenje (Tunca, 2015, str. 193). Te sposobnosti razmišljanja so bistvene za “matematično delovanje”, da torej učenci svoje utemeljitve gradijo na logičnem sklepanju (Yuliani, Saragih, 2015, str. 127).

Kljub pomembnosti utemeljevanja kot veščine kritičnega mišljenja večina učenja in poučevanja v procesu šolanja temelji na pomnjenju, kar učence vodi do manj samostojnega kritičnega razmišljanja (Cobb, Wood, Yackel in McNeal, 1992, str. 590). Pisnemu in ustnemu oblikovanju utemeljitve je namenjeno premalo pozornosti, kar potrjuje tudi longitudinalni pregled dosežkov učencev pri nalogah utemeljevanja na nacionalnem preverjanju znanja matematike, pri katerem se je izkazalo, da učenci slabše rešujejo tovrstne naloge. Veščina utemeljevanja sloni na oblikovanju utemeljitve oz. argumenta, tj. da neko trditev učenec podkrepi z relevantnimi dokazi.

2 Teoretična izhodišča

Utemeljevanje je omenjeno v vseh učnih načrtih matematike za vse stopnje šolanja (Magajna, 2012, str. 26). Učni načrt za matematiko za osnovno šolo (Učni načrt, 2011) zagotavlja okvire za umestitev tvorjenja utemeljitev znotraj pouka matematike. Že učenci 3. razreda naj bi *analizirali in obnovili problem s svojimi besedami ter utemeljili rešitev*, ko gre za reševanje matematičnega problema in problema z življenjskimi situacijami, učenci 6. razreda pa naj bi *opredelili in utemeljili kriterij urejanja podatkov*.

Med didaktičnimi priporočili drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja je pri temi Druge vsebine zapisano: “*Učenci naj utemeljijo postopke dela, analizirajo rešitev, se ustno in pisno izražajo, narišejo skico, pripravijo model (papir, vrvice idr.)*”. Med didaktičnimi priporočili tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja pa: “*Pri prikazovanju podatkov spodbujamo utemeljevanje izbire prikaza za prikazovanje podatkov*.” V zaključnih poglavjih je pri napotkih za uresničevanje ciljev predmeta navedeno: “*Pri raziskovanju in reševanju problemov se učenci učijo: povezovati znanje znotraj matematike in tudi širše (interdisciplinarno), postavljati ključna raziskovalna vprašanja, ki izhajajo iz življenjskih situacij oziroma so vezana na raziskovanje matematičnih problemov, kritično razmišljati o potrebnih in zadostnih podatkih, interpretirati, utemeljiti, argumentirati rešitve, posploševati in abstrahirati*.” Utemeljevanje je omenjeno pri dejavnostih za razvoj matematične in drugih kompetenc (Učni načrt, 2011). Ugotavljamo, da učni načrt za matematiko v osnovni šoli spodbuja utemeljevanje poteka reševanja, dobljenih rešitev računskih postopkov in geometrijskega načrtovanja ter utemeljevanje sprejetih odločitev. Utemeljevanje je eden od procesnih ciljev, ki jih uresničujemo v vseh fazah učnega procesa.

Zapis matematičnih besedil, med njimi tudi zapis utemeljitve, je močno orodje, ki ga lahko učitelj uporabi kot uvid v učenčevo razmišljanje in iskanje vrzeli v znanju. Ključna je izbira ustreznih dejavnosti, ki učence spodbujajo, da na ustrezne načine predstavijo, razložijo in povzamejo proces reševanja problemov ter njihovega matematičnega razmišljanja, da oblikujejo lastne matematične trditve, ki jih preverijo in utemeljijo. Pristop, ki je usmerjen k učencu, temelji na aktivnih metodah dela, kot so raziskovanje, sklepanje in utemeljevanje, kar spodbuja razvoj problemskih znanj (Mešinović, Cotič, Žakelj, 2017, str. 61).

Magajna (2012, str. 29–33) opisuje pet značilnih načinov utemeljevanja, ki jih uporabljamo pri obravnavi vsebin v šolski matematiki, pri čemer preide od utemeljevanja s primeri in z vpogledom do dokazovanja, ki ga uvajamo v srednješolski matematiki. Na izbor načina utemeljevanja vpliva predhodno znanje učencev, zahtevnost in prepričljivost utemeljitve. V nadaljevanju Magajna (2012, str. 33–34) poudarja, da je ključno vprašanje, ki si ga mora učitelj zastaviti, kakšna bo vloga utemeljitve oz. dokaza.

Hanna (2000, str. 8) navaja različne namene utemeljevanja oziroma dokazovanja pri pouku matematike. Ti so: potrjevanje pravilnosti trditve; razlaganje (pojasnjevanje), zakaj določena trditev drži; povezovanje in sistemizacija znanj (ureditev različnih rezultatov); raziskovanje oz. odkrivanje novih rezultatov; komuniciranje (sporočanje matematičnega znanja z zapisom utemeljitve); raziskovanje smiselnosti novih definicij in pogojev, pri katerih trditev drži; konstruiranje empiričnih teorij; vključevanje znanih dejstev v povsem nov okvir in s tem pogled na znana dejstva z nove perspektive.

Utemeljevanje razumemo kot uporabo argumentov v podporo odgovoru, s pomočjo katerih verodostojno pojasnimo, zakaj neka trditev drži oz. ne drži. Utemeljevanje je torej pojasnjevanje, kjer učeči se pojasnijo svoj odgovor oz. utemeljijo svojo rešitev. V osnovnošolskem izobraževanju utemeljevanje razumemo kot širši nabor argumentov, ki jih učenci uporabijo z namenom, da potrdijo domnevo. Argumenti, ki jih učenci uporabijo pri utemeljitvi pravilnega odgovora, so v bistvu utemeljitve.

