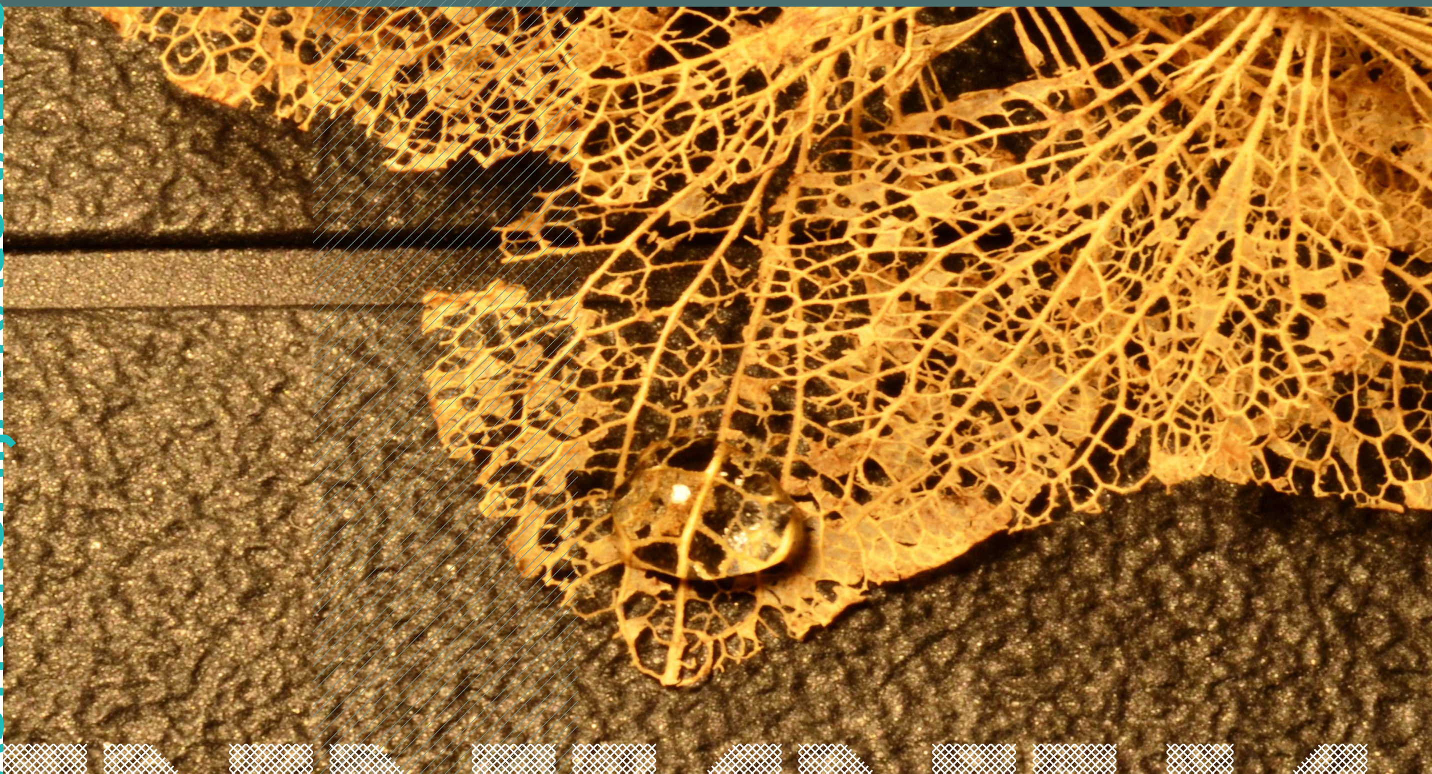
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

2

PRESEK LETNIK 42 (2014/2015) ŠTEVILKA **2**



PRESEK

- OD MOSTA V DUBLINU DO ROTACIJ S KVATERNIONI
- OD KLADIVA DO KIJA
- TEKMUJMO IZ ZNANJA ASTRONOMIJE
- NAJDALJŠI SKUPNI PODNIZ

ISSN 0351-6652

Uporaba slabo znane sile

Površinska napetost je fizikalni pojav med površino vode in zrakom, ki nekaterim žuželkam omogoča hojo po vodi. Mehanizme, ki jih povzroča površinska napetost, lahko razložimo s pomočjo trigonometrije, diferencialne geometrije in diferencialnih enačb. Biologi, fiziki, matematiki in inženirji jih skušajo razumeti ter koristno uporabiti za razvoj novih in bolj učinkovitih naprav, npr. plovil s čim manjšim uporom.

Površinska napetost ima tudi pomembno vlogo pri širjenju bolezni. Matematiki so med zadnjimi poskusi s pomočjo hitrih video posnetkov odkrili, da se med kihanjem in kašljanjem kapljice prenašajo po oblaku, ki je sestavljen iz plina in tekočine. Manjše kapljice, ki lažje dosežejo dihalne organe, se s pomočjo oblaka širijo od pet do dvesto krat hitreje, kot če bi potovale same, in tako dosežejo precej oddaljene prezračevalne jaške. S pomočjo poskusov in večfazne dinamike tokov, ki upošteva navor, vzgon in turbulence, so oblikovali matematične modele teh oblakov. Rezultate poskusov lahko koristno uporabimo pri načrtovanju razredov, letal in bolniških sob ter tako zmanjšamo širitev delcev, ki prenašajo bolezni.

Kogar pojav bolj zanima, naj si pogleda članek *Water's Tough Skin*, ki ga je v reviji Science objavila Elizabeth Pennisi 14. marca 2014.

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 42, šolsko leto 2014/2015, številka 2

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2014/2015 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

SLIKA NA NASLOVNICI: Skozi kapljo na posušenem listu vidimo povečano sliko. Povečava kaplje je opisana v prispevku o naravoslovni fotografiji.

Od mosta v Dublinu do rotacij s kvaternioni

Irena Kosi-Ulbl

Na začetku prispevka se bomo na kratko posvetili številom, ki jih velikokrat srečamo v vsakdanjem življenju – realnim številom. Vemo, da lahko realna števila na enolični način predstavimo na številski premici.

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ je definiranih več računskih operacij, osnovni med njimi pa sta dve:

- seštevanje: $\forall a, b \in \mathbb{R};\ a + b \in \mathbb{R}$ (vsota),
- množenje: $\forall a, b \in \mathbb{R};\ a \cdot b \in \mathbb{R}$ (produkt).

Za seštevanje realnih števil veljajo naslednji zakoni:

I. Komutativnostni zakon
$\forall a, b \in \mathbb{R};\ a + b = b + a$

II. Asociativnostni zakon
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ (a + b) + c = a + (b + c)$

III. Obstoj nevtralnega elementa
$\exists 0 \in \mathbb{R};\ \forall a \in \mathbb{R},\ a + 0 = a$

IV. Obstoj nasprotnega elementa
$\forall a \in \mathbb{R};\ \exists\ -a \in \mathbb{R};\ a + (-a) = 0$

Za množenje realnih števil veljajo naslednji zakoni:

V. Komutativnostni zakon
$\forall a, b \in \mathbb{R};\ a \cdot b = b \cdot a$

VI. Asociativnostni zakon
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

VII. Obstoj nevtralnega elementa
$\exists\ 1 \in \mathbb{R};\ \forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 1 = a$

VIII. Obstoj inverznega elementa
$\forall a \neq 0 \in \mathbb{R};\ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R};\ a \cdot a^{-1} = 1$

Seštevanje in množenje povezuje:

IX. Distributivnostni zakon
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

X. Nevtralni element za seštevanje in nevtralni element za množenje ne sovpadata:
$0 \neq 1$.

Množica realnih števil skupaj z operacijama seštevanje in množenje, za kateri veljajo našteti zakoni, je poseben primer matematične strukture, ki jo imenujemo končnorazsežna algebra z deljenjem.

Sedaj se spomnimo kompleksnih števil. Vemo, da lahko kompleksna števila na enolični način predstavimo v ravnini. Tudi v množici kompleksnih števil definiramo operaciji seštevanje in množenje, za kateri veljajo enaki zakoni, kot za realna števila.

Ali lahko s posploševanjem nadaljujemo na podoben način?

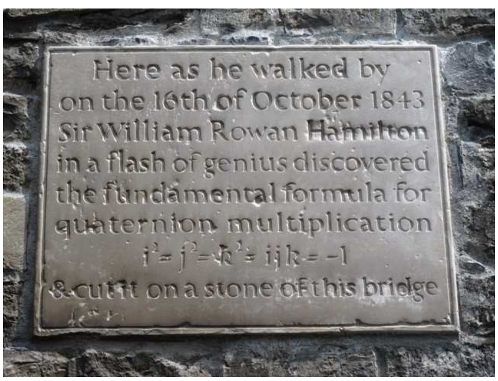
Irski kraljevi astronom Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) se je po svojem delu s področij mehanike in optike posvetil algebri, natančneje kompleksnim številom (1835), pri čemer je kompleksno število definiral kot urejeni par realnih števil. S tem je bilo omogočeno – kot smo zapisali prej – da vsako kompleksno število na enolični način predstavimo v kompleksni ravnini. Kasneje je Hamilton poskušal to lastnost posplošiti na trirazsežni prostor. Po vzoru kompleksnih števil, kjer uporabimo običajno enoto iz množice realnih števil in eno imaginarno enoto, je domneval, da potrebuje eno dodatno imaginarno enoto (točke v trirazsežnem prostoru bi torej opisal z urejenimi trojicami oziroma s števili oblike $a + bi + cj$, $a, b, c \in \mathbb{R}$). Več let si je prizadeval, da bi ustvaril algebraični sistem z eno realno in dvema imaginarnima komponentama, vendar mu ni uspelo. Brez težav je definiral seštevanje (in odštevanje) ter množenje trojic števil, zataknilo pa se je pri deljenju. Hamilton je seveda želel, da bi »nova« števila pri množenju (oziroma deljenju) zadoščala podobnim pravilom kot realna in kompleksna števila. Šele nekaj let kasneje je ugotovil, da bo za razrešitev problema potreboval štiri in ne le treh dimenzij.

Zgodovinski zapisi pravijo, da je Hamilton dobil genialno idejo za rešitev tega problema 16. oktobra 1843 v Dublinu na sprehodu proti Irski kraljevi akademiji (Royal Irish Academy). Zamisel je temeljila na vpeljavi sistema treh imaginarnih enot i, j in k ter na posebnem pravilu za množenje, ki ga bomo predstavili kasneje v prispevku.

Kot je Hamilton o odkritju pozneje zapisal v pismu svojemu sinu, je bil tako vznesen nad idejo, ki bo rešila več let nerazrešen problem, da je pravilo za množenje z nožem vrezal v kamen mosta Brougham Bridge, preko katerega je takrat hodil. Pri tem je najbolj nenavadno to, da most Brougham Bridge v Dublinu sploh ne obstaja. Izkazalo se je, da se je Hamilton v pismu svojemu sinu zmotil – pravilo za množenje je vrezal v steno mosta Broome Bridge, katerega ime se enako izgovori kot Brougham Bridge.

Hamilton je urejene četverice realnih števil (a, b, c, d) oziroma elemente oblike $a + bi + cj + dk$, ki jih množimo v skladu s prej omenjenim pravilom, imenoval *kvaternioni*. Proučevanju teh števil je nato posvetil preostanek svojega življenja. Množico kvaternionov označimo v spomin na Hamiltona s simbolom **H**.

Danes vemo, da je bil Hamiltonov problem zares nerešljiv v trirazsežnem prostoru. O tem namreč govori trditev, znana kot Frobeniusov izrek (F. G. Frobenius, 1849-1917, nemški matematik), ki pravi, da je realna končno dimenzionalna asociativna algebra z deljenjem izomorfna realnim številom, kompleksnim številom ali kvaternionom. (Pripomnimo, da v matematiki med izomorfnimi objekti – ko govorimo o njihovih lastnostih – ne ločimo).



