

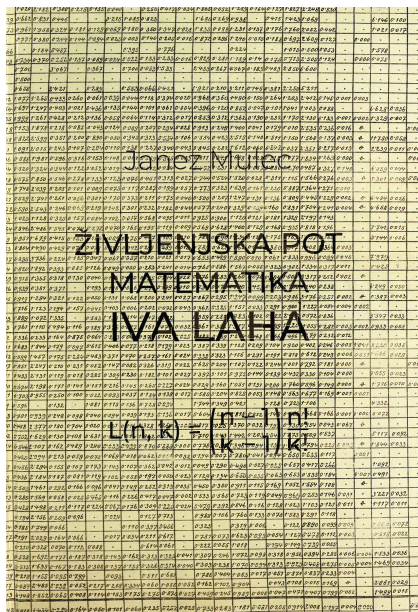
Janez Mulec, Življenjska pot matematika Iva Laha¹, samozaložba, 2023, 177 str.

Vsakdo ima v svoji omari kakšen skrit predalček, ki se ga boji odpreti, da ne bi iz njega pogledali okostnjaki preteklosti. To velja tudi za Slovence kot narod, za Slovenijo kot državo, pa tudi za vse bivše države, ki smo jim Slovenci, še ne tako daleč v preteklosti, pripadali.

Vse prerado pa se zgodi, da tistih skritih predalčkov nikoli ne odpremo. Pri posameznikih je razlog v grozi, ki nas prevzema ob misli, da bi obudili že davno pokopane nepopravljive grehe, ki smo jih zagrešili sami ali pa naši predniki. Pri zanikanju skupinskega zgodovinskega spomina pa obstajata predvsem dva poglobitvena razloga. Po vsaki vojni, po vsaki bitki, po vsakih volitvah zmagovita stran piše zgodovino na novo. Pri tem skrbi včasih s posebnimi propagandnimi službami, da skriti predalčki ostajajo skriti in da vrata vanje ostanejo trdno zaprta. Drugi, še veliko hujsi problem pa je, da ima vsaka omara, vsak spomin, omejen vek trajanja. Ko omara preperi in razpade, je vsebina skritega predalčka za vse večne čase izgubljena.

Pričujoča knjiga pa pred pozabo ohranjanja pomembna dejstva. Predstavlja zagozdo, ki za vedno ohranja odprta vrata enega od skritih predalčkov slovenske zgodovine ter zgodovine slovenske znanosti in matematike. Prikazuje namreč z dokumenti podprto življenjsko zgodbo po krivici zapostavljenega slovenskega razumnika Iva Laha (5. 9. 1896–23. 3. 1979).

Avtor knjige je bil od mladosti povezan z Ivom Lahom in Lahovimi. Je njegov daljni sorodnik (njegova stara mama je bila Ivova sestra). Oba izhajata iz istih krajev (Štrukljeva vas, kjer se je rodil Ivo Lah, je le 13 kilometrov oddaljena od Cerknice, kjer je prebival Janez Mulec). Mulec je Laha



¹ Malo pred Božičem sem prejel v dar izvod te knjige, ki je izšla v samozaložbi v 100 izvodih. Dne 28. 12. 2023, le nekaj dni po njenem izidu, so njenega avtorja, Janeza Mulca, pokopali.

poznal vse do njegove smrti, skoraj 40 let. To daje knjigi še poseben osebni pečat, kar pa prav nič ne zmanjšuje njene objektivnosti in verodostojnosti.

Knjiga namreč prinaša iz Lahove osebne zapuščine številne dokumente, fotografije, zapiske itd., ki jih lahko vsak bralec interpretira po svoje. Razkritja daleč presegajo pomen separatov Lahovih strokovnih in znanstvenih del, ki jih je še za časa življenja zapustil Narodni in univerzitetni knjižnici.

