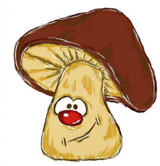
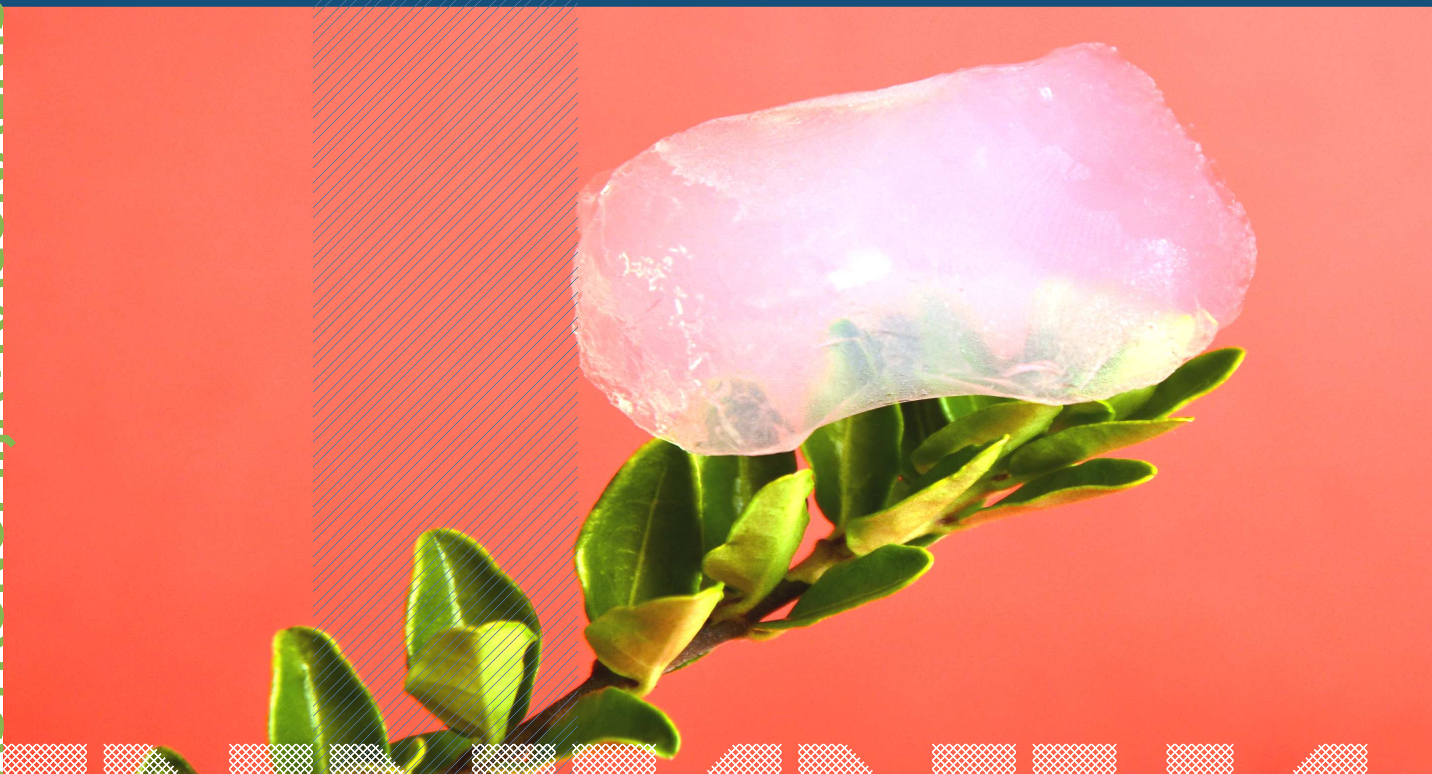


2

PRESEK LETNIK 41 (2013/2014) ŠTEVILKA 2

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#



PRESEK

- PO SLEDI NEKE NALOGE O TRIKOTNIKU
- ODKLON PROTI VZHODU
- OLIMPIJSKE NALOGE IZ PRAKTIČNE ASTRONOMIJE
- LINEARNI PROBLEM PREVOZA

ISSN 0351-6652

9 770351 665128

Kako filmi oživijo

Veliko filmskih animacij uporablja matematične metode. Programska oprema sestavlja like, ozadje in gibanje iz posameznih točk, ki jih oblikuje v bolj zapletene geometrijske like. Te like shranjuje in obdeluje s pomočjo dognanj matematike, na katerih temelji računalniška grafika.

Vsako točko posebej je treba določiti tako, da imajo sestavljeni liki vse lastnosti, ki jih zaznava naše oko, npr. pravilen položaj, gibanje, barvo in teksturo. S pomočjo vektorjev, matrik in približkov z večkotniki lahko določimo osenčenost posamezne točke. Vsaka slika v računalniško oblikovanem filmu je sestavljena iz več kot dveh milijonov točk in lahko vsebuje več kot štirideset milijonov večkotnikov. Zaradi ogromnega števila računskih operacij so računalniki nujni, a brez matematike ne bi vedeli, kaj naj počnejo. Eden od animatorjev je izjavil: »... vse nadzoruje matematika in vsi tisti majhni x, y in z, ki se jih spomnimo iz šole, kar naenkrat dobijo smisel.«

Če vas tema zanima, prelistajte knjigo *Mathematics for Computer Graphics Applications*, ki jo je napisal Michael E. Mortenson leta 1999.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 41, šolsko leto 2013/2014, številka 2

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2013/2014 je za posamezne naročnike 18,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 15,75 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Kos aerogela ima zaradi majhne gostote tako majhno maso, da se vejica, na kateri stoji, ne upogne. Več o aerogelu v prispevku na strani 28. Foto: Aleš Mohorič

Po sledi neke naloge o trikotniku

Dragoljub M. Milošević

Med pripravami na tekmovanje iz matematike sta Majda in Ciril reševala naslednjo nalogo.

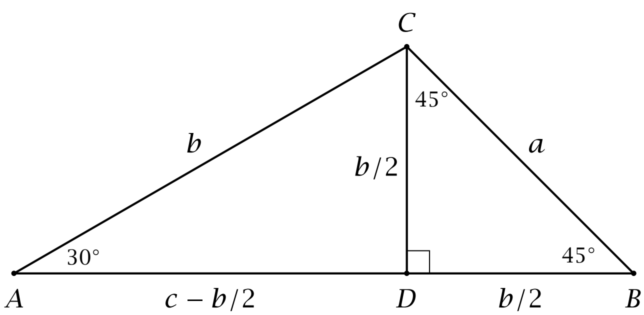
Naloga. V trikotniku ABC je dano: 1) $\alpha = 30°$ in $\beta = 45°$; 2) $\alpha = 20°$ in $\beta = 60°$. Dokaži, da za stranice tega trikotnika velja enakost $a^2 + bc = c^2$.

Dogovorila sta se, da bo Majda reševala prvi del naloge, Ciril pa drugi del.

Majdina rešitev. Tretji kot trikotnika ABC je $\gamma = 180° - (30° + 45°) = 105°$. Pravokotnica CD iz oglišča C na stranico AB razdeli trikotnik ABC na dva pravokotna trikotnika ADC in BCD (slika 1). Nasproti kota $30°$ v pravokotnem trikotniku je kateta, ki je enaka polovici hipotenuze, zato v trikotniku ADC velja $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$. Pravokotni trikotnik BCD je tudi enakokraki, saj je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DBC = 45°$, zato je $BD = CD = \frac{b}{2}$.

Ker je $AB = c$, $BD = \frac{b}{2}$ in $AD = AB - BD$, je $AD = c - \frac{b}{2}$. Z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnih trikotnikih ACD in BCD dobimo $AD^2 + DC^2 = AC^2$ in $BD^2 + DC^2 = BC^2$ ali

$$\left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2$$



SLIKA 1.

oziroma

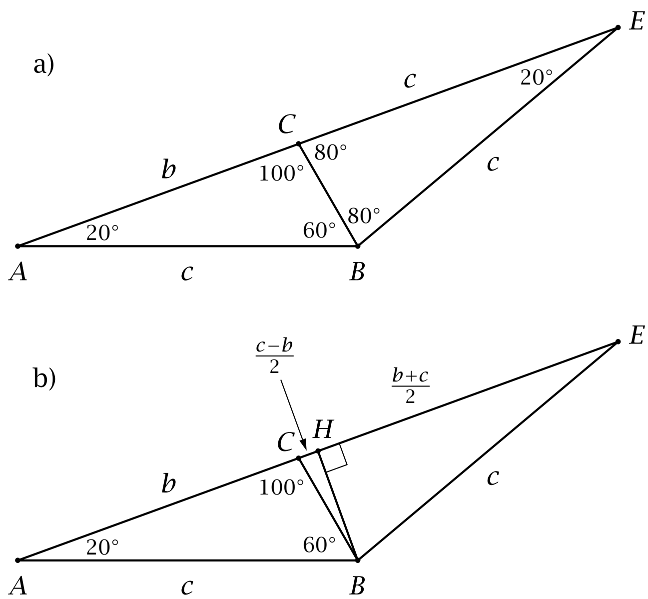
$$c^2 - bc = \frac{b^2}{2} \quad \text{in} \quad \frac{b^2}{2} = a^2.$$

Od tod sledi

$$c^2 - bc = a^2, \quad \text{oz.} \quad a^2 + bc = c^2. \qquad \blacksquare$$

Cirilova rešitev. Tretji kot danega trikotnika meri $100°$. Nad stranico BC konstruiramo enakokraki trikotnik BEC, v katerem je $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCE = 80°$ (slika 2a). Potem je $\sphericalangle BEC = 20° = \sphericalangle BAC$, torej je trikotnik ABE enakokraki ($BE = AB = c$). Ker je $CE = BE$, je $CE = c$, to pa pomeni, da je $AE = AC + CE = b + c$.

Naj bo $BH \perp AE$, $H \in AE$ (slika 2b). Ker je $\triangle ABE$ enakokraki, je točka H središče njegove stranice AE.



SLIKA 2.

Ker je $CE = c$ in $HE = \frac{AE}{2} = \frac{b+c}{2}$, je $CH = c - \frac{b+c}{2} = \frac{c-b}{2}$. Z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnih trikotnikih BHC in BHE dobimo

$$BH^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \quad \text{in} \quad BH^2 = c^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2.$$

Od tod sledi

$$a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

iz česar po preurejanju dobimo $a^2 + bc = c^2$. ■

Vidimo, da sta Majda in Ciril reševala nalogi z različnimi podatki (Majda je imela $\alpha = 30°$ in $\beta = 45°$, Ciril pa $\alpha = 20°$ in $\beta = 60°$) ter da sta oba prišla do istega zaključka ($a^2 + bc = c^2$). To nam daje misliti, da je nalogo mogoče posplošiti, če najdemo odvisnost med koti trikotnika, ki ji bosta ustrezala oba primera, tako Majdin kot Cirilov. Opazimo, da je najmanjši kot (α) v trikotniku enak polovici razlike ostalih dveh kotov, t. j. 1) $30° = \frac{105°-45°}{2}$, 2) $20° = \frac{100°-60°}{2}$. Pogoju $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$ oz. $\gamma - \beta = 2\alpha$ ustrezata oba primera.

Preidimo sedaj na drugi korak in preverimo pravilnost naslednje trditve:

Trditev. Če v trikotniku ABC velja $\gamma - \beta = 2\alpha$, potem je $a^2 + bc = c^2$.

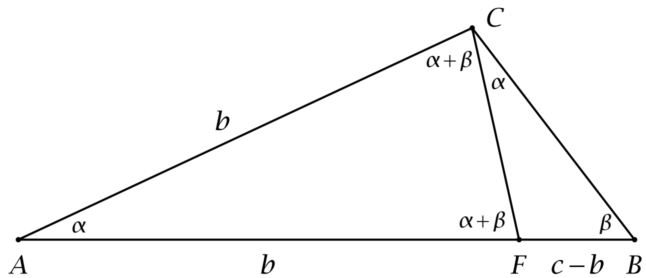
Dokaz trditve. Pogoj $\gamma - \beta = 2\alpha$ zapišimo v obliki $\gamma = 2\alpha + \beta$. Vsota kotov v trikotniku je potem $\alpha + \beta + (2\alpha + \beta) = 3\alpha + 2\beta = 180°$. Izraz $a^2 + bc = c^2$ zapišimo v ekvivalentni obliki $a^2 = c(c - b)$. Na sliki torej potrebujemo tako odsek $c - b$ kot tudi dva podobna trikotnika.

Na stranici AB trikotnika ABC izberimo točko F tako, da je $AF = b$. Potem je $BF = c - b$ (slika 3). Trikotnik AFC je enakokraki, kar pomeni, da je

$$\sphericalangle AFC = \sphericalangle ACF = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{3\alpha + 2\beta - \alpha}{2} = \alpha + \beta.$$

Potem je $\sphericalangle BCF = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$. Trikotnika ABC in CBF sta podobna, ker imata enake kote. Zaradi tega je $AB : BC = BC : BF$ ali $c : a = a : (c - b)$ oziroma $c(c - b) = a^2$.

S tem je dokazana navedena trditev, ki predstavlja posplošitev prvotne naloge. ■



SLIKA 3.

Priporočamo, da z uporabo dokazane trditve rešite naslednje tri naloge.

1. Dokaži, da v pravilnem petkotniku s stranico a in diagonalo d velja enakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.
2. Če je d najkrajša in D najdaljša diagonala pravilnega devetkotnika ter a njegova stranica, dokaži, da je $D - d = a$.
3. Če so d, e in D ($d < e < D$) diagonale pravilnega devetkotnika in a njegova stranica, dokaži, da je $\frac{e}{d} + \frac{d}{D} = 2$.