SLIKA 1.
Zapis na mostu Broome Bridge v Dublinu v spomin Hamiltonu in njegovemu odkritju kvaternionov. Vir: http://atlas.ingeniousireland.ie/a-eureka-moment-broome-bridge

Kvaternione lahko vpeljemo na različne načine. V prispevku jih bomo predstavili kot števila $q \in \mathbf{H}$, ki jih na enolični način zapišemo kot vsote štirih členov ali kot urejene četverice:

- $q = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = (a, b, c, d)$,

pri čemer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ imenujemo komponente kvaterniona q, elemente 1, i, j in k pa bazni vektorji ali bazni elementi. Tudi bazni vektorji so elementi množice **H**, saj jih lahko predstavimo kot urejene četverice na naslednji način:

- $1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0),$
  $j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1).$

Dva kvaterniona sta enaka natanko takrat, ko se ujemata v vseh štirih komponentah. Kvaterniona $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ in $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ sta torej enaka natanko takrat, ko je

- $a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2.$

Seštevanje kvaternionov definiramo kot seštevanje »po komponentah«. Tako je za poljubna $q_1, q_2 \in \mathbf{H}$

- $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i +$
  $+ (c_1 + c_2)\, j + (d_1 + d_2)\, k.$

Seštevanje kvaternionov je komutativno in asociativno (tudi za kvaternione veljata zakona I in II, ki smo ju zapisali za realna števila).

Nevtralni element za seštevanje je ničelni kvaternion $q = 0 = 0 \cdot 1 + 0i + 0j + 0k$ (zakon III).

Za vsak kvaternion $q = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$ obstaja nasprotni kvaternion $-q = -a - bi - cj - dk \in \mathbf{H}$ (zakon IV).

Zgled 1. Za kvaterniona $q_1 = 5 - 2i + 2j + 4k$ in $q_2 = -3 - 7i + j - 8k$ izračunajmo $q_2 + (-q_1)$:

- $q_2 + (-q_1) =$
  $= (-3 - 7i + j - 8k) + (-5 + 2i - 2j - 4k)$
  $= -8 - 5i - j - 12k.$

Na množici **H** je definirano tudi množenje s skalarjem (z realnim številom). Števila $\alpha \in \mathbb{R}$ tvorijo podmnožico množice **H**, saj je

- $\alpha = \alpha \cdot 1 + 0i + 0j + 0k.$

Produkt kvaterniona $q = a+bi+cj+dk \in \mathbf{H}$ s skalarjem $\alpha \in \mathbb{R}$ izračunamo tako, da vsako komponento kvaterniona pomnožimo z α:

- $\alpha q = \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk.$

Za tako definirano množenje kvaternionov s skalarji velja distributivnost glede na seštevanje kvaternionov:

- $\alpha(q_1 + q_2) = \alpha q_1 + \alpha q_2$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in za vse $q_1, q_2 \in \mathbf{H}$

ter distributivnost glede na seštevanje skalarjev:

- $(\alpha + \beta)q = \alpha q + \beta q$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in za vsak $q \in \mathbf{H}$.

Za poljubna skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubni kvaternion $q \in \mathbf{H}$ velja »neprava asociativnost«:

- $(\alpha\beta)q = \alpha(\beta q)$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in za vsak $q \in \mathbf{H}$.

Obstaja tudi skalar $1 \in \mathbb{R}$, tako da je $1 \cdot q = q$ za vsak kvaternion $q \in \mathbf{H}$.

Zgled 2. Za kvaterniona $q_1 = 5 - 2i + 2j + 4k$ in $q_2 = -3 - 7i + j - 8k$ ter skalarja $\alpha = 2$ in $\beta = -1$ izračunajmo $\alpha q_1 - \beta(\alpha q_2) + \beta q_1$.

Z upoštevanjem navedenih lastnosti je

- $$\begin{aligned}\alpha q_1 - \beta(\alpha q_2) + \beta q_1 &= (\alpha+\beta)q_1 - (\beta\alpha)q_2 = \\ &= (2-1)\cdot(5-2i+2j+4k) - \\ &\quad -(-1)\cdot 2(-3-7i+j-8k) = \\ &= -1 - 16i + 4j - 12k.\end{aligned}$$

V množico $\mathbf{H}$ lahko vpeljemo tudi množenje elementov. Kvaterniona $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ in $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ zmnožimo tako, da privzamemo veljavnost distributivnostnega zakona (zakon IX) in upoštevamo pravila za množenje baznih elementov i, j, k (to pravilo je Hamilton vrezal na dublinski most):

- $$\begin{aligned}&i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,\\ &ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.\end{aligned} \tag{1}$$

Tako je produkt kvaternionov q_1 in q_2 enak

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 &= \\ &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 a_2 + b_1 a_2 i + c_1 a_2 j + d_1 a_2 k + a_1 b_2 i + \\ &\quad + b_1 b_2 i^2 + c_1 b_2 ji + d_1 b_2 ki + a_1 c_2 j + b_1 c_2 ij + \\ &\quad + c_1 c_2 j^2 + d_1 c_2 kj + a_1 d_2 k + b_1 d_2 ik + \\ &\quad + c_1 d_2 jk + d_1 d_2 k^2.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem pravil (1) pa dobimo po nekaj korakih računanja

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 &+ \\ + (a_2 b_1 + a_1 b_2 - c_2 d_1 + c_1 d_2)\, i &+ \\ + (a_2 c_1 + b_2 d_1 + a_1 c_2 - b_1 d_2)\, j &+ \\ + (a_2 d_1 - b_2 c_1 + b_1 c_2 + a_1 d_2)\, k&.\end{aligned} \tag{2}$$

Ugotovimo, da je produkt dveh kvaternionov spet kvaternion.

Zgled 3. Izračunajmo produkt kvaternionov $q_1 = 2 - j + 3k$ in $q_2 = -3i + j - k$.

Z upoštevanjem pravila (2) je

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 = 0 + 0 + 1 + 3 + (0 - 6 - 3 + 1)\, i &+ \\ + (0 - 9 + 2 - 0)\, j + (0 - 3 + 0 - 2)\, k &= \\ = 4 - 8i - 7j - 5k.&\end{aligned}$$

Vrnimo se spet k pravilom za množenje baznih elementov i, j, k. Opazimo, da nas druga vrstica teh pravil spominja na vektorski produkt vektorjev standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$. Zares obstaja povezava med vektorji in kvaternioni. Vsak kvaternion $q \in \mathbf{H}$ lahko namreč predstavimo kot vsoto skalarnega dela $a \in \mathbb{R}$ in vektorskega dela $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$:

- $q = a + \vec{q},$

pri čemer je $\vec{q} = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pa v tem primeru predstavljajo vektorje standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$. S tako predstavljenimi kvaternioni lahko zapišemo produkt dveh kvaternionov na krajši način. Za kvaterniona $q_1 = a_1 + \vec{q}_1$ in $q_2 = a_2 + \vec{q}_2$ je njun produkt enak

- $$\begin{aligned}q_1 q_2 &= \left(a_1 + \vec{q}_1\right)\left(a_2 + \vec{q}_2\right) = \\ &= \left(a_1 a_2 - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right) + \left(a_1 \vec{q}_2 + a_2 \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Pri tem je $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2$ skalarni, $\vec{q}_1 \times \vec{q}_2$ pa vektorski produkt vektorjev $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$. Ustreznost tega pravila preverimo tako, da izračunamo skalarni in vektorski produkt vektorjev $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$, ki smo ju zapisali po komponentah, in dobljeni izraz za produkt kvaternionov uredimo po baznih elementih 1, i, j, k.

Zgled 4. Izračunajmo produkt kvaternionov $q_1 = 2 - j + 3k$ in $q_2 = -3i + j - k$ z uporabo pravila (3).

Zapišimo vektorski del obeh kvaternionov po komponentah, nato pa najprej izračunajmo skalarni in vektorski produkt dobljenih vektorjev:

$$\vec{q}_1 = (0,-1,3)\,, \vec{q}_2 = (-3,1,-1)\,,$$
$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0 - 1 - 3 = -4,$$
$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 9j - 3k.$$

Po pravilu (3) je tako

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (0-(-4)) + 2\,(-3i+j-k) + \\ &\quad + 0 \cdot (2-j+3k) + (-2i-9j-3k) = \\ &= 4 - 8i - 7j - 5k. \end{aligned}$$

Dobili smo enak rezultat kot v zgledu 3.

Zapišimo še, da je množenje kvaternionov asociativno, ni pa komutativno (spomnimo se zakonov VI in V). Slednje sledi takoj iz pravila (1) za množenje baznih elementov i, j, k.

Zgled 5. Z izračunom produktov q_1q_2 in q_2q_1 za kvaterniona iz zgleda 4 pokažimo, da množenje zares ni komutativno.

Ker smo produkt q_1q_2 že izračunali, sledi še izračun produkta q_2q_1. Skalarni produkt vektorjev je komutativen in tako je

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1 = -4.$$

Vektorski produkt vektorjev je antikomutativen, torej je

$$\vec{q}_2 \times \vec{q}_1 = -\left(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2\right) = 2i + 9j + 3k.$$

Produkt q_2q_1 spet izračunamo z uporabo pravila (3):

$$\begin{aligned} q_2q_1 &= (0-(-4)) + (0 \cdot (2-j+3k) + \\ &\quad +2\,(-3i+j-k) + 2i+9j+3k) = \\ &= 4 - 4i + 11j + k. \end{aligned}$$

S primerjanjem rezultata iz zgleda 4 ugotovimo, da je $q_1q_2 \neq q_2q_1$.

Pri kompleksnih številih definiramo konjugirano kompleksno število, ki se od danega kompleksnega števila razlikuje le po predznaku imaginarne enote. Tudi pri kvaternionih definiramo konjugirani kvaternion na podoben način (spremenimo predznake imaginarnih komponent). Za kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ je konjugirani kvaternion q^* enak

$$q^* = a - bi - cj - dk.$$

Naj bodo q, q_1, $q_2 \in \mathbf{H}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Naštejmo nekaj lastnosti konjugiranja:

$$(q_1 + q_2)^* = q_1^* + q_2^*,$$
$$(\alpha q)^* = \alpha q^*,$$
$$(q_1q_2)^* = q_2^* q_1^*.$$

Prvi dve lastnosti sta očitni, tretjo pa dokažemo tako, da po pravilu (3) izračunamo produkta q_1q_2 in $q_2^*q_1^*$ ter upoštevamo, da je skalarni produkt komutativen, vektorski produkt pa antikomutativen.

Zanimiva je tudi lastnost, da poljubni kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ komutira s svojim konjugiranim kvaternionom. Velja namreč

$$qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = q^*q.$$

Ugotovimo tudi, da je produkt qq^* nenegativno realno število. To dejstvo omogoča, da (podobno kot pri vektorjih v prostoru $\mathbb{R}^3$) definiramo velikost oziroma dolžino kvaterniona q (označili jo bomo z $||q||$) na naslednji način:

$$||q|| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Kvaternion, katerega velikost je enaka 1, imenujemo enotski kvaternion. Ni težko preveriti, da je produkt enotskih kvaternionov spet enotski kvaternion. Uporabimo lastnost velikosti, ki pravi, da je velikost produkta kvaternionov enaka produktu velikosti posameznih kvaternionov:

$$\begin{aligned} ||q_1q_2||^2 &= (q_1q_2)\,(q_1q_2)^* = q_1q_2q_2^*q_1^* = \\ &= q_1\,||q_2||^2\,q_1^* = q_1q_1^*\,||q_2||^2 = ||q_1||^2\,||q_2||^2\,. \end{aligned}$$

Za neničelni kvaternion q obstaja inverzni kvaternion q^{-1} (zakon VIII). Inverzni kvaternion predstavimo v obliki

$$q^{-1} = \frac{1}{||q||^2}q^*,$$

saj je

$$q\left(\frac{1}{||q||^2}q^*\right)=\frac{1}{||q||^2}\left(qq^*\right)=\frac{1}{||q||^2}\cdot||q||^2=1.$$

Zgled 6. Poiščimo inverzni kvaternion kvaterniona $q = 2 - j + 3k$.

Najprej izračunamo velikost kvaterniona q:

$$||q||=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14},$$

nato pa zapišemo njegov konjugirani kvaternion:

$$q^*=2+j-3k.$$

Inverzni kvaternion kvaterniona q je potem enak

$$q^{-1}=\frac{1}{14}\left(2+j-3k\right).$$

V nadaljevanju prispevka bomo našteli nekaj področij uporabe kvaternionov. Kvaternione srečamo na različnih področjih fizike (hidrodinamika, elektrodinamika, posebna teorija relativnosti). V teh primerih kvaternion predstavimo kot kombinacijo skalarja in trirazsežnega vektorja, pri čemer je skalar običajno čas, vektorski del pa neko vektorsko polje, npr. hitrostno polje tekočine, električno polje. Proti koncu dvajsetega stoletja je velik pomen dobila predstavitev rotacij v prostoru s kvaternioni; v primerjavi z uporabo rotacijskih matrik se je namreč izkazala za učinkovitejšo. Tako srečamo kvaternione tudi na področju računalniške grafike, robotike, navigacije, molekularne dinamike, v letalstvu in orbitalni mehaniki (proučevanje trajektorij raket, umetnih satelitov, raziskovalnih naprav, lansiranih v vesolje).