Nekaj izvemo tudi o očetu Iva Laha oziroma o tem, kako ga je videl Ivo. Po njem je namreč podedoval veselje do računanja, po drugi strani pa je prek njega vsrkaval notranjsko praktično praznoverje. Ivov oče je bil eden zadnjih mož daleč naokoli, ki je znal zdraviti živino z zagovarjanjem. Zdravljenje s praznoverjem je bilo za revne kmete privlačnejše od zdravljenja z vero. Namesto 20 soldov, ki jih je računal Ivov oče za zagovarjanje, bi bilo župnikovo zdravljenje s sveto mašo v farni cerkvi bistveno dražje. V svojem daljšem spisu »Zagovarjanje (resnični dogodek)« Ivo na hudomušen način razloži razliko med liberalci in klerikalci, ko kot fantič med odgovori na župnikovo vprašanje »Kateri so grehi zoper vero?« našteta med drugim »Če se kdo k liberalcem zapiše ... če kdo ... zagovarja ...«. Pojasni tudi materino veliko bojazen, da ne bi bila zveličana, ker je prvi otrok prezgodaj privekal na svet in je videla edino zagotovilo za odrešenje, če bi kateri od obeh sinov pel novo mašo. Zato je podprla župnikovo priporočilo, naj nadarjenega Iva pošljejo šolat v Ljubljano, čeprav pri hiši ni bilo veliko denarja. Pa se ji želja ni uresničila niti pri Ivu niti pri njegovem mlajšem bratu Jožetu, ki je leta 1945 skupaj s svojim osemnajstletnim sinom po vrnitvi iz Vetrinj umrl v taborišču Teharje.

Po končani srednji šoli v Ljubljani je Ivo Lah leta 1915 vstopil v šolo za častnike avstro-ogrske vojske kot enoletni prostovoljec. Zaradi vojne in povojnih dogodkov je ostal v uniformi kar štiri leta. Mulčeva knjiga odkriva fotografije vojaka, častnika Iva Laha, najprej iz Neumarkta na Južnem Tirolskem, potem pa iz zaledja soške fronte. Lah je med vojno prebolel trebušni tifus. Po vojni pa se je pridružil Malgajevim borcem za severno mejo.

Patriotizem, ki ga je Ivo Lah izkazal v štirih letih v bojih v vojaški uniformi, mu ni prinesel odreditve, niti na nacionalni niti na osebni ravni. Slovenija je izpod nadvlade Dunaja prišla pod nadvlado Beograda. Za Laha in njegovo generacijo pa je to pomenilo, da je bil pripadnik vojske, ki je izgubila vojno. Izgubil pa je tudi štiri pomembna leta v svojem akademskem razvoju in je bil tako v bistveno slabšem položaju od študentov, ki so se uniformi izognili.

Zanimivo je, da se je po končani vojni odločil za študij na Univerzi v Zagrebu. Gotovo je imel tam boljše možnosti izpopolnjevanja v uporabni matematiki kot v Ljubljani, kjer je na univerzi Josip Plemelj dajal ton v oblikovanju odnosa matematikov do uporabe matematike zunaj naravoslovja.

Še preden je Lah leta 1925 diplomiral na filozofski fakulteti iz matematike, je na Kraljevi visoki šoli za trgovino in promet leta 1923 opravil državni izpit in bil prav tam eno leto asistent iz matematike. Čeprav je kasneje večkrat predaval na univerzi, je svoje poslanstvo videl zunaj akademske sfere.

Lahov pristop k matematiki je bil podoben pristopu Jurija Vege in nasproten Plemeljemu. Medtem ko je Plemelj videl odlike matematike predvsem v njeni globini in čistosti, ki je doumljiva le najboljšim in najspodobnejšim matematikom, navadnim smrtnikom pa je popolnoma nedosegljiva, sta videla Vega in Lah matematiko predvsem kot sredstvo za razumevanje in izboljševanje pojavov realnega sveta in sta se brez kakšnih manjvrednostnih kompleksov lotila ustvarjanja matematike. In tudi ona dva sta se zapisala s svojim delom v zgodovino svetovne matematike. Seveda pa je tudi med njima velika razlika. Medtem ko je Vega izhajal iz izboljševanja vsega, kar je bilo povezano s topništvo, od zlaganja krogel v kopice do balistike ter priročnikov za hitro računanje, pa je Laha zanimala uporaba matematike pri družbenih podsistemih, v ekonomiji, demografiji, statistiki, zavarovalništvu, aktuarstvu. Beseda »aktuar« je prišla v moj besednjak šele po slovenski osamosvojitvi, saj se je je pred tem držal, tako kot npr. besede »renta« ali besedne zveze »prostovoljno zavarovanje«, pridih zatohlega kapitalizma.

