POVABILO V INVERZNE POLGRUPE

GANNA KUDRYAVTSEVA[1]

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 20M18, 20M20, 20M05

Ključne besede: inverzna polgrupa, simetrična inverzna polgrupa, parcialno delovanje, razširitev grupe, prosta inverzna polgrupa

V članku predstavimo uvod v teorijo inverznih polgrup. Poseben poudarek je na simetrični inverzni polgrupi, ki jo sestavljajo vse parcialno definirane injektivne preslikave iz množice vase, ter na inverznih polgrupah, ki jih dobimo iz grup, ki parcialno delujejo na polmrežah s pomočjo konstrukcije semidirektnega produkta. Podrobno opišemo nekaj pomembnih primerov inverznih polgrup, ki nastanejo s pomočjo omenjene konstrukcije. Bralcu tako predstavimo ne le uvod v osnove teorije inverznih polgrup, pač pa tudi uvod v področje trenutnih aktivnih raziskav iz inverznih polgrup in njihovih posplošitev.

INVITATION TO INVERSE SEMIGROUPS

We present an introduction to inverse semigroup theory with a special focus on the symmetric inverse semigroup that consists of all partial injective maps from a set to itself, and also on inverse semigroups which can be obtained from a group acting partially on a semilattice using a semidirect product construction. We present a detailed description of several examples which arise from this construction. We thus provide a reader not only with an introduction to the basics of the inverse semigroup theory, but also with an introduction to active ongoing research on inverse semigroups and their generalizations.

Uvod

Potreba po vpeljavi inverznih polgrup je prišla iz raziskav v diferencialni geometriji v sredini 20. stoletja. V tistem obdobju je bila teorija grup kot abstraktna veda o komponiranju obrnljivih preslikav praktično edino poglavje algebre, ki je spodbujalo razvoj geometrije. V geometriji pa je pogosto naravno obravnavati bijektivne preslikave med različnimi množicami ali med podmnožicami neke univerzalne množice. S pomočjo teorije grup takih objektov ni bilo možno opisati, zato je ruski matematik V. V. Vagner[2] na začetku petdesetih let 20. stoletja predlagal za parcialno definirane preslikave uporabo operacije kompozituma binarnih relacij in je prvi razvil osnove teorije takih algebraičnih struktur [12], ki jih je imenoval posplošene grupe. Neodvisno od Vagnerja je eno leto kasneje iste algebraične strukture

[1]Avtorica je bila delno podprta s strani programa P1-0288, ki ga financira ARRS.

[2]ki je sam raje transliteriral svoj priimek Wagner.

vpeljal G. B. Preston [10], ki jih je imenoval z njihovim sedanjim imenom – inverzne polgrupe. Poleg diferencialne geometrije so inverzne polgrupe kasneje našle uporabo tudi v teoriji C^*-algeber, kombinatorični teoriji grup in linearni logiki. Inverzne polgrupe se uporabljajo tudi v fiziki, in sicer v teoriji kvazikristalov ter v fiziki trdne snovi. Več informacij bralec lahko najde v knjigi [7] in njeni bibliografiji.

Parcialne permutacije

Parcialna permutacija množice X je injektivna preslikava $p\colon X_1 \to X$, kjer je X_1 podmnožica množice X. Množici X_1 in $p(X_1)$ imenujemo *domena* in *kodomena* parcialne permutacije p in ju označimo z $\mathrm{dom}(p)$ in $\mathrm{ran}(p)$. Naj bo $\mathcal{I}(X)$ množica vseh parcialnih permutacij množice X. V primeru, ko je $X_1 = X$ in je $p\colon X \to X$ bijekcija, postane parcialna permutacija množice X kar permutacija. Množico vseh permutacij množice X označimo s $\mathcal{S}(X)$.

Če je $X_1 = X$, parcialna permutacija še ni nujno permutacija, na primer preslikava $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definirana s predpisom $p(n) = n + 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ni permutacija, ker njena kodomena ni enaka množici $\mathbb{N}$. Če je množica X končna, potem je parcialna permutacija p permutacija natanko tedaj, ko je $X_1 = X$.

Rang parcialne permutacije $p\colon X \to X$ je število $\mathrm{rang}(p) = |X_1| = |p(X_1)|$, kjer je $|X|$ oznaka za moč množice X. Če je množica X končna, potem so permutacije množice X natanko tiste parcialne permutacije, katerih rang je enak $|X|$.

Podobno kot permutacije tudi parcialne permutacije lahko podamo s pomočjo tabel. Oglejmo si naslednji primer. Naj bo $X = \{1, 2, 3, 4\}$ in naj bo $p\colon \mathrm{dom}(p) \to X$ parcialna permutacija množice X, kjer je $\mathrm{dom}(p) = \{1, 3\}$, $p(1) = 2$ in $p(3) = 1$. Parcialno permutacijo p potem lahko zapišemo v obliki tabele

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \varnothing & 1 & \varnothing \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ker je $p(1) = 2$, smo pod številom 1 zapisali število 2. Podobno smo pod številom 3 zapisali število 1. Pod številoma 2 in 4 pa smo zapisali simbol prazne množice $\varnothing$, s čimer smo označili dejstvo, da $2, 4 \notin \mathrm{dom}(p)$.

Kompozitum parcialnih permutacij p in q je nova parcialna permutacija pq, kjer za vsak $x \in X$ velja $pq(x) = p(q(x))$, seveda če je $x \in \mathrm{dom}(q)$ in $q(x) \in \mathrm{dom}(p)$. Če $x \notin \mathrm{dom}(q)$ ali pa $x \in \mathrm{dom}(q)$ a $q(x) \notin \mathrm{dom}(p)$, potem $x \notin \mathrm{dom}(pq)$. Ekvivalentno, pq je parcialna permutacija množice X, kjer je

$$\mathrm{dom}(pq) = q^{-1}(\mathrm{dom}(p)) = \{x \in X : q(x) \in \mathrm{dom}(p)\}$$

in $pq(x) = p(q(x))$ za vsak $x \in \mathrm{dom}(pq)$. Da se pokazati, da je tako definirana operacija kompozituma parcialnih permutacij na množici X asociativna.