Chua (2017, str. 118) po modelu DIVINE – Decision, Inference, Validation, Elaboration (tabela 1) predstavi vrsto in namen nalog utemeljevanja ter pričakovani dosežek, ki ga bodo posamezniki morali doseči, da bodo tvorili pravilno utemeljitev.

Tabela 1

Model DIVINE (Chua, 2017)

<i>Vrsta nalog utemeljevanja</i>	<i>Namen nalog utemeljevanja</i>	<i>Pričakovani dosežek utemeljitve</i>
Odločanje	Pojasnite, ali ... Pojasnite, kateri ...	Odločitev o matematični trditvi z dokazi, ki trditev podpirajo ali ovržejo.
Sklepanje	Pojasnite, kaj ...	Pomen matematičnega rezultata s ključnimi besedami v obravnavani nalogi.
Potrjevanje	Pojasnite, zakaj ...	Razlogi ali dokazi, ki podpirajo ali ovržejo matematično trditev.
Izvajanje	Pojasnite, kako ...	Jasen opis metode ali strategije, ki je uporabljena za pridobitev matematičnega rezultata/rešitve.

Naloge utemeljevanja zahtevajo od reševalca, da uporabi različne miselne procese; po modelu DIVINE so to odločanje, sklepanje, potrjevanje in izvajanje. Namen naloge utemeljevanja je, da se pojasni matematično trditev. Pričakovani dosežek pri utemeljitvi je odvisen od vrste naloge in opredeljuje, kaj mora zapis vsebovati.

Naloge odločanja so take, da pojasnimo neko trditev ali izmed ponujenih trditev izberemo ustrezno. Naloge sklepanja se nanašajo na pojasnjevanje matematičnega rezultata. Pri nalogah potrjevanja navajamo razloge, s katerimi podpremo ali zavrnemo neko trditev. Naloge izvajanja so tiste, kjer pojasnimo metode in strategije, s katerimi smo prišli do rezultata.

Kazemi in Hintz (2014, str. 56–58) opisujeta štiri načine, kako učenci utemeljujejo trditve. Utemeljujejo lahko z znano utemeljitvijo, pri čemer uporabijo strategijo utemeljevanja, kakor jo je uporabil nekdo drug. Učenci lahko uporabijo različne primere in tako preizkušajo pravilnost uporabljene strategije ali pa s splošnim primerom razložijo svoje razmišljanje. Utemeljevanje, ki sloni na logiki oziroma izjavnem računu, je za učence težavno, redkokdaj ga v pravem smislu srečamo v srednji šoli.

3 Raziskava

3.1 Namen raziskave

Zanimalo nas je, kako so v reševanju nalog utemeljevanja uspešni učenci 6. razreda in kako učenci 9. razreda ter ali je pri učencih 9. razreda viden napredek glede na uspeh v 6. razredu.

3.2 Metodologija

Glede na namen raziskave smo natančneje analizirali uspešnost reševanja dveh nalog iz NPZ matematike, ki sta v letih 2016 in 2019 v procesu reševanja zahtevali utemeljevanje. Iz *Letnih poročil o NPZ* ter *Opisov dosežkov* za šolski leti 2015/16 in 2018/19 (RIC, 2016, 2019) smo pridobili naslednje podatke:

- število učencev, ki so se udeležili NPZ,
- cilj, ki ga je posamezna naloga preverjala,
- vsebinsko področje matematike, v katerega je bila naloga umeščena,
- taksonomsko stopnjo,
- indeks težavnosti (IT),
- indeks diskriminativnosti (ID) ter
- območje, v katerega je bila naloga razporejena.

Iz Državnega izpitnega centra smo pridobili podatke, koliko učencev je nalogo rešilo pravilno oz. nepravilno in koliko učencev se ni lotilo reševanja naloge. Posredovali so nam tudi druge statistične podatke, ki smo jih uporabili pri pisanju tega članka.

Število učencev (tabela 2), vključenih v NPZ matematike v izbranih letih, nakazuje, da so pridobljeni podatki reprezentativni.

Tabela 2

Število učencev, ki so pisali NPZ matematike v letih 2016 in 2019

6. razred (redni rok NPZ)		9. razred (redni rok NPZ)	
Leto	Število učencev	Leto	Število učencev
2016	16110	2016	16653
		2019	16744

Analizirali smo tudi napake in načine reševanja nalog utemeljevanja v 100 naključno izbranih preizkusih iz leta 2016, tako za 6. kot 9. razred.

3.3 Nalogi utemeljevanja

Predmetna komisija za matematiko je leta 2016 v Nacionalni preizkus znanja matematike za 6. in 9. razred uvrstila enako nalogo, pri kateri so učenci utemeljevali svoj odgovor. V letu 2019 je bila v preizkus za 9. razred uvrščena naloga, ki je zahtevala zapis pravila danega zaporedja, s čimer utemeljujemo, zakaj dana števila dejansko oblikujejo zaporedje. V nadaljevanju predstavljamo nalogi.

Naloga utemeljevanja, 2016: 9. razred/naloga 3. c) in 6. razred/naloga 10. c)

Na kmetiji so nabrali 0,75 tone jabolk.

- ☐ Nekaj nabranih jabolk so preložili v zaboje. Napolnili so 50 zabojev po 5 kg in 25 zabojev po 15 kg. Koliko kilogramov jabolk niso preložili v zaboje?
- ☐ Vsa nabrana jabolka bi lahko zložili v 30 zabojev, če bi v vsak zaboj dali enako količino jabolk. Koliko kilogramov jabolk bi bilo v vsakem zaboju?
- ☐ Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Naloga utemeljevanja, 2019: 9. razred/naloga 7.b.2 (zapis pravila)

Vpiši manjkajoče število in zapiši pravilo, po katerem je zaporedje oblikovano.