× × ×

Naloga

Marko Razpet

→ Poišči taki števili α in β, za kateri je polinom

$$P(x) = 6x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + 7x + 12$$

deljiv s trinomom

$$Q(x) = 3x^2 - x + \beta;$$

nato pa za dobljeni števili zapiši še kvocient $P(x)/Q(x)$.

× × ×

Kako so Arabci reševali kvadratne enačbe

Marjan Jerman

Že v srednji šoli se srečamo z reševanjem kvadratne enačbe

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

Koeficienti a, b in c so običajno realna ali kompleksna števila. Da je enačba res kvadratna, dodatno zahtevamo, da je vodilni koeficient a različen od 0.

Enačbo (1) lahko rešimo s prevedbo na ekvivalentne lažje rešljive enačbe. Najprej se znebimo vodilnega člena z deljenjem z a. Po uvedbi novih spremenljivk $p = \frac{b}{a}$ in $q = \frac{c}{a}$ enačbo prevedemo v obliko

$$x^2 + px + q = 0.$$

Nato si pomagamo z dopolnitvijo do popolnih kvadratov. Tako enačbo prepišemo v obliko

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

S tem smo prišli do obeh rešitev enačbe. Ker je

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

sta njeni rešitvi podani z dobro znano formulo

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{2}$$

Tudi če sta števili p in q realni, je lahko izraz pod korenom, ki ga imenujemo *diskriminanta*, negativen, zato sta v splošnem ničli kvadratne enačbe kompleksni števili.

V 21. stoletju se običajno ne zavedamo, koliko izjemnih odkritij in lepe matematike se skriva na navidez enostavni poti do rešitve. Oznake za osnovne računske operacije so se pojavile šele v renesansi. Pred tem simbolični zapis ni bil možen in enačbe so bile skrite v daljšem in manj preglednem besedilu. Na korene negativnih števil je prvi naletel italijanski matematik, zdravnik in astrolog Gerolamo Cardano (1501–1576) pri reševanju kubične enačbe.

Presenetljivo so formulo za rešitvi kvadratne enačbe v običajni obliki (2) poznali že Babilonci vsaj 18. stoletij pred našim štetjem. Težko je razumeti, kako so prišli do rešitev.

V tem prispevku si bomo ogledali, kako so Arabci v devetem stoletju s pomočjo geometrijske predstave reševali kvadratne enačbe. Seveda enačbe niso bile napisane v takšni obliki, kot jo poznamo danes. Ena od arabskih nalog, recimo, sprašuje, kako število 10 razstaviti na vsoto dveh pozitivnih števil, tako da je njun produkt enak 21. Danes bi nalogo rešili s pomočjo sistema enačb

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ xy &= 21, \end{aligned}$$

ki vodi do kvadratne enačbe $x^2 - 10x + 21 = 0$.

V knjigi *Najnujnejše o algebri* iz leta 820 Al Hvarizmi (780–850), perzijski matematik, astronom in geograf, linearne in kvadratne enačbe najprej razdeli na šest tipov:

(i) $ax^2 = bx$;
(ii) $ax^2 = c$;
(iii) $bx = c$;
(iv) $ax^2 + bx = c$;
(v) $ax^2 = bx + c$;
(vi) $ax^2 + c = bx$.

Z današnjega vidika je ta klasifikacija pretirano razdrobljena in nepotrebna, smiselna pa postane, če vemo, da so Arabci priznavali le enačbe, ki imajo za koeficiente strogo pozitivna števila in premorejo vsaj kako pozitivno rešitev. Tako se jim, recimo, enačba $ax^2 + bx + c = 0$ s pozitivnimi koeficienti a, b in c ne bi zdela smiselna, ker nima pozitivnih rešitev. V knjigi opiše tudi operaciji *al-jabr* in *al-muqabala*, ki vsako kvadratno enačbo prevedeta na enega od teh tipov. Operacija al-jabr na obeh straneh enačbe prišteje enako vrednost in tako poskrbi za odpravo negativnih členov, al-muqabala pa odšteje manjšo od skupnih količin in tako uravnoteži odvečne člene.

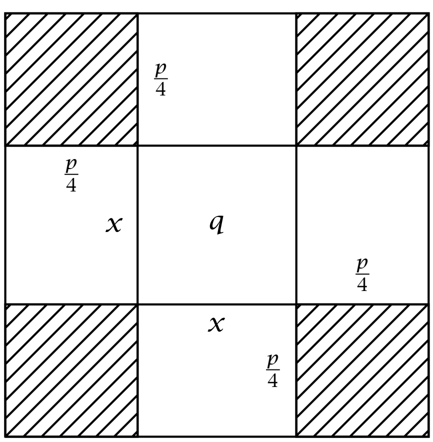
Najprej lahko odpravimo enačbi tipa (i) in (iii), ki v bistvu nista kvadratni. Enačbo tipa (ii) rešimo s preprostim korenjenjem. Preostale enačbe pa so veliko bolj zanimive. Enako kot prej lahko z deljenjem dosežemo, da je vodilni koeficient $a = 1$.

Lotimo se reševanja četrte enačbe $x^2 + px = q$, pri čemer sta p in q pozitivni števili. Člen x^2 si lahko predstavljamo kot ploščino kvadrata s stranico x. Nad stranicami kvadrata postavimo štiri skladne pravokotnike s stranicama x in $\frac{p}{4}$ (glej sliko 1). Vsota ploščin kvadrata in štirih pravokotnikov je tako enaka

- $x^2 + 4 \cdot x \cdot \dfrac{p}{4} = x^2 + px = q.$

Kvadrat, ki smo ga razširili s pravokotniki, lahko dodatno dopolnimo do večjega kvadrata tako, da med dodatne pravokotnike dorišemo štiri manjše kvadratke s stranicami velikosti $\frac{p}{4}$. Ploščina večjega kvadrata je tako enaka

- $S = q + 4 \cdot \left(\dfrac{p}{4}\right)^2 = q + \dfrac{p^2}{4}.$



SLIKA 1.
Reševanje enačbe $x^2 + px = q$.

Zato je stranica večjega kvadrata po eni strani enaka $\sqrt{S}$, po drugi strani pa $x + 2 \cdot \frac{p}{4}$. Tako smo reševanje kvadratne enačbe (iv) prevedli na enostavno rešljivo linearno enačbo

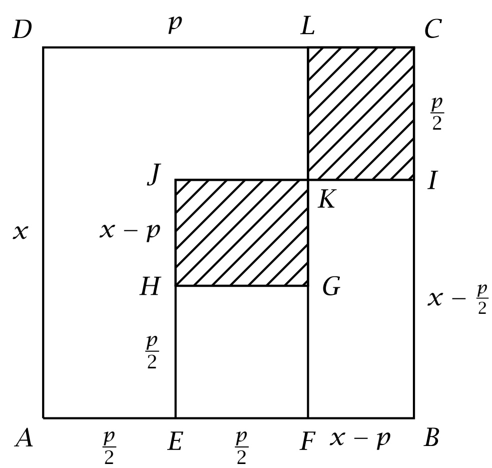
- $x + \dfrac{p}{2} = \sqrt{S}$

z rešitvijo $x = \sqrt{S} - \frac{p}{2}$. Ker je $S > \left(\frac{p}{2}\right)^2$, je dobljena rešitev pozitivna. Če pozorno pogledamo izpeljavo, lahko ugotovimo tudi, kam je »izginila« druga rešitev kvadratne enačbe. Brez geometrijske interpretacije bi lahko računsko gledano stranico kvadrata $\sqrt{S}$ zamenjali tudi z $-\sqrt{S}$, vendar bi bila rešitev v tem primeru strogo negativna:

- $x = -\sqrt{S} - \dfrac{p}{2};$

takšnih rešitev pa tedaj niso priznavali.

Al Hvarizmi reševanje opiše na primeru enačbe $x^2 + 10x = 39$. Nad manjšim kvadratom s stranico x narišemo štiri pravokotnike z višino $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. Nato dodamo še manjše kvadratke s stranico $\frac{5}{2}$. Dopolnjen kvadrat ima ploščino enako $x^2 + 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64$, zato je njegova stranica dolga 8. Hkrati vemo, da stranica večjega kvadrata meri $x + 2 \cdot \frac{5}{2} = x + 5$. Zato je stranica manjšega kvadrata enaka $x = 3$. Pri takšnem reševanju smo izgubili negativno rešitev $x = -8 - 5 = -13$.



SLIKA 2.
Reševanje enačbe $x^2 = px + q$.

Sedaj bomo pokazali, kako geometrijsko rešiti peto enačbo $x^2 = px + q$. Ker delamo samo s pozitivnimi števili, mora biti $px < x^2$ in zato $p < x$. Narišimo kvadrat $ABCD$ s stranico x. Na stranici AB izberimo točki E in F tako, da je $AE = \frac{p}{2}$ in $AF = p$ (glej sliko 2). Ker je $p < x$, obe točki ležita na stranici AB. Nad daljicama EF in EB konstruirajmo manjša kvadrata $EFGH$ in $EBIJ$. Premica skozi F in G naj seka daljico JI v točki K in stranico DC v točki L.

Glede na konstrukcijo je ploščina pravokotnika $AFLD$ enaka px, zaradi veljavnosti kvadratne enačbe pa je ploščina preostanka $FBCL$ enaka q. Ploščina kvadrata $EBIJ$ je po eni strani enaka $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$. Po drugi strani je kvadrat $EBIJ$ sestavljen iz kvadrata $EFGH$ s ploščino $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ in pravokotnikov $HGKJ$ in $FBIK$. Pravokotnika $HGKJ$ in $ICLK$ sta skladna pravokotnika s stranicama $\frac{p}{2}$ in $x - p$. Zato je vsota ploščin pravokotnikov $HGKJ$ in $FBIK$ enaka ploščini pravokotnika $FBCL$ in ploščina kvadrata $EBIJ$ enaka $S = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$. Tako smo peto enačbo prevedli na reševanje enačbe

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = S,$$

ki jo je mogoče enostavno rešiti s korenjenjem. Pozitivna rešitev enačbe je enaka

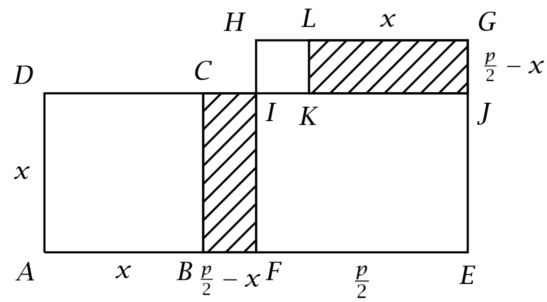
$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{S}.$$

Ker je $S > \left(\frac{p}{2}\right)^2$, smo ponovno »pozabili« na negativno rešitev $x = \frac{p}{2} - \sqrt{S}$.

Al Hvarizmi pokaže rešitev na primeru enačbe $x^2 = 3x + 4$. Ploščina kvadrata $EBIJ$ je po eni strani enaka $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$, po drugi strani pa $4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Zato je x rešitev linearne enačbe $x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Izgubili smo negativno rešitev $x = -1$.

Ostala nam je še zadnja enačba, $x^2 + q = px$. Geometrijska rešitev te enačbe je bolj zapletena, ker je treba obravnavati dva primera. Najprej podobno kot prej vidimo, da je $x^2 < px$, zato je $x < p$. Narišimo kvadrat $ABCD$ s stranico x. Daljico AB podaljšajmo tako, da je $AE = p$. Na polovici daljice AE izberimo točko F.

Najprej obravnavajmo primer, ko je $x < \frac{p}{2}$. Takrat je točka F med točkama B in E. Nad daljico FE narišimo kvadrat $FEGH$ (glej sliko 3). Premica skozi D in C seka stranico FH v točki I in daljico EG v točki J. Nad daljico HI skonstruirajmo manjši kvadrat $HIKL$. Tokrat bomo na dva različna načina izrazili ploščino kvadrata $HIKL$. Po eni strani je njegova ploščina enaka $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2$. Glede na konstrukcijo in veljavnost kvadratne enačbe je ploščina pravokotnika $BEJC$ enaka q. Pravokotnika $BFIC$ in $JGLK$ sta skladna, ker imata enako dolgi stranici x in $\frac{p}{2} - x$. Zato je vsota ploščin pravokotnikov $FEJI$ in $KJGL$ enaka q. Kvadrat $FEGH$ ima ploščino enako $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Ploščino kvadrata $IKLH$ lahko tako izrazimo tudi kot razliko $S = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Enačbo (vi) smo s tem prevedli na reševanje enostavnejše enačbe



SLIKA 3.
Reševanje enačbe $x^2 + q = px$ v primeru, ko je $x < \frac{p}{2}$.

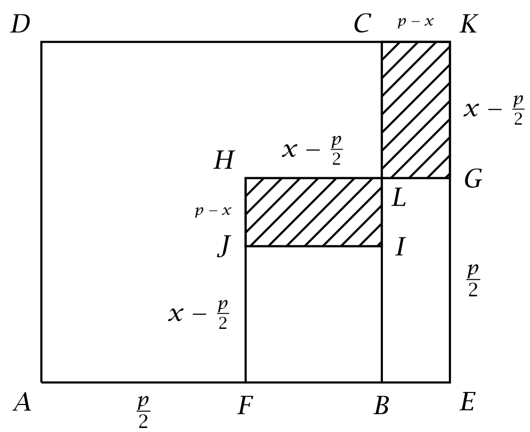
$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = S$$

s pozitivno rešitvijo

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{S},$$

ki ustreza pogoju $x < \frac{p}{2}$.