Izračunajmo na primer produkt pq, kjer sta

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \varnothing & 1 & \varnothing \end{pmatrix} \text{ in } q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najprej zapišemo nastavek za pq – naslednjo tabelo s prazno drugo vrstico

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

in nato zapovrstjo izračunamo $pq(n)$ za $n = 1, 2, 3, 4$, seveda, če je ta definiran. Ker $1 \notin \mathrm{dom}(q)$, tudi $1 \notin \mathrm{dom}(pq)$ in zato v tabeli pod številom 1 zapišemo $\varnothing$:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & & & \end{pmatrix}.$$

Ker je $q(2) = 1$ in $p(q(2)) = p(1) = 2$, je $2 \in \mathrm{dom}(pq)$ in $pq(2) = 2$. Zato v tabeli pod številom 2 zapišemo 2:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & 2 & & \end{pmatrix}.$$

Ker je $q(3) = 4$ in $4 \notin \mathrm{dom}(p)$, potem $3 \notin \mathrm{dom}(pq)$. Zato zapišemo:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & 2 & \varnothing & \end{pmatrix}.$$

Končno, ker je $q(4) = 3$ in $p(3) = 1$, je $4 \in \mathrm{dom}(pq)$ in $pq(4) = p(q(4)) = p(3) = 1$. Zdaj je produkt pq izračunan:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & 2 & \varnothing & 1 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $Y \subseteq X$. Označimo z 1_Y parcialno permutacijo, za katero je $\mathrm{dom}(1_Y) = Y$ in $1_Y(y) = y$ za vsak $y \in Y$. Na primer, za $Y = \{1, 3\}$ in $X = \{1, 2, 3, 4\}$, je

$$1_Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \varnothing & 3 & \varnothing \end{pmatrix}.$$

Spomnimo se, da se neprazna množica S z asociativno binarno operacijo imenuje *polgrupa*. Polgrupa S se imenuje *monoid*, če obstaja tak element $1 \in S$, da velja $1x = x1 = x$ za vsak $x \in S$. Ker za vsako parcialno permutacijo $p \in \mathcal{I}(X)$ drži $p1_X = 1_X p = p$, je $\mathcal{I}(X)$ monoid.

Zastavimo si vprašanje, ali za parcialno permutacijo $p \in \mathcal{I}(X)$ obstaja njej inverzna parcialna permutacija. Tu je vse odvisno od definicije inverzne parcialne permutacije. Če uporabimo definicijo grupnega inverza, se hitro vidi, da ima $p \in \mathcal{I}(X)$ inverz natanko tedaj, ko je p bijekcija, torej, ko je $p \in \mathcal{S}(X)$. Zato $\mathcal{I}(X)$ ni grupa.

Poskusimo prilagoditi definicijo inverza. Vzamemo parcialno permutacijo p iz (1) in opazimo, da za parcialno permutacijo

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}$$

velja:

$$pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix} = 1_{\{1,2\}} \text{ in } qp = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \varnothing & 3 & \varnothing \end{pmatrix} = 1_{\{1,3\}}.$$

Produkta pq in qp sta torej identični preslikavi na podmnožicah množice X. Razen tega s pomočjo preprostega računa vidimo, da je $pqp = p$ in $qpq = q$. Zato je smiselno definirati $p^{-1} = q$. Na splošno, če je $p \in \mathcal{I}(X)$, je njen *inverz* definiran kot parcialna permutacija p^{-1}, kjer je $\mathrm{dom}(p^{-1}) = \mathrm{ran}(p)$ in za vsak $x \in \mathrm{dom}(p^{-1})$ drži $p^{-1}(x) = y$, kjer je $p(y) = x$. Ker je vsak element $p \in \mathcal{I}(X)$ bijekcija med $\mathrm{dom}(p)$ in $\mathrm{ran}(p)$, njegov inverz p^{-1} obstaja in je enolično določen.

Inverzne polgrupe: definicija in prve lastnosti

Inverzne polgrupe in monoidi

Naj bo S polgrupa. Element $p \in S$ imenujemo *regularen element*, če obstaja tak $q \in S$, da velja $pqp = p$ in $qpq = q$. Element q potem imenujemo *inverz* elementa p. Se pravi, element $p \in S$ je regularen natanko tedaj, ko ima inverz. Naj bo S grupa. Potem je seveda $aa^{-1}a = a$ in $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ za vsak $a \in S$. Poleg tega iz enakosti $aba = a$ sledi, da je $b = a^{-1}$: če enakost $aba = a$ pomnožimo z a^{-1} z desne, dobimo $abaa^{-1} = aa^{-1}$, se pravi $ab = 1$. Če isto enakost pomnožimo z a^{-1} z leve, podobno dobimo $ba = 1$. Torej je po definiciji grupnega inverza $b = a^{-1}$. Zato je pojem inverza v polgrupi posplošitev pojma inverza v grupi.

Če je S polgrupa in $p \in S$ regularen element, se lahko zgodi, da ima p več inverzov (to se zgodi na primer v polgrupi vseh transformacij množice X, kjer je $|X| \geq 2$, podrobnosti najdete v knjigi [4]). Polgrupo S imenujemo *regularna polgrupa*, če je vsak element $s \in S$ regularen.

Polgrupo S imenujemo *inverzna polgrupa*, če ima vsak $p \in S$ natanko en inverz. Na primer, vsaka grupa je inverzna polgrupa. Polgrupa $\mathcal{I}(X)$, ki smo jo definirali v prejšnjem razdelku, je, kot smo že preverili, tudi inverzna polgrupa. Ker ima $\mathcal{I}(X)$ identični element, je $\mathcal{I}(X)$ tudi *inverzni monoid.* Inverzni monoid $\mathcal{I}(X)$ se imenuje *simetrični inverzni monoid* na množici X.

Včasih pravimo, da je $\mathcal{I}(X)$ *simetrična inverzna polgrupa* na množici X. Obe terminologiji sta korektni, uporaba besede »monoid« poudarja dejstvo, da je $\mathcal{I}(X)$ monoid, uporaba besede »polgrupa« pa tega dejstva posebej ne izpostavlja.

Inverz elementa a inverzne polgrupe S označimo z a^{-1}. Element a^{-1} je torej edini element b, za katerega veljata enakosti $aba = a$ in $bab = b$. Iz definicije takoj sledi, da je $(a^{-1})^{-1} = a$.