$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-2\frac{1}{4}$
----------------	---------------	----------------	--	-----------------

Pravilo: _____

Besedilo naloge vključuje matematično simboliko (merske enote in merska števila, zapis ulomkov) in besede iz vsakdanjega življenja (npr. kmetija, jabolka, zaboj). Pri odgovoru učenec izhaja iz predhodno narejenega računskega postopka oz. druge ustrezne strategije reševanja, v zapisu odgovora oz. utemeljitve uporablja matematično terminologijo in simboliko.

Nalogi sta bili umeščeni v temo *druge vsebine* iz učnega načrta, v sklop *matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami*. Cilj naloge je, da “(učenec) razvija kritični odnos do podatkov in rešitve” in “prepozna pravilo v vzorcu, poišče posplošitev in zapiše algebrski izraz”.

Glede na Gagnejevo taksonomijo so bile naloge, kjer se zahteva utemeljevanje, razporejene v 4. stopnjo, to je k reševanju in raziskovanju problemov. Nalogo je uspešno rešila četrtnina učencev 6. razreda ter dobra tretjina učencev 9. razreda (tabela 3 in tabela 4). Opazimo, da je razlika v indeksu težavnosti (IT) opazna. Indeks diskriminativnosti (ID) nakazuje, da so nalogo uspešneje reševali učenci, ki so na NPZ dosegli višji dosežek. To potrjuje dejstvo, da se je v obeh razredih v letu 2016 naloga uvrstila v t. i. modro območje, v modro območje se je uvrstila tudi naloga v letu 2019. Modro območje označuje 10% učencev, katerih skupni dosežki so v zgornji desetini dosežkov (Cankar, Semen, Knežević, Urank 2020, str. 58).

Tabela 3

IT in ID pri enakih nalogah v letu 2016

2016	IV. Reševanje in raziskovanje problemov			
	6. razred, naloga 10. c)		9. razred, naloga 3. c)	
	IT	ID	IT	ID
	0,25	0,44	0,36	0,47

Tabela 4

IT in ID pri nalogi iz leta 2019

2019	IV. Reševanje in raziskovanje problemov	
	9. razred, naloga 7.b.2	
	IT	ID
	0,35	0,53

Predmetna komisija za matematiko ugotavlja, da imajo učenci 6. in 9. razreda težave z utemeljevanjem rezultata. Izkušenj iz realnega sveta ne znajo prenesti v strategijo reševanja realističnih problemov (RIC, 2016, str. 290). Učenci ne znajo korektno ubesediti pravila danega zaporedja (RIC, 2019, str. 302).

Dober pokazatelj za ugotavljanje morebitnih razlik v dosežkih učencev 6. in 9. razreda so enake naloge. V nadaljevanju natančneje prikažemo uspešnost reševanja predstavljenih nalog in primerjamo reševanje v 6. in 9. razredu.

4 Rezultati in interpretacija

Nalogo utemeljevanja je v letu 2016 pravilno rešila slaba četrtnina učencev 6. razreda (24,5%). V 9. razredu je nalogo utemeljevanja v obeh letih (2016 in 2019) pravilno

rešila dobra tretjina učencev (36,3 % in 34,7 %). Delež učencev šestega razreda, ki se niso lotili reševanja naloge, je podoben deležu učencev, ki so nalogo rešili pravilno. V 9. razredu se je delež učencev, ki se niso lotili reševanja naloge, povečal iz 15,2 % v letu 2016 na 26,4 % v letu 2019.

Malo več kot polovica učencev 6. razreda je nalogo rešila napačno (52,2 %). Učencev 9. razreda, ki so nalogo rešili napačno, je bilo v letu 2016 nekaj manj kot 50 %, v letu 2019 pa nekaj manj kot 40 % (tabela 5 in tabela 6). Približno tri četrtine učencev 6. razreda pri reševanju nalog utemeljevanja torej ni bilo uspešnih, medtem ko je bil delež neuspešnih učencev v 9. razredu v obeh letih okoli dveh tretjin, kar nakazuje, da se po treh letih šolanja delež učencev, ki nalogo rešijo pravilno, zviša.

Učenci, ki so leta 2016 pisali nacionalno preverjanje znanja matematike v 6. razredu, so v letu 2019 pisali nacionalno preverjanje znanja v 9. razredu. Zato lahko na isti generaciji učencev ugotovljamo napredek, ki se izkazuje v zmanjšanju deleža učencev, ki so nalogo utemeljevanja rešili napačno, in večanju deleža učencev, ki so nalogo rešili pravilno. Delež učencev, ki se ne loti reševanja, ostaja približno enak.

Tabela 5

Delež učencev, ki so nalogo rešili pravilno ali napačno oziroma je niso reševali (za leto 2016)

2016	Delež učencev v %	
	6. razred	9. razred
Naloga	10. c)	3. c)
Niso reševali (0 točk)	23,3	15,2
Napačno rešili (0 točk)	52,2	48,5
Pravilno rešili (1 točka)	24,5	36,3

Tabela 6

Delež učencev, ki so nalogo rešili pravilno ali napačno oziroma je niso reševali (za leto 2019)

2019	Delež učencev v %	
	9. razred	
Naloga	7.b.2	
Niso reševali (0 točk)	26,4	
Napačno rešili (0 točk)	38,9	
Pravilno rešili (1 točka)	34,7	

Utemeljitive, ki so bile ustrezne, so se lahko med seboj razlikovale, kar je bilo nakazano tudi v moderiranih navodilih za vrednotenje. Navajamo navodila za vrednotenje naloge iz leta 2016, ki jo podrobneje predstavljano v nadaljevanju (slika 1).

Slika 1*Navodila za vrednotenje*

Smiselna utemeljitev. Npr.: – ne, saj 750 ni deljivo z 18, – ne, utemeljeno z računom $750 : 18 = 41,6$ in zapisom, da količnik ni naravno število oz., da se deljenje ne izide.	Učence točke 3. c) ne dobi, če je v odgovoru zapisano število jabolk (npr.: ostane 12 jabolk).
--	--

Izmed 100 naključno izbranih preizkusov iz leta 2016, tako za 6. kot 9. razred, izpostavljamo nekaj pravih primerov reševanja.