Ob koncu bomo na kratko predstavili bistvo geometrijskega pomena kvaternionov – povezavo kvaternionov in rotacij v prostoru, ki pomeni osnovo prej omenjene praktične uporabe kvaternionov. Preden zapišemo temeljni izrek tega področja, definirajmo še dva pojma.

Rotacija $\mathfrak{R}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je preslikava, ki zavrti prostor $\mathbb{R}^3$ za kot φ okoli osi, določene z nekim vektorjem. Rotacija ohranja dolžine in kote, premice preslika v premice in ravnine v ravnine.

Kvaternion q imenujemo čisti kvaternion, če je njegova realna komponenta (skalarni del) enaka 0.

Do sedaj smo kvaternione zapisali s štirimi komponentami ali pa kot vsoto realnega in vektorskega dela. Oglejmo si še en zapis enotskega kvaterniona. Naj bo $q = a + bi + cj + dk$ enotski kvaternion. Iz definicij velikosti kvaterniona in dolžine vektorja iz $\mathbb{R}^3$ sledi

$$1=||q||^2=\left|\left|a+\vec{q}\right|\right|^2=a^2+b^2+c^2+d^2=$$
$$=a^2+\left|\vec{q}\right|^2.$$

Z upoštevanjem znane zveze med kotnima funkcijama

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

pa ugotovimo, da obstaja tak kot $\varphi\in[0,\pi]$, za katerega je

$$\cos^2\varphi=a^2\quad\text{in}\quad\sin^2\varphi=\left|\vec{q}\right|^2.$$

Vpeljimo še enotski vektor $\vec{e}$ v smeri vektorja $\vec{q}$

$$\vec{e}=\frac{1}{\sin\varphi}\vec{q}.$$

Tako lahko zapišemo enotski kvaternion q v obliki

$$q=a+\vec{q}=\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\vec{e}.$$

Sedaj bomo predstavili prej omenjeni izrek.

Izrek 1. Naj bo q enotski kvaternion, zapisan v obliki

$$q=a+\vec{q}=\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\vec{e},$$

pri čemer je $\vec{e}$ čisti enotski kvaternion. Transformacija $\mathfrak{R}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definirana s predpisom

$$\mathfrak{R}\left(\vec{x}\right)=q\vec{x}q^*,$$

kjer je $\vec{x}$ poljubni vektor iz $\mathbb{R}^3$, predstavlja rotacijo prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi, določene z vektorjem $\vec{e}$, za kot 2φ.

Dokaz tega izreka najdemo v [2] ali [6], v prispevku pa bomo na kratko predstavili idejo dokaza.

Najprej pokažemo, da v izreku definirana transformacija $\mathfrak{R}$ ohranja vektor $\vec{q}\in\mathbb{R}^3$ in tako vektor $\vec{q}$ določa os rotacije. V prostoru $\mathbb{R}^3$ označimo s π ravnino, katere normalni vektor je enotski vektor $\vec{e}$, ki leži na osi rotacije. V ravnini π izberemo poljubni enotski vektor $\vec{v}$, označimo $\vec{w} = \vec{e} \times \vec{v}$ ($\vec{w}$ je torej enotski vektor, pravokoten na vektorja $\vec{e}$ in $\vec{v}$) in pokažemo, da velja $\vec{v}q^* = q\vec{v}$. Z upoštevanjem te zveze pa ugotovimo, da je

- $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) = q\vec{v}q^* = qq\vec{v} = q^2\vec{v}.$

Sedaj uporabimo zapis $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \vec{e}$ in dejstvo, da je $\vec{e} \perp \vec{v}$. Po nekaj korakih računanja dobimo

- $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) = \cos 2\varphi \cdot \vec{v} + \sin 2\varphi \cdot \vec{w},$

kar pomeni, da smo s transformacijo $\mathfrak{R}$ vektor $\vec{v}$ v ravnini π zavrteli za kot 2φ ($\cos 2\varphi$ in $\sin 2\varphi$ sta komponenti vektorja $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right)$ v smereh osi skozi enotska vektorja $\vec{v}$ in $\vec{w}$, ki sta pravokotna). Tako smo pokazali, da je preslikava $\mathfrak{R}\left(\vec{x}\right) = q\vec{x}q^*$ rotacija prostora $\mathbb{R}^3$.

Zapisani izrek bomo uporabili v naslednjem zgledu.

Zgled 7. Naj bo $\mathfrak{R}$ rotacija prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi x za kot $\frac{2\pi}{3}$. Ugotóvimo, kam ta rotacija preslika vektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

V našem primeru je čisti enotski kvaternion $\vec{e}$ kar vektor $\vec{i} = (1, 0, 0)$, ki leži na osi x, polovični kot rotacije φ pa je enak $\frac{\pi}{3}$. Enotski kvaternion q zapišemo v obliki

- $q = \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \vec{i} = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \vec{i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}.$

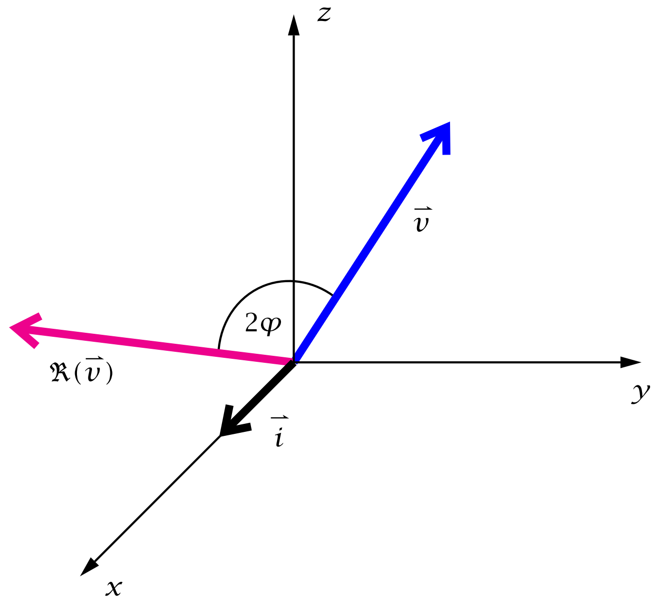
Rotacija $\mathfrak{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom

- $\mathfrak{R}\left(\vec{x}\right) = q\vec{x}q^*.$

V ta predpis namesto $\vec{x}$ vstavimo vektor $\vec{v}$ in dobimo

- $$\begin{aligned}\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) &= q\vec{v}q^* = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}\right)\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}\right) \\ &= \vec{i} - \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{j} + \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\vec{k}.\end{aligned}$$

Ugotovimo, da se pri rotaciji prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi x za kot $\frac{2\pi}{3}$ vektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ preslika v vektor $\mathfrak{R}\left(\vec{v}\right) = \vec{i} - \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{j} + \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\vec{k}$ (slika 2).



SLIKA 2.
Prikaz prostorske rotacije $\mathfrak{R}$ vektorja $\vec{v}$ okoli osi x za kot 2φ

Literatura

[1] A. J. Hanson, *Visualizing Quaternions (The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology)*, Morgan-Kaufmann/Elsevier, 2006.

[2] Y.-B. Jia, *Quaternions and Rotations*, Com S 477/577 Notes, 2013.

[3] J. B. Kuipers, *Quaternions and rotation Sequences: a Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*, Princeton University Press, 1999.

[4] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, DMFA SR Slovenije, Ljubljana, 1986.

[5] I. Vidav, *Algebra*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1987.

[6] J. L. Weiner, G. R. Wilkens, *Quaternions and Rotations in* $\mathbb{R}^4$, The American Mathematical Monthly, Vol. 112, No. 1 (2005), 69–76.

× × ×

50. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

Klavdija Cof Mlinšek

→ Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 12. aprila 2014, pomerili v sedmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1 % vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija. Ob okrogli obletnici so na šolah, kjer je bilo državno tekmovanje organizirano, pripravili svečano prireditev.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 63, v osmem 65 in v devetem 62 zlatih Vegovih priznanj. Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh in hkrati dosežejo vsaj polovico točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. V tem šolskem letu smo za najboljše učence zadnjih treh razredov osnovne šole organizirali nagradni izlet na Dunaj. Povabili smo 113 najboljših učencev.

Na Dunaju smo obiskali znani dvorec Schönbrunn, kjer je bivala Marija Terezija, in občudovali notranjost dvotca, vrtove in labirint. Preko Hofburga smo se odpravili proti Štefanovi katedrali in spoznali mestni utrip Dunaja. Obiskali smo tudi Kunst Haus, delo svetovno znanega arhitekta, umetnika in slikarja Hundertwasserja. Izlet je bil za učence nepozaben.

Nagrade, ki so bile podeljene v Cankarjevem domu, so prejeli najbolje uvrščeni tekmovalci, in sicer:

7. razred

I. nagrada

- Marija Klemenčič, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka

II. nagrada

- Ana Opalič, OŠ Šmarje pri Jelšah

III. nagrada

- Gašper Struna, OŠ Stična
- Brina Avsec, OŠ Predoslje Kranj

8. razred

I. nagrada

- Petra Ana Jakin, OŠ Trnovo, Ljubljana

II. nagrada

- Ana Meta Dolinar, OŠ Danile Kumar, Ljubljana
- Andraž Jelinčič, OŠ Danile Kumar, Ljubljana
- Julij Mlinšek, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka

III. nagrada

- Ema Mlinar, OŠ Horjul
- Tina Mozetič, OŠ Miren

9. razred

I. nagrada

- Andraž Pustoslemšek, OŠ Koroški jeklarji, Ravne

II. nagrada

- Luka Govedič, OŠ Pohorskega odreda Slovenska Bistrica
- Marjeta Radeščeк, OŠ Šentjernej
- Anja Zdovc, OŠ Jožeta Krajca, Rakek

III. nagrada

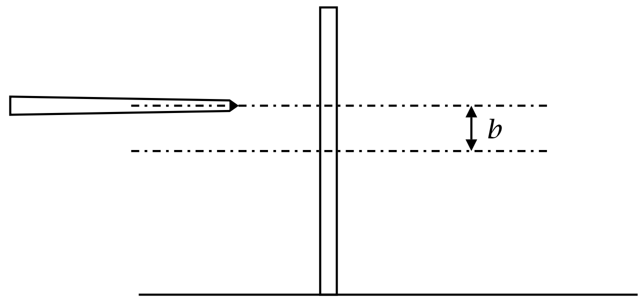
- Matej Škarabot, OŠ Log – Dragomer

× × ×

Od kladiva do kija

Tine Golež

Včasih nam manjka kakšno orodje. Če, denimo, nimamo kladiva, žebelj lahko dokaj uspešno zabijemo kar z nedrobljivim kamnom. A če nimamo niti kamna, imamo pa debelejši oglat drog, upanje ostaja. Toda, s katerim delom droga udarjati po žeblju, da roka ne bo občutila neprijetnega sunka v prečni smeri? Naj bo to ravno polovica, kjer je težišče droga?



SLIKA 1.
Drog, ki stoji na tleh, bomo sunili v vodoravni smeri.

Po drugi poti

Nalogo lahko zastavimo tudi drugače. Vprašamo se, kje moramo vodoravno udariti drog, ki stoji pokončno, da se bo krajišče droga, ki je na podlagi, začelo dvigovati navpično navzgor. Če ga bomo zadeli v težišču, bo ob sicer majhnem trenju prišlo do translacije. Če ga bomo zadeli tik pod vrhom, se bo spodnji del zasukal nazaj. Iskana točka bo torej nekje vmes; nekje na zgornji polovici droga. Trk mora biti tak, da bo začetna hitrost spodnjega dela palice obrnjena navpično navzgor.

Da translacija droga ne bo prava rešitev, smo že ugotovili. Zato bomo upoštevali tako izrek o gibalni količini kot tudi izrek o vrtilni količini. Privzamemo še, da je v igri kratkotrajna sila, ki je bistveno večja od sile teže. Drog bomo zadeli ali udarili za b nad težiščem (slika 1).