Element e polgrupe S, za katerega velja $e^2 = e$, imenujemo *idempotent.* Množico idempotentov polgrupe S označimo z $E(S)$. Vsaka grupa vsebuje natanko en idempotent – identiteto, polgrupe pa lahko vsebujejo več idempotentov (ali pa sploh nobenega).

Naj bo S inverzna polgrupa in $a \in S$. Iz $(aa^{-1})(aa^{-1}) = (aa^{-1}a)a^{-1} = aa^{-1}$ sledi, da je $aa^{-1} \in E(S)$. Podobno je tudi $a^{-1}a \in E(S)$. Označimo $\mathbf{d}(a) = a^{-1}a$ in $\mathbf{r}(a) = aa^{-1}$. V primeru $S = \mathcal{I}(X)$, je $\mathbf{d}(a) = 1_{\mathrm{dom}(a)}$ in $\mathbf{r}(a) = 1_{\mathrm{ran}(a)}$. Zato idempotenta $\mathbf{d}(a)$ in $\mathbf{r}(a)$ imenujemo *domenski idempotent* in *kodomenski idempotent* elementa a.

Lema 1. *Naj bo S inverzna polgrupa in $e, f \in E(S)$. Potem je $ef \in E(S)$ in $ef = fe$.*

Dokaz. Označimo $x = (ef)^{-1}$. Iz enakosti $(fxe)(fxe) = f(xefx)e = fxe$ sledi, da je $fxe \in E(S)$. Ker je

$$(ef)(fxe)(ef) = (ef)x(ef) = ef, \ (fxe)(ef)(fxe) = (fxe)(fxe) = fxe,$$

je $(fxe)^{-1} = ef$. Po drugi strani, iz $eee = e$ sledi, da je $e^{-1} = e$ za vsak $e \in E(S)$. Zato je $(fxe)^{-1} = fxe$ in posledično $fxe = ef$. Torej je $ef \in E(S)$ in podobno $fe \in E(S)$. Ker smo označili $x = (ef)^{-1}$, je $x = ef$. Zato velja $ef = fxe = f(ef)^{-1}e = fefe = (fe)(fe) = fe$. ■

Lema 1 nam pove, da je množica $E(S)$ zaprta za množenje in je tako podpolgrupa polgrupe S. Omenimo še eno ključno lastnost inverza, ki posplošuje ustrezno lastnost grupnega inverza.

Lema 2. *Naj bo S inverzna polgrupa in $a, b \in S$. Potem je $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Dokaz. Po definiciji inverza moramo preveriti, da veljata enakosti $(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = ab$ in $(b^{-1}a^{-1})ab(b^{-1}a^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$. Z upoštevanjem tega, da je $bb^{-1}, a^{-1}a \in E(S)$, in leme 1, preoblikujemo levo stran prve enakosti v $(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = a(bb^{-1})(a^{-1}a)b = a(a^{-1}a)(bb^{-1})b = ab$. Drugo enakost preverimo na podoben način. ■

Naravna delna urejenost

Za elementa a, b inverzne polgrupe S definiramo $a \leq b$, če je $a = be$ za neki $e \in E(S)$. Relacija $\leq$ je refleksivna, ker je $a = a\mathbf{d}(a)$, in tranzitivna, ker iz $a = be$ in $b = cf$ sledi, da je $a = cfe$ in je $ef \in E(S)$ na podlagi leme 1. Pokažimo, da je relacija $\leq$ antisimetrična. Predpostavimo, da je $a \leq b$ in $b \leq a$. Po definiciji je $b = ae$ in $a = bf$, kjer sta $e, f \in E(S)$. Potem je $b = ae = bfe = bef$. Če enakost $b = bef$ pomnožimo z desne s f, dobimo $bf = bef$ in tako $a = b$. Zato je $\leq$ delna urejenost na S, ki jo imenujemo *naravna delna urejenost.*

Naj bo $a \leq b$ in $e \in E(S)$ tak element, da je $a = be$. Potem je $ae = bee = be = a$. Če enakost $ae = a$ pomnožimo z a^{-1} z leve, dobimo $\mathbf{d}(a)e = \mathbf{d}(a)$. Posledično imamo $a = a\mathbf{d}(a) = be\mathbf{d}(a) = b\mathbf{d}(a)$. Zato $a \leq b$ drži natanko takrat, ko je $a = b\mathbf{d}(a)$. Na podoben način se da pokazati, da enakost $a = eb$ za neki $e \in E(S)$ velja natanko takrat, ko je $a = \mathbf{r}(a)b$.

Spet naj bo $a \leq b$, se pravi $a = b\mathbf{d}(a)$. S pomočjo leme 2 imamo $a^{-1} = \mathbf{d}(a)b^{-1}$. Če to enakost pomnožimo z leve z a in z desne z b, dobimo: $aa^{-1}b = a\mathbf{d}(a)b^{-1}b = b\mathbf{d}(a)\mathbf{d}(a)b^{-1}b = (bb^{-1}b)\mathbf{d}(a) = b\mathbf{d}(a) = a$. Torej je $a = \mathbf{r}(a)b$. Podobno se da pokazati, da iz enakosti $a = \mathbf{r}(a)b$ sledi, da je $a = b\mathbf{d}(a)$. Dokazali smo naslednjo trditev.

Trditev 3. *Naj bo S inverzna polgrupa in $a, b \in S$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. $a \leq b$;
2. $a = eb$ *za neki* $e \in E(S)$;
3. $a = b\mathbf{d}(a)$;
4. $a = \mathbf{r}(a)b$.

V primeru $a, b \in \mathcal{I}(X)$ neenakost $a \leq b$ drži natanko takrat, ko je a *zožitev* elementa b, torej je $a = 1_{\mathrm{ran}(a)}b = b\,1_{\mathrm{dom}(a)}$. Z drugimi besedami, $a \leq b$ velja natanko takrat, ko je $\mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(b)$ in $a(x) = b(x)$ za vsak $x \in \mathrm{dom}(a)$. Na primer, zožitve parcialne permutacije

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & 2 & \varnothing & 1 \end{pmatrix}$$

so

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & 2 & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}.$$

Označimo z 0 parcialno permutacijo z $\mathrm{dom}(0) = \varnothing$. Ker velja $a0 = 0a = 0$ za vsak $a \in \mathcal{I}(X)$, parcialno permutacijo 0 imenujemo *ničelna* parcialna permutacija.