A) V utemeljitvi je omenjen večkratnik oz. delitelj števila.

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev: *Ne, ker 18 ni delitelj števila 750 in nekaj jabolk ostane.*

$$\begin{array}{r} 750 : 18 = 41 \\ 30 \\ 12 \text{ ost.} \end{array}$$



10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Ne, ker 18 ni večkratnik števila 18 in bi nekaj kg jabolk ostalo.



3. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

750 kg : 18 kg =
Ne, saj števili 750 in 18 nista deljivi, oz. 750 ni večkratnik števila 18.



B) Sklicevanje na "ni deljivo".

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Ne, ne bi mogli, ker

$$750 \text{ kg} : 18 = 41,6$$

$$\begin{array}{r} 750 \\ -72 \\ \hline 30 \\ -18 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\frac{18 \cdot 4}{72} \quad \frac{18 \cdot 3}{54}$$

$$\frac{18 \cdot 2}{36}$$



C) Omenjen je ostanek pri deljenju.

3. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Ne, ker imam 12 kg jabolk ostane, če zapolnimo 41 zabojev, tako da ima vsak 18 kg jabolk.

$$750 : 18 = 41$$

$$\begin{array}{r} 750 \\ -72 \\ \hline 30 \\ 12 \end{array}$$



D) Ob računskem postopku je praktično razloženo, zakaj to ni mogoče.

3. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Ne, vsi zaboji ne bi bili polni. 41 bi jih bilo polnih, eden pa le delno, zato ta predlog ni mogoč.

$$\frac{18 \cdot 7}{126} \quad \frac{18 \cdot 6}{108} \quad 750 \text{ kg} : 18 \text{ kg} = 41,6$$

$$\begin{array}{r} 750 \\ -72 \\ \hline 30 \\ 120 \end{array}$$



3. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

$$750 \text{ kg} : 18 \text{ kg}$$

$$\begin{array}{r} 750 : 18 = 41,67 \\ =30 \\ 12,0 \\ 140 \end{array}$$

Ne bi mogli, ker pride rezultat kot $\frac{18 \cdot 4}{72}$ decimalka, ~~in~~ zaboja pa ne moremo tako razdeliti.



E) Sklicevanje, da se deljenje ne izide oz. da pri deljenju ne dobimo celega števila.

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

$750 \text{ kg} : 18 \text{ kg} = 41, \overline{6}$
 Neki mogli bi ostanejo jabolka in $\overline{6}$
 Zdeli se $750 : 18$ ne dobis celega števila.



Možni vzroki, da učenci ne poskusijo reševati naloge oz. da nalogo rešijo napačno, so: učenci ne razumejo pomena besed oz. navodila “utemelji”, imajo težave pri pisnem sporočanju (tvorjenju in zapisu utemeljitve), nedosledno uporabljajo matematično terminologijo in simboliko. Utemeljevanje je za učence zahtevno, ker pri utemeljitvi potrebujejo dobro poznavanje vsebin matematike (konceptualno znanje) in veščine zapisa utemeljitve (procesno znanje). Učenci so premalokrat izpostavljeni smiselnim nalogam, ne pridobivajo izkušenj z zapisom utemeljitve, učiteljem primanjkuje izkušenj in teoretičnih osnov za razvoj utemeljevanja pri pouku matematike (Magajna, 2012, str. 26–34). Učitelji bi morali poleg teoretičnega znanja o domnevanju, posploševanju in utemeljevanju pridobiti tudi didaktično pedagoško znanje za spodbujanje teh veščin med svojimi učenci (Lesseig, 2016, str. 116).

4.1 Napake pri reševanju nalog utemeljevanja

Navajamo še najpogostejše napake pri reševanju, ki smo jih zaznali ob pregledu 100 naključno izbranih preizkusov iz leta 2016, tako za 6. kot 9. razred.

A) Zapisan odgovor na vprašanje, vendar brez zapisane utemeljitve.

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Ne.



B) Iz ustreznega računskega postopka sledi napačno zapisana utemeljitev.

3. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Da, lahko bi napolnili vse. $750 : 18 = 41, \overline{666}$
 $750 : 18 = 41, \overline{666}$



C) Odgovor je zapisan, a ne sledi iz računskega postopka deljenja.

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev: Ne me morejo, ker imajo premalo jabolk. X

D) Nerazumevanje vprašanja.

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev: Da bi razdelili in da bi imeli pravično razdeljeno jabolke. X

E) Navodilo ni prebrano z razumevanjem (spregledali besedo vsakem).

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev: Ja bi lahko, ~~ker~~ ^{0,75 · 8} _{6,60} ~~ne bi imamo dovolj jabolk.~~ X

F) Računski postopek deljenja je prav izveden. Ni ubesedene utemeljitve.

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev: $\hat{750}:18=41,6$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \underline{30} \\ 18 \\ \underline{120} \\ 108 \\ \underline{120} \end{array}$$

X

G) Pravilno začeto reševanje, a nedokončano (deljenje je nastavljeno in nedokončano, utemeljitev se začne in ni dokončana).

10. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Da lahko bivali v vsake zaboj

$$750 \text{ kg} : 18 \text{ kg} =$$



H) Računska napaka pri deljenju, napačen odgovor oz. neustrezna utemeljitev.

3. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

Ne, ko
nemoremo zato, ker se
rezultat ~~ne~~ izide
s celim številom.

$$750 : 18 = 53,2$$



Iz analize teh nalog ugotavljamo, da učenci v slovenskih osnovnih šolah nimajo razvitih veščin utemeljevanja pri matematiki, saj približno le četrtnina učencev 6. razreda nalogo reši pravilno, v 9. razredu pa približno tretjina (36,3 % oziroma 34,7 %). Najpogostejše napake sledijo iz napačnega razumevanja prebranega navodila naloge, napačnih računskih postopkov ter nezmožnosti korektnega zapisa ugotovitev.