Zapišemo oba izreka:

$$F\Delta t = mv$$

in

$$bF\Delta t = J\omega.$$

In kakšna je zveza med v in ω? Pomislimo na kotaljenje koles. Nalepimo ali narišimo navpično črto (slika 2). Ko se kolo giblje, bo gibanje spodnjega krajišča črte, ki ustreza premeru oziroma našemu drogu, natančno tâko, kot želimo, da je gibanje droga. V začetnem trenutku se spodnje krajišče giblje navpično navzgor, seveda pa že po neskončno majhnem premiku spremeni smer potovanja in potuje po cikloidi. Gre za krivuljo, ki jo dobimo, ko sledimo točki na krožnici, ko se ta kotali po premici. Lepa animacija je na voljo na spletu [1].

Gre seveda za kotaljenje (brez spodrsavanja), za katerega velja zveza med hitrostjo gibanja težišča in kotno hitrostjo:

$$v = \omega r.$$

SLIKA 2.
Na gumo smo nalepili ozek pokončni pravokotnik (ki nas pravzaprav spominja na naš drog). Avtomobilček potisnemo naprej in naredimo več slik. Zaporedne slike kažejo, da se spodnji del »droga« giblje po cikloidi. Tako je izpolnjen pogoj, da je v začetnem trenutku smer hitrosti spodnjega krajišča obrnjena navpično navzgor.

Ker dolžina palice ustreza premeru, bo za naš primer veljala enačba

$$v = \omega \frac{l}{2},$$

pri tem je l dolžina droga. Vztrajnostni moment (tankega) droga okoli težišča je

$$J = \frac{1}{12} m l^2.$$

Iz zapisanih enačb dobimo

$$b = \frac{1}{6} l$$

in od tod

$$h = \frac{2}{3} l.$$

To je hkrati tudi odgovor na zastavljeno vprašanje. Drog moramo torej udariti ali zadeti eno tretjino dolžine pod vrhom, pa bosta obe krajišči opisovali ciklo-ido. Seveda bomo zapisano preverili s poskusom. Še prej pa nazaj k prvemu vprašanju.

Če bomo drog uporabili kot kladivo, je smiselno, da udarjamo po žeblju tako, da ga zadevamo s točko, ki je dve tretjini dolžine droga oddaljena od krajišča, kjer ga držimo. V tem primeru ne bomo občutili sunka na roko (kot ni imel udarjeni drog v začetnem trenutku vodoravne komponete hitrosti spodnjega krajišča). Hkrati pa to pomeni, da bo kar največji delež kinetične energije porabljen za delo, za zabijanje žeblja. Pri tem pa naj se dlan, ki drži in suka drog, giblje po cikloidi. Tako bomo preprečili, da bi nas neprijetno presenetila prečna sila, zaradi katere bi morda roka celo spustila drog.

Meritev

Najprej se lotimo udarca po drogu. Palica, s katero bomo udarili drog, bo drsela po vodoravni ustrezno visoki podlagi. Zelo uporabna je trdna železna ograja. Za kratek trk pa poskrbimo tako, da lahko palica deluje na drog le na kratki razdalji, saj jo kmalu zaustavi navpična – v našem primeru je to hkrati končna – prečka ograje (slika 3). Naš drog je kar votla železna cev.

Dogajanje posnamemo s hitroslikovno kamero, lahko tudi z navadno. Potem v programu LoggerPro odpremo posnetek in označujemo lego spodnjega dela droga. Po vsaki označitvi lege program sam zamenja sličico z naslednjo sličico. Seveda hkrati še zapiše koordinati točke, ki smo jo označili. Pri tej analizi je bilo v igri kar 96 slik.

Iz znane dolžine droga določimo pretvornik med koordinatami in dejansko lego spodnjega dela droga. Lahko tudi v samem programu določimo koordinatno izhodišče. Oboje (pretvornik in izhodišče) smo preračunali kar v Excelu. Prav tam smo tudi »popravili« koordinato y. V navpični smeri deluje namreč sila teže in zato smo vsako koordinato y povečali za $1/2gt^2$. Časovni interval je naraščal po korakih $\Delta t = 1/300$ s. Petdeseta pikica je imela tako npr. popravek $1/2 \cdot 9{,}81 \cdot (50 \cdot 1/300)^2$, kar je 0,136 oziroma 13,6 cm.

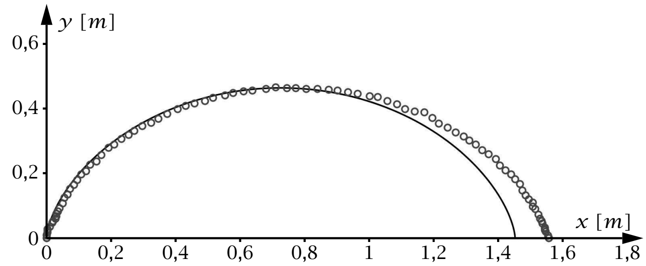
Popravljene koordinate smo vnesli v program GeoGebra. Poleg izmerkov smo dodali še teoretično

SLIKA 3.
Palica najprej drsi po vodoravni podlagi. To nam omogoča, da drog zadenemo precej točno na izbrani višini. Kratkotrajnost trka dosežemo tako, da se palica »zatakne« v zadnjo navpično prečko ograje. Tako skupaj z drogom lahko potuje le kak centimeter. Palico seveda držimo drugače, kot na tej fotografiji, in sicer z obema rokama, da je trk z drogom res silovit, kar kaže naslednja slika.

SLIKA 4.
Ker gledamo le zadnjo sličico, je drog en sam in bele barve. Potovanje spodnjega krajišča je označeno z modrimi krožci. Da bi si lažje predstavljali, kako je drog po udarcu odfrčal, smo ga na podlagi petih prejšnjih (ne zaporednih!) slik narisali z rdečo. Tako sedaj vidimo, kje je bil v začetnem trenutku in še v štirih vmesnih trenutkih. Palica, s katero smo ga udarili, se je do zadnje sličice že odbila malo nazaj, zato ni poleg rdečega droga. Ločljivost je sicer slaba (hitroslikovna kamera), a povsem zadošča za to meritev.

predvideno cikloido, ki bi jo moralo izrisati krajišče droga. Ker je dolžina droga 0,462 m, je parametrična oblika cikloide $x = (0{,}462/2) \cdot (t - \sin(t))$ in $y = (0{,}462/2) \cdot (1 - \cos(t))$. Pri tem gre parameter t od 0 do 2π. Izmerjena cikloida je dokaj blizu teoretični. Vsekakor poskus ni izveden v idealnih okoliščinah. Ko udarimo po drogu, bi morali hkrati odmakniti podlago, na kateri drog stoji, navzdol. Ob udarcu se namreč drog nekoliko nagne že tedaj, ko se dotika podlage. V tistih trenutkih drog deluje na podlago z večjo silo, kot je sila teže, hkrati pa tudi podlaga na drog (3. Newtonov zakon), tako da (žal) ni v igri le sila, s katero palica deluje na drog (in teža, katere vpliv poznamo in smo ga lahko računsko odpravili).

Sedaj je čas, da zabijemo žebelj. Več posnetih poskusov kaže, da tudi tokrat (vsaj približno) krajišče, ki ga držimo, potuje po cikloidi. Seveda je drog, ki ga drži roka, nekaj drugega kot samostojen drog in zato ne bo v igri popolna cikloida. Nekaj podobnega sem pred več leti opazil tudi pri cepljenju drv s sekiro. Najmanj neprijetni udarci so bili tedaj, ko sem sekiro



SLIKA 5.
Krožci označujejo, kako se je gibalo (sprva) spodnje krajišče droga, tako da izhodišče sistema sovpada s točko, na kateri je pred udarcem stal drog. Koordinate so popravljene za izničenje vpliva gravitacije. Posamezna odstopanja nekaterih točk so napake, ki so nastale zaradi netočnega pritiskanja s kazalcem (miške) po posamezni sliki. S polno črto je narisana teoretično predvidena cikloida, ki jo dobimo, ko (idealni) drog enakih dimenzij (idealno) sunemo v vodoravni smeri na dveh tretjinah višine.

med letôm proti polenu povlekel še nekoliko proti sebi. Najbrž je tudi v tem primeru točka, kjer roka drži sekiro, približno potovala po cikloidi. Morda pa še kdo izmed bralcev preveri, kako je s tem.

SLIKA 6.
Zaporedne slike zabijanja žeblja z drogom kažejo, kako se giblje izbrana točka na drogu. Na tej sliki je označena z rumeno, na ostalih slikah je bila ta točka tam, kjer so rdeči krožci. Vsekakor prijemališče droga ni (le) osišče vrtenja, pač pa tudi potuje nekoliko nazaj, kar nakazuje cikloido. Ker je žebelj bolj slabo viden, nanj kaže rdeča puščica.

COM, COP in SZ

V tem podnaslovu zapisane kratice so okrajšave (v anglešini) za masno središče (COM – center of mass), točko udarca (COP – center of percussion) in mehko območje (SZ – sweet zone). Prvo dobro poznamo iz gimnazijske fizike, pri drugi pa gre točno za točko, s katero se ukvarjamo v tem članku. V praksi so se te točke zavedali že stoletja. Le pomislimo na vse vrste sabelj in mečev; tudi pri njihovi uporabi niso želeli ob udarcu občutiti prečne sile na roko, ki je zamahnila z orožjem. Tak prečni sunek je marsikoga razorožil, saj mu je tresljaj izbil orožje iz roke in prepuščen je bil na milost in nemilost tistemu, ki mu je meč uspelo obdržati v rokah. Zadetek z ustrezno točko pa je pomenil tudi največji učinek reza ob zadetku. Če me spomin ne vara, nekaj takega opazimo na ilustracijah boja Martina Krpana z Brdavsom. Na srečo cesarskega Dunaja in njemu podložnih dežel je kij navkljub COP udarcu, ki ga je zadal Brdavs, dobro opravil svojo nalogo. Očitno je Martin Turkovo orožje pričakal s COP blokado!

Toda kako ugotoviti, kje je COP pri malce manj preprostih telesih? Kje je COP pri bejzbolskem kiju? Tokrat do rezultata ne bomo prišli teoretično, pač pa z meritvijo.

A najprej se vprašajmo, katera meritev bi pri drogu izdala, kje se nahaja COP. Odgovor je preprost – to bo nihanje. Če drog obesimo na enem krajišču, bo nihal z nihajnim časom t_0. Točka COP je natančno toliko oddaljena od osišča, kot je dolžina nitnega nihala, ki bi imel enak nihajni čas t_0. Pri drogu bomo to trditev preverili z računom in poskusom, pri bolj zapleteneih telesih pa se do rezultata odpravimo le s poskusom.

Nihajni čas fizičnega nihala je

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr^*}},$$

kjer je r^* razdalja od osi do težišča, J pa vztrajnostni moment okoli osi nihanja. Pri drogu, ki je pritrjen v zgornjem krajišču, tako da lahko niha, je

$$r^* = 1/2l$$

in

$$J = 1/3ml^2.$$

Od tod dobimo, da je dolžina nitnega nihala, ki bi imel enak nihajni čas kot drog, enaka 2/3 dolžine droga:

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{1}{2}l}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}l}{g}}.$$

Izračunani COP se nahaja tam, kjer smo predvideli že s prejšnjim računom in potrdili s poskusom, z udarcem palice. Ker ima vsak bralec doma kak drog, lahko hitro to potrdi še s poskusom, saj je merjenje nihajnega časa droga res enostavno.

Pravzaprav je premislek logičen. Za COM ali težišče telesa smo dejali, da je to točka, v kateri je navidez zbrana vsa masa telesa. (COM in težišče sovpadata, kadar se nahajamo v homogenem gravitacijskem polju. Če pa bi bil v glavni vlogi nekaj tisoč kilometrov dolg drog, ki bi bil v poševni ali navpični legi glede na površje Zemlje, pa COM in težišče ne bi sovpadala.) Težišče palice je točno na sredini, medtem ko je COP tam, kjer je »navidez zbrana vsa masa palice pri nihanju«, kot je vsa masa nitnega nihala v obešenem majhnem telesu, saj je masa vrvice zanemarljiva.

Pri zahtevnejšem telesu pa se lotimo le poskusa. Vzamemo torej poljubno fizično nihalo (teniški lopar, bejzbolski kij, badmintonski lopar) in z enakim poskusom – merjenjem nihajnega časa – ugotovimo, kje je COP. Izmerjeni nihajni čas namreč vstavimo v enačbo za nihajni čas nitnega nihala in izračunana dolžina je lega COP tega telesa (merjeno od osišča).