Polmreže

Oglejmo si še strukturo polgrup, ki vsebujejo zgolj idempotente. Naj bo E taka polgrupa. Najprej povejmo, da je E avtomatično inverzna polgrupa, ker ima vsak $e \in E$ en sam inverz, in to je ravno element e. Vzemimo $e, f \in E$. Potem je $ef \leq e, f$. Predpostavimo, da je $g \leq e, f$. Potem je $g = e\mathbf{d}(g) = eg$ in podobno $g = fg$. Zato je $g = eg = efg$ in tako $g \leq ef$. Pokazali smo, da je ef največja spodnja meja za elementa e in f glede na delno urejenost $\leq$ na E. Delno urejeno množico, kjer ima vsak par elementov največjo spodnjo mejo, imenujemo *polmreža*. Torej je $(E, \leq)$ polmreža in največja spodnja meja $e \wedge f$ elementov e in f je enaka ef. Nasprotno, naj bo $(E, \leq)$ polmreža in z $e \wedge f$ označimo največjo spodnjo mejo elementov e in f. Potem je E z operacijo $\wedge$ polgrupa, katere elementi so vsi idempotenti. Zato polgrupe, ki vsebujejo le idempotente, lahko identificiramo s polmrežami. Pogosto take polgrupe imenujemo kar *polmreže*. Za inverzno polgrupo S rečemo, da je $E(S)$ njena *polmreža idempotentov*.

Enostavno je videti, da so idempotenti polgrupe $\mathcal{I}(X)$ natanko parcialne permutacije oblike 1_Y, kjer je $Y \subseteq X$. Razen tega za $Y, Z \subseteq X$ velja

$$1_Y 1_Z = 1_{Y \cap Z}. \tag{2}$$

To pomeni, da je struktura polmreže idempotentov polgrupe $\mathcal{I}(X)$ »podobna« strukturi polmreže potenčne množice $\mathcal{P}(X)$ z operacijo preseka podmnožic. Matematično natančno to opišemo z uporabo pojma *izomorfizem polmrež*: preslikava $Y \mapsto 1_Y$, kjer je $Y \subseteq X$, je izomorfizem med polmrežo $\mathcal{P}(X)$ in polmrežo $E(\mathcal{I}(X))$. To pomeni, da je dana preslikava bijekcija, ki zaradi (2) ohranja polmrežno operacijo.

Vagner-Prestonov izrek

Spomnimo se, da nam Cayleyjev izrek pove, da se da vsako grupo natančno upodobiti v neki simetrični grupi. Z drugimi besedami, vsaka grupa je izomorfna podgrupi neke simetrične grupe $\mathcal{S}(X)$. Ideja dokaza je dokaj preprosta: poljubno grupo G lahko zvesto upodobimo v simetrični grupi $\mathcal{S}(G)$ s pomočjo *leve regularne upodobitve*, ki je preslikava $\varphi\colon G \to \mathcal{S}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$, kjer je $\varphi_g(h) = gh$ za vsak $h \in G$.

Vagner-Prestonov izrek, ki ga je prvi dokazal leta 1953 V. V. Vagner [12] in eno leto kasneje neodvisno še G. B. Preston [10], je posplošitev Cayleyjevega izreka na inverzne polgrupe. Pri tem vlogo simetrične grupe $\mathcal{S}(X)$ prevzame simetrična inverzna polgrupa $\mathcal{I}(X)$. Vagner-Prestonov izrek nam pove, da vsako inverzno polgrupo lahko z levo regularno upodobitvijo vložimo v simetrično inverzno polgrupo $\mathcal{I}(S)$. *Leva regularna upodobitev* $\varphi\colon S \to \mathcal{I}(S)$ je definirana takole. Najprej opazimo, da za vsak $s \in S$ velja $s^{-1}sS = s^{-1}S$: očitno je $s^{-1}sS \subseteq s^{-1}S$, poleg tega pa za $a = s^{-1}b$ velja $a = s^{-1}ss^{-1}b$, zato je tudi $s^{-1}S \subseteq s^{-1}sS$. Zaradi simetrije velja tudi

$ss^{-1}S = sS$. Za $s \in S$ je $\mathrm{dom}(\varphi_s) = s^{-1}sS = s^{-1}S$ in za $t \in s^{-1}S$ je $\varphi_s(t) = st \in ss^{-1}S = sS$. Da se pokazati, da je φ injektiven homomorfizem polgrup, glejte [9, Theorem IV.1.6] in [7, 1.5].

Konstrukcija inverznih polgrup iz grup in polmrež

Kot smo že omenili, je vsaka polmreža primer inverzne polgrupe, ki vsebuje le idempotente. Poleg tega je polmreža idempotentov grupe sestavljena le iz identičnega elementa. Vidimo, da so polmreže in grupe neke vrste »ekstremni« primer inverznih polgrup. Zastavimo si vprašanje: ali lahko iz grup in polmrež konstruiramo nove, bolj zanimive inverzne polgrupe? Katere inverzne polgrupe dobimo?

Semidirektni produkti grup in polmrež glede na delovanja

Naj bo G grupa in X neprazna množica. Grupa G *deluje* na množici X (z leve), če je za vsaka $g \in G$ in $x \in X$ definiran element $g \cdot x \in X$ ter velja:

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \text{ za vsaka } g, h \in G \text{ in } x \in X;$$

$$1 \cdot x = x \text{ za vsak } x \in X.$$

Element $g \cdot x$ označujemo tudi s $\varphi_g(x)$. Tako imamo za vsak $g \in G$ definirano preslikavo $\varphi_g \colon X \to X$, $x \mapsto g \cdot x$. Ker je $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$, je φ_g bijekcija, zato imamo homomorfizem grup $\varphi \colon G \to \mathcal{S}(X)$, definiran s predpisom $g \mapsto \varphi_g$. Velja tudi obratno: homomorfizem grup $\psi \colon G \to \mathcal{S}(X)$ definira delovanje grupe G na množici X s predpisom $x \mapsto \psi(g)(x)$, $g \in G$, $x \in X$. Zato obstaja bijekcija med delovanji grupe G na množici X in homomorfizmi $G \to \mathcal{S}(X)$.