4.2 Povezava med reševanjem nalog utemeljevanja in dosežkom na NPZ

Ugotovitev, da NPZ matematike omogočajo določeno longitudinalno analizo dosežkov (Magajna, Žakelj, 2012, str. 35) zaradi domišljene metodologije izdelave preizkusov, nas je napeljala, da v nadaljevanju primerjamo dosežke pri nalogah utemeljevanja z dosežki na NPZ matematike.

Omenili smo, da so nalogo utemeljevanja uspešneje reševali učenci, ki so na NPZ matematike dosegli višji rezultat (višje število doseženih točk). Povprečni dosežek učencev na NPZ matematike (tabela 7 in tabela 8), ki pri nalogi utemeljevanja dosežejo 0 točk (nalogo so rešili napačno), je skoraj 52 % v 6. razredu, medtem ko je v 9. razredu nekoliko nižji (okoli 48 %). Povprečni dosežek učencev, ki pri nalogi dosežejo 1 točko (nalogo rešijo prav), je okoli 70 % v 6. razredu, v 9. razredu pa okoli 66 %. Povprečni dosežek učencev, ki naloge ne rešujejo, je v 9. razredu med 29 % in 33 %, v 6. razredu pa je skoraj 37 %.

Tabela 7*Povprečni dosežek pri NPZ glede na reševanje naloge v letu 2016*

2016	Naloga		Število doseženih točk		
			0 točk	1 točka	ni reševal
6. razred	10. c)	povprečni dosežek v %	51,91	71,23	36,69
		standardni odklon	19,41	15,62	17,22
9. razred	3. c)	povprečni dosežek v %	47,41	66,11	29,86
		standardni odklon	18,88	16,93	16,70

Tabela 8*Povprečni dosežek pri NPZ glede na reševanje naloge v letu 2019*

2019	Naloga		Število doseženih točk		
			0 točk	1 točka	ni reševal
9. razred	7.b.2	povprečni dosežek v %	48,36	67,56	33,27
		standardni odklon	17,80	17,21	14,58

Za primerjavo navajamo povprečne dosežke NPZ matematike za 6. in 9. razred v letu 2016 ter za 9. razred v letu 2019 (tabela 9). Vidimo, da učenci 6. razreda, ki nalogo utemeljevanja pravilno rešijo, presežejo povprečni dosežek za nekaj manj kot 20 odstotnih točk. Pri učencih 9. razreda je ta presežek okoli 15 odstotnih točk. Ugotovljeno potrjuje, da naloge utemeljevanja uspešneje rešujejo učenci, ki v povprečju dosegajo višje rezultate na NPZ matematike.

Tabela 9*Povprečno število doseženih točk pri NPZ matematike*

NPZ matematike	2016		2019	
	Povprečno število točk v odstotkih	Standardni odklon	Povprečno število točk v odstotkih	Standardni odklon
6. razred	53,79	21,19	/	/
9. razred	51,51	21,83	51,05	21,51

Korelacija med dosežkom pri izbrani nalogi in dosežkom na NPZ matematike je v 6. razredu nekaj manj kot 0,50, v 9. razredu je korelacija nekoliko višja (tabela 10 in tabela 11). Zaradi dejstev, da so naloge uvrščene v modro območje in da spadajo v 4. taksonomsko stopnjo (reševanje problemov), in ugotovitve, da naloge utemeljevanja rešujejo učenci, ki v povprečju dosežejo višji rezultat na NPZ, bi pričakovali, da bo povezanost med izbrano nalogo in dosežkom na NPZ matematike višja.

Tabela 10*Korelacija med dosežkom izbrane naloge in dosežkom na NPZ, 2016*

2016	6. razred	9. razred
Naloga	10. c)	3. c)
Korelacija med dosežkom pri izbrani nalogi in dosežkom na NPZ matematike	0,47	0,50

Tabela 11*Korelacija med dosežkom izbrane naloge in dosežkom na NPZ, 2019*

2019	9. razred
Naloga	7.b.2
Korelacija med dosežkom pri izbrani nalogi in dosežkom na NPZ matematike	0,56

5 Zaključek

Z analizo uspešnosti reševanja nalog utemeljevanja smo ugotovili, da je delež učencev 9. razreda, ki pravilno rešijo nalogo utemeljevanja, za okrog 10 odstotnih točk višji od deleža učencev 6. razreda, ki so pri reševanju take naloge uspešni. Napredek torej je, a če vidimo, da le okrog 35 % učencev 9. razreda pokaže znanje utemeljevanja, lahko sklepamo, da učenci ob zaključku osnovnošolskega izobraževanja v veliki večini ne znajo povezovati znanja ne znotraj matematike ne širše (interdisciplinarno) in da niso izgradili veščin interpretacije, utemeljevanja in argumentacije rešitev. Delež učencev 9. razreda, ki se bodisi ne loti reševanja bodisi napačno reši nalogo utemeljevanja, je zelo visok (okrog 65 %), kar kaže, da skoraj dve tretjini učencev ob zaključku osnovne šole ne zna utemeljiti svojih postopkov dela, analizirati rešitev in se pisno izražati.

Upravičeno se sprašujemo, ali se v toku osnovnošolskega matematičnega izobraževanja upošteva priporočila, zapisana v Učnem načrtu (2011). Rezultati naše raziskave bolj kažejo na to, da pri pouku bežno sledimo le operativnim ciljem in vsebinam ter sproti “odkljukamo” posamezne alineje z vsebinami, ko jih obravnavamo, pri čemer se najbrž bolj osredotočamo na “mehanicistično” učenje postopkov, zelo malo pa na razumevanje le-teh.