Med najpomembnejša Lahova dela lahko uvrstimo tri: eno predvojno, dve pa povojni.

1. Bil je eden izmed vodilnih pionirjev aktuarstva v Jugoslaviji. Aktivno se je udeleževal svetovnih aktuarskih kongresov. Doma pa je osnoval in štiri leta, do Hitlerjevega napada na Jugoslavijo, urejal revijo »Glasnik udruženja aktuara kraljevine Jugoslavije«. To je bila prva revija na teh prostorih, ki je objavljala članke iz aktuarstva, demografije, statistike in matematike.
2. Leta 1947 je izšla njegova trijezična knjiga »Računske osnovice životnog osiguranja« [5].
3. Leta 1954 je objavil mednarodno odmeven prispevek v angleščini [6], potem pa še v nemščini [7], v katerem je objavil koeficiente, ki povezujejo naraščajoče potence s padajočimi in so jih v svetovni literaturi poimenovali »Lahova števila«.

Zanimivo je, da noben od teh velikih Lahovih dosežkov pri pouku matematike v šoli ali na univerzi nikjer v Jugoslaviji ni bil omenjen, čeprav smo Lahova števila poznali in smo jih pri poučevanju kombinatorike tudi omenjali. Razumeti je treba, da je bila kombinatorika tudi kasneje dolgo časa pri nas omalovaževana, zato se temu sprva nismo čudili. Nekega dne

je k meni prišel pokojni kolega prof. Marko Petkovšek in mi pokazal stran v knjigi [3], kjer so avtorji pripisali odkritje Lahovih števil nekemu Ivu Lahu. Šele ko sva se prepričala, da je človek, po katerem se imenujejo Lahova števila, Slovenec in sem ob prelomu stoletja, deset let po osamosvojitvi ter vzpostavitvi demokratičnega sistema pri nas, stopil v stik z Lahovo hčerko Marijo, smo izvedeli za revijo »Glasnik« in za knjigo »Računske osnovice«.

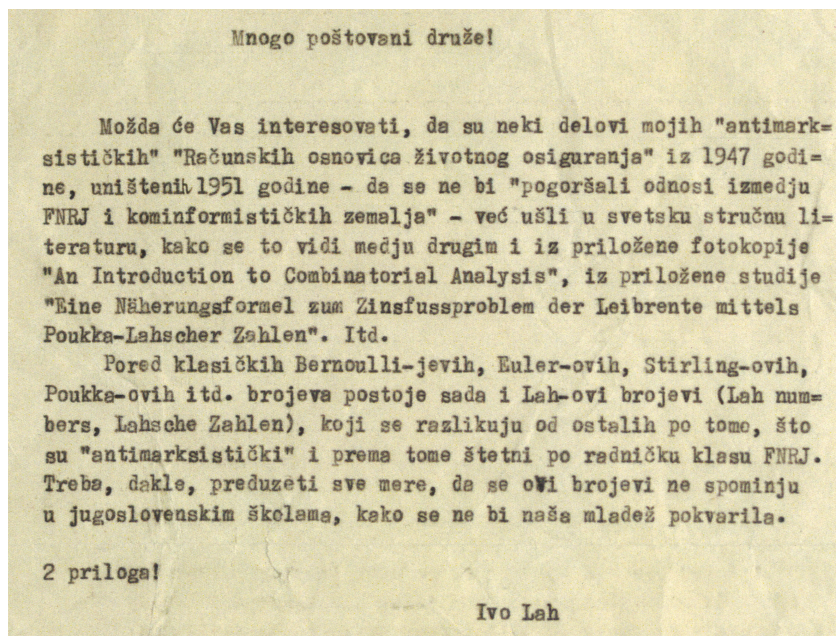
»Glasnik« bi se moral zapisati v zgodovino slovenske matematike, saj za 12 let prehiteva Obzornik za matematiko in fiziko, ki je začel izhajati leta 1949. Resnici na ljubo je bil »Glasnik« glasilo društva aktuarjev, ki je vključevalo zelo specializirane matematike, ampak tedaj društva matematikov sploh še ni bilo. Zanimivo je, da je bil član društva aktuarjev srbski akademik, matematik Jovan Karamata, medtem ko v Sloveniji razen Laha ni bilo med aktuarji poklicnega matematika.