Preostali primer, ko je $x > \frac{p}{2}$, je natančneje obdelal Al Hvarizmijev sodobnik Ibn Turk. V tem primeru je točka F med točkama A in B. Nad daljico FE ponovno skonstruirajmo kvadrat $FEGH$, nad daljico FB pa kvadrat $FBIJ$ (glej sliko 4). Nosilki daljic DC in GE naj se sekata v točki K, daljici HG in BC pa v točki L. Na dva načina bomo izračunali ploščino kvadrata $FBIJ$. Ker je njegova stranica dolga $x - \frac{p}{2}$, ima ploščino $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$. Po konstrukciji in glede na kvadratno enačbo je ploščina pravokotnika $BEKC$ enaka q. Pravokotnika $JILH$ in $GKCL$ sta skladna, ker imata



SLIKA 4.
Reševanje enačbe $x^2+q=px$ v primeru, ko je $x>\frac{p}{2}$.

enako dolgi stranici $p-x$ in $x-\frac{p}{2}$. Kvadrat $FEGH$ ima ploščino $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Zato je vsota ploščin pravokotnikov $JILH$ in $BEGL$ enaka q. Ploščina kvadrata $FBIJ$ je tako tudi $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$. Namesto enačbe (vi) torej rešujemo enačbo

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=S,$$

s pozitivno rešitvijo

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{S},$$

ki ustreza pogoju $x>\frac{p}{2}$.

Tako ima enačba (vi) dve pozitivni rešitvi $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{S}$. Danes vemo, da ima kvadratna parabola $px-x^2=x(p-x)$ teme v točki $\left(\frac{p}{2},\frac{p^2}{4}\right)$, zato je število $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ za $0<x<p$ vedno pozitivno in $\sqrt{S}<\frac{p}{2}$.

Premisliti je treba še manjkajoči primer, ko je $x=\frac{p}{2}$. Zgodi se takrat, ko je $\left(\frac{p}{2}\right)^2=q$, ustrezna slika pa je unija dveh skladnih kvadratov s stranico x.

Al Hvarizmi reši npr. že znano enačbo $x^2+21=10x$. Prevede jo na reševanje enačb $(x-5)^2=5^2-21$ in $(5-x)^2=5^2-21$ z dvema pozitivnima rešitvama, $x=3$ in $x=7$.

×××

Rešitev naloge iz prejšnje številke

Marko Razpet

Uporabimo enakost $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, pri čemer vzamemo

$$a=\sqrt[3]{50+\sqrt{\frac{67375}{27}}},\quad b=\sqrt[3]{50-\sqrt{\frac{67375}{27}}}.$$

Brez težav poenostavimo najprej produkt

$$ab=\sqrt[3]{2500-\frac{67375}{27}}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{5}{3},$$

nato pa zapišemo

$$\begin{aligned} s^3&=(a+b)^3\\ &=\left(50+\sqrt{\frac{67375}{27}}\right)+\left(50-\sqrt{\frac{67375}{27}}\right)+3\cdot\frac{5}{3}\cdot s\\ &=100+5s. \end{aligned}$$

Torej je naše število s rešitev enačbe $x^3-5x-100=0$. Če pišemo

$$\begin{aligned} x^3-5x-100&=(x^3-125)+5(5-x)\\ &=(x-5)(x^2+5x+25)-5(x-5)\\ &=(x-5)(x^2+5x+20)=0 \end{aligned}$$

in upoštevamo, da je kvadratni faktor $x^2+5x+20$ za vsako realno število x pozitiven, saj je

$$x^2+5x+20=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{55}{4},$$

potem takoj spoznamo, da je edina realna rešitev zgornje kubične enačbe $x=5$, to pa pomeni: $s=5$.

Bralec Etbin Bras je poslal zelo podobno rešitev.

×××

Odklon proti vzhodu

Janez Strnad

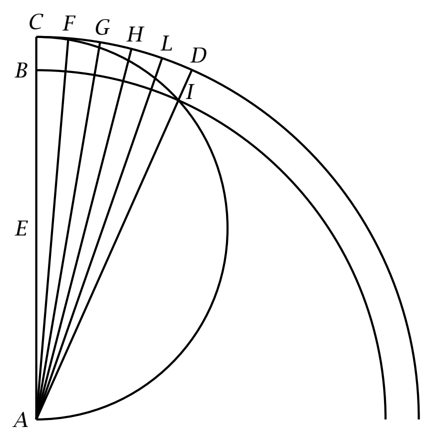
→ Aristotel je nasprotoval zamisli o vrtenju Zemlje, češ, da bi to ptice, oblake in druga telesa v zraku z veliko hitrostjo odpihnilo proti zahodu. Galileo Galilei je menil drugače. Izkušnje pri opazovanju kotaljenja kroglic po klancu in vodoravnega meta so ga prepričale, da se telesa v ozračju gibljejo skupaj z vrtečo se Zemljo. V *Dialogu o dveh največjih svetovnih sestavih* je leta 1632 razvil misel, da se točka na vrhu stolpa zaradi vrtenja Zemlje giblje hitreje kot točka ob vznožju ter opisal gibanje telesa med padanjem s stolpa (slika 1). O tem je pisal Galileijev življenjepisec Vincenzo Viviani leta 1661. Giovanni Borelli, ki je bil enako kot Galilei član Akademije risov v Firencah, je leta 1668 pojav podrobneje preučil. Kamen, ki ga spustimo s stolpa, naj bi obdržal nekaj hitrejšega gibanja in padel na tla proti vzhodu od vznožja stolpa. Za odklon pri padcu z 71 metrov visokega stolpa Torre degli Asinelli v Bologni, s katerega so opazovali padajoče krogle, je napovedal odklon dva centimetra. Opozoril pa je, da bi bilo odklon zaradi motenj v ozračju težavno izmeriti. Nekateri Borellijevi izsledki pozneje niso obveljali, a smer in velikostna stopnja napovedanega odklona sta bili pravi.

O poskusu je razmišljal tudi Isaac Newton. Leta 1791 je poskus v Bologni izvedel Giovanni Battista Guglielmini. Ponoči je s stolpa po vrsti spustil 16 krogel in izmeril odklon. Pozneje so se pokazale nepravilnosti pri določitvi navpičnice. Leta 1802 je fizik in geodet Johann Fiedrich Benzenberg meril odklon pri padanju s 76,3 metra visokega cerkvenega stolpa v Hamburgu. Nameril je odklon proti vzhodu, in sicer devet milimetrov. O tem je razpravljal s Carlom Friedrichom Gaussom, ki je leta 1803 za odklon izpeljal enačbo

$$x = \tfrac{1}{3}\omega\sqrt{8z^3/g}\cos\varphi, \qquad (1)$$

ω je kotna hitrost, s katero se vrti Zemlja, φ zemljepisna širina, z višina, za katero pade kamen, in g pospešek prostega padanja. Zemlja se v enem zvezdnem dnevu, t. j. 23 urah 56 minutah in 4 sekundah, glede na zvezde, zavrti za polni kot, tako da je $\omega = 2\pi/T = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Istega leta je enačbo neodvisno od Gaussa izpeljal Pierre Simon de Laplace. Enačba za Hamburg pri zemljepisni širini 53,57° napove odklon 8,7 milimetra.

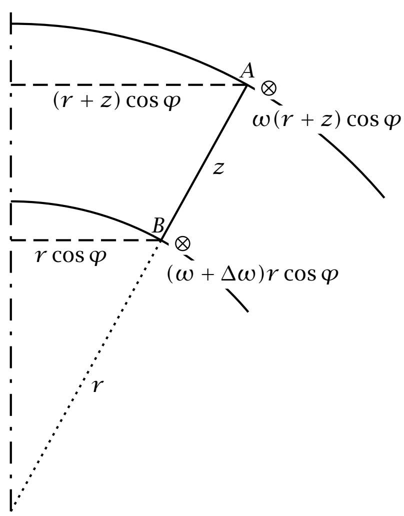
Pojav je pritegnil pozornost številnih fizikov, ki jih vseh na tem mestu ne utegnemo omeniti. Merjenja so bila težavna in nekateri rezultati so si nasprotovali. Visoke stavbe tudi nihajo in so izpostavljene vetru, zato se je zdelo bolje meriti v rudniških jaških. Tako je Ferdinand Reich leta 1832 meril v 158,5 metra globokem jašku rudnika v Freibergu na Saškem. Pri 106 poskusih je dobil za povprečni odklon proti vzhodu 2,8 centimetra. Enačba (1) je za Freiberg s širino 50,91° dala 2,76 centimetra. Odmiki od povprečja pri posameznih merjenjih pa so bili veliki. Nekaj krogel se je celo odklonilo proti zahodu.



SLIKA 1.
Risba iz Galileijevega *Dialoga* kaže padanje kamna na vrteči se Zemlji v ravnini vzporednika. Lok CD ustreza gibanju vrha stolpa, lok BI gibanju njegovega vznožja, lok CI s središčem v E na polovici polmera CA pa tirnici kamna. Kot CEI v vrhu E je dvakrat večji kot kot CAD ob vrhu A in polmer CD je dvakrat večji kot polmer CE. Zato je pot vrha stolpa enaka poti kamna.

W. W. Rundell je leta 1848 meril odklon v rudniku na Cornwallu. Njegova merjenja niso zbujala zaupanja, zbudila pa so pozornost, ker je ugotovil tudi odklon proti jugu. Zadevi je poskusil priti do dna Edwin H. Hall, znan po Hallovem pojavu v magnetnem polju. Na harvardski univerzi so s tem namenom zgradili 23 metrov visok stolp, na katerem so pozneje izmerili spremembo frekvence elektromagnetnega valovanja zaradi gravitacije. Hall je rezultate objavil v članku leta 1903. Uporabil je 948 slonokoščenih kroglic in dobil za odklon proti vzhodu 1,49 milimetra in za odklon proti jugu 0,045 milimetra. Enačba (1) je dala za Harvard s širino 42,42° za odklon proti vzhodu 1,79 milimetra, medtem ko je bil odklon proti jugu v okviru napak pri merjenju. Pozneje so za merjenje odklona uporabili tudi Attwoodov škripec, pri katerem sta telesi povezani preko škripca in je pospešek odvisen od razlike njunih mas. Pri opazovanjih padanja z manjšim pospeškom pa natančnosti pri merjenju niso izboljšali.

Enačba (1) je približek, ki je po splošnem mnenju sprejemljiv, čeprav se posamezni izmerki med seboj precej razlikujejo. Odklon proti jugu, ki je v enako zanesljivem približku enak nič, pa je sporen.



SLIKA 2.
V poldnevniški ravnini ob času $t = 0$ spustimo telo v točki A. Telo v času t pade za z do točke B. V točki A ima telo hitrost $\omega(r+z)\cos\varphi$ proti vzhodu, t. j. v ravnino papirja, v točki B pa hitrost $(\omega+\Delta\omega)r\cos\varphi$. V točki B je dodatna hitrost, t. j. hitrost glede na površje Zemlje, enaka $\Delta\omega r\cos\varphi$. Višina z je narisana pretirano.

Znanstveniki opozarjajo, da je treba računati z motnjami v ozračju, da gravitacijskega polja Zemlje ne poznamo natančno, da je treba upoštevati krajevni težni pospešek – tu smo računali z 9,81 m/s^2, da Zemlja ni krogla in ter da utegnejo biti pomembne tudi krajevne posebnosti gravitacijskega polja. Boljši približki so dokaj zapleteni. O odklonu še danes izhajajo članki v znanstvenih revijah.

Izpeljimo enačbo (1). Računamo, da se ohrani vrtilna količina, ki jo dobimo, ko vztrajnostni moment telesa pri kroženju okoli osi pomnožimo s kotno hitrostjo kroženja. Telo z maso m v trenutku $t = 0$ spustimo iz točke A v razdalji $r + z$ od središča Zemlje (slika 2). V začetnem trenutku kroži po krogu s polmerom $(r+z)\cos\varphi$ s hitrostjo $\omega(r+z)\cos\varphi$. Pri tem je ω kotna hitrost Zemlje. Tedaj je njegov vztrajnostni moment $m((r+z)\cos\varphi)^2$ in vrtilna količina $m\omega((r+z)\cos\varphi)^2$. Vrtilna količina se ne spremeni, ko telo po času t pade za višino z in doseže točko B. Tedaj kroži po krogu z manjšim polmerom $r\cos\varphi$ z večjo kotno hitrostjo $\omega+\Delta\omega$. Vztrajnostni moment je $m(r\cos\varphi)^2$ in vrtilna količina $m(\omega+\Delta\omega)(r\cos\varphi)^2$. Zaradi ohranitve vrtilne količine se kotna hitrost poveča za $\Delta\omega$. Povečanje izračunamo tako, da izenačimo vrtilno količino v točki A z vrtilno količino v točki B

- $m\omega((r+z)\cos\varphi)^2 = m(\omega+\Delta\omega)(r\cos\varphi)^2.$

Na levi strani kvadriramo in nato pokrajšamo, kar se da:

- $\Delta\omega = 2z\omega/r.$

Člen z z^2 smo zanemarili, ker je višina z zelo majhna v primerjavi z razdaljo od središča Zemlje r, ki je približno enaka polmeru Zemlje.

Glede na površje Zemlje se telo v smeri vrtenja, t. j. proti vzhodu, giblje s hitrostjo

- $dx/dt = r\Delta\omega\cos\varphi = 2\omega z\cos\varphi = \omega g t^2\cos\varphi.$

Višino smo izrazili s časom padanja: $z = \frac{1}{2}gt^2$. Integriramo po času od 0 do t in dobimo za odklon proti vzhodu:

- $$x = \int_0^t \omega g t^2 \cos\varphi \cdot dt = \tfrac{1}{3}\omega g t^3\cos\varphi = \tfrac{1}{3}\omega\sqrt{8z^3/g}\cos\varphi. \qquad (1)$$

Čas smo izrazili z višino.