Inovativnih strategij in pristopov, ki bi tvorjenje besedil z matematično vsebino povezovali z določenimi matematičnimi procesi in nalogami, v slovenskem šolskem prostoru primanjkuje. Vprašanje, ki se zastavlja, je, ali se učiteljem matematike sploh zdi pomembno učence naučiti tvorjenja matematičnih besedil, od preprostih, kot so opis postopka, razlaga postopka reševanja, zapis pravila zaporedja, utemeljitev, do kompleksnejših, kot je zapis sestavka z matematično vsebino. Ne nazadnje se razlike najbrž kažejo tudi v zavzetosti in notranji motiviranosti učiteljev za poučevanje, kakor se je pokazalo pri študentih pedagoških smeri (Depolli Steiner, 2018, str. 112).

Učitelji bi morali vse učence vključiti v aktivno usvajanje znanja in spretnosti, ne pa dopuščati neproduktivnih dejavnosti učencev, ki povrhu motijo učni proces (Života Radović, 2014, str. 41). Sodelovalno učno okolje gotovo spodbuja učence k aktivnemu raziskovanju problemov z uporabo lastnih idej in strategij (Sharma, 2015, str. 300), žal pa pri pouku matematike velikokrat dajemo prednost zgolj pravilnim odgovorom, namesto da bi spodbujali razmišljanje in razumevanje (Sun, van Es, 2015, str. 201). Premalo se zavedamo, da se čas, ki ga vložimo v razvoj kritičnega mišljenja, obrestuje, saj se učenci po eni strani naučijo misliti, po drugi strani pa samostojno razmišljajo, kako bi se (še) nečesa naučili (Critical Thinking Consortium, 2013).

Učitelji matematike bi lahko izboljšali večšine kritičnega mišljenja učencev z uporabo učnih strategij, ki učence aktivno vključijo v proces, namesto da se zanašajo na pomnjenje razlage in zapiskov, z usmerjanjem pouka na proces učenja, ne zgolj na vsebino, ter z uporabo takih tehnik ocenjevanja, ki učencem pomenijo intelektualni izziv in ne zahtevajo samo priklica spomina (Peter, 2012, str. 39).

Učenci bi morali biti sposobni brati z razumevanjem ter razložiti in opisati strategije reševanja matematičnih problemov. Z zapisom, v katerem učenci uporabljajo strokovno terminologijo in simboliko, dokumentirajo postopke reševanja in predstavijo svoje razmišljanje. Učitelj bi torej moral v učnem procesu izbrati take didaktične pristope in strategije, da bi imeli učenci priložnost utemeljevati. Učenec bi moral aktivno pridobivati znanje ter razvijati svoje sposobnosti mišljenja in sklepanja, da bi lahko le-to uporabil pri reševanju problemov v vsakdanjem življenju. Učenčev zapis matematičnih besedil, med njimi tudi zapis utemeljitve, je močno orodje, ki ga lahko učitelj uporabi kot uvid v učenčevo razmišljanje in iskanje vrzeli v znanju.

Učenci običajno znajo razložiti vprašanje oziroma besedilo zadane naloge, težje pa utemeljijo svoja sklepanja in zaključke (Siriwat, Katwibun, 2017, str. 474). Poglobljen vpogled v proces poučevanja bi dal pomembne ugotovitve o utemeljevanju pri pouku matematike oziroma o upoštevanju didaktičnih priporočil, zapisanih v Učnem načrtu (2011), poglobljena analiza nalog utemeljevanja NPZ matematike z različnih vidikov pa bi pokazala, kje se odražajo vrzeli v znanju učencev. Dobljeni rezultati bi lahko bili podlaga za ukrepanje tako na sistemski ravni kot pri iskanju ustreznih didaktičnih pristopov in strategij za uspešno utemeljevanje pri pouku matematike.

Jerneja Bone, Mara Cotič, PhD, Darjo Felda, PhD

Reasoning in the Teaching of Mathematics

In the teaching of mathematics, written and oral formulation of substantiation is not being given enough attention, which has been proved by a longitudinal review of the attainments of pupils in the reasoning tasks in the National Assessment of Knowledge (Nacionalno preverjanje znanja – NPZ) in mathematics, as pupils are less successful in solving this kind of tasks. Proving and reasoning is mentioned in all the mathematics syllabi at all levels of schooling (Magajna, 2012, p. 26). The syllabus for mathematics in elementary school promotes the substantiation of the problem-solving procedure, of

the solutions obtained by computational procedures and geometric constructions, and of the decisions made.

Magajna (2012, pp. 29–33) describes five characteristic ways of reasoning that are used in the discussion of contents in school mathematics: substantiation with examples, substantiation with insight, visual proofs, the generic proof, and the formal proof. The role of proof is discussed by Hanna (2000, p. 8) who proposes diverse aims of proving in the teaching of mathematics. Following the DIVINE — Decision, Inference, Validation, Elaboration — model, Chua (2017, p. 118) presents the type and purpose of the proving tasks, as well as the outcome individuals are expected to arrive at in order to formulate the correct substantiation. Kazemi and Hintz (2014, pp. 56–58) describe four ways of how pupils substantiate statements.

In the present paper we distinguish between reasoning and formal proving in the teaching of mathematics. In the process of proving, a sequence of logical steps is used with which the required result is arrived at in a formal way. To prove a claim or statement, previously proved statements, claims, definitions, and axioms are used. In elementary education, substantiation is understood as a broader set of arguments in support of a response, which pupils use with the intention of confirming an assumption.

We analysed the successfulness of solving the two tasks in the NAK in mathematics from 2016 and 2019 that required the use of reasoning in the problem-solving process; the tasks appeared in the test for the pupils of the sixth and of the ninth grade. We determined how the success of solving the tasks in the NAK in mathematics and the final grade in mathematics affect the success of solving the discussed items. From the annual reports on NAK and the description of attainments for the 2015/16 and 2018/19 school years, the following data were obtained: the number of pupils who sat the NAK the objective tested by the task, the math content area into which the task was incorporated, the taxonomy level, the index of difficulty, and the index of discrimination. Data were obtained from the National Examination Centre regarding how many pupils solved the task correctly or incorrectly, and how many did not attempt to solve it at all. The number of pupils who took part in the NAK in mathematics in the selected years indicates that the obtained data are representative.