Naj bo zdaj E polmreža. Predpostavimo, da je podano delovanje grupe G na E, ki je usklajeno z urejenostjo polmreže E, se pravi, zadošča pogoju:

$$e \leq f \Leftrightarrow g \cdot e \leq g \cdot f \text{ za vse } e, f \in E \text{ in } g \in G. \tag{3}$$

Če za delovanje grupe G na polmreži E velja pogoj (3), pravimo, da G deluje na E z *urejenostnimi avtomorfizmi.*

Navedimo primer delovanja grupe na polmreži z urejenostnimi avtomorfizmi. Naj bo G simetrična grupa $\mathcal{S}(X)$, kjer je $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, in naj bo $E = \mathcal{P}(X)$ polmreža vseh podmnožic množice X glede na operacijo preseka podmnožic. Za $g \in \mathcal{S}(X)$ in $Y \subseteq X$ definirajmo

$$g \cdot Y = g(Y) = \{g(y) \colon y \in Y\}.$$

Enostavno je videti, da smo definirali delovanje G na E z urejenostnimi avtomorfizmi.

Če imamo podano delovanje grupe G na polmreži E z urejenostnimi avtomorfizmi, lahko na množici $E \times G = \{(e,g)\colon e \in E, g \in G\}$ vpeljemo strukturo polgrupe s predpisom

$$(e,g)(f,h) = (e \wedge (g \cdot f), gh). \tag{4}$$

Hitro se da preveriti, da je $E \times G$ inverzna polgrupa, kjer je

$$(e,g)^{-1} = (g^{-1} \cdot e, g^{-1}).$$

Dobljeno inverzno polgrupo označimo z $E \rtimes G$ in jo imenujemo *semidirektni produkt* grupe G in polmreže E glede na podano delovanje.

Semidirektni produkti grup in polmrež glede na parcialna delovanja

Opisano konstrukcijo se da posplošiti z delovanj grup na polmrežah na tako imenovana parcialna delovanja. Parcialna delovanja se naravno pojavijo v različnih vejah matematike, glejte pregledni članek [2].

Naj bo G grupa in X neprazna množica. Funkcijo $Z \to X$, kjer je $Z \subseteq G \times X$, bomo imenovali *parcialna funkcija* iz $G \times X$ v X. Sliko elementa $(g,x) \in Z$ označimo z $g \cdot x$. Če je $(g,x) \in Z$, je element $g \cdot x$ *definiran*. Pravimo, da parcialna funkcija iz $G \times X$ v X, $(g,x) \mapsto g \cdot x$, definira *parcialno delovanje* grupe G na množici X (z leve), če veljajo pogoji:

(A) če sta definirana $h \cdot x$ in $g \cdot (h \cdot x)$, potem je definiran $gh \cdot x$ in velja $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$;

(B) če je definiran $g \cdot x$, potem je definiran $g^{-1} \cdot (g \cdot x)$ in velja $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$;

(C) za vsak $x \in X$ je $1 \cdot x$ definiran in enak x.

Za vsak $g \in G$ s $\varphi_g \in \mathcal{I}(X)$ označimo parcialno permutacijo, za katero je

$$\mathrm{dom}(\varphi_g) = \{x \in X\colon \text{element } g \cdot x \text{ je definiran}\}$$

in za $x \in \mathrm{dom}(\varphi_g)$ je $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Pogoj (A) nam pove, da je $\mathrm{dom}(\varphi_g\varphi_h) \subseteq \mathrm{dom}(\varphi_{gh})$ za vse $g,h \in G$ in $\varphi_g\varphi_h(x) = \varphi_{gh}(x)$ za vse $x \in \mathrm{dom}(\varphi_g\varphi_h)$. Zato je parcialna permutacija $\varphi_g\varphi_h$ zožitev parcialne permutacije φ_{gh}. Preslikava $\varphi\colon G \to \mathcal{I}(X)$ tako zadošča pogoju $\varphi_g\varphi_h \leq \varphi_{gh}$, kot tudi pogojema $\varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$ za vsak $g \in G$ in $\varphi_1 = 1_X$. Take preslikave so posplošitve homomorfizmov in se imenujejo *prehomomorfizmi*. Podobno kot so delovanjem grupe G na množici X prirejeni homomorfizmi $G \to \mathcal{S}(X)$, so parcialnim delovanjem grupe G na množici X prirejeni prehomomorfizmi $G \to \mathcal{I}(X)$.

Parcialna delovanja grup so natanko zožitve delovanj. Predpostavimo, da je podano delovanje grupe G na množici X, $(g,x) \mapsto g \cdot x$. Naj bo $Y \subseteq X$

neprazna podmnožica in $g \in G$. Najprej opazimo, da se za $y \in Y$ lahko zgodi, da $g\cdot y \notin Y$. Definirajmo parcialno funkcijo $G\times Y \to Y$, $(g, y) \mapsto g\circ y$, kjer je za $g \in G$ in $y \in Y$ element $g\circ y$ definiran natanko tedaj, ko je $g\cdot y \in Y$ in je v slednjem primeru $g\circ y = g\cdot y$. Parcialna funkcija $(g, y) \mapsto g\circ y$ definira parcialno delovanje grupe G na množici Y, ki ga imenujemo *zožitev* delovanja $(g, x) \mapsto g\cdot x$. Obratno, da se pokazati, da je vsako parcialno delovanje grupe G na množici Y zožitev delovanja grupe G na neki množici X, ki vsebuje Y. Delovanje grupe G, katerega zožitev je dano parcialno delovanje, se imenuje *globalizacija* danega parcialnega delovanja. Več podrobnosti o parcialnih delovanjih grup lahko bralec najde v člankih [3, 5].