×××

Ureditveni parameter

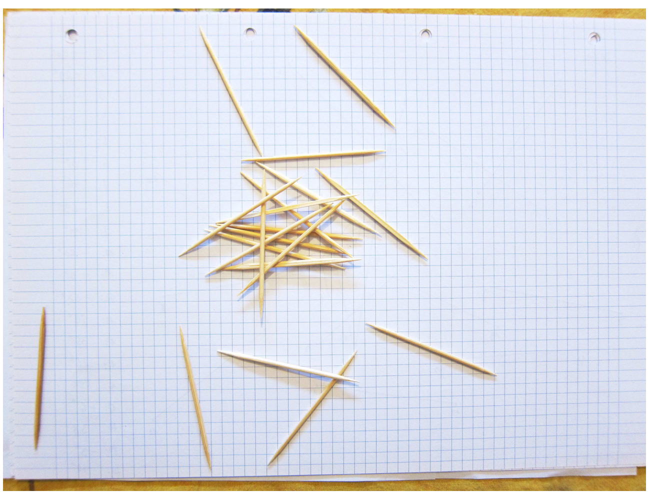
Mojca Čepič

Tokrat se bomo podali na področje t. i. visoke znanosti. S preprostim poskusom bomo vpeljali koncept direktorja in ureditvenega parametra. Prvega uporabljajo tisti fiziki, ki proučujejo tekoče kristale, drugega pa oni, ki se osredotočajo na fazne prehode. Prvi so podmnožica drugih.

V poizkuševalnici bomo izvedli zgolj poskus, ki je precej preprost, a tokrat morda nekoliko bolj dolgotrajen. Za analizo pridobljenih podatkov bomo potrebovali nekaj (relativno) preproste matematike. O pomenu rezultatov in o tekočih kristalih bo več govora v odgovoru naloge. V poizkuševalnici sami pa podajamo zgolj napotke za izvedbo naloge in za potrebne izračune.

Potrebščine:

- 20 do 30 zobotrebcev,
- karirasti papir,
- kotomer.



SLIKA 1.

Zobotrebce uredimo v snop, ga dvignemo približno 20 cm nad karirasti papir in spustimo. Pričakujemo lahko rezultat, kot je videti na sliki. Že na prvi pogled vidimo, da so zobotrebci nekoliko usmerjeni in ne ležijo v vseh smereh kot pri dobro vrženem mikadu.

Za našo množico zobotrebcev lahko definiramo *direktor* kot povprečno smer zobotrebcev. Kako določiti smer zobotrebcev, je očitno, saj so v eni smeri dolgi, v drugih dveh smereh pa zelo kratki. Če podamo kot, ki ga zobotrebec oklepa z neko vnaprej določeno smerjo na papirju, o smeri zobotrebca vemo že vse. Tako preprosto je zgolj zato, ker zobotrebci ležijo plosko na mizi. Če bi se mikado paličice, denimo, zapičile v pesek, bi za določanje smeri posamezne paličice potrebovali več podatkov, a v našem primeru se zadovoljimo s tako okrnjenim modelom tekočih kristalov.

Na karirastem papirju izberemo smer, glede na katero merimo kote. Najenostavnejši izbor je dolga stranica papirja, ki hkrati sovpada s smermi črt na papirju. Nato za vsak zobotrebec izmerimo kot, ki ga zobotrebec oklepa s to smerjo. Tehnik za merjenje kotov je več, najlažje pa je, če označimo konce zobotrebcev na papirju, jih odstranimo, jih nato na papir narišemo ter za vsakega izmerimo kot. Koti zavzemajo zgolj vrednosti med -90° in 90°, ker pri zobotrebcih ne ločimo gornjega in spodnjega konca. Povprečen kot podaja povprečno smer zobotrebcev, to smer pa imenujemo v tekočih kristalih, ki jih ta model ponazarja, *direktor*.

Če bi spustili zobotrebce z višine pol metra, bi povprečje sicer lahko izračunali, a že na prvi pogled bi videli, da to povprečje nima pravega pomena. Za urejenost take množice potrebujemo še en podatek, ki bo povedal stopnjo reda. V fiziki ga imenujemo *ureditveni parameter*. Ker naj bi ta parameter meril stopnjo reda, imamo zanj določene zahteve. Za popolni red (če imajo vsi zobotrebci natanko enako smer), bi za ureditveni parameter želeli vrednost 1. Če ležijo zobotrebci v vseh smereh, je nered popolni in zanje želimo imeti vrednost ureditvenega parametra enako 0. Popolni nered je namreč pomanjkanje reda. Ureditveni parameter tudi ne sme biti odvisen od dejanske smeri zobotrebcev, temveč mora meriti odstopanja od povprečne smeri. Slab red mora pomeniti manjši ureditveni parameter. Kot dobra misel se nam vsiljujejo kotne funkcije, cos in sin, ki imajo vrednosti med −1 in 1. Ker želimo le pozitivne vrednosti, je prva ideja povprečna vrednost izraza

- $\langle \cos^2(\Theta - \Theta_0) \rangle$,

kjer je Θ kot, ki ga smer določenega zobotrebca oklepa z izbrano smerjo, Θ_0 pa je povprečna smer zobotrebcev na papirju. Z $\langle\rangle$ označujemo povprečje. Množica zobotrebcev, ki ima popolnoma enako smer, bo imela vrednost tako definiranega ureditvenega parametra enako 1. Žal bo imela popolnoma neurejena množica vrednost 1/2; vse vrednosti ležijo torej med 1/2 in 1. Za končno definicijo ureditvenega parametra moramo to območje še raztegniti tako, da bodo vrednosti ležale med 0 in 1. Ureditveni parameter v ravnini definirajmo tako:

- $\eta_{2D} = 2\langle \cos^2(\Theta - \Theta_0) - 1/2 \rangle$.

Sedaj se delo lahko začne. Najprej izmerite vse kote, nato izračunajte povprečno smer, vsakemu kotu odštejte kot povprečne smeri, izračunajte $\cos^2$ tako dobljenega kota, odštejte 1/2 in vse skupaj pomnožite z 2 ter končno izračunajte še povprečje tako definirane količine. Mnogo zamudnega dela kajne? Pomagajte si s programom za delo z razpredelnicami, pa bo odčitavanje začetnih smeri zobotrebcev najzahtevnejše, vse ostalo pa bo opravil program.

Prvi del naloge nas je naučil izmeriti ureditveni parameter. V drugem delu naloge pa želimo ugotoviti, kako je ureditveni parameter odvisen od višine, s katere padejo zobotrebci.

Snopič zobotrebcev spustite z različnih višin in vsakič izmerite ureditveni parameter. Začnite z višino 5 centimetrov in jo povečujte po 5 centimetrov, dokler zobotrebci nimajo več izrazite smeri. Meritve vnesite v graf odvisnosti parametra reda od višine spusta. Kaj opazite?

Naj omenim še enkrat, zakaj tokrat tako zapletena naloga. Prihodnjič bomo namreč nekaj povedali o tekočih kristalih. Taka vaja pa vam bo pomagala razumeti številne lastnosti le-teh.

× × ×

Razmisli in poskusi

Mitja Rosina

54. Mehurčki

Gotovo ste že kot otroci radi spuščali in opazovali mehurčke. Sedaj pa je čas, da z mehurčki napravite pravi fizikalni poskus.

Mehurček napihujte počasi z dovolj debelo cevko, da bo postal čim večji. V začetku se bo preliVal v lepih barvah, ko bo pa dovolj velik (in tanek!), bodo barve postale medle in izginile; mehurček bo prozoren. To lahko razložimo z interferenco. Svetloba se odbije na zadnji steni kožice mehurčka z obratno fazo kot na sprednji; pri tanki kožici se prispevka uničita. Pri debelejši kožici pa različnim barvam svetlobe ustreza različno število valovnih dolžin; za nekatere je interferenca konstruktivna, za nekatere pa destruktivna.

Naloga. Opazuj, pri kateri velikosti mehurčka bodo barve začele izginjati. Takrat je debelina kožice velikostnega reda srednje valovne dolžine vidne svetlobe oziroma še precej tanjša. Preveri, ali je to res. Poleg premera mehurčka potrebuješ še volumen milnice. Oceniš ga tako, da ugotoviš premer kapljice, ki nastane, če se mehurček počasi skrči in pade s cevke (cevko seveda odstaviš od ust in potreseš). Lahko cevko še enkrat namočiš in potreseš, ne da bi pihal mehurček. Pri tem predpostaviš, da se je cevke prijela približno enaka količina milnice.

× × ×

51. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije za Stefanova priznanja

Ciril Dominko

Regijsko tekmovanje je potekalo, tako kot v prejšnjih letih, v treh tekmovalnih skupinah, ki se razlikujejo po snovi. Izvedeno je bilo 22. marca 2013 istočasno na naslednjih srednjih šolah v osmih regijah: Srednja šola Slovenska Bistrica, Gimnazija Novo mesto, Gimnazija Škofja Loka, Gimnazija Šentvid Ljubljana, Gimnazija Vič, Ljubljana, Prva gimnazija Maribor, Gimnazija Koper, Srednja šola Vena Pilona Ajdovščina. Na tekmovanju je sodelovalo 877 dijakov iz 60-ih srednjih šol. Izdelke je ocenjevalo osem regijskih komisij, v katerih je sodelovalo 94 učiteljev fizike iz sodelujočih šol. Na tekmovanju je bilo podeljenih 269 bronastih priznanj. Komisije iz posameznih regij so predlagale skupno 130 tekmovalcev za državno tekmovanje.

Državno tekmovanje je bilo 13. aprila 2013 v Šolskem centru Novo mesto, na Srednji elektro šoli in tehnični gimnaziji. Tekmovanja se je izmed predlaganih z regijskega tekmovanja udeležilo 126 tekmovalcev iz 37-ih srednjih šol. Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa so krili *Društvo, Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport* in soorganizator državnega tekmovanja – *Šolski center Novo mesto.* Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so sodelovali študentje, sodelavci Fakultete za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko, sodelavci Pedagoške fakultete v Ljubljani in sodelavci Inštituta Jožefa Stefana. Na tekmovanju je komisija razglasila pet prvih nagrad, enajst drugih in deset tretjih. Zlato priznanje je prejelo 22 tekmovalcev. Svečana podelitev nagrad je bila 26. maja 2013 na prireditvi v Cankarjevem domu v Ljubljani.

Podeljene nagrade in zlata priznanja:

Skupina I

I. nagrada in zlato priznanje

- Blaž Karner, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Blaž Potokar, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija.

II. nagrada in zlato priznanje

- Sandi Režonja, Gimnazija Murska Sobota;
- Rok Šikonja, Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija.

III. nagrada in zlato priznanje

- Tomaž Cvetko, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Luka Lodrant, Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija.

III. nagrada:

- Jernej Suhadolnik, Gimnazija Vič, Ljubljana;
- Jaka Šikonja, Srednja šola Črnomelj;
- Lenart Treven, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

Skupina II

I. nagrada

- Ni bila podeljena.

II. nagrada in zlato priznanje

- Aljoša Krstič, II. gimnazija Maribor;
- Ana Flack, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Rok Herman, Šolski center Ravne na Koroškem;
- Jernej Leskovar, Gimnazija Ptuj;
- Aleksander Rajhard, Gimnazija Škofja Loka;
- Filip Koprivec, Gimnazija Vič, Ljubljana.

III. nagrada

- Tomaž Horvat, II. gimnazija Maribor;
- Vid Kocijan, Gimnazija Vič, Ljubljana;
- Anže Zidar, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

Skupina III

I. nagrada in zlato priznanje

- Michel Adamič, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor;
- Tadej Ciglarič, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

II. nagrada in zlato priznanje

- Žiga Krajnik, Gimnazija Škofja Loka;
- Žiga Nosan, Gimnazija Ledina, Ljubljana;
- Bine Brank, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

III. nagrada in zlato priznanje

- Amadej Kristjan Kocbek, II. gimnazija Maribor;
- Jan Rozman, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 10. maja 2013 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Povabljenih je bilo deset najboljših tekmovalcev iz III. tekmovalne skupine. Na 44. mednarodno fizikalno olimpijado, ki je potekala od 7. do 15. julija 2013 v Kopenhagnu, so se uvrstili: Žiga Nosan, Gimnazija Ledina, Ljubljana, Michel Adamič in Bine Brank, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana, Žiga Krajnik, Gimnazija Škofja Loka in Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor.