Ugotovili smo, da se po udarcu droga na dveh tretjinah višine krajišči droga gibljeta po cikloidah. Pri bejzbolu to poteka v obratni smeri: giblje se drog, ki zadene tudi gibajočo se žogico. Tudi tu se osišče sukanja kija stalno spreminja. Tik pred udarcem žogice je najbolj blizu sredine kija. Morda kdo izmed bralcev pozna koga, ki ta šport dobro obvlada. S pravilno postavitvijo kamere bi lahko pokazali, če se prijemališče droga giblje po cikloidi. A celotna zgodba je tu bolj zapletena, saj se vmeša še pojav, ki ga opiše oznaka SZ.

Gre za »mehko območje«, ki se nanaša na tisti del bejzbolskega kija, ki da najboljši odboj žogice. Ne smemo namreč pozabiti, da vsak udarec po kiju – torej tudi trk z žogico – povzroči lastna nihanja kija. Če nočemo, da bo krajišče, ki ga držimo, neprijetno zavibriralo, moramo žogico zadeti s tisto točko kija, kjer je vozel lastnega nihanja. Ena izmed meritev [2] je pokazala, da je prva lastna frekvenca kija 170 Hz. Vozel pri debelejšem krajišču droga je bil okoli 15 centimetrov od krajišča. Če torej zadenemo žogico s to točko kija, bo vibracij droga kar najmanj, to pa pomeni, da bomo dosegli dvoje. Znaten delež energije bo po odboju spet prevzela žogica, saj ne bomo »spravili kija v vzbujeno stanje«. Po drugi strani pa ne bo neprijetnega občutka pri držanju kija, saj ne bo nihanja krajišča, ki ga igralec drži.

Pri istem kiju so izmerili frekvenco drugega lastnega nihanja. Ta je bila okoli 600 Hz, medtem ko je bil vozel le kakšnih 7 cm od krajišča kija. »Mehko območje« je torej predel kija med tema dvema vozloma. Udarec žogice s tem območjem ne bo povzročil neprijetnega nihanja kija v rokah igralca.

Zaključek

Vsi, ki smo že držali v rokah teniški lopar, smo se gotovo srečali z naštetimi pojavi. Včasih nam je ne ravno posrečen odboj žogice močno zavibriral lopar, spet drugič smo občutili prečno silo. Seveda smo se učili s poskusi in napakami, da so postali naši odboji lažji in učinkoviti. Vsekakor pa so bile naše napake manj usodne od napak naših prednikov, ki so podobne pojave ustvarjali z mečevanjem.

Tudi na tem področju fizika ugotavlja in razlaga tisto, kar so ljudje sami spoznali že s prakso. Ko pa se je fizika poglobila v ta spoznanja, pa je lahko dala še dodatne namige, kako bi z različnimi razporeditvami mase pri orodjih za odbijanje (kij, lopar, palica za golf) dosegli boljši učinek. In prav zato imajo igralci golfa kar polno torbo različnih palic, saj so ene primerne za dolge odboje, druge za precizne, tretje za ...

Literatura

[1] `http://sl.wikipedia.org/wiki/Cikloida`, dostopano: 12. 9. 2014.

[2] `http://www.kettering.edu/physics/drussell/bats-new/batvibes.html`, dostopano: 12. 9. 2014.

www.presek.si

Barvni sudoku

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

		3			1		7
6				4			
1			5			6	
						4	3
			7	3	8		
	5						
		7			4		
	6		8				

→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

5	8	3	4	6	1	2	7
6	7	2	1	4	3	5	8
1	3	4	5	8	7	6	2
7	2	8	6	1	5	4	3
2	4	6	7	3	8	1	5
8	5	1	3	2	6	7	4
3	1	7	2	5	4	8	6
4	6	5	8	7	2	3	1

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ
VELIKA PLAKATNA FOTOGRAFIJA
GLAVNO MESTO KANADE
ENERGIJA DELCA
RSKO MESTO OB DONU
NOSILNA RAKETA EVROPSKE VESOLJSKE AGENCIJE
JURE IVANUŠIČ
NEKDANJI JAPONSKI DRŽAVNIK (HIROBUMI)
UMAZANIJA, NEČISTOČA
CESTNO VOZILO
OZEMLJE GLEDE NA OBLIKOVANOST ALI UREJENOST
UVODNI DEL ŠAHOVSKE IGRE
1
VARNOSTNA SLUŽBA V NEKD. VZHODNI NEMČIJI
KONICA
IT. FILM. DIVA (SOPHIA)
REDKA TRDA KOVINA
NOBELIJ
REZILNI PRIBOR
ESTONSKI PISATELJ (EDUARD)
KOLONIALNI VOJAK IZ VRST DOMAČINOV
NAŠ LITERARNI TEORETIK IN ZGODOVINAR (ANTON)
AKORD
LEŠNIKOV NADEV ZA SLADICE
STAR IZRAZ ZA ILOVICO
KARTAŠKA NAPOVED, DA BO NASPROTNIK IZGUBIL
ČAS OB VZHODU SONCA
RUDOLF MAISTER
SKLENJENA PRIPRAVA ZA PRENOS VRTENJA
REDEK IZRAZ ZA KOORDINATNI SISTEM
OKVARA NA FOTOGRAFSKI EMULZIJI
STARA SORTA PŠENICE
ERAZEM LORBEK
ZADETJE TELES S POPOLNIM ODBOJEM
AKACIJA
FR.-ŠVIC. PISATELJ (CLAUDE)
FR. FIZIK, KI JE OPISAL SILO MED NABOJEMA
8
NA NJEM SE VRŠI OPERACIJA
UDAREC Z DLANMI
BEDARIJA, OSLARIJA
ŠPELA KOŽAR
SILA NA TELESA V TEKOČINI
GR. ČRKA
PLEZALNI KRAJ POD ČRNIM KALOM
ČASTNIŠKI PAS
PREBIVALEC AJDOVŠČINE
7
VRSTA VRBE
NEMŠKI PISATELJ (ERNST)
OLIVER TWIST
ŠVICARSKI JEZUIT (AUGUSTIN)
KOPIČENJE VODE V TEL.
4
ČLAN NA KRILU FORMACIJE
EVA IRGL
SKUPEK NAVITIH VODNIKOV V ROTORJU
BOJNA VRSTA PEŠČEV PRI STARIH GRKIH
NIKALNICA
BODIČAST RASTLIN. IZRASTEK
KOŠARKARSKI KLUB
ŠPANSKA JED ZA PRIGRIZEK OB PIJAČI
TEORIJA O SKLEPANJU
JAZ, TI, ?
VOLKSWAGNOV POLTOVORNI AVTO
DVOGLASNIK
VIKTOR ERŽEN
100 m²
ZBIRKA STARIH LISTIN
NAPRAVA, KI OMEJUJE HITROST
DRŽAVA V ZAHODNI AFRIKI
DOBA, EPOHA
VOŠČENA ČEBELJA TVORBA
VELIKI FR. MATEMATIK
VEČNOST (PESNIŠKO)
REKA NA PELOPONEZU, EVROTAS
9
IGRALKA AVS. RODU (ROMY)
KILONEWTON
5
PRAVILNO GEOMETRIJSKO TELO
SORTA BELEGA KROMPIRJA (MOŠ. IME)
OKRASNA SREDOZEMSKA RASTLINA
GERMAN. BOGOVI, KI SE BOJUJEJO Z AZI

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | STARKA | NEPOUČEN UPORABNIK | STARORUSKA ZADRUŽNA ORGANIZACIJA | VINKO MÖDERNDORFER | STRANSKI DEL TELESA | OTOK V ŠPANSKIH IMENIH | ZAČETEK HITROST. TEKMOVANJA | DNEVNI TISK | NASIČEN OGLJIKOVODIK

PARCELA ZA GRADNJO

REGULATOR TEMPERATURE

2

NIZEK ŽENSKI PEVSKI GLAS

KAKOVOST. RAZRED / DELAVKA V MEDNAR. ODNOSIH

ANGLEŠKI REŽISER (CAROL) / PRITRDILNICA

MOJZESOV BRAT / TANTALOVA HČI

TOPLOTNA ČRPALKA / TELESNI POLOŽAJ PRI JOGI

IRANSKA VALUTA

ČETRTO NAJVEČJE MESTO V ITALIJI | IZKORISTEK | PRIPADNIK ORGANIZACIJE | NATRIJ | EVROPSKA OTOŠKA DRŽAVA | RIMSKI CESAR | RDEČERJAVA OKSIDNA PLAST NA ŽELEZU | NORV. POP SKUPINA / SPOD. DEL OKROVA MOTORJA

IGRALKA ZEMLJIČ / AMERIŠKI GLASBENIK MILLER

IRIDIJ / ZADNJIK

GERMAN. PLEMENA, KI SO ZASEDLA BRITANIJO

GOZDNATO HRIBOVJE NAD BIZELJSKIM

PLESNI GLASBENI SLOG 70. LET

OKOSTJE GLAVE

10

MEJNI PREHOD PRI ILIR. BISTRICI / IRAN

6

ŠAHIST LASKER / ČAS ALI RAZDALJA ZA PRVIM

POGREBNA SVEČANOST PRI STARIH SLOVANIH

NAŠA IGRALKA (LENČA)

TRAGIČNA ANTIČNA JUNAKINJA

3

ZNIŽANI TON A / AZIJSKI VELETOK

KNJIŽNI IZRAZ ZA JAREM

NIHAJOČA IZBOČINA

IT. RENESANČNI SLIKAR / GLASBENA ŠOLA

NJO

RIMSKA 4 / IGOR SAMOBOR

FR. FIZIK, NOBELOVEC LETA 1926 (JEAN BAPTISTE)

IT. FIZIK FERMI / ŽENA, PARTNERICA

VEZANO TISK. DELO / MASA, IZRAŽENA V TONAH

ANTIČNO LJUDSTVO NA ZAH. BALKANU

TELESNA DEJAVNOST / VELIKA ODPRTA POSODA

PORTUG. OBALA ZAH. OD LIZBONE / SESTAVNI ELEMENT

VERGILOV EP / DRAGULJ Z VREZANO PODOBO

TOLE / NEKDANJA HOKEJISTA (GORAZD IN RUDI)

ORIENTAL. GOSTIŠČE / PLATONOV MIUSLEČI DUH

11

IZPOSOJEVALNINA ZA ČOLN / LAVO ČERMELJ

FIZIK OSREDKAR

FAKTOR RELATIVNE POMEMBNOSTI

FINŽGARJEVA DEKLA

MAJHEN, PEGAST AZIJSKI JELEN

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **1. decembra 2014**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Polarizatorji

Mojca Čepič

Nekateri med vami imate morda polarizatorje doma. Najdete jih lahko v posebnih (dražjih) sončnih očalih, pa tudi v zaslonu starega telefona ali računalnika. Če nič od tega ni na voljo, pojdite v trgovino s televizijskimi aparati, dokler še prodajajo 3D televizije. Menda nameravajo prodajo ukiniti. Ali pa izvedite poskuse v 3D kinu, preden se film začne. Kakšno besedico bomo rekli tudi o tem, kako vidimo globinsko. A o tem kasneje.

Kaj potrebujemo?

- dva polarizatorja ali polarizacijski stekli iz starih sončnih očal ali
- dvoje očal za gledanje 3D projekcije ali
- dvoje očal s polarizacijskimi stekli.

Kaj bomo naredili? Najprej si oglejte svet skozi en polarizator ali eno polarizacijsko steklo očal. Kako je videti svet skozi polarizacijsko steklo? Imenujmo eno steklo polarizacijskih očal ali eno plastiko 3D očal polarizator. Potem si oglejte svet skozi dvoje polarizatorjev, postavljenih enega za drugim. Zato potrebujete dvoje očal, če nimate polarizatorjev. Enega od polarizatorjev sučite okoli skupne osi, pravokotne na oba polarizatorja, in opazujte svet okoli sebe. Kako se spreminja prepuščena svetloba med vrtenjem enega polarizatorja?

Ponovno vzemite en sam polarizator. Skozenj opazujte zaslon računalnika ali tablice. Sučite ga. Kako je videti zaslon pri različnih orientacijah polarizatorja?

Opazujte odbito svetlobo na gladkih plastičnih površinah ali na površini vode. Sučite polarizator. Ali na svetlost odboja vpliva orientacija polarizatorja?

Ob lepem jasnem dnevu na enak način opazujte različne dele neba, če imate srečo, tudi mavrico. Ali se na nekaterih delih neba spreminja svetlost neba, če vrtimo polarizator?

Skozi polarizator si oglejte človeka, ki nosi 3D očala. Če ste si nataknili očala, potem zaprite najprej eno oko, potem pa zamižite na drugo oko. Kako vidite človeka s 3D očali v oči? Nagnite še glavo sem in tja.