Potrebujemo še naslednjo definicijo. Naj bo E polmreža in $I \subseteq E$, kjer je $I \neq \varnothing$. Rečemo, da je I *urejenostni ideal* polmreže E, če za vsak $x \in I$ in vsak $y \leq x$ velja $y \in I$. Drugo ime za urejenostne ideale je *navzdol zaprte množice.*

Naj sedaj grupa G parcialno deluje na polmreži E s preslikavo $(g, e) \mapsto g \cdot e = \varphi_g(e)$ in naj velja naslednji pogoj, ki je podoben pogoju (3):

$$e \leq f \Leftrightarrow g \cdot e \leq g \cdot f \text{ za vse } g \in G \text{ in } e, f \in \operatorname{dom}(\varphi_g).$$

Predpostavimo dodatno, da je za vsak $g \in G$ množica $\operatorname{dom}(\varphi_g)$ urejenostni ideal polmreže E (nato se hitro vidi, da je tudi $\operatorname{ran}(\varphi_g)$ urejenostni ideal polmreže E). Potem pravimo, da G parcialno deluje na E z *urejenostnimi izomorfizmi med urejenostnimi ideali polmreže E.* Na množici

$$E \rtimes G = \{(e, g) \colon g \in G, e \in \operatorname{ran}(\varphi_g)\} \tag{5}$$

vpeljemo operacijo množenja s predpisom

$$(e, g)(f, h) = (g \cdot ((g^{-1} \cdot e) \wedge f), gh) \tag{6}$$

in operacijo inverza s predpisom

$$(e, g)^{-1} = (g^{-1} \cdot e, g^{-1}). \tag{7}$$

Ker imamo podano le parcialno delovanje grupe G na polmreži E, je pravilo (6) neizogibno tehnično bolj zapleteno kot pravilo (4). In sicer, na desni strani v definiciji produkta ne bi smeli obdržati kar $e \wedge g \cdot f$, ker se lahko zgodi, da $f \notin \operatorname{dom}(\varphi_g)$. Pogoj $e \in \operatorname{ran}(\varphi_g)$ v (5) nam zagotavlja, da je $e \in \operatorname{dom}(\varphi_{g^{-1}})$ in zato obstaja $g^{-1} \cdot e$. Ker je $(g^{-1} \cdot e) \wedge f \leq g^{-1} \cdot e$ in je $g^{-1} \cdot e \in \operatorname{dom}(\varphi_g)$, je tudi $(g^{-1} \cdot e) \wedge f \in \operatorname{dom}(\varphi_g)$, saj je množica $\operatorname{dom}(\varphi_g)$ navzdol zaprta. Z nekaj računanja, ki temelji zgolj na (6) in (7), se lahko prepričamo, da je množica $E \rtimes G$ z operacijama iz (6) in (7) inverzna polgrupa. Imenujemo jo *semidirektni produkt* polmreže E in grupe G glede na podano parcialno delovanje.

Uvod v E-unitarne inverzne polgrupe in McAlisterjev P-izrek

Kasneje bomo navedli nekaj pomembnih primerov inverznih polgrup, ki nastanejo iz parcialnih delovanj grup na polmrežah s pomočjo konstrukcije semidirektnega produkta. V tem razdelku pa si bomo na kratko ogledali vprašanje, ali morda tvorijo tako nastale inverzne polgrupe kak poseben razred inverznih polgrup.

Inverzna polgrupa S se imenuje *E-unitarna*, če za vsak $e \in E(S)$ in $s \in S$ iz $s \geq e$ sledi, da je $s \in E(S)$. Obstaja več različnih ekvivalentnih definicij E-unitarnosti [7, 9]. Omenimo, da je vsaka grupa E-unitarna inverzna polgrupa, ker v grupi $a \geq b$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$. Ni vsaka inverzna polgrupa E-unitarna. Na primer, če je $|X| \geq 2$, simetrična inverzna polgrupa $\mathcal{I}(X)$ ni E-unitarna: za vsak $x \in \mathcal{I}(X)$ je $x \geq 0$, ničelna parcialna permutacija 0 je idempotent, ni pa vsak $x \in \mathcal{I}(X)$ idempotent.

Odgovor na vprašanje na začetku tega razdelka prinaša ena od ekvivalentnih formulacij [5] slavnega McAlisterjevega P-izreka o strukturi E-unitarnih inverznih polgrup. Ta pove, da je razred E-unitarnih inverznih polgrup enak razredu inverznih polgrup, ki se jih da predstaviti kot semidirektni produkt grupe in polmreže glede na parcialno delovanje.

Model Szendreieve za Birget-Rhodesovo razširitev grupe

Navedimo zanimiv in pomemben primer inverzne polgrupe, ki jo konstruiramo iz grupe G s pomočjo semidirektnega produkta glede na parcialno delovanje. Označimo s $\mathcal{P}_{\text{fin}}(G)$ množico vseh končnih podmnožic grupe G. Definirajmo

$$E = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \colon 1 \in A\}.$$

Na množici E vpeljimo relacijo $A \leq B$, če je $B \subseteq A$. Urejena množica $(E, \leq)$ je polmreža z $A \wedge B = A \cup B$. Množica $\{1\}$ je očitno največji element polmreže E. Poudarimo, da je polmreža E »konstruirana« zgolj iz grupe G. Za $g \in G$ definirajmo

$$\operatorname{dom}(\varphi_g) = \{A \in E \colon g^{-1} \in A\} = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \colon 1, g^{-1} \in A\}$$

in za $A \in \operatorname{dom}(\varphi_g)$ naj bo $\varphi_g(A) = gA = \{ga \colon a \in A\}$. Ker je $g^{-1} \in A$, je $1 = gg^{-1} \in gA$. Torej je $gA \in E$. Da se preveriti, da smo s tem zares definirali parcialno delovanje grupe G na polmreži E z urejenostnimi izomorfizmi med urejenostnimi idelali.

Čeprav je konstrukcija preprosta in naravna, tu ne gre za delovanje, ker enakost $\varphi_g \varphi_h = \varphi_{gh}$ ne drži za vse $g, h \in G$. O tem se najhitreje prepričamo, če vzamemo $g \in G$, kjer je $g \neq 1$, in primerjamo elementa $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}$ in φ_1. Ker je $\operatorname{dom}(\varphi_{g^{-1}}) = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \colon 1, g \in A\}$, je $\operatorname{ran}(\varphi_{g^{-1}}) = \{A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(G) \colon 1, g^{-1} \in A\} = \operatorname{dom}(\varphi_g)$. Zato je $\operatorname{dom}(\varphi_g \varphi_{g^{-1}}) = \{A \in$

$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(G)\colon 1, g \in A\}$ in za $A \in \mathrm{dom}(\varphi_g \varphi_{g^{-1}})$ velja $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}(A) = gg^{-1}A = A$. Torej je $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}$ identična preslikava na množici $\mathrm{dom}(\varphi_g \varphi_{g^{-1}})$ in je različna od φ_1, ki je identična preslikava na E.