The texts of both tasks included in the analysis contain mathematical symbolism and words from everyday language. When formulating the answer, the pupil stems from the previously performed computational procedure of division or from another appropriate solving strategy using mathematical terminology and symbolism in writing the answer or the substantiation. The tasks were classified as belonging to the syllabus topic of other contents, in the context of mathematical problems and problems with real-life situations. The objective of the tasks was to “develop a critical attitude towards data and the solution” or to “recognize a rule in a pattern, find a generalization and write an algebraic expression”. According to Gagne’s taxonomy, the tasks were classified as solving and exploring problems. In 2016, 24.5% of sixth graders successfully solved the task; 36.3% of the pupils in the ninth grade were successful in 2016, and 34.7% in 2019. The difference in the index of difficulty is perceptible. The discrimination index indicates that the pupils who performed better in the NAK in mathematics were more successful in solving the task. The mathematics commission finds that 6th and 9th grade students have problems with substantiating the result; they do not know how to transfer

experiences from the real world into the strategy of solving realistic problems (Letno poročilo [Annual Report] 2016, p. 290).

Approximately a quarter of the 6th grade pupils did not attempt to solve the task in 2016, while in the 9th grade the proportion increased from 15 % in 2016 to 26 % in 2019. The proportion of pupils who did not solve the task correctly was 52.2 % in the 6th grade; in the 9th grade it was 48.5 % in 2016, while in 2019 it amounted to 38.9 %. We find that about three quarters of the 6th grade pupils were not successful in the substantiation task, while in the 9th grade there were about 65 % of such pupils, which indicates that in the three years of schooling the share of pupils who correctly solve the task increases.

The adequate substantiations differed from one another. Out of 100 randomly selected tests in 2016, both for the 6th and the 9th grade, we highlight some examples of pupils' correct solutions: in the substantiation they mention the multiplier or the divisor of the number; they refer to the "not divisible"; they mention the remainder of the division; during the calculation procedure they practically explain why division is not possible; they refer to the fact that the division does not work out or that the result of the division is not an integer.

Possible reasons why pupils do not attempt to solve the task or why they solve it incorrectly are: the pupils do not understand the meaning of the words or of the instruction "substantiate"; they have difficulties with written communication (forming and writing the substantiation); they use mathematical terminology and symbolism inconsistently. Substantiation is highly demanding for pupils, as it requires good knowledge of mathematical contents and good command of the skills of forming and writing the substantiation itself. Pupils do not gain experience in writing the substantiation, and teachers lack the experience and theoretical bases for the development of substantiation when teaching mathematics (Magajna, 2012, pp. 26–34). Besides the theoretical knowledge about assuming, generalising, and substantiating, teachers should also acquire didactic knowledge for the promotion of these skills among their pupils (Lessig, 2016, p. 116).

In the 100 randomly selected tests in 2016 for the 6th and the 9th grade, the following mistakes were detected the most frequently: an answer to the question is written but not substantiated; an incorrectly formulated substantiation follows an adequate computation procedure; an answer is written but it does not stem from the computational procedure of division; failure to understand the question; the instruction not read with understanding; the computational procedure of division is performed correctly, but the substantiation is not written down; the solving procedure was begun correctly but not finished; a calculation error that results in a wrong answer.

Thanks to the ingenious methodology behind designing the NAK in mathematics, which makes certain longitudinal analyses of attainments possible (Magajna & Žakelj, 2012, p. 35), we compared the performance in the substantiation tasks with the performance in the NAK in mathematics. The average performance of the pupils in the NAK in mathematics who score 0 points in the substantiation task is about 52 % in the 6th grade and about 48 % in the 9th grade. The average performance of the pupils in the NAK in mathematics who score 1 point in this task (i.e. solve the task correctly) is about 70 % in the 6th grade and about 66 % in the 9th grade. The average performance of the pupils who do not solve the task is about 36 % in the 6th grade and from 29 % to 33 % in the 9th

grade. The sixth graders who solve the substantiation task correctly exceed the average number of points by slightly under 20 percentage points. With the ninth graders the surplus is about 15 percentage points. The pupils who, on average, perform better in the NAK in mathematics are more successful in solving the substantiation tasks. The correlation between the score in the selected task and the performance in the NAK in mathematics is 0.47 in the 6th grade and a little higher in the 9th grade (0.50 and 0.56). Due to the fact that the tasks are classified as the 4th taxonomy level (solving problems) and the finding that the pupils who, on average, perform better in the NAK in mathematics solve these tasks, a higher correlation between the selected task and the performance in the NAK in mathematics would be expected.

Reading the task, oral reasoning, active listening and, in conclusion, writing the substantiation are the four phases which must not be skipped in the learning process. When reading a mathematical text problem, pupils link the verbal, pictorial, and the symbolical part together. Based on the computations and the known mathematical facts, the pupil infers and substantiates the assertion. The formulation of a new text, i.e. writing the substantiation, is a verbalised mathematical message, where appropriate mathematical terminology and symbols are used. Through substantiation, pupils deepen their understanding of mathematical contents. In the educational vertical, the development of substantiation goes through the following phases: in the first cycle the pupils use a reference to an example, with which they confirm or reject assertions, as substantiation; in the second cycle the pupils begin to understand and to use more general forms of argumentation; in the third cycle the pupils are already capable of using more advanced substantiation. The development of the skill of substantiation begins with choosing the appropriate substantiation out of several substantiations, which also include wrong ones. The next stage is that pupils substantiate or reject an assertion with a concrete example and continue with a general example. The last stage is the argumentation where mathematical rules, definitions, and assertions are used. Through the pupil's substantiation the teacher can eliminate the pupil's wrong notions, understanding, and erroneously constructed concepts. The question that arises is whether mathematics teachers find it important to teach pupils to create mathematical texts where they use professional terminology and symbolism. In the learning process, this is implemented with the selection of appropriate didactic approaches and strategies, where the pupils are provided opportunities to substantiate. The pupil noting down mathematical texts, which includes writing a substantiation, is a powerful tool, which the teacher can exploit as an insight into the pupil's way of thinking and to search for knowledge gaps.