SLIKA 1.
Zgoraj: Polarizator prepušča svetlobo le z eno polarizacijo. Če je polarizator (temnejša folija na šipi) s prepustno smerjo orientiran enako kot polarizatorji v stekelcih sončnih očal, očala svetlobo prepuščajo. Spodaj: Če je prepustna smer polarizatorja v očalih pravokotna na prepustno smer polarizatorja na šipi, stekelca svetlobo absorbirajo. Za primerjavo je na vsaki sliki še del očal, na katera vpada svetloba mimo folije na šipi in zato ni polarizirana.

45. mednarodna fizikalna olimpijada

Astana, Kazahstan

Jurij Bajc

→ **Po regijskem in državnem tekmovanju srednješolcev iz fizike ter izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na olimpijado uvrstili: Aljaž Draškovič-Bračun z Dvojezične srednje šole Lendava, Jakob Jazbec s Šolskega centra Srečka Kosovela Sežana, Gimnazija in ekonomska šola, Blaž Karner z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Žiga Krajnik z Gimnazije Škofja Loka in Žiga Nosan z Gimnazije Ledina, Ljubljana. Tako kot v prejšnjih letih je vse stopnje tekmovanja tudi v šolskem letu 2013/14 organiziralo in izvedlo *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA Slovenije).***

Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sta bila dr. Barbara Rovšek in dr. Jurij Bajc s *Pedagoške fakultete v Ljubljani*. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *DMFA Slovenije* ter *Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport*.

Olimpijada je potekala med 13. in 21. julijem 2014 v Astani v Kazahstanu. Sodelovalo je 374 tekmovalcev iz 86-ih držav. Naši tekmovalci so osvojili **dve bronasti medalji** in **eno pohvalo.** Bronasti medalji sta osvojila **Žiga Krajnik** in **Žiga Nosan**, pohvalo pa **Blaž Karner.**

Naslednja, 46. mednarodna fizikalna olimpijada, bo od 4. do 13. julija 2015 v Mumbaju v Indiji.

SLIKA 1. Slovenska olimpijska ekipa po zaključni slovesnosti. Z leve proti desni: Jurij Bajc (vodja), Aljaž Draškovič-Bračun, Blaž Karner (pohvala), Žiga Krajnik (bronasta medalja), Žiga Nosan (bronasta medalja), Jakob Jazbec in Barbara Rovšek (vodja).

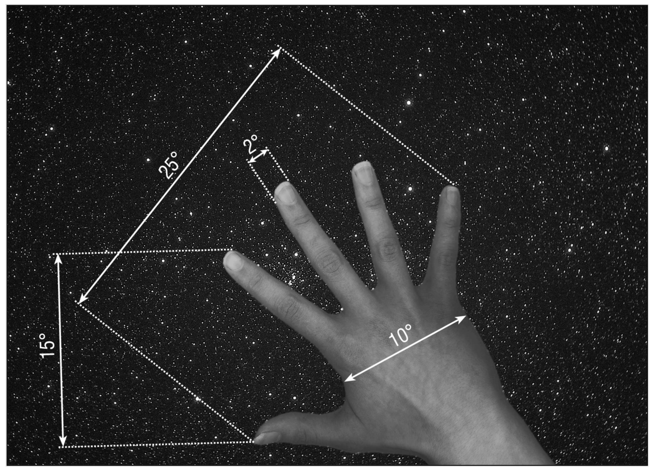
Tekmujmo iz znanja astronomije

Potreba po orientaciji

Andrej Guštin in Bojan Kambič

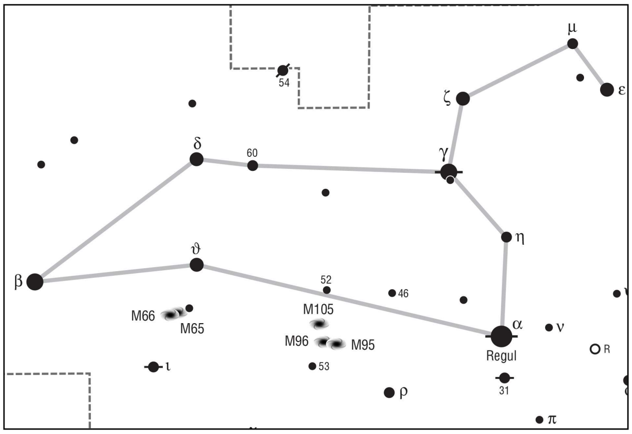
Najbolj mučno delo za večino naravoslovcev je verjetno učenje podatkov na pamet. Zakaj le bi morali poznati vrednost kake konstante do ne vem katere decimalke, gostoto železa, težni pospešek na Marsu? Vse to je mogoče enostavno najti v knjigah, danes tudi na spletu. Predvsem v astronomiji je tako, saj se že začetnik pri spoznavanju osnov sreča z veliko podatki in imeni, npr. imeni ozvezdij in zvezd, Messierjevimi objekti in drugimi kataloškimi oznakami meglic in galaksij.

Na javnem opazovanju ali srečanju astronomov ponavadi lahko slišite: »Si našel M 57? Med Beto in Gamo Lire je!« Vprašamo se lahko, ali je za mladega astronoma oz. za znanje astronomije nasploh potrebno vedeti, da je M 57 oznaka v Messierjevem katalogu za določeno planetarno meglico, da sta Beta in Gama Bayerjevi oznaki za zvezde v ozvezdju in da z Liro ni mišljen antični inštrument, temveč eno od ozvezdij severnega neba. Morda za nekoga, ki se zanima le za teoretično astrofiziko, to znanje ni nujno za preživetje, čeprav mu ne bo škodilo. Upamo pa si trditi, da je orientacija po nebu, poznavanje ozvezdij, svetlejših zvezd in megličastih nebesnih objektov pomembno za vsakogar, ki se na tak ali drugačen način želi ukvarjati z astronomijo. To potrjujejo tudi izkušnje z mednarodnih olimpijad v znanju astronomije in astrofizike, kjer je tako osnovno znanje zahtevano in nekaj samoumevnega, nekaj, kar morajo mladi astronomi vsekakor osvojiti in dobro znati. Te osnove so nekaj, kar bo prišlo vedno prav, pa če se bodo mladi astronomi razvili v izjemne raziskovalce na področju kozmologije ali pa bodo gojili le ljubiteljsko astronomijo. S tem in podobnimi prispevki želimo spodbuditi mentorje astronomije in mlade astronome, da ugriznejo v kislo jabolko številnih podatkov o nebesnih telesih in se jih naučijo. To znanje bodo potrebovali tudi na šolskih in državnih tekmovanjih v znanju astronomije.

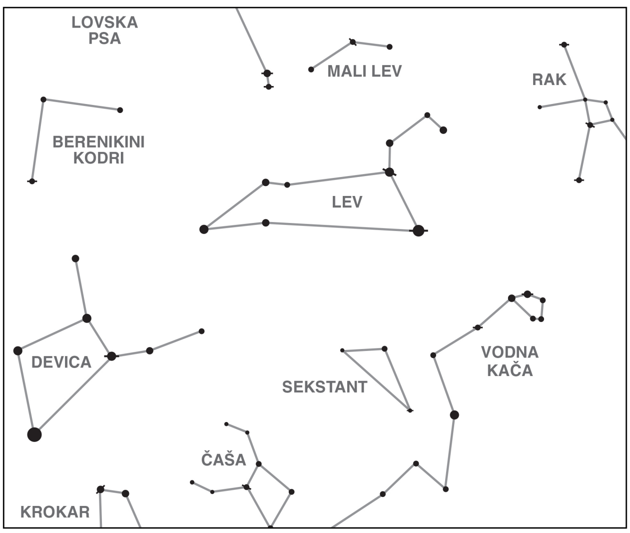


SLIKA 1.
Pri grobi orientaciji, predvsem pa pri prvih korakih po nebu, ko šele spoznavamo obliko in velikost ozvezdij, si lahko pomagamo s priročno napravo za merjenje kotov, ki jo imamo vedno pri sebi – svojo roko. Če jo iztegnemo in razširimo prste, dobimo kotomer, s katerim lahko ocenjujemo kotne razdalje na nebu.

Gotovo ni pričakovati, da bi se imena, kataloške številke nebesnih teles in druge podatke učili tako, da bi se jih poskušali zapomniti s prebiranjem preglednic. Tako zapomnjene informacije so skoraj brez pomena. Ena od mogočih poti je učenje najprej

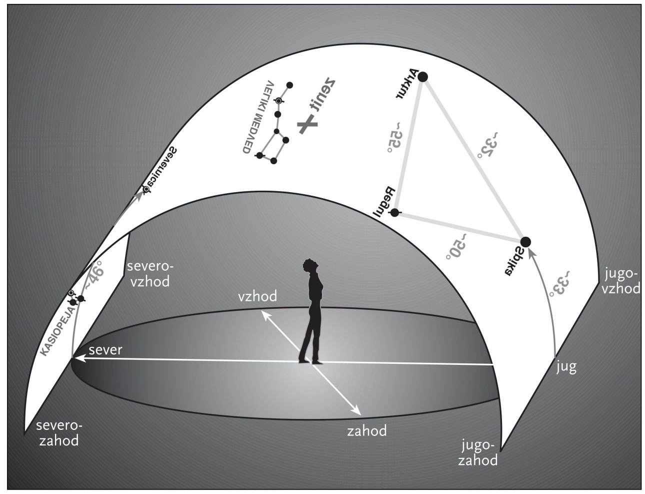


SLIKA 2.
Ozvezdje Lev



SLIKA 3.
Ozvezdja v okolici Leva

s prepoznavanjem najizrazitejših ozvezdij in posameznih svetlejših zvezd, nato z orientacijo po nebu in prepoznavanjem manj izrazitih ozvezdij ter manj svetlih zvezd. Pri prvih korakih vam lahko pomaga nekdo, ki vse to že pozna, toda za pravo »utrjevanje« je potem najbolje, če se v jasnih nočeh sami lotite orientacije po nebu in iskanja ozvezdij. Za to ne potrebujete teleskopa, še bolje je, če ga v prvi fazi uče-



SLIKA 4.
Karte za spoznavanje ozvezdij (od P1 do P4) si moramo takole predstavljati upognjene čez meridian opazovališča od juga prek zenita do severa. Kdor ima pri tem težave, naj si karto fotokopira in jo tudi v resnici upognjeno uporablja pri opazovanjih.

nja sploh ne uporabite, mogoče le dvogled, ampak tudi tega šele potem, ko bo vaša orientacija po nebu zanesljiva. Za začetek potrebujete le sezonske zvezdne karte, vrtljivo zvezdno karto, lahko pa tudi kak dober računalniški planetarij za mobilne naprave. In seveda kar veliko časa. Pravo korist tako pridobljenih izkušenj in znanja boste spoznali kasneje pri resni uporabi teleskopov za astronomska opazovanja, pri fotografiji neba in drugem praktičnem astronomskem delu.

Zakaj je tak način učinkovit za učenje velikega števila podatkov o nebu? Trud in čas, ki ga boste porabili, da boste našli neko zvezdo, npr. Gamo Lire, bo pripomogel k temu, da se boste skoraj nevede naučili še imena drugih zvezd, ozvezdij. To učenje bo toliko bolj uspešno, kolikor bolj vas zvezdnato nebo zanima. To je, denimo, podobno učenju imen nogometnih igralcev kluba, če vas seveda to zanima. Lahko se jih učite s poimenskega seznama ali pa si ogledate tekmo po televiziji in že po nekaj minutah poslušanja komentatorja boste poznali vse igralce na zelenici. Pri prvih korakih ustvarjanja osnov v astronomiji pa si pomagajte z nasveti Bojana Kambiča iz knjige Ozvezdja.

Prvi koraki

Če imamo prijatelja ali znanca, ki že pozna ozvezdja, je najpreprosteje, če nam on pomaga pri prvih korakih po nebu in nam pokaže nekaj najsvetlejših zvezd in pripadajočih ozvezdij. Po tem, ko poznamo že nekaj ozvezdij, pa lahko s pomočjo sezonskih kart, vrtljive zvezdne karte, zvezdnega atlasa ali kakega drugega pripomočka sami razpoznamo vsa druga ozvezdja.

Veliko ljudi pozna asterizem Veliki voz. Če ste med njimi, lahko s pomočjo sezonskih kart poiščete najprej sosednja ozvezdja Velikega medveda, nato njihova sosednja ozvezdja in tako naprej po vsem nebu.