Semidirektni produkt polmreže E in grupe G glede na definirano parcialno delovanje je množica

$$E \rtimes G = \{(A, g)\colon A \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(G) \text{ in } 1, g \in A\}$$

z operacijama

$$(A, g)(B, h) = (g(g^{-1}A \cup B), gh) = (A \cup gB, gh) \ \text{ in } \ (A, g)^{-1} = (g^{-1}A, g^{-1}).$$

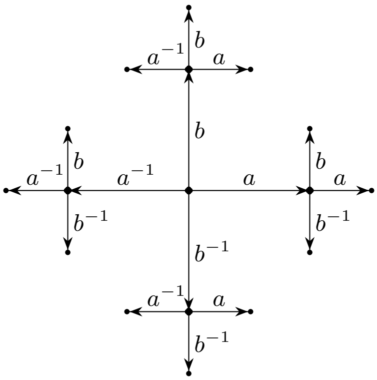
Inverzno polgrupo $E \rtimes G$ je konstruirala Mária B. Szendrei leta 1989 v članku [11]. Pokazala je, da je konstruirana polgrupa izomorfna prej znani Birget-Rhodesovi prefiksni razširitvi grupe G in da inverzni monoid $E \rtimes G$ spada v razred tako imenovanih F-inverznih monoidov, ki je vsebovan v razredu E-unitarnih inverznih monoidov.

Struktura proste inverzne polgrupe

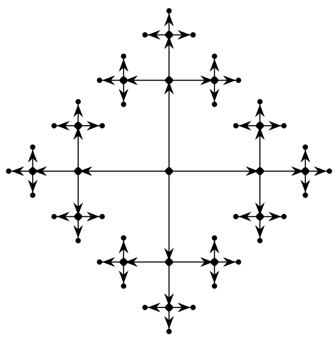
V tem razdelku si bomo ogledali strukturo proste inverzne polgrupe $FI(X)$ nad množico generatorjev X, in sicer jo bomo konstruirali kot semidirektni produkt proste grupe $FG(X)$ glede na parcialno delovanje le-te na polmreži, ki jo bomo najlažje definirali s pomočjo Cayleyjevega grafa proste grupe $FG(X)$. Tako je $FI(X)$ še en primer, tokrat geometrijsko definiran, semidirektnega produkta grupe in polmreže glede na parcialno delovanje.

Prosta grupa $FG(X)$ in njen Cayleyjev graf

Naj bo X neprazna množica. Množico vseh besed nad X označimo z X^* in jo imenujemo *prosti monoid* nad X. Prazno besedo označimo z 1. Naj bo $X^{-1} = \{x^{-1}\colon x \in X\}$. *Reducirana beseda* nad $X \cup X^{-1}$ je element $(X \cup X^{-1})^*$, ki ne vsebuje podbesed oblike aa^{-1} ali $a^{-1}a$, kjer je $a \in X$. Na primer, če je $X = \{a, b\}$, je prazna beseda 1 reducirana, prav tako beseda $aba^{-1}b^2a^{-1}$, beseda $a^3b^{-1}b^2a$ pa ni reducirana, ker vsebuje podbesedo $b^{-1}b$. Množico vseh reduciranih besed iz $(X \cup X^{-1})^*$ označimo s $FG(X)$. Na tej množici definiramo produkt na naslednji način: za $u, v \in FG(X)$ je uv reducirana beseda, ki jo dobimo, če besedo v napišemo na desni od besede u in v primeru potrebe pokrajšamo vse nastale izraze oblike aa^{-1} in $a^{-1}a$, kjer je $a \in X$. Na primer, če je $u = a^2b$ in $v = b^{-1}a^{-1}b^3$, je uv reducirana beseda, ki jo dobimo, ko pokrajšamo besedo $a^2bb^{-1}a^{-1}b^3$, zato je $uv = ab^3$. Če je $u = a_1 \dots a_n \in FG(X)$, definirajmo $u^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$. Da se preveriti, da je $FG(X)$ grupa. Še več, $FG(X)$ je prosta z X generirana grupa, kar



Slika 1. Cayleyjev graf grupe $FG(\{a, b\})$: besede dolžine ≤ 2.



Slika 2. Cayleyjev graf grupe $FG(\{a, b\})$: besede dolžine ≤ 3.

pomeni, da je vsaka druga z X generirana grupa kvocient grupe $FG(X)$, kjer je kvocientna preslikava identična na generatorjih.

Spomnimo se, da je *Cayleyjev graf* z X generirane grupe G usmerjen označen graf $\mathrm{Cay}(G; X)$, oglišča katerega so elementi grupe G. Oglišči u in v sta povezani s povezavo (u, y, v), kjer je $y \in X \cup X^{-1}$, če je $v = uy$. Povezavi (u, y, v) in (v, y^{-1}, u) imenujemo *nasprotni*. Na slikah 1 in 2 sta predstavljena dela Cayleyjevega grafa grupe $FG(X)$ za $X = \{a, b\}$. Na sliki 1 so prikazana oglišča, ki pripadajo reduciranim besedam dolžine dva ali manj, na sliki 2 pa oglišča, ki pripadajo reduciranim besedam dolžine tri ali manj. Za vsaki dve povezani oglišči in za vsak par nasprotnih povezav med njima je na slikah prikazana le ena povezava iz para.

Prosta inverzna polgrupa kot semidirektni produkt glede na parcialno delovanje

V Cayleyjevem grafu $\mathrm{Cay}(FG(X);X)$ bomo za podgrafe privzeli, da hkrati z vsako povezavo vsebujejo tudi njeno nasprotno povezavo. Naj bo $\mathcal{X}$ množica vseh končnih povezanih podgrafov grafa $\mathrm{Cay}(FG(X);X)$ in E množica tistih končnih povezanih podgrafov grafa $\mathrm{Cay}(FG(X);X)$, katerih eno od oglišč je 1. Na množici $\mathcal{X}$ vpeljemo relacijo $\leq$ nasprotne vsebovanosti podgrafov, se pravi $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ velja natanko takrat, ko je Γ_2 podgraf grafa Γ_1. Enostavno je videti, da je $\leq$ delna urejenost in da je $(E, \leq)$ polmreža, kjer je $\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Za $g \in FG(X)$ in $\Gamma \in \mathcal{X}$ naj bo $g\Gamma \in \mathcal{X}$ podgraf grafa $\mathrm{Cay}(FG(X);X)$, dobljen iz Γ s pomočjo *leve translacije* za g: njegova oglišča so gh, kjer h teče po ogliščih grafa Γ, njegove povezave pa so (gh_1, x, gh_2), kjer (h_1, x, h_2) teče po povezavah grafa Γ. Za $g \in FG(X)$ definirajmo

$$\mathrm{dom}(\varphi_g) = \{\Gamma \in E \colon g^{-1} \text{ je oglišče } \Gamma\} = \{\Gamma \in \mathcal{X} \colon 1, g^{-1} \text{ sta oglišči } \Gamma\}.$$