× × ×

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

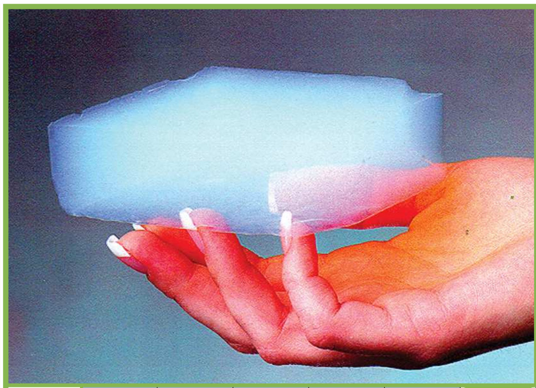
					2	1	
	3						
					4	3	
	7	4					5
		6		7	8		
2		5					
5					1		
	1			5		8	

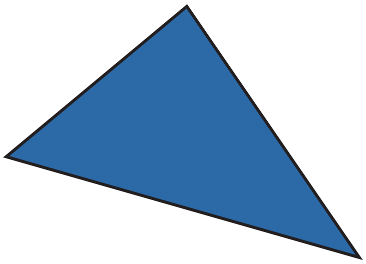
REŠITEV BARVNI SUDOKU

7	5	8	6	3	2	1	4
1	3	2	4	6	5	7	8
6	2	1	5	8	4	3	7
8	7	4	3	1	6	2	5
3	4	6	1	7	8	5	2
2	8	5	7	4	3	6	1
5	6	7	8	2	1	4	3
4	1	3	2	5	7	8	6

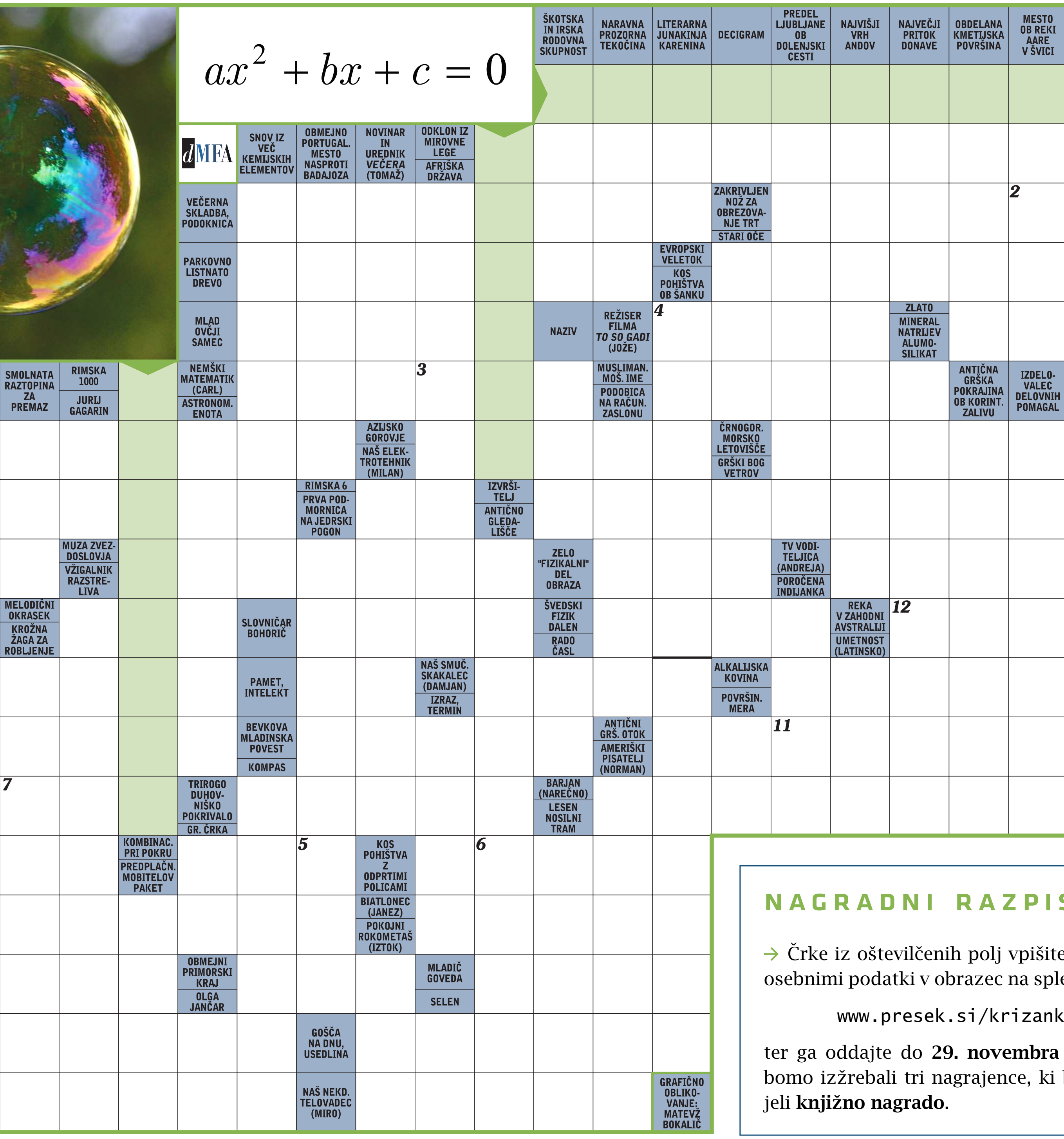
× × ×

Nagradna križanka





- AVTOR: MARKO BOKALIČ
- STRUPEN GLIKOZID V MILU
- DOMAČI MESNI IZDELEK V ČREVU
- PREDNIKI MADŽAROV
- ŠTEVILO PRSTOV NA ROKI
- VRTLJAJ
- ARITMET., GEOMETRIČNA, HARMONIČNA ?
- PODLAGA ZA BOJ PRI JUDU
- NERADODARNOST
- VEJA MATEMATIKE
- UMETNIŠKA UPODOBITEV OSEBE
- PAS PRI KIMONU
- MEZOPOT. SLIKOVNA PISAVA
- PESNICA ŠKERL
- JED ZA ENKRATNO ZAUŽITJE
- SPOMINSKO ŠPORTNO TEKMOVANJE
- AKTIVISTKA, KI DELUJE PODTALNO
- NEPREGAŽEN SNEG
- HOKEJSKI KLUB
- MOZOLJ
- POKOJNI GLASBENIK SOSS
- NEPRAVI OČE
- NEMŠKI BIOKEMIK IN BIOFIZIK (LEONOR)
- NEKDANJI IRANSKI DRŽAVNIK SADR
- ODLOČNO IZRAŽENO HOTENJE
- GLASBENIK JOHN
- OSNOVNA HRANA MLADIČEV SESALCEV
- ELEKTRIČNI NABOJ
- PLAST KOROZIJE NA ŽELEZU
- SLOVANSKI NAROD
- GEOGRAFIJA
- OPLOV MALČEK
- IGRALEC GIBSON
- NAELEKTREN DELEC
- POKRAJINA V OKOLICI RIMA
- PRITOK IDRIJCE IZ GRAPE IZPOD PODBRDA
- PRVI ZLOG ČOKOLADE
- NASPROTNO OD BEL
- BRITANSKI PREMIER V 70. LETIH, KASNEJE POVZDIGNJEN V BARONA (JAMES)
- ZNAK ZA NATRIJ
- VOGAL
- PREDNJI DEL GLAVE PRI PSIČKU
- IZRASTEK NA PRSTKU
- PIJANSKE ORGIJE (PO BAKHU)
- VODNA PTICA
- PRAVOSLAVNI ŠKOF
- PEVKA ČERNE
- MADŽAR. SKLADAT. (BELA)
- VODJA KROVA
- OZNAKA IZRAELA
- CELIČNA SNOV
- TURISTIČNO DRUŠTVO
- KRAJ OB PRIMORSKI AVTOCESTI
- REKREACIJA
- GLAGOLSKI NAČIN, TVORNIK
- SLAVKO AVSENIK
- SKRAJNI KONEC KOPNEGA
- VLADO KRESLIN
- FORMAT OSMERKA
- PEVEC IN RADIJEC (JANKO)
- NAUK O SVETLOBI
- OČKA, ATI
- LASTNIK FLOTE
- ANG. POLAR. RAZISKOVALCA (JOHN IN JAMES)
- ISTRSKO LETOVIŠČE
- ZNAMKA PROCESORJEV
- AVTONOMNA OBLAST
- OSREDNJE SVETIŠČE V MEKI
- NAJVIŠJI OLIMPIJSKI ORGAN
- NEPAREN
- NAČRT
- JAZ, TI, ?
- RJAVA KOBILA
- KOŠARKAR MURIĆ
- VRSTA SLAŠČICE
- VELIKA PLETENA POSODA
- CIKLIČNA ORGANSKA SPOJINA
- SEDANJI JAPONSKI CESAR
- OLIVER MLAKAR
- ŠTEVILO PEVCEV V SEPTETU
- STROPNI LOK, SVOD
- STAR PROGRAMSKI JEZIK
- IGRA NA SREČO
- CERKVENI OBRED
- OPERNI SPEV



NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **29. novembra 2013**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

33. tekmovanje iz znanja fizike za Stefanova priznanja

Barbara Rovšek

V šolskem letu 2012/2013 se je šolskega tekmovanja iz fizike udeležilo 8721 učencev osmih in devetih razredov, kar pomeni, da je iz fizike tekmoval vsak četrti učenec teh dveh razredov v Sloveniji. Na področnem tekmovanju je v 17-ih regijah sodelovalo 1715 učencev. Na državnem tekmovanju, ki je potekalo 13. aprila 2013 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter na Osnovni šoli Srečka Kosovela v Sežani, je tekmovalo 197 učencev, od katerih jih je 114 osvojilo zlata prizanja.

Na državnem tekmovanju je vse tekmovalne pole pregledovala skupina ocenjevalcev v Mariboru. Tekmovanje se je pričelo ob 10. uri dopoldne in končalo ob 23. uri, ko so bile ocenjene vse pole in objavljeni neuradni rezultati.

SLIKA 1.
Med državnim tekmovanjem v Sežani.

Velikih sprememb pri organizaciji in izvedbi tekmovanja ni bilo. Menda so bile letošnje naloge za devetošolce na šolskem tekmovanju (pre)težke in (pre)obširne. Olajševalna okoliščina je, da so bile take za vse tekmovalce brez izjeme. Enako so se potili, a upamo, ne obupovali, vsi. Kljub temu sta se med devetošolci našla junaka, ki sta v kratkih 60-ih minutah, odmerjenih tekmovanju, pravilno rešila vse naloge. Osmošolce pa so najtežje naloge doletele na državnem tekmovanju, kjer tudi najboljši niso rešili prav vseh nalog. Sestavljalci nalog se včasih tudi uštejemo, ko podcenimo težavnost nalog. Na koncu pa se vse srečno konča – vedno nekdo zmaga, pa če so naloge lahke ali težke, in vedno vas je veliko, ki osvojite priznanja.

Na žalost letošnjih najuspešnejših devetošolcev nismo povabili na sicer tradicionalno poletno šolo v Kranjsko goro, ker nam za to ni uspelo zbrati dovolj finančnih sredstev. Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport zadnje čase odmerja bolj skromno podporo našim dejavnostim. Upamo, da se bodo razmere izboljšale in bomo v prihodnosti s poletnimi šolami lahko nadaljevali.

V 8. razredu je prejelo nagrade devet učencev:

1. nagrada

- Zala Potočnik, OŠ Trzin, mentorica Maja Završnik;
- Luka Govedič, OŠ Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica, mentor Valentin Strašek.

2. nagrada

- Urban Duh, OŠ bratov Polančičev, Maribor, mentor Mladen Tancer;
- Gregor Igličar, OŠ Naklo, mentorica Špela Knez;
- Matej Škarabot, OŠ Log – Dragomer, mentorica Petja Pompe Kreže.

3. nagrada

- Luka Jevšenak, OŠ Mihe Pintarja-Toleda, Velenje, mentor Dejan Zupanc;
- Luka Školč, OŠ Trnovo, Ljubljana, mentorica Đulijana Juričić;
- Nejc Zajc,iz OŠ Livada, Velenje, mentorica Tatjana Zafošnik Kanduti;
- Jakob Zmrzlikar, iz OŠ Domžale, mentor Béla Szomi Kralj.

V 9. razredu je prejelo nagrade devet učencev:

1. nagrada

- Aleksej Jurca, OŠ Ledina, Ljubljana, mentorica Nina Zadel;
- Žiga Željko, OŠ Dravlje, Ljubljana, mentorica Vesna Harej.

2. nagrada

- Bruno Čeferin, OŠ Hinka Smrekarja, Ljubljana, mentor Miloš Kovič;
- David Popović, OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana, mentor Branko Cedilnik.

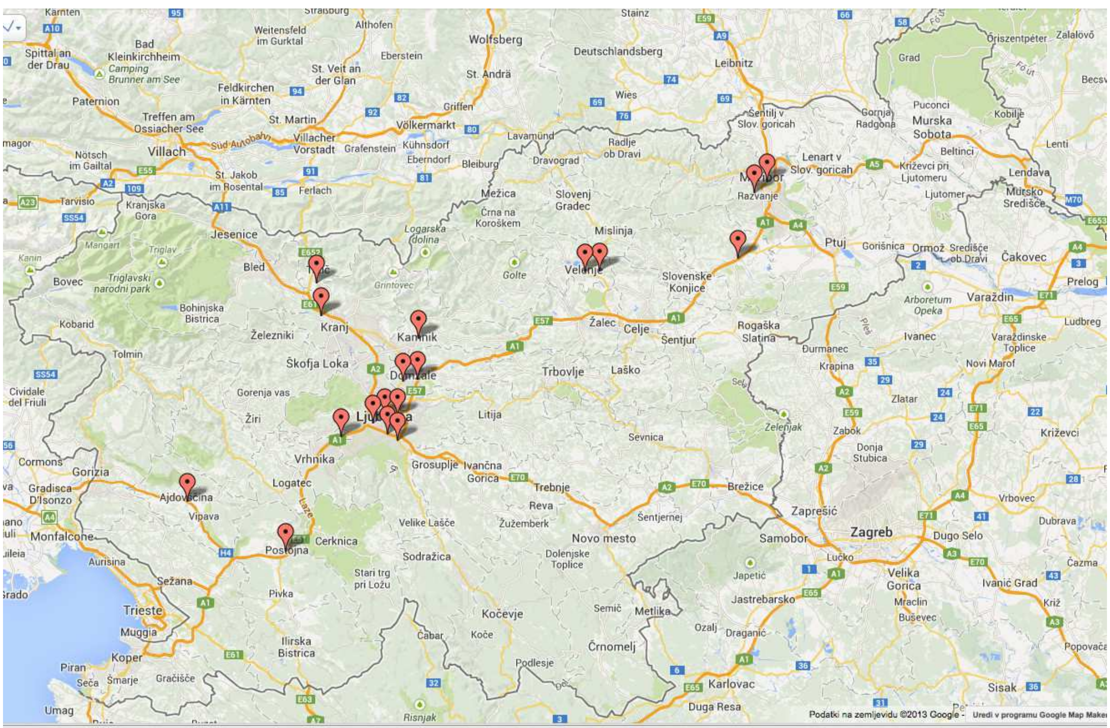
3. nagrada

- Urban Ogrinec, OŠ Toma Brejca, Kamnik, mentorica Sergeja Miklavc;
- Tina Kolenc Milavec, OŠ Miroslava Vilharja, Postojna, mentor Gregor Antloga;
- Filip Ljevar, OŠ Slave Klavore Maribor, mentor Silvo Muršec;
- Martina Lokar, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina, mentor Sašo Žigon;
- Vid Primožič, OŠ Križe, mentorica Neža Poljanc.