Kdor pa ne pozna nobene zvezde in nobenega ozvezdja in se bo prepoznavanja lotil sam, naj pozorno prebere naslednje vrstice.

Načeloma je spoznavanje neba sila preprosto! Vse, kar moramo vedeti na začetku, je približna smer sever-jug našega opazovališča. To smer lahko določimo s kompasom ali pa tako, da pogledamo, kje je Sonce opoldan – približno na jugu. Ko bomo ob določenem datumu, npr. sredi aprila ob polnoči, stali pod jasnim nočnim nebom in se obrnili proti jugu, se bodo od južnega do severnega obzorja čez zenit bočila pomladna ozvezdja. Na nebu dominirajo tri svetle zvezde (karta P1): Arktur v Volarju, Spika v Devici in Regul v Levu.

Dovolj je, da prepoznamo eno ozvezdje, in sicer tisto z največ svetlimi zvezdami. Od te »štartne točke« bomo potem preprosto poiskali sosednja ozvezdja, nato njihova sosednja ozvezdja in tako naprej po vsej nebesni polkrogli. Toda pozor! Ko se nam zdi, da smo našli npr. Regula in Leva, si oglejmo še karto, na kateri so zvezde do 5. magnitude (slika 3). Poleg najsvetlejših zvezd, ki sestavljajo lik Leva, moramo na nebu prepoznati tudi vse šibkejše zvezde, in to na tistih mestih in takih medsebojnih oddaljenostih, kot so narisane na karti. Šele takrat smo lahko prepričani, da je to, kar gledamo, res Lev. Vse prerado se namreč zgodi, da pri prvih korakih po nebu iščemo premajhne like in se vse prehitro zadovoljimo s prvim podobnim, ki ga zagledamo.

Ko poznamo Leva, pogledamo na sezonski karti (slika 4) ali na kaki drugi zvezdni karti, na kateri je ozvezdje, in vidimo, da so okoli njega razporejena naslednja ozvezdja: zahodno je Rak, severno je Mali lev, severovzhodno so Berenikini kodri, jugovzhodno je Devica, južno Sekstant in jugozahodno glava Vodne kače. Ko s pomočjo kart pri opisih ozvezdij prepoznamo ta ozvezdja, jih poznamo že sedem! In tako potujemo naprej po vsej nebesni krogli!

Da bi vam olajšali delo, smo na štirih kartah P1, P2, P3 in P4 prikazali pomladno, poletno, jesensko in zimsko nebo, kjer smo pustili le najsvetlejša in torej najbolje vidna ozvezdja ali asterizme. Ob kartah so tudi datumi in ure vidnosti. Kdor šele začenja s spoznavanjem neba, naj – odvisno od letnega časa in ure – najprej poišče eno od teh ozvezdij. To naj bo izhodiščna točka za naprej. Za lažjo orientacijo smo vrisali tudi nekaj pomembnejših kotnih razdalj in razprto, iztegnjeno roko, ki predstavlja kot približno 25 stopinj. Dobra oporna točka pri orientaciji je tudi zenit.

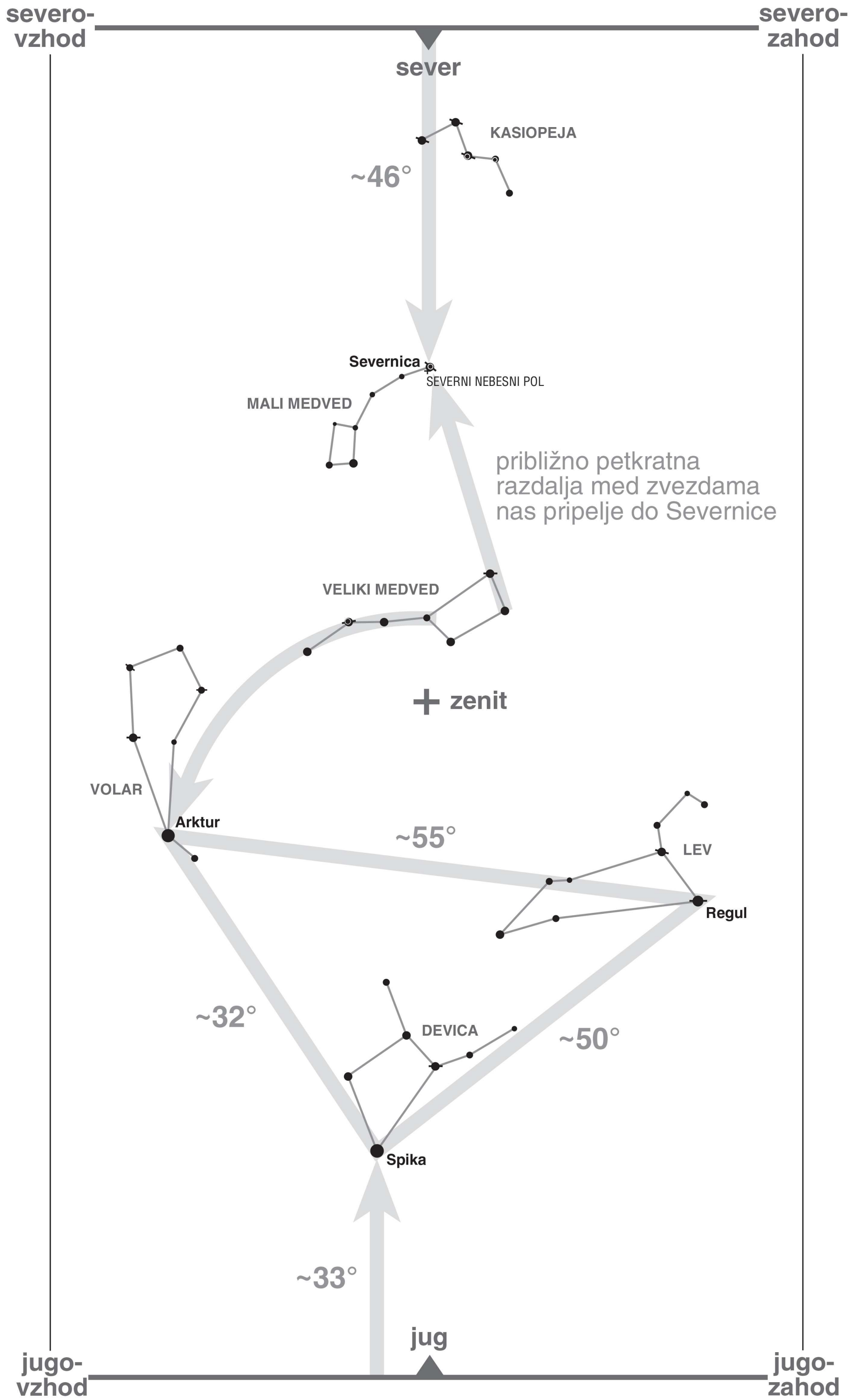
Kraji, kjer še ni svetlobnega onesnaženja ter industrijske megle in je nebo temno, so primerni za opazovanja z daljnogledom. A v jasni noči brez Lune je zvezd na nebu toliko, da včasih zavedejo tudi izkušene opazovalce, kaj šele začetnike. Kdor šele spoznava ozvezdja, naj se ravna po naslednjem receptu. Če imamo to možnost, potem si v osvetljeni sobi dobro poglejmo karto, najsvetlejše zvezde in kotne razdalje med njimi. Nato stopimo pod nočno nebo, se obrnimo proti jugu in prvih nekaj minut, ko se nam oči še prilagajajo na gledanje v temi, bomo videli le najsvetlejše zvezde in jih zagotovo prepoznali.

Lahko si pomagamo tudi tako, da z nezasenčeno baterijo svetimo na karto. Ko baterijo ugasnemo, so naše oči prilagojene na dnevno gledanje in na nebu vidimo le najsvetlejše zvezde.

Lahko pa se spoznavanja ozvezdij lotimo iz svetlobno onesnaženih mest, kjer lahko v najboljših nočeh vidimo zvezde le še do nekako 3. magnitude, kar je za prve korake po nebu skoraj idealno. Vendar pa moramo po tem, ko želimo spoznati celotno ozvezdje, poiskati mesto s temnim in čistim nebom.

Še zadnja možnost pa je, da začnemo s spoznavanjem ozvezdij ob mraku, ko je Sonce že zašlo, noč pa se še ni začela, in so na nebu vidne le najsvetlejše zvezde. Vsak dan imamo tako na voljo približno pol ure časa.

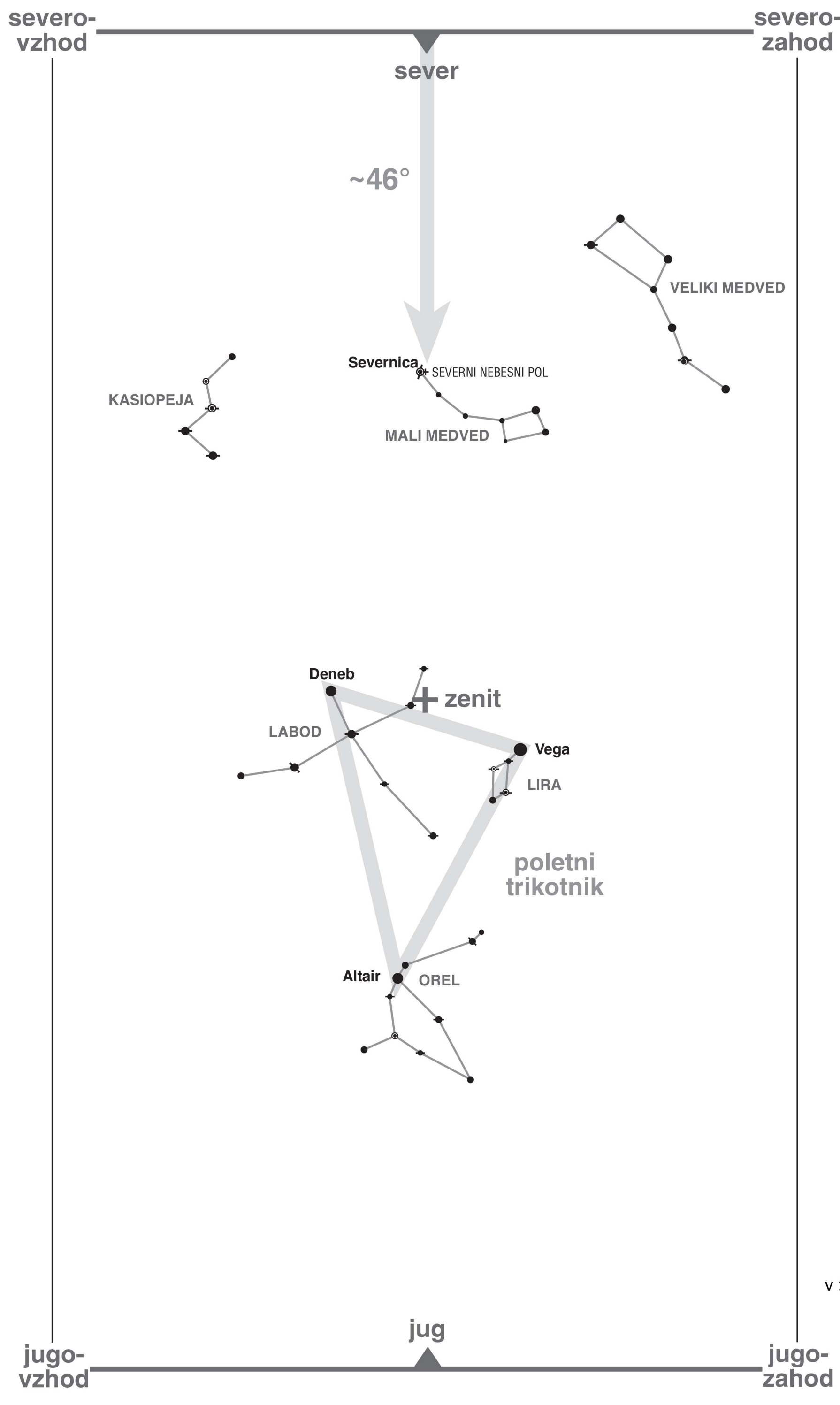
P1



25°

Videz neba
ob meridianu:
sredi januarja ob 6^h,
konec januarja ob 5^h,
sredi februarja ob 4^h,
konec februarja ob 3^h,
sredi marca ob 2^h,
konec marca ob 1^h,
sredi aprila ob 0^h,
konec aprila ob 23^h,
sredi maja ob 22^h,
konec maja ob 21^h.