Mulčeva knjiga ne govori veliko o aktuarjih in »Glasniku«. Prinaša pa pomembne podatke, povezane z »Računskimi osnovicami«. Ivo Lah je bil namreč član državne delegacije, ki se je v Rimu pogajala z Italijo o vojnih reparacijah. Ni bil v prvi vrsti, ampak je v ozadju števila izračunal na osnovi podatkov iz »Osnovic«. Medtem ko so politiki argumentirali »na pamet«, jim je on dajal verodostojne, s števili podprte argumente za jugoslovanske zahteve. Namesto argumenta moči je uporabljal moč argumentov, ki jih je morala sprejeti tudi nasprotna stran. Tudi o tem nismo vedeli ničesar. Skoraj neverjetno je, da so njegovo knjigo »Osnovice« razglasili za protimarksistično in jo odpeljali na uničenje, čeprav je le nekaj let poprej prav ta knjiga pomagala komunistični oblasti. Po besedah njegove hčerke, naj bi bil razlog za to nesprejemljiv citat »Natura non facit saltus« (Narava ne dela skokov), ki naj bi zagovarjal evolucijo pred revolucijo.

Med pogovorom pred četrto stoletja mi je Marija Lah omenila, da se je nekoč njen oče pohvalil, da celo neka števila imenujejo po njem. Ni pa mi zaupala, da so tudi Lahova števila štel za protimarksistična. O tem žalostnem dejstvu lahko preberemo v Mulčevi knjigi. Ivo Lah zapiše besede na sliki 1.

Ta osnutek oziroma kopijo dopisa nadrejenemu je Ivo Lah napisal verjetno leta 1961, vsekakor pa med koncem leta 1960 in pred aprilom leta 1963. Knjiga »An Introduction to Combinatorial Analysis« [10] je sicer izšla že dve leti prej. Članek »Eine Näherungsformel zum Zinsfussproblem der Leiberente mittels Poukka-Lahscher Zahlen« [2] je bil namreč objavljen oktobra 1960, aprila 1963 pa se je FNRJ preimenovala v SFRJ. Več kot petnajst let, potem ko so ga leta 1945 diskreditirali, je nad njim viselo prekletstvo »antimarksizma«.

Pa si oglejmo z matematične plati veličino Lahovega spoznanja. Lahova števila so namreč dragulj, ki je ležal stoletja neodkrit vsem na očeh, tudi



Slika 1. Dokument je v knjigi objavljen na strani 63.

največjim svetovnim matematikom. Razlog, da je čakal na Laha, stoji v preprostem dejstvu, da ga »čisti« matematiki niso pričakovali, ker ga niso potrebovali. Ivo Lah pa je števila odkril, ker jih je potreboval, v zapostavljeni, aktuarski matematiki. Čudež Lahovih števil je v njihovi presenetljivi raznovrstni uporabnosti. Ko sem po Google Scholar poiskal prispevke, ki omenjajo »Lah number« sem dobil samo za leto 2023 kar 32 navedkov v revijah iz raznih vej matematike in drugih znanosti. Eno od takih interpretacij v klasični kombinatoriki sva našla in potrdila s pokojnim kolegom prof. Markom Petkovškom v dveh prispevkih [8, 9]. Prav globoka zasidranost Lahovih števil v kombinatoriki je razlog, da so ta števila in njihove posplošitve še dandanes predmet intenzivnega raziskovanja.