Razpis tekmovanja, v katerem so zapisane vsebine tekmovanja, pravilnik tekmovanja in bilten državnega tekmovanja, v katerem najdete tudi naloge zadnjega tekmovanja z obširnimi rešitvami, so objavljeni na spletnih straneh DMFA Slovenije, `http://www.dmfa.si/fiz_OS/index.html`.

V letošnjem šolskem letu načrtujemo nekaj manjših sprememb. Državno tekmovanje bo za 20 minut in za eno eksperimentalno nalogo krajše, še vedno pa bo obsegalo teoretični in praktični del.

Mladim bralkam in bralcem Preseka želimo veliko zabave in uspeha pri reševanju fizikalnih (pa tudi matematičnih in astronomskih) nalog.



SLIKA 2.
Na zemljevidu so označeni kraji, kjer so doma nagrajenci 33. tekmovanja za Stefanova priznanja.

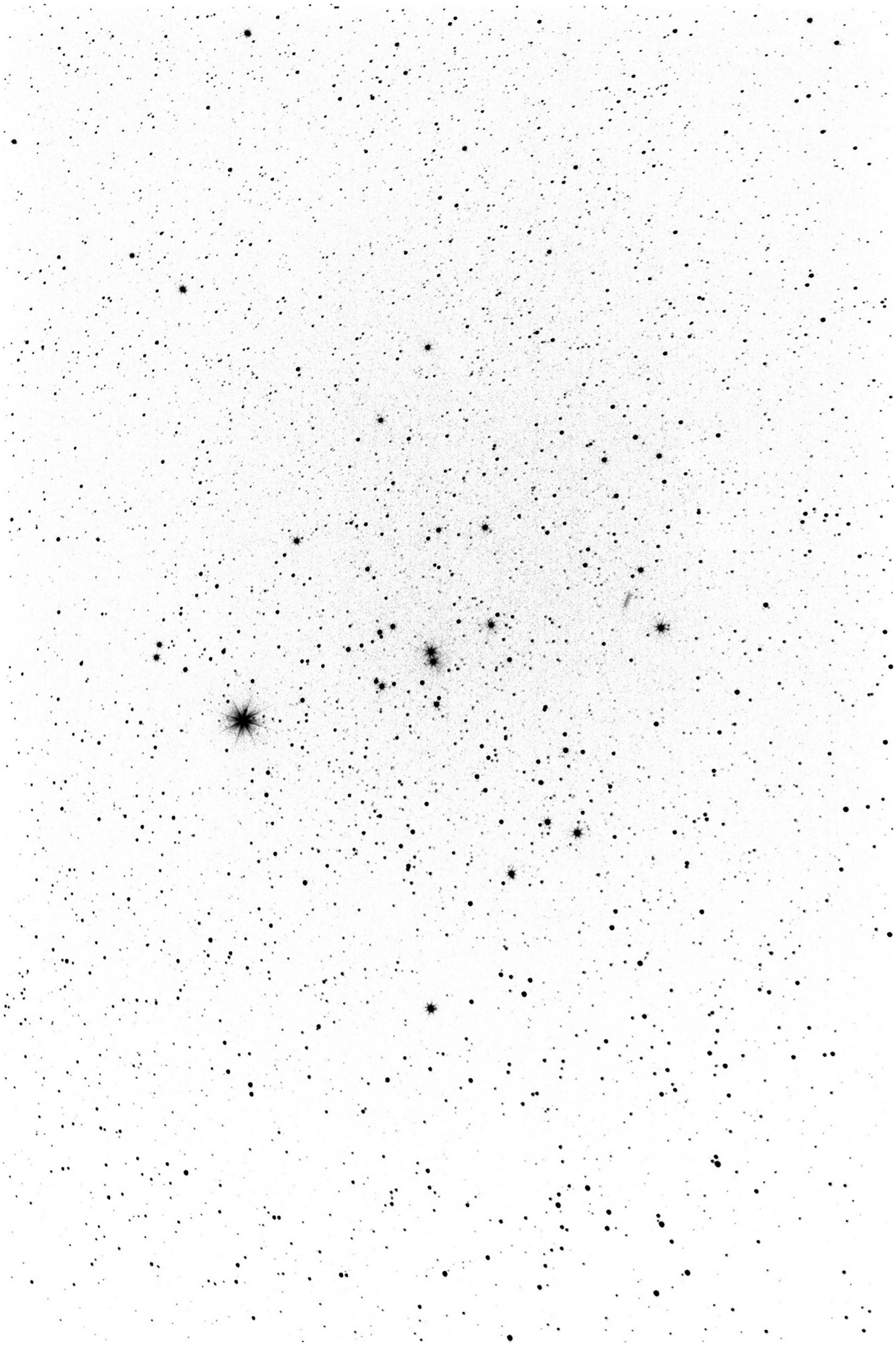
Olimpijske naloge iz praktične astronomije

Andrej Guštin

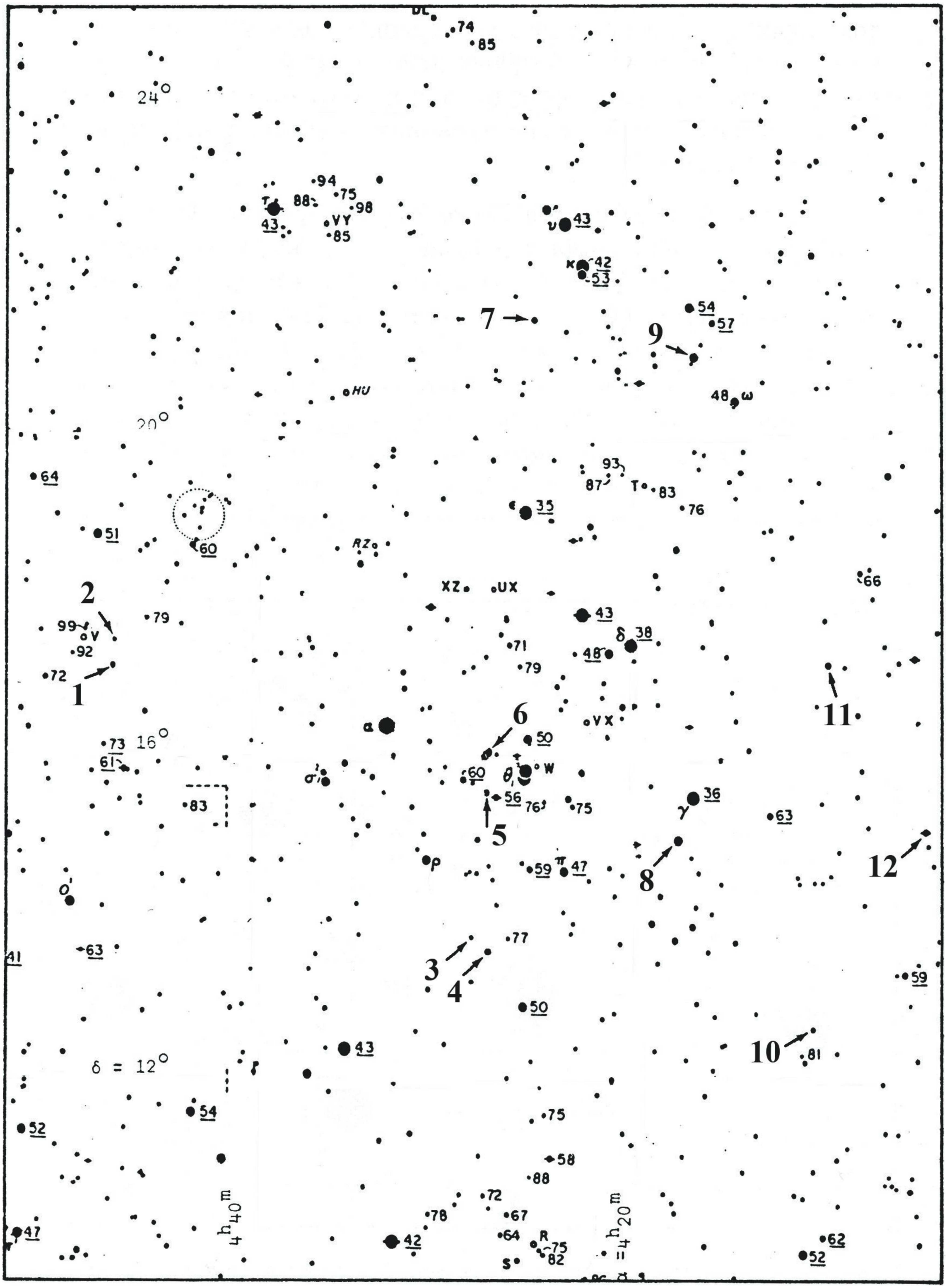
→ Na letošnji 7. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike so dijaki reševali teoretične naloge, analizirali podatke in meritve ter se spopadli z astronomskimi opazovanji z malim, 15-centimetrskim teleskopom. Tokrat predstavljamo nalogi iz analize opazovanj in meritev ter opazovalne naloge. Služijo naj pripravi na 5. državno tekmovanje iz znanja astronomije za srednješolce (šolsko tekmovanje bo 12. decembra 2013, državno pa 11. januarja 2014). Morda pa se s katero od nalog lahko pozabavajo tudi osnovnošolci višjih razredov.

1. naloga. Na sliki 1 je viden del ozvezdja Veliki medved. Posnetek je bil narejen s CCD kamero s čipom velikosti 17 mm×22 mm. Ugotovi goriščno razdaljo f optičnega sistema (f objektiva teleskopa), s katerim je bila posneta slika, in oceni napako svojega rezultata.

SLIKA 1. Veliki voz – del ozvezdja Veliki medved.



SLIKA 2.
Fotografija območja neba z razsuto zvezdno kopico Hijade.



SLIKA 3.
Zvezdna karta dela neba v območju Hijad.

2. naloga. Slika 2 prikazuje fotografijo neba v območju razsute zvezdne kopice Hijade. Pri fotografiranju je bil uporabljen V-filter Johnsonovega fotometričnega sistema. Slika 3 je zvezdna karta tega območja na nebu z dobro znanimi magnitudami V (m_V) številnih zvezd. (Opozorilo. Da se decimalne pike ne bi pomešale z zvezdami, decimalne pike niso uporabljene. Primer: zvezda z magnitudo $m_V = 8{,}1$ je označena z »81«). Namig. Nekaterih zvezd morda ni na karti.

(a) Na sliki 3 poišči čimveč zvezd, označenih s številko in puščico, in jih označi s številko na sliki 2.

(b) S primerjavo m_V znanih zvezd na sliki 2 in sliki 3 oceni m_V zvezd, ki si jih poiskal in označil pod točko (a).

3. naloga. Rezervna naloga v primeru oblačnega vremena. Izvaja se v zaprtem prostoru z umetnim soncem – fiksno postavljeno sijalko.

Na dan spomladanskega enakonočja (spomladanski ekvinokcij) se ob 14. uri po lokalnem času začne prehod Merkurja čez Sonce. Skupina astronomov se zgodaj zjutraj odpravi na vrh neke gore v Grčiji, od koder naj bi opazovali prehod Merkurja. Pred opazovanjem pa bi radi montažo teleskopa na gori poravnali na pol. Ker pa je to zanje novo opazovališče, astronomi ne poznajo geografske širine in dolžine kraja na gori. Na žalost je tudi oblačno. Na nebu ni videti zvezd. Nebo ostane pokrito z oblaki vse do 11. ure, nato se zjasni in Sonce je na nebu vidno. Izkušeni astronom nato opoldan v približno dveh minutah naravna montažo na pol in pravilno zasuče kroge za rektascenzijo in deklinacijo le z vodno tehtnico.

Na razpolago imaš teleskop SkyWatcher z nemško ekvatorialno montažo EQ3-2 in vodno tehtnico. Predpostavi, da je spomladansko enakonočje in da je (namišljeno) Sonce tisti dan najvišje na nebu. Poravnaj montažo teleskopa na pol.

Tvoja naloga je, da tudi pravilno naravnaš kroge za rektascenzijo in deklinacijo na montaži teleskopa.

Opomba. Očitno je, da za to nalogo ne potrebuješ cevi teleskopa, pritrjene na montažo, zato je zaradi praktičnih razlogov na montažo pritrjena kartonska cev brez protiuteži.

Čas za izvedbo naloge je 16 minut.

4. naloga. Izberi enega od dveh okularjev, ki sta ti na razpolago pri opazovanju s teleskopom. Na nebu izberi primerno svetlo nebesno telo, podatke zanj poišči v priloženem katalogu, in izmeri vidno polje teleskopa.

Čas za izvedbo naloge je 10 minut.

5. naloga. Brez uporabe krogov za rektascenzijo in deklinacijo na montaži teleskopa izvedi sledeči nalogi:

(a) Teleskop zasukaj tako, da bo v sredini vidnega polja teleskopa svetla zvezda γ *Sagitta* (gama Puščice); magnituda = +3,51; rektascenzija $RA = 19^h\,58^m\,45{,}39^s$, deklinacija $Dec = +19^\circ\,29'\,31{,}5''$. Ko to narediš, takoj pokliči sodnika oziroma pomočnika, da ugotovi, če si našel pravo zvezdo.

(b) Teleskop zasukaj tako, da bo v sredini vidnega polja znana meglica M 27 (*Dumbbell Nebula – meglica Ročka*); rektascenzija $RA = 19^h\,59^m\,36{,}34^s$; deklinacija $Dec = +22^\circ\,43'\,16{,}09''$. Ko to narediš, takoj pokliči sodnika oziroma pomočnika, da ugotovi, če si našel pravo meglico.