Za $\Gamma \in \mathrm{dom}(\varphi_g)$ naj bo $\varphi_g(\Gamma) = g\Gamma$. Ker je g^{-1} oglišče Γ, je $1 = gg^{-1}$ oglišče $g\Gamma$, iz česar sledi $g\Gamma \in E$. Da se preveriti, da smo s tem definirali parcialno delovanje grupe $FG(X)$ na polmreži E s pomočjo urejenostnih izomorfizmov med urejenostnimi ideali. Podobno kot prej tu ne gre za delovanje, in sicer enakost $\varphi_g \varphi_h = \varphi_{gh}$ ne drži za vse $g, h \in FG(X)$.

Semidirektni produkt polmreže E in grupe $FG(X)$ je v tem primeru množica

$$E \rtimes FG(X) = \{(\Gamma, g) \colon \Gamma \in \mathcal{X}, 1 \text{ in } g \text{ sta oglišči } \Gamma\}$$

z operacijama

$$(\Gamma, g)(\Delta, h) = (g(g^{-1}\Gamma \cup \Delta), gh) = (\Gamma \cup g\Delta, gh) \text{ in } (\Gamma, g)^{-1} = (g^{-1}\Gamma, g^{-1}).$$

Za $x \in X$ naj bo Γ_x graf z ogliščema 1 in x in povezavama $(1, x, x)$ in $(x, x^{-1}, 1)$. Inverzna polgrupa $E \rtimes FG(X)$ je generirana z množico $\{(\Gamma_x, x) \colon x \in X\}$ in predstavlja model *proste inverzne polgrupe* $FI(X)$. To pomeni, da je vsaka z X generirana inverzna polgrupa kvocient polgrupe $E \rtimes FG(X)$, pri čemer kvocientna preslikava slika (Γ_x, x) v x za vsak $x \in X$.

Opisana konstrukcija je poseben primer splošnejše konstrukcije – t. i. Margolis-Meakinove razširitve grupne prezentacije [8], v kateri namesto Cayleyjevega grafa $\mathrm{Cay}(FG(X);X)$ proste grupe nastopa Cayleyjev graf poljubne grupe podane z generatorji in relacijami.

Zaključne opombe

Če v konstrukciji, ki smo jo navedli v prejšnjem razdelku, dovolimo tudi nepovezane končne podgrafe Caylejevega grafa $\mathrm{Cay}(FG(X);X)$, dobimo na podoben način inverzni monoid $\overline{E} \rtimes FG(X)$, kjer je $\overline{E}$ množica tistih končnih podgrafov grafa $\mathrm{Cay}(FG(X); X)$, katerih eno od oglišč je 1. Kot smo pokazali v nedavnem članku [1], predstavlja dobljeni semidirektni produkt model prostega F-inverznega monoida. Če pa namesto proste grupe $FG(X)$ vzamemo poljubno grupo G podano z generatorji in relacijami, dobimo F-inverzni monoid, ki ima določeno univerzalno lastnost in združuje tako Margolis-Meakinovo razširitev kot tudi model Szendreieve za Birget-Rhodesovo razširitev grupe G.

Za konec naj omenimo še posplošitev inverznih polgrup na tako imenovane omejitvene polgrupe. Slednje so polgrupe, ki za razliko od inverznih polgrup nimajo operacije inverza, imajo pa dodatni unarni operaciji $^+$ in *, ki posplošujeta operaciji $a \mapsto aa^{-1}$ in $a \mapsto a^{-1}a$ na inverzni polgrupi. Na primer, naj bo $S = \{\varphi \in \mathcal{I}(X) \colon \varphi(x) \geq x \text{ za vsak } x \in \mathrm{dom}(\varphi)\} \subseteq \mathcal{I}(X)$, kjer je $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za $\varphi \in S$ je $\varphi^* = \varphi^{-1}\varphi, \varphi^+ = \varphi\varphi^{-1} \in S$, kljub temu da v splošnem $\varphi^{-1} \notin S$. Polgrupa S je tako primer omejitvene polgrupe. Omejitvene polgrupe, konstruirane kot semidirektni produkti monoidov in polmrež glede na parcialna delovanja, so predmet aktivnih trenutnih raziskav, glejte na primer članek [6] in v njem navedeno literaturo.

LITERATURA

[1] K. Auinger, G. Kudryavtseva in M. B. Szendrei, *F-inverse monoids as algebraic structures in enriched signature*, Indiana Univ. Math J., sprejeto v objavo, preprint je prosto dostopen na spletu: `www.iumj.indiana.edu/IUMJ/Preprints/8685.pdf`, ogled 20. 12. 2020.

[2] M. Dokuchaev, *Recent developments around partial actions*, São Paulo J. Math. Sci. **13** (2019), 195–247.

[3] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3481–3494.

[4] O. Ganuyshkin in V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups. An introduction*, Algebra and Applications **9**, Springer-Verlag, London, 2009.

[5] J. Kellendonk in M. V. Lawson, *Partial actions of groups*, Internat. J. Algebra Comput. **14** (2004), 87–114.

[6] G. Kudryavtseva, *Two-sided expansions of monoids*, Internat. J. Algebra Comput. **29** (2019), 1467–1498.

[7] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, River Edge, 1998.

[8] S. W. Margolis in J. C. Meakin, *E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group presentation*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 45–76.

[9] M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[10] G. B. Preston, *Inverse semi-groups*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 396–403.

[11] M. B. Szendrei, *A note on Birget-Rhodes expansion of groups*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 93–99.

[12] V. V. Vagner, *The theory of generalized heaps and generalized groups*, Mat. Sbornik N. S. **32** (1953), 545–632 (v ruščini).