Ivo Lah pa je do svojih števil prišel tako, da je zapisal povezavo med naraščajočimi in padajočimi potencami, ki ji pravijo tudi Lahova identiteta.

V prostoru polinomov običajne potence x^n , $n = 0, 1, \dots$ sestavljajo bazo. Znano je, da je zanimivih baz prostora polinomov več. Med njimi sta se pri Lahovih aktuarskih problemih pojavili bazi naraščajočih potenc $x^{(n)}$ in padajočih potenc $(x)_n$. Pri tem je:

$$\begin{aligned}x^{(n)} &= x(x+1) \dots (x+n-1), \\(x)_n &= x(x-1) \dots (x-n+1).\end{aligned}$$

Ivo Lah je dožgal, da se pri izražanju ene baze z drugo pojavljajo posebna števila, ki se zdaj imenujejo Lahova števila. Zveza med naraščajočimi in običajnimi potencami je bila že znana. Tam se kot koeficienti pojavljajo Stirlingova števila prve vrste $[n]$. Prav tako je bila znana zveza med običajnimi potencami in padajočimi potencami. Zveza so Stirlingova števila druge vrste $\{n\}$. Lah pa je s svojimi števili in s svojo zvezo (identiteto) kompletiral trikotnik.

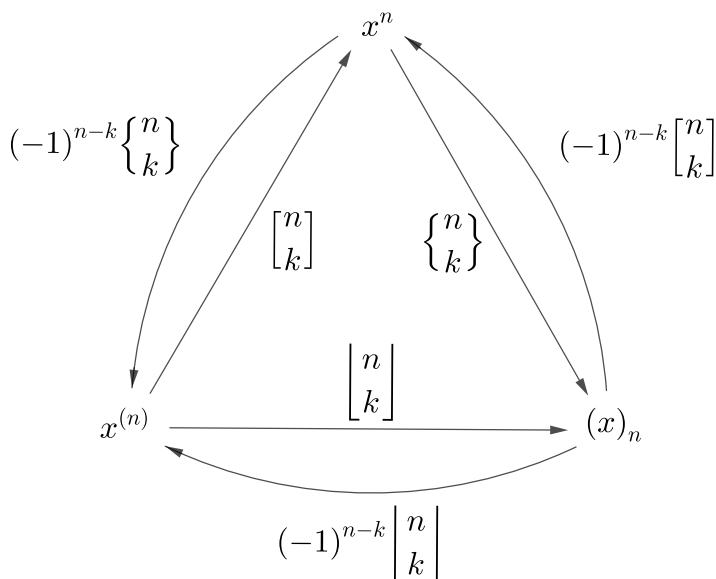
Omenimo še tri zanimivosti. Trikotnik na sliki ima svojevrstno simetrijo. Če ga prezrcalimo prek navpične višine, obrnemo puščice in zamenjamo Stirlingova števila prve vrste s Stirlingovimi števili druge vrste, preide sam vase. Jovan Karamata, ki je avtor omenjenih simbolov, je deloval tudi kot aktuar in sta se z Lahom poznala. V »Osnovicah« Ivo Lah citira aktuarja Roberta Fruchta [1], ki je takrat nekaj let deloval v Trstu, preden se je preselil v Valparaiso in postal znan kot eden izmed pionirjev algebrajske teorije grafov. Kako majhen je svet in še veliko manjši je svet matematike!