Čas za izvedbo nalog je 6 minut.

SLIKA 4.
Na 7. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike so dijaki opazovali s 15-centimetrskim Newtonovim teleskopom SkyWatcher na nemški montaži.

× × ×

Linearni problem prevoza

Dragana Božović in Andrej Taranenko

Tovarna čokolad skladišči svoje izdelke na različnih lokacijah v Sloveniji, te izdelke pa želijo dostaviti v več trgovin, prav tako na različnih lokacijah. V času krize želijo pri razvozu svojih izdelkov čim več prihraniti. Kako naj tovarna dostavi svoje izdelke trgovinam tako, da bo vsaka trgovina prejela vsaj naročeno število izdelkov, da bo skupno število razvoženih izdelkov največ enako zalogi le-teh in da bo tovarno razvoz izdelkov iz skladišč v trgovine stal čim manj? Na ta vprašanja bomo odgovorili v tem članku.

Linearno programiranje in problem prevoza

Problemi linearnega programiranja so optimizacijski problemi, v katerih želimo optimizirati določeno *ciljno funkcijo*, pri čemer moramo zadoščati podanim pogojem oziroma omejitvam. V tovrstnih problemih so pogoji in ciljna funkcija vedno linearne funkcije optimizacijskih spremenljivk.

Pobližje bomo spoznali *problem prevoza*, znan tudi pod imenom *transportni problem*. Problem prevoza je optimizacijski problem, v katerem največkrat želimo minimizirati stroške prevoza. Za lažjo predstavo vzemimo našo tovarno čokolad. Recimo, da ima ta tovarna na različnih lokacijah po Sloveniji m skladišč in n trgovin. Posamezni izdelek lahko iz nekega skladišča dostavimo do vsake trgovine. V vsakem skladišču imamo natančno določeno količino oziroma zalogo izdelkov, ki so v danem času skladiščeni (torej, na voljo). Vsaka trgovina v danem času naroči točno določeno količino izdelkov (povpraševanje trgovine). Še več, za vsako skladišče je znano, koliko stane prevoz enote izdelka do vsake izmed trgovin. Cena je običajno odvisna od razdalje med skladiščem in trgovino ter od prevoznega sredstva, ki ga uporabimo. Predpostavimo, da so cene prevoza posamezne enote izdelka (npr. karton čokolad) od skladišča do trgovine znane in so celoštevilske.

Označimo omenjene količine na naslednji način:

- Število s_i predstavlja zalogo (enot) izdelka v skladišču i, kjer je $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Število d_j predstavlja, koliko enot izdelka naroča trgovina j, kjer je $j = 1, 2, \ldots, n$.
- S številom $c_{i,j}$ označimo, koliko stane prevoz ene enote izdelka iz skladišča i v trgovino j, za $i = 1, 2, \ldots, m$ in $j = 1, 2, \ldots, n$.
- S številom $x_{i,j}$ označimo, koliko enot izdelka peljemo iz skladišča i do trgovine j, za $i = 1, 2, \ldots, m$ in $j = 1, 2, \ldots, n$.

Cilj je določiti, kako razvoziti izdelke med skladišči in trgovinami tako, da bo razvoz ustrezal zalogam (ponudbam) in povpraševanjem, pri čemer bodo skupni stroški najmanjši možni.

Opišimo zastavljeni problem še matematično. S *ciljno funkcijo* zapišimo skupne stroške, ki jih želimo minimizirati. Ceno prevoza iz skladišča i do trgovine j lahko torej izračunamo kot $c_{i,j} \cdot x_{i,j}$. Skupno ceno razvoza iz vseh skladišč do vseh trgovin dobimo tako, da seštejemo stroške za vse možne pare vrednosti števil i in j. Naša ciljna funkcija z je torej (linearna) funkcija:

- $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{i,j} \cdot x_{i,j}).$$

Seveda želimo določiti vrednosti $x_{i,j}$ tako, da bo funkcija z imela za te vrednosti čim manjšo vrednost (želimo minimizirati z).

Opišimo še *omejitve*, ki se v problemu prevoza naravno pojavijo. Iz skladišča i lahko pošljemo izdelke v različne trgovine. Število vseh enot izdelkov, ki jih iz skladišča i pošljemo, je torej enako vsoti vseh količin, ki smo jih iz tega skladišča razvozili do vseh trgovin, torej od količine enot iz skladišča i, ki jo peljemo do trgovine 1 ($x_{i,1}$), do trgovine 2 ($x_{i,2}$), in tako naprej, vse do trgovine n ($x_{i,n}$). Zapisano drugače, iz skladišča i razvozimo skupno $x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,n}$ enot izdelka. Zapisano s simbolom za vsoto, je to

$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$. Ker ima (vsako) skladišče i omejeno zalogo s_i, iz tega skladišča ne moremo poslati več izdelkov, kot jih je na zalogi. To omejitev lahko za vsako skladišče $i = 1, \ldots, m$ izrazimo na naslednji način:

- $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le s_i$.

Poglejmo še trgovino j. V to trgovino prispejo izdelki iz vseh skladišč (količina je lahko tudi 0, kar pomeni, da iz skladišča v to trgovino nismo poslali izdelka). Torej je skupna količina enot izdelka, ki jo trgovina prejme, enaka $x_{1,j} + x_{2,j} + \ldots + x_{m,j}$. Znova, zapisano krajše, je ta količina $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$. Ker je skupno povpraševanje trgovine j enako d_j, potem celotna količina dostavljenih izdelkov ne sme biti manjša od d_j (lahko pa trgovina skupno prejme več, kot je naročila). Ta pogoj lahko za vsako trgovino $j = 1, \ldots, n$ zapišemo kot

- $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ge d_j$.

Ker lahko iz skladišča do trgovine pošljemo 0 ali več enot izdelkov, morajo biti vsi $x_{i,j}$ nenegativna cela števila (enot ne moremo še bolj razdrobiti).

Problem prevoza lahko sedaj formalno zapišemo na naslednji način [2]:

- minimiziraj $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \qquad (1)$$

  pri pogojih:

  $$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le s_i \qquad \text{za } i = 1, \ldots, m$$

  $$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ge d_j \qquad \text{za } j = 1, \ldots, n$$

  $$x_{i,j} \ge 0 \qquad \text{za } i = 1, \ldots, m \text{ in } j = 1, \ldots, n$$

Kadar je skupna količina zaloge vseh skladišč enaka skupni količini povpraševanj vseh trgovin, pravimo, da je problem prevoza *uravnotežen*. Zapisano drugače, problem prevoza je uravnotežen, če velja

- $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$.

Poglejmo si zadevo še na konkretnem primeru, ki je povzet po [1]. Naša tovarna čokolad ima v Sloveniji tri različna skladišča. Mesečno s svojimi izdelki oskrbuje štiri trgovine, ki se nahajajo v različnih krajih. Poznamo zalogo skladišč, povpraševanje trgovin in transportne stroške na enoto izdelka iz vsakega skladišča do vsake trgovine. Kako naj tovarna razvozi svoje izdelke iz skladišč do trgovin tako, da bodo transportni stroški najmanjši možni?

Podatki tega problema so prikazani v tabeli 1. Števila, zapisana s krepko, predstavljajo transportne stroške. Tako vidimo, da je cena prevoza enote izdelka iz skladišča 1 do trgovine 1 enaka 10, prevoz iz skladišča 2 do trgovine 3 stane na enoto 9, strošek prevoza ene enote izdelka iz skladišča 3 do trgovine 1 pa je brezplačen (enak 0). Opazimo lahko tudi, da je ta problem prevoza uravnotežen. Problem bomo rešili s pomočjo programa (reševalnika) za reševanje problemov linearnega programiranja, za to pa moramo spoznati jezik AMPL, s katerim opišemo naš primer.

	trgovine				
skladišče	1	2	3	4	zaloga skladišča
1	**10**	**0**	**20**	**11**	20
2	**12**	**7**	**9**	**20**	25
3	**0**	**14**	**16**	**18**	15
povpraševanje	10	15	15	20	

TABELA 1.
Podatki za razvoz.

Jezik AMPL

Problem bomo rešili s pomočjo jezika AMPL (angl. *A Mathematical Programming Language*). AMPL je jezik za modeliranje v matematični optimizaciji. Uporabljamo ga za opisovanje in reševanje problemov z veliko zahtevnostjo ter obsežnim matematičnim računanjem. Razvili so ga Robert Fourer, David Gay and Brian Kernighan v Bell Laboratories. AMPL podpira desetine različnih reševalnikov problemov, ki so tako odprto-kodni kot komercialni.

Posebna prednost jezika AMPL je podobnost njegove sintakse z matematičnim zapisom optimizacijskih problemov. Ta prednost omogoča zelo čitljivo in jedrnato opredelitev problemov na področju optimizacije. Mnogi sodobni reševalniki, ki so dostopni na strežniku NEOS[1], sprejemajo za vhod probleme, zapisane v jeziku AMPL. Glede na statistike strežnika NEOS je AMPL najbolj priljubljen format za predstavitev problemov matematičnega programiranja [3].

Preden problem rešimo, ga moramo zapisati v ustrezni obliki, ki predstavlja vhod (vhodne podatke) za reševalnik. Vhod je v AMPL-u sestavljen iz treh datotek, in sicer `.mod`, `.dat` in `.txt`.

Ko pričnemo s programiranjem, najprej ustvarimo datoteko `.mod`, v kateri podamo ciljno funkcijo in omejitve našega problema. Na začetku datoteke najprej definiramo množice, ki so potrebne za reševanje problema. Množico, vključno z njenimi elementi, zapišemo na naslednji način, pri čemer v zavitih oklepajih podamo elemente množice:

- `set A :=` $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$`;`

Definiramo lahko parametre, ki predstavljajo podatke, podane na začetku reševanja problema. Parameter definiramo kot

- `param Ime {A};`

Pri tem A predstavlja množico, na katero se sam parameter navezuje. Parameter se lahko navezuje tudi na več množic (večdimenzionalni parameter), ki jih podamo v zavitem oklepaju ter jih ločimo z vejico.

Naslednji korak je definicija spremenljivk našega problema. Spremenljivko definiramo kot

- `var Ime {a in A};`

Tudi spremenljivka se lahko navezuje na več množic, ki jih zapišemo v zavitih oklepajih ter ločimo z vejico. Ciljno funkcijo in želeno optimizacijo podamo kot

- `minimize/maximize Ime:  funkcija;`

Omejitve problema pa zapišemo kot

- `subject to Ime:  omejitev;`

Če se omejitev navezuje na določeno množico, to zapišemo kot

- `subject to Ime {a in A}:  omejitev;`

[1]Seznam najdemo na naslovu `http://www.neos-server.org/neos/solvers/index.html`, preverjeno 3. 10. 2013

Problem iz našega primera bi zapisali na način, kot je prikazan v izpisu datoteke 1. Najprej definiramo množici $M = \{1,2,3\}$ in $N = \{1,2,3,4\}$. Nato napovemo, da bomo imeli tri parametre: parameter c bo matrika dimenzije 3×4 (indeksi so vzeti iz množic M in N) in predstavlja matriko cen, parameter s predstavlja vektor zalog skladišč, d pa vektor povpraševanj trgovin. Vrstica `var x {i in M,j in N} >= 0;` deklarira optimizacijske spremenljivke $x_{i,j}$ in pove, da morajo biti nenegativne. Zadnje tri vrstice podajo ciljno funkcijo, ki jo minimiziramo, ter omejitve optimizacije.

Izpis datoteke 1 AMPL model (.mod)

```
set M := {1..3};
set N := {1..4};
param c {M,N};
param s {i in M};
param d {j in N};
var x {i in M,j in N} >= 0;
minimize sudoku:
    sum {i in M, j in N} c[i,j]*x[i,j];
subject to izvori {i in M}:
    sum {j in N} x[i,j] <= s[i];
subject to povpraševanje {j in N}:
    sum {i in M} x[i,j] >= d[j];
```

V podatkovni datoteki `.dat` moramo določiti vrednosti parametrov, ki smo jih napovedali v modelu. Parametre, ki predstavljajo vektorje, zapišemo na naslednji način:

- `param imeParametra :=`
  `indeks1 vrednost1 indeks2 vrednost2 ...;`

Če parameter predstavlja matriko, pa pred `:=` in za parametrom zapišemo indekse stolpcev, za tem simbolom pa zapišemo indeks vrstice in naštejemo vse elemente, ločene s presledkom. Na koncu zadnje vrstice ne smemo pozabiti na podpičje. Pozorni moramo biti tudi na to, da indekse iz množice, ki smo jo v deklaraciji parametra podali kot prvo, damo v vrstice, elemente druge množice pa v stolpce.

Datoteka s podatki za naš primer je prikazana v izpisu datoteke 2. Najprej definiramo parametra s in d. Kot že vemo, s predstavlja vektor zalog skladišč, d pa vektor povpraševanj trgovin. Zapišemo ju tako, da najprej podamo indeks v vektorju, takoj za njim pa vrednost, ki je na tem mestu v vektorju. To storimo za vse koordinate vektorja. Vse to zapišemo v eni vrstici, pri čemer številke ločimo s presledki. V prvi vrstici za vektor s vidimo, da je vrednost na prvi koordinati je 20, na drugi 25 in na tretji 15. Podobno velja za vektor d. Nato definiramo še parameter c oziroma matriko cen, ki je dimenzij 3×4. Najprej je treba zapisati indekse vseh stolpcev, v našem primeru naravna števila od ena do štiri (kot je zapisano v četrti vrstici). Nato zapišemo vrstice. Najprej zapišemo številko vrstice, nato naštejemo vrednosti, ki se v tej vrstici nahajajo. To storimo za vse vrstice, ki jih imamo, pri čemer številke ločimo s presledki. Torej najprej za prvo vrstico (1 10 0 20 11), nato drugo (2 12 7 9 20) in na koncu še tretjo vrstico (3 0 14 16 18).