LITERATURA

1. ACARA (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority) (2013). Critical and Creative Thinking Learning Continuum. Pridobljeno dne 24.09.2020 s svetovnega spleta: http://www.acara.edu.au/verve/_resources/General_capabilities_-CCT_-_learning_continuum.pdf.
2. Cankar, G., Semen, E., Knežević, M. in Urank, M. (2020). Priročnik za uporabo orodja za ugotavljanje kakovosti izkazanega znanja: Nacionalno preverjanje znanja (OrKa Ric, verzija 3.1.1). Ljubljana: Državni izpitni center.
3. Chua, B.L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. Dublin: CERME.
4. Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. in McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics tradition: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, 29(3), 573–604.

5. Critical Thinking Consortium (2013). Critical thinking in elementary mathematics: What? Why? When? And How?. Pridobljeno dne 24.09.2020 s svetovnega spleta: https://tc2.ca/uploads/PDFs/TlpsForTeachers/CT_elementary_math.pdf.
6. Depolli Steiner, K. (2018). Typology of teacher education students' pedagogical beliefs. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 33(1), 104–115.
7. Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: an Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1–2), 5–23.
8. Jacob, S.M. (2012). Mathematical achievement and critical thinking skills in asynchronous discussion forums. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 31, 800–804.
9. Kazemi, E. in Hintz, A. (2014). *Intentional Talk: How to Structure and Lead Productive Mathematical Discussions*. Portsmouth: Stenhouse Publishers.
10. Kosi Ulbl, I. (2014). Matematično znanje bodočih inženirjev. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 29(3–4), 79–97.
11. Lesseig, K. (2016). Fostering Teacher Learning of Conjecturing, Generalising and Justifying through Mathematics Studio. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(1), 100–118.
12. Magajna, Z. (2012). Med utemeljevanjem in dokazovanjem. V: KUPM, Zbornik prispevkov, str. 26–34. Pridobljeno dne 15.11.2019 s svetovnega spleta: <https://www.zrss.si/pdf/zbornikprispevkovkupm2012.pdf>.
13. Magajna, Z. in Žakelj, A. (2012). NPZ kot instrument za longitudinalno sledenje matematičnega znanja. V: Žakelj, A., Borstner, M. (ur.). *Razvijanje in vrednotenje znanja: zbornik prispevkov s posveta*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, 33–36.
14. Mešinović, S., Cotič, M. in Žakelj, A. (2017) Učenje in poučevanje osnovnih geometrijskih pojmov. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 32(2), 49–66.
15. Peter, E.E. (2012). Critical thinking: Essence for teaching mathematics and mathematics problem solving skills. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, 5(3), 39–43.
16. RIC (2016). Nacionalno preverjanje znanja. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2015/2016. Ljubljana: Državni izpitni center. Pridobljeno dne 15.11.2019 s svetovnega spleta: <https://www.ric.si/mma/Letno%20poro%20%20ilo%20NPZ%202016/2016122114351304/>.
17. RIC (2019). Nacionalno preverjanje znanja. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2018/2019. Ljubljana: Državni izpitni center. Pridobljeno dne 15.11.2020 s svetovnega spleta: <https://www.ric.si/mma/Letno%20poro%20%20ilo%20NPZ%202019/2019120913232271/>.
18. Sharma, S. (2015). Promoting risk taking in mathematics classrooms: The importance of creating a safe learning environment. *Mathematics Enthusiast*, 12(2), 290–306.
19. Siriwat, R. in Katwibun, D. (2017). Exploring critical thinking in a mathematics problem-based learning classroom. V: Downton, A., Livy, S., Hall, J. (ur.). *40 years on: We are still learning! Proceedings of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Melbourne: MERGA, 474–481.
20. Sun, J. in Van Es, E.A. (2015). An exploratory study of the influence that analysing teaching has on preservice teachers' classroom practice. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 201–214.
21. Špijunović, K. in Maričić, S. (2011). Development of pupils' critical thinking in the initial teaching of mathematics. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 26(4), 66–76.
22. Thompson, C. (2011). Critical thinking across the curriculum: Process over output. *International Journal of Humanities and Social Science*, 1(9), 1–7.
23. Tunca, N. (2015). The regression level of constructivist learning environment characteristics on classroom environment characteristics supporting critical thinking. *Eurasian Journal of Educational Research*, 60, 181–200.
24. Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport.
25. Yuliani, K. in Saragih, S. (2015). The development of learning devices based guided discovery model to improve understanding concept and critical thinking mathematically ability of students at Islamic junior high school of Medan. *Journal of Education and Practice*, 6(24), 116–129.
26. Života Radović, V. (2014). Dejavnosti učencev med poukom. *Didactica Slovenica – Pedagoška obzorja*, 29(1), 33–45.

Jerneja Bone (1971), višja svetovalka za matematiko na Zavodu RS za šolstvo, Ljubljana.

Naslov: Cesta 3a, 5270 Ajdovščina, Slovenija

Telefon: (+386) 051 370 904

E-mail: jerneja.bone@zrss.si

Mara Cotič (1954), redna profesorica za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze na Primorskem v Kopru.

Naslov: Budičinova 3, 6000 Koper, Slovenija

Telefon: (+386) 041 449 784

E-mail: mara.cotic@pef.upr.si

Darjo Felda (1956), izredni profesor za didaktiko matematike na Pedagoški fakulteti Univerze na Primorskem v Kopru.

Naslov: Korte 18, 6310 Izola, Slovenija

Telefon: (+386) 051 339 018

E-mail: darjo.felda@pef.upr.si