V Lahovi identiteti

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (x)_k$$

nastopajo nepredznačena Lahova števila

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}.$$



Oznake za Stirlingova števila je vpeljal Jovan Karamata [4], midva s kolegom Petkovškom pa sva jih v obeh prispevkih v istem slogu razširila še na Lahova števila: $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

Stirlingova števila in obe zvezi je odkril že dvesto let prej škotski matematik James Stirling – Benečan, matematik z nenavadno razgibanim življenjem. Kot podpornik hiše Stuartov se je mladi Stirling umaknil v Benetke. Ko pa je tam odkril skrivnost benečanskega steklarstva, se je v strahu za življenje s pomočjo Isaaca Newtona vrnil v Anglijo. Benečani so razvili umetnost steklarstva že v antiki in so imeli stoletja monopol nad to pomembno gospodarsko panogo. Pri čuvanju skrivnosti muranskega steklarstva niso izbirali sredstev.

In Ivo Lah je zapolnil luknjo v znanju, ki je zijala vsem matematikom na obeh dobrih dvesto let. Njegova števila naj bi bila protimarksistična. Le ko pregledamo vsebino dokumentov v knjigi, lahko razumemo sistem, ki je privedel do takšnih absurdnih zaključkov. Stvar je bila zelo preprosta. Po koncu vojne so bili ljudje razdeljeni na »naše«, to je na pripadnike OF, in na »sovražnike«. Najhujše sovražnike je režim likvidiral. Malo manj hude sovražnike pa je »le« diskreditiral. Našel jih je s pomočjo špicljev, ki so bili primerno indoktrinirani in radikalizirani, pogosto pa so jih našli kar med »spreobrnjenimi sovražniki«, ki so si z lažnimi denunciacijami olajšali življenje in izboljšali prihodnost. Medtem ko so Ivovega brata in njegovega sina šli iskat v Avstrijo in so ju likvidirali, so Iva in njegovo ženo na podlagi anonimnih ovadb razglasili za sovražnika ljudstva in jima odvzeli volilno pravico. Ženo pa so celo za mesec dni (od 12. 5. do 10. 6. 1945) priprli. Zanimive so obtožbe, ki sta jih bila deležna. Lahovo ženo je nekdo obtožil, da naj bi med okupacijo imela doma Hitlerjevo sliko. Vsakemu študentu prava priporočam, da naj prebere pritožbe, ki sta jih pisala zakonca Lah. Ena od obtožb Irove žene naj bi bilo dejstvo, da ni »prispevala k nabiralnim akcijam, katere zakonito organizirajo ljudske oblasti«. V pritožbi navaja, da je bila že pred vojno invalidsko upokojena, po vojni pa so ji odvzeli invalidsko rento, tako da ni imela sredstev, s katerimi bi »prispevala k nabiralnim akcijam«. Pripor in izguba volilne pravice sta povzročila, da so sosedje sovražno gledali na zakonca Lah.

Ta stigma je spremljala Iva Laha tudi na njegovi strokovni poti vse do smrti. Kot vrhunskega strokovnjaka ga je režim nujno potreboval. Tako je bil v letih 1949/50 del jugoslovanske delegacije pod vodstvom Jožeta Brileja, ki se je v Rimu pogajala o italijanskih reparacijah. Službeni kolegi pa so o njem širili neresnične govorice in so ga na vsakem koraku onemogočali. Hoteli so mu celo preprečiti udeležbo na pogajanjih v Rimu, češ da bo ušel iz države. Iz ohranjenih dokumentov vidimo obupen boj pokončnega posameznika proti skorumpiranemu sistemu. Nekje zapiše, da ima sam več

znanstvenih objav kot vsi tisoči uslužbencev Zveznega urada za statistiko in evidenco. Režim je potreboval rezultate njegovega dela, hkrati pa ga je zaničeval in uničeval kot človeka. Odrekal mu je pošteno plačo. Po uspehu pri pogajanjih v Rimu so ga premestili na drugo delovno mesto, s ciničnimi besedami, da za tako izjemnega strokovnjaka pri njih ni prostora. Kasneje so ga pahnili v pokoj z mizerno pokojnino, rekoč »da odžira kruh mlajšim«. Ta del knjige o Lahu je vreden še posebej pozornega branja. Niso bila torej sporna Lahova števila. Sporen je bil njih odkritelj, ki kljub strahovitim pritiskom in diskreditacijam ni želel spoznati znanstvenih prednosti marksizma.

