

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 15 (1987/1988)

Številka 1

Strani 11-13

Šefket Arslanagić, Dragoljub M. Milošević, prevod
in priredba Tomaž Košir:

OBRAT PTOLOMEJEVEGA IZREKA

Ključne besede: matematika, algebra.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/15/869-Arslanagic.pdf>

© 1987 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

OBRAT PTOLEMEJEVEGA* IZREKA

V geometriji je znan *Ptolemejev izrek*:

V vsakem tetivnem četrkotniku ABCD je produkt dolžin obeh diagonal enak vsoti produktov dolžin nasproti ležečih stranic

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

V matematični literaturi najdemo več dokazov tega izreka. V tem članku pa bomo podali dva dokaza obrata Ptolemejevega izreka:

Če v konveksnem četrkotniku ABCD velja

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

je ta četrkotnik tetivni.

Dokaz 1. Podan je konveksni četrkotnik $ABCD$. Označimo stranice $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ in $DA = d$, diagonali $AC = e$, $BD = f$ ter kote $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle BCD = \gamma$ in $\sphericalangle (AC, BD) = \psi$ (slika 1). Ploščina četrkotnika $ABCD$ je enaka vsoti ploščin trikotnikov ABD in BCD : $P = 1/2 ad \sin \alpha + 1/2 bc \sin \gamma$, ali

$$4P = 2ad \sin \alpha + 2bc \sin \gamma \quad (1)$$

Ker je diagonala f skupna stranica trikotnikoma ABD in BCD , z uporabo kosinusovega izreka dobimo $b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$ ali

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2bc \cos \gamma - 2ad \cos \alpha \quad (2)$$

Iz enakosti (1) in (2) sledi:

$$(4P)^2 + (b^2 - c^2 - a^2 - d^2)^2 = (2ad \sin \alpha - 2bc \sin \gamma)^2 + (2bc \cos \gamma - 2ad \cos \alpha)^2$$

Od tod z nekaj računanja pridemo do enakosti:

$$16P^2 = 4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad (3)$$

Skalarni produkt vektorjev $\vec{AC}$ in $\vec{BD}$ nam bo pomagal najti še drugo enačbo za kvadrat ploščine P :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

Upoštevajmo pomen skalarnega produkta in uporabimo kosinusov izrek za trikotnika ACD in ABC :

$$\begin{aligned} ef \cos \psi &= 1/2 (e^2 + d^2 - c^2) - 1/2 (e^2 + a^2 - b^2) \\ \text{ali} \quad 2ef \cos \psi &= b^2 + d^2 - a^2 - c^2 \end{aligned} \quad (4)$$

* Klavdij Ptolemej (2. stol.), grški matematik, astronom in geograf

Ker je ploščina četverokotnika $ABCD$ enaka $P = 1/2 ef \cdot \sin \psi$, lahko zapišemo:

$$16P^2 = 4e^2 f^2 \sin^2 \psi = 4e^2 f^2 (1 - \cos^2 \psi) \quad (5)$$

Iz (4) in (5) sledi:

$$16P^2 = 4e^2 f^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 \quad (6)$$

Če izenačimo (3) in (6), dobimo

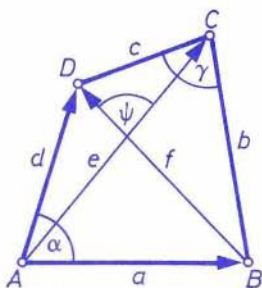
$$4abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = (ac + bd)^2 - e^2 f^2 \quad (7)$$

Upoštevajmo v (7) pogoj izreka $ef = ac + bd$

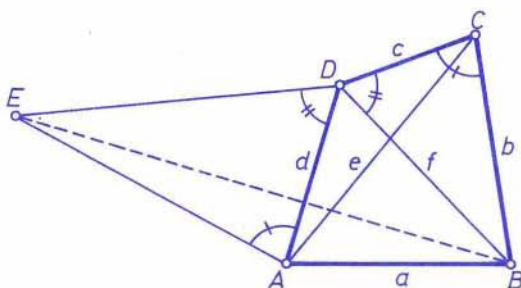
$$4abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$$

Torej mora biti $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

Ker je četverokotnik, v katerem je vsota nasprotnih kotov 180° , tetivni četverokotnik, je izrek dokazan.



Slika 1



Slika 2

Dokaz 2. Izberimo točko E , da bo veljalo: $\angle EAD = \gamma$ in $\angle EDB = \angle CDB$ (slika 2). Označimo še $\angle EDB = \angle CDA = \delta$. Ker sta si trikotnika AED in DBC podobna, velja

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EA}{BC} = \frac{ED}{DB} \text{ ali } ED = \frac{d}{c} \cdot f \text{ in } EA = \frac{d}{c} \cdot b$$

Uporabimo kosinusov izrek za trikotnike AEB , EDB in ACD :

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2} \cdot b^2 + a^2 - \frac{2abd}{c} \cos(\alpha + \gamma) \quad (8)$$

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2} \cdot f^2 + f^2 - \frac{2d}{c} f^2 \cos \delta \quad (9)$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta \quad (10)$$

Če upoštevamo gornje tri enakosti (8), (9) in (10), lahko zapišemo:

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(a + \gamma) \quad (11)$$

Ker smo predpostavili zvezo $ef = ac + bd$, iz enakosti (11) sledi $\cos(a + \gamma) = -1$ oziroma $a + \gamma = 180^\circ$.

Četverkotnik $ABCD$ je tetivni.

Povejmo še to, da dokaz obrata Ptolemejevega izreka s pomočjo inverzije najdemo v knjigah:

1. P.S.Modenov, *Zadači po geometriji*, Nauka, Moskva 1979, str. 254;
2. I.J. Bakel'jman, *Inversija*, Nauka, Moskva 1966, str. 52.

Pripomba: S pomočjo enakosti (7) oziroma enakosti (11) zlahka dokažemo tudi Ptolemejev izrek.

Šefket Arslanagić, Dragoljub Milošević
prevedel in priredil *Tomaž Košir*