Izpis datoteke 2 AMPL model (.dat)

```
param s := 1 20 2 25 3 15;
param d := 1 10 2 15 3 15 4 20;
param c:
1 2 3 4 :=
1 10 0 20 11
2 12 7 9 20
3 0 14 16 18;
```

Reševalniku moramo podati tudi ukaze, kaj naj z modelom in podatki stori. S stavkom `solve;` mu povemo, naj problem reši, s stavkom `display x;` pa, da naj izpiše rezultat, torej končne vrednosti optimizacijskih spremenljivk `x` (matriko). Ukazna datoteka je prikazana v izpisu datoteke 3.

Izpis datoteke 3 AMPL model (.txt)

```
solve;
display x;
```

Nato naložimo vse tri datoteke in počakamo na rešitev optimizacijske naloge [4]. NEOS reševalnik (Mixed Integer Linear Programming - scip[AMPL Input]) izpiše naslednji rezultat:

```
x  :=
1  1   0
1  2   5
1  3   0
1  4  15
2  1   0
2  2  10
2  3  15
2  4   0
3  1  10
3  2   0
3  3   0
3  4   5
;
```

To rešitev lahko predstavimo z naslednjo tabelo, pri čemer prva vrstica predstavlja oznake trgovin, prvi stolpec pa oznake skladišč.

	1	2	3	4
1	0	5	0	15
2	0	10	15	0
3	10	0	0	5

Torej so stroški prevoza našega problema najmanjši v primeru, ko imamo naslednje vrednosti optimizacijskih spremenljivk:

- $x_{1,2} = 5,\ \ x_{1,4} = 15,\ \ x_{2,2} = 10,$
  $x_{2,3} = 15,\ \ x_{3,1} = 10,\ \ x_{3,4} = 15,$

vse ostale vrednosti $x_{i,j}$, ki jih tukaj nismo našteli, imajo vrednost 0. Najmanjši stroški prevoza za naš primer znašajo

- $5 \cdot 0 + 15 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 18 = 460.$

Literatura

[1] J. F. Rayman, Transportation Problems (online), 3. 10. 2013. `http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/J.F/chapter7.pdf`

[2] The Transportation Problem: LP Formulations (online), 3. 10. 2013. `http://www.utdallas.edu/~scniu/OPRE-6201/documents/TP1-Formulation.pdf`

[3] Wikipedia: AMPL (online), 3. 10. 2013. `http://en.wikipedia.org/wiki/AMPL`

[4] AMPL (online), 3. 10. 2013. `http://um.fnm.uni-mb.si/tiki-download_wiki_attachment.php?attId=241&page=02.11.2011\%3A\%20Linearni\%20program.\%20Dual.\%20Simpleksna\%20metoda`

× × ×

NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Aerogel

Aleš Mohorič

Kepa iz nenavadne modrikasto prozorne snovi na naslovnici je na prvi pogled podobna ledeni kocki. Vendar je očitno prelahka, saj ne upogne niti vejice, na kateri stoji. Ta snov izredno majhne gostote je aerogel – mikroporozna trdnina, v kateri je razpršen plin. Sestavljena je podobno kot pena. Trdni del ima strukturo sten in vlaken z debelino nekaj nanometrov, vmesne pore pa so velike do nekaj mikrometrov. Najbolj pogosto je aerogel narejen iz silicijevega dioksida, ki sestavlja tudi navadno steklo.

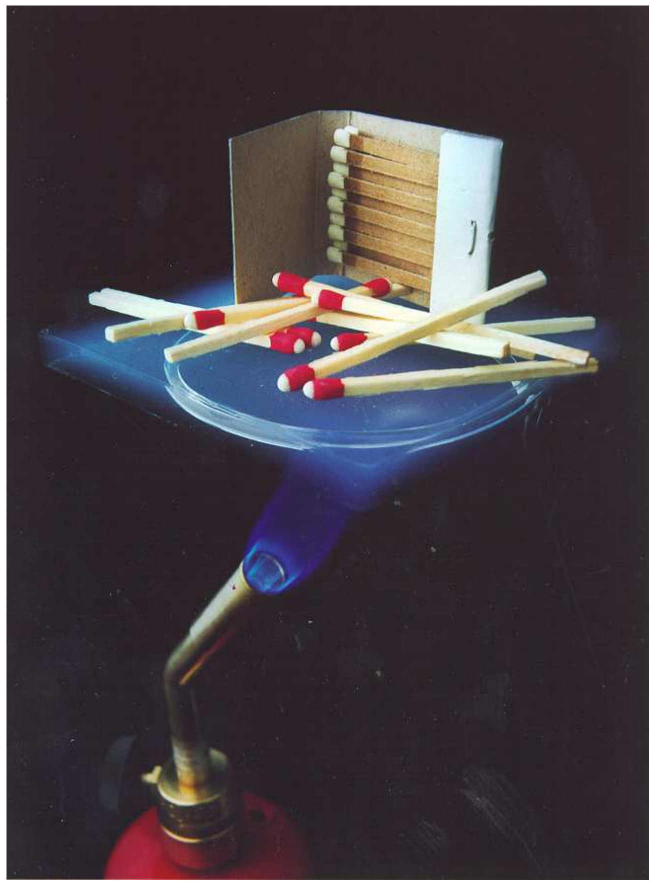
Gostota aerogela je tisočkrat manjša od gostote stekla, saj ga več kot 99 % sestavlja zrak. Običajni aerogel ima gostoto 1,9 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, rekorder z gostoto 0,16 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ [1] pa je sestavljen iz ogljikovih nanocevk in grafena ter je celo redkejši od zraka (1,2 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$). To pomeni, da vsebuje veliko praznih por, v katere zrak ne prodre.

Ker ima aerogel veliko por, v katerih zrak le težko kroži, ima tudi dobre izolacijske lastnosti (slika 1). Njegova toplotna prevodnost je od nekaj tisočin do nekaj stotin $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, kakršna je toplotna prevodnost zraka. Zrak je sicer dober toplotni izolator; če pa ni oviran, kroži in konvekcija poveča toplotni tok. Steklo ima dva velikostna reda (več stokrat) večjo toplotno prevodnost od aerogela.

Aerogel je skoraj prozoren; modrikasto barvo ima zaradi enakega razloga, kot je modro nebo (Rayleighovo sipanje). Aerogel je dokaj trden in zdrži obremenitve, ki mnogokrat presegajo njegovo težo (slika 2). Na otip je podoben trdni peni, pri dovolj velikih obremenitvah pa se zdrobi.

Neobdelan silicijev aerogel je hidrofilen in močno veže vlago. Zato izsuši kožo, če ga prijemljemo brez rokavic. V stiku z vodo se spremeni v prah.

V naravi obstaja podobna snov – kamnina plovec, ki nastane ob hitrem strjevanju porozne lave. Ker imajo pore mnogo debelejše stene, je gostota plovca mnogo večja od gostote aerogela. Kljub temu pa je za trdnino ta gostota majhna, zato kamni iz plovca lahko plavajo na vodi.



SLIKA 1.
Aerogel je dober toplotni izolator. Že tanka plast učinkovito prepreči prehod toplote iz vročega plamena gorilnika do vžigalic. (Foto: NASA)

SLIKA 2.
Aerogel je trden in prenese relativno velike obremenitve. Na sliki kos aerogela (modrikast prozoren kvader na dnu) nosi opeko z maso 2,5 kg. (Foto: NASA)

Pravi aerogel so prvič izdelali v tridesetih letih prejšnjega stoletja. Zaradi izjemnih lastnosti ga uporabljajo kot toplotni izolator in lahek konstrukcijski element, prevodne različice uporabljajo v elektroniki, zaradi velikega razmerja med površino in prostornino pa so uporabni tudi kot filtri in katalizatorji. Pri NASI so ga med misijo Stardust uporabili v tarči za lovljenje prašnih delcev v repu kometa [2]. Aerogel je namreč dovolj trden, da zadrži prašne delce z nekajkrat večjo hitrostjo od hitrosti izstrelka iz puške. Slika 3 kaže sledi, ki jih v aerogelu pustijo prašni delci. Po takih sledeh lahko delce najdejo in tudi določijo smeri, iz katerih so prileteli. Tarče iz običajne trdnine niso primerne, saj se v njih prašni delci deformirajo ali razpadejo.

Z aerogelom se ukvarjajo številni raziskovalci, ki želijo odkriti čimveč lastnosti in načinov uporabe te izjemne snovi.

SLIKA 3.
Sledi prašnih delcev v tarči iz aerogela, ki jih je na Zemljo prinesla sonda misije Stardust.

Literatura

[1] Advanced Materials **25** (2013), št. 18, str. 2554–2560.

[2] `http://stardust.jpl.nasa.gov/tech/aerogel.html`, dostopano 6. 10. 2013.

× × ×

Knjižnica Sigma

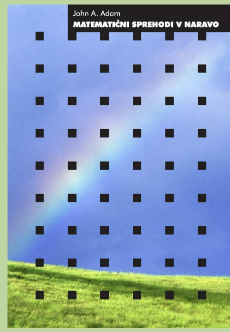
Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov tujih avtorjev.

Stephen Senn

KOCKANJE S SMRTJO
Slučajnost, tveganje in zdravje

296 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR



John A. Adam

MATEMATIČNI SPREHODI V NARAVO

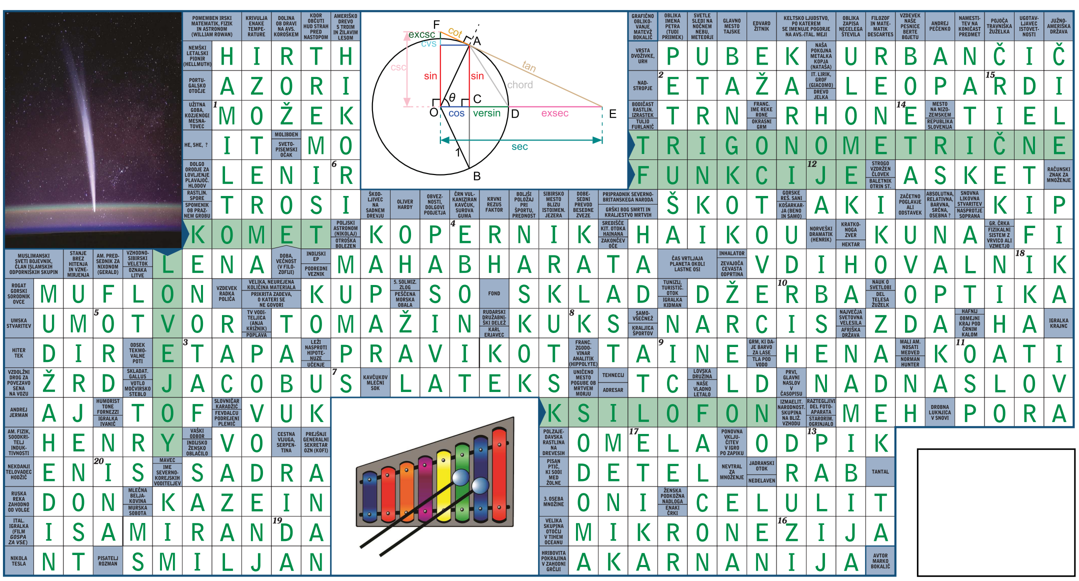
280 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

27,31 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še precej drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.knjiznica-sigma.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 41/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke 41. letnika Preseka je **Meteorski roj Perzeidi.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Tadej Tašner iz Pesnice pri Mariboru, Stanko Gajšek iz Ljubljane in Žiga Gosar iz Ljubljane, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

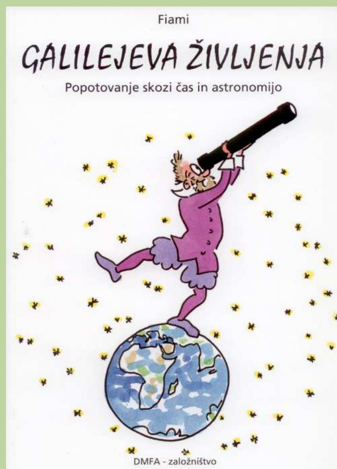

komet stoletja ISON
PRIRODOSLOVNI MUZEJ SLOVENIJE
1. TEDEN ASTRONOMIJE
2. - 8. december 2013
1. teden astronomije v Prirodoslovnem muzeju Slovenije
s spremljajočo razstavo ob prihodu »kometa stoletja« ISON in predstavitvijo novega slovenskega meteorita
2. 12.–8. 12. 2013
Prirodoslovni muzej Slovenije, Ljubljana
Osončje je naša ožja vesoljska domovina, ki pa je ne sestavljajo le Sonce in osem planetov z lunami, temveč še na milijone manjših teles: kometi, asteroidi, meteoroidi, prašnati delci itd. Vse to boste spoznali na tednu astronomije v Prirodoslovnem muzeju Slovenije, kjer bo postavljen digitalni planetarij za ogled astronomskih vsebin.
Samostojno ali z vodstvom si boste lahko ogledali fotografije in kratke filme o telesih Osončja, občudovali v Sloveniji najdene meteorite in potežkali njihove odlitke.
Lahko se boste stehtali na planetih Osončja, v popoldanskem času pa prisluhnili številnim predavanjem slovenskih strokovnjakov.
Razpisan pa bo tudi fotografski natečaj s temama: »Kometi leta 2013 in ISON« ter »Telesa Osončja na našem nebu«.
Foto: S. Deiries/ESO
oglasno sporočilo
Več o programu in natečaju na www.pms-lj.si.

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.