Lah je v svojih ocenah, ki jih je pisal svojim nadrejenim, neizprosno objektivni. Jugoslavija bi lahko od okupatorjev iztržila veliko več. Model, ki ga je uporabil v pogajanjih z Italijani, bi se dalo brez truda uporabiti tudi pri Avstrijcih, Nemcih in Madžarih. Pa je prišlo leta 1952 do uničenja arhivov socialnega zavarovanja okupatorskih oblasti. Lah ugotavlja, da so državna podjetja, ki so skrbela za odpadni papir, sama spodbujala uničevanje arhivov. Papir so kupovala po 3 din na kilogram, naprej pa so ga prodajala za 17 din na kilogram in plačevala uslužbencem socialnega zavarovanja provizijo. Razlika v ceni je delovala kot magnet v skladu z doktrino, da ima v Jugoslaviji ideologija prednost pred ekonomijo. Druga spodbuda za uničevanje arhivov pa so bili ljudje, katerih podatki so bili zapisani v arhivih, saj so se bali, da jih bodo označevali za sodelavce okupatorja.

Velicina Iva Laha je v njegovi odkriti skrbi za izboljšavo življenjskih razmer delavstva in vlogi socialnega zavarovanja pri tem. Na to življenjsko temo je objavil številne prispevke pred vojno in med vojno. Po vojni pa je bila njegova zdravorazumska, ekonomska miselnost trn v peti in v ostrem nasprotju z revolucionarno miselnostjo nove oblasti.

Glede na to, da Lahovo delo presega okvire matematike, bi morali njegove spise poiskati in v celoti digitalizirati, kar pa zahteva veliko naporov in znanja, saj jih je izjemno veliko in žal niso vsi locirani v NUK-u. V eni svojih ohranjenih pritožb Ivo Lah omenja, da je v dnevnem časopisju po vsej Jugoslaviji objavil skoraj tisoč poljudnih prispevkov. Za financiranje takega projekta pa bi morala poskrbeti država.

Pa ne gre samo za Laha. Prav bi bilo, da bi javno rehabilitirali njega in vse podobne razumnike, ki so se znašli v kolesju revolucije in porevolucionarnih norosti. Žal pa stigma, ki je leta 1945 potiskala Iva Laha v anonimnost, učinkuje še dandanes. Žalostno je, da je tri desetletja po osamosvojitvi knjiga o življenjski poti Iva Laha morala iziti v samozaložbi in da naša država še vedno ne zmore odstraniti ideoloških plašnic ob pogledu na svojo zgodovino.

Zahvale:

Avtor je bil deležen podpore ARRS (raziskovalni program P1-0294 in raziskovalni projekti J1-1690, N1-0140, J1-2481). Zahvaljuje se recenzentom za skrbno branje, prof. Marku Razpetu pa še za pomoč pri oblikovanju v L^AT_EX-u.

LITERATURA

- [1] R. Frucht, *Sulle relazioni che esistono fra due tipi di formule proposte per il calcolo approssimato delle rendite vitalizie*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari **7** (1936), 327–339.
- [2] W. J. C. de Heer, *Eine Näherungsformel zum Zinsfußproblem der Leibrente mittels POUKKA-LAHscher Zahlen*, Blätter DGVFM **5** (1960), 101–104; dostopno tudi na <https://doi.org/10.1007/BF02809284>.
- [3] R. L. Graham, D. E. Knuth in O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
- [4] J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités rattachant*, Mathematica (Cluj) **9** (1935), 164–178.
- [5] I. Lah, *Računske osnovice životnog osiguranja*, Državni zavod socialnog osiguranja, Zagreb, 1947.
- [6] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletín do Instituto dos Actuarios Portugueses **9** (1954), 7–15.
- [7] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsbl. Math. Statist. **7** (1955), 203–212.
- [8] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The Lah identity and the Argonauts*, The IIME Journal **11** (2002), 385–386.
- [9] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, The IIME Journal **12** (2007), 417–424.
- [10] J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

Tomaž Pisanski

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>