P2



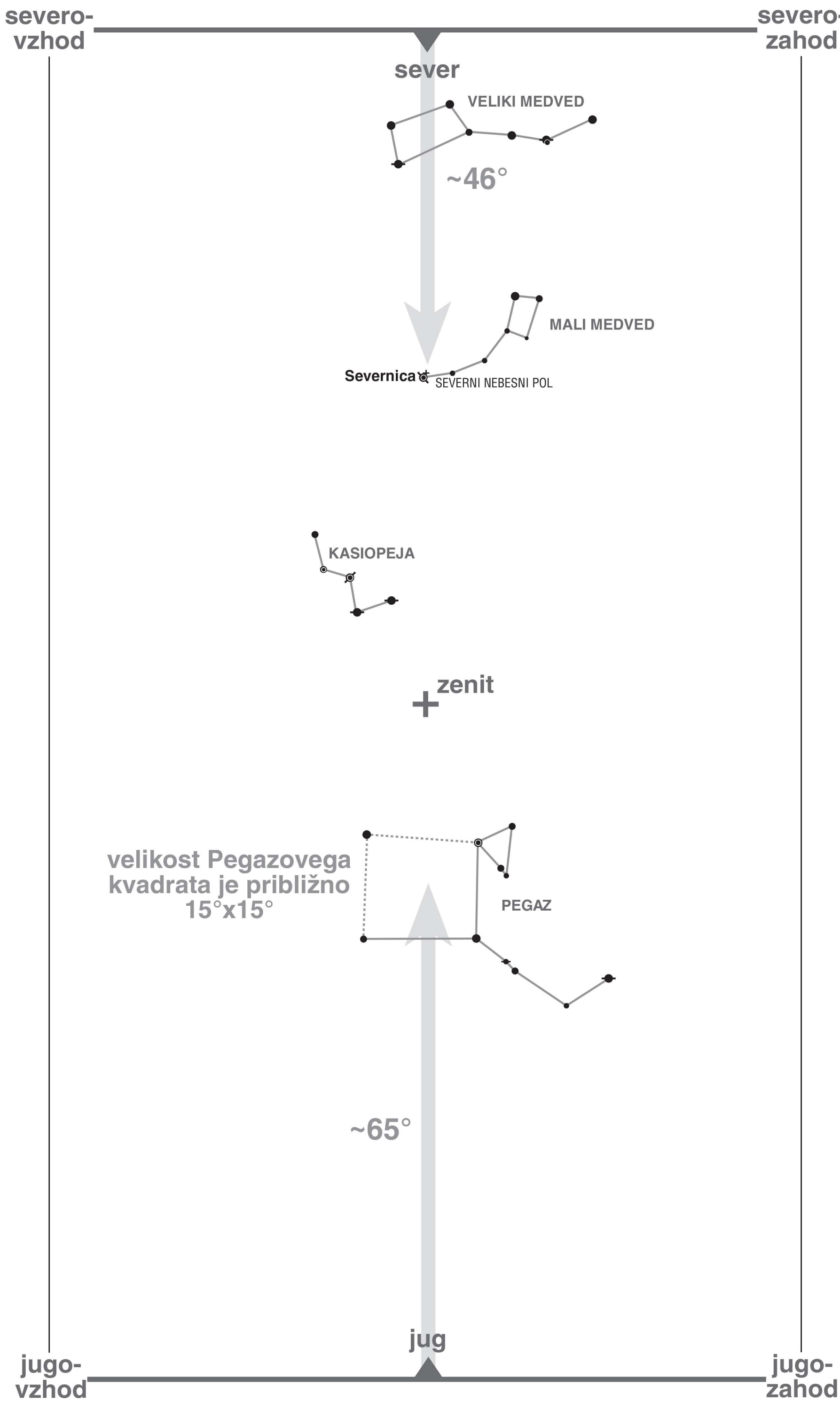
25°

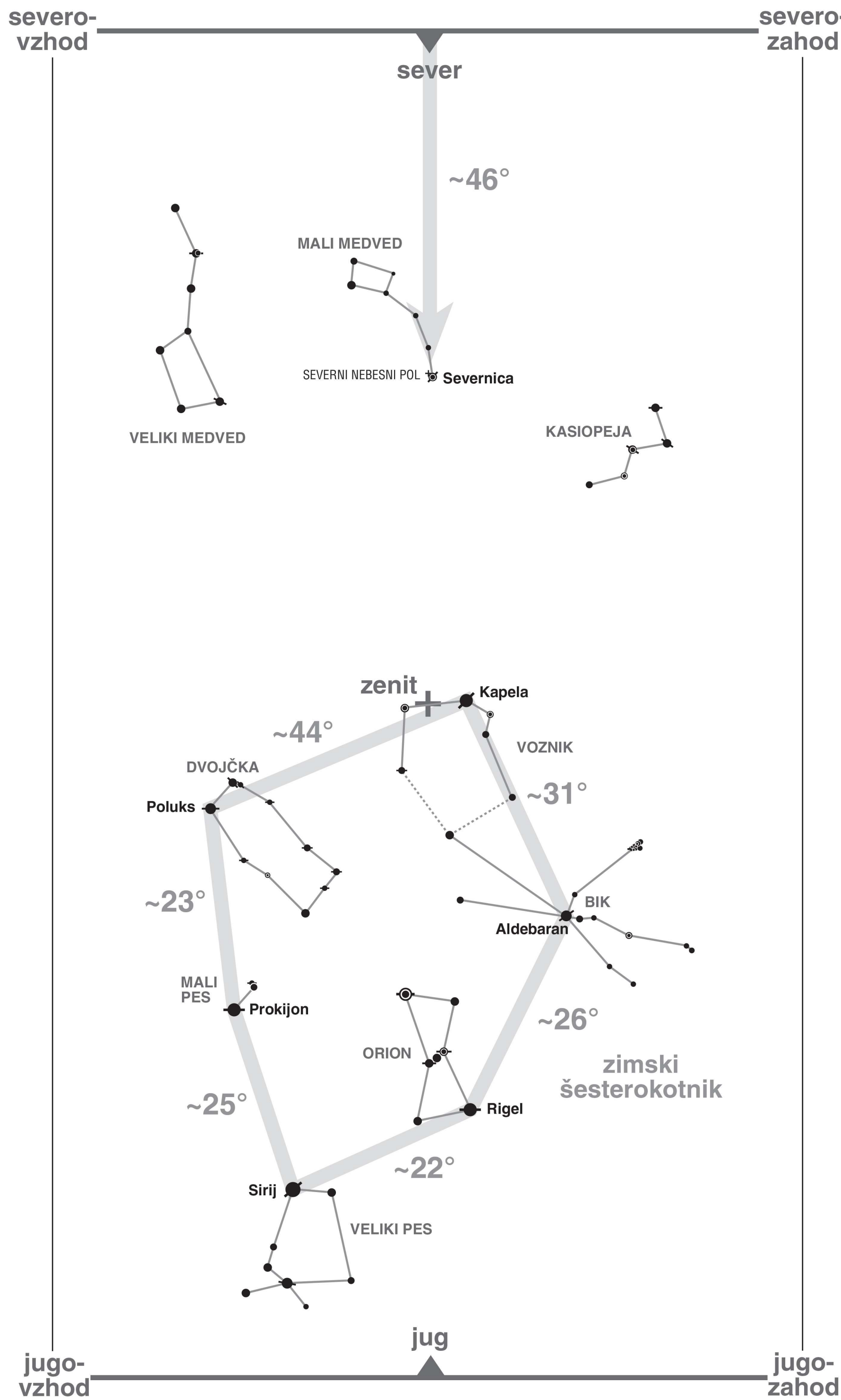
**Videz neba
ob meridianu:**
konec maja ob 4^h,
v začetku junija ob 3^h,
konec junija ob 2^h,
v začetku julija ob 1^h,
konec julija ob 0^h,
v začetku avgusta ob 23^h,
konec avgusta ob 22^h,
v začetku septembra ob 21^h,
konec septembra ob 20^h,
v začetku oktobra ob 19^h,
konec oktobra ob 18^h.

P3

25°

Videz neba
ob meridianu:
v začetku avgusta ob 3^h,
sredi avgusta ob 2^h,
konec avgusta ob 1^h,
sredi septembra ob 0^h,
konec septembra ob 23^h,
sredi oktobra ob 22^h,
konec oktobra ob 21^h,
sredi novembra ob 20^h,
konec novembra ob 19^h,
sredi decembra ob 18^h.





P4

25°

Videz neba
ob meridianu:
sredi septembra ob 6^h,
konec septembra ob 5^h,
sredi oktobra ob 4^h,
konec oktobra ob 3^h,
sredi novembra ob 2^h,
konec novembra ob 1^h,
sredi decembra ob 0^h,
konec decembra ob 23^h,
sredi januarja ob 22^h,
konec januarja ob 21^h,
sredi februarja ob 20^h,
v začetku marca ob 19^h,
sredi marca ob 18^h.

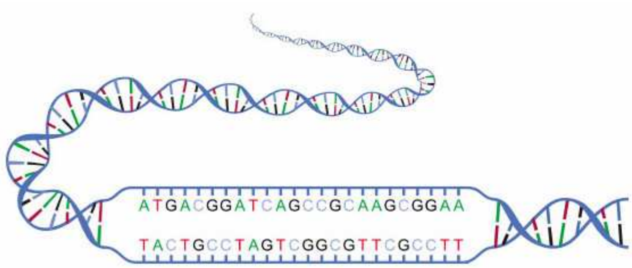
Najdaljši skupni podniz

Igor Pesek

Uvod

Genetika se ukvarja s preučevanjem dedovanja, lastnosti genov in DNK. Čeprav so celotni človekov genom uspeli določiti, ostaja še veliko vprašanj neodgovorjenih. V iskanju odgovorov raziskovalci večkrat primerjajo dva DNK niza, ki sta predstavljena s kombinacijo črk A, C, G, T (več v [1]). Zanima jih ujemanje nizov oziroma njihova podobnost. To slednje bo tema tega prispevka, kjer bomo ugotavljali podobnost dveh nizov z iskanjem najdaljšega skupnega podniza.

Definirajmo najprej osnovne pojme, ki jih bomo potrebovali. *Niz* S je urejen seznam znakov, ki so običajno neprekinjeno zapisani od leve proti desni. Niz S vsebuje *podniz* $S[i..j]$, ki se začne na indeksu i in konča na indeksu j. Iščemo takšen strnjeni podniz, ki je najdaljši in je vsebovan v nizih S in T dolžin m in n.



SLIKA 1.
Vijačnica z DNK nizi

Najdaljši skupni podniz

Najpreprostejša bi bila primerjava vseh možnih podnizov prve besede z vsemi podnizi druge besede. Ta pristop bi lahko opisali kot preiskovanje s surovo silo, ki pa je časovno zelo zahteven. Za ilustracijo si poglejmo iskanje podnizov v nizih $AAGGCT$ in $CCGCT$, kjer sta dolžini prvega niza $m = 6$ in drugega $n = 5$. Vseh podnizov prvega niza je $m^2 = 6^2 = 36$ in podnizov drugega niza $n^2 = 5^2 = 25$, kar pomeni, da bi morali primerjati $36 \cdot 25 = 900$ podnizov. Časovna zahtevnost takšnega pristopa je $\mathcal{O}(m^2 \cdot n^2)$. V nadaljevanju bomo predstavili algoritem, ki poišče najdaljši podniz s časovno zahtevnostjo $\mathcal{O}(m \cdot n)$, obstaja pa tudi algoritem, ki najde podniz v linearnem času.

Algoritem je nastal s pomočjo dinamičnega programiranja, vendar nekaterih podrobnosti ne bomo razložili, prav tako tudi ne bomo strogo dokazali, da algoritem deluje pravilno [2]. Oboje namreč presega okvir tega prispevka.

Zapišimo niza S in T, v katerih iščemo podniz, v tabelo L velikosti $(m+1) \times (n+1)$, kjer ima zaporedoma vsak znak niza S svoj stolpec tabele, vsak znak niza T pa svojo vrstico v tabeli. V tabelo smo dodali še eno vrstico in stolpec, ker nam bo to kasneje koristilo pri izračunih. Primer je prikazan v tabeli 1, kjer je S_i i-ti znak niza S in T_j j-ti znak niza T.

Sedaj tabelo L napolnimo po naslednjem pravilu:

$$L(i,j) = \begin{cases} 0 & i = 0 \text{ ali } j = 0, \\ 0 & S[i] \neq T[j] \\ 1 + L(i-1, j-1) & S[i] = T[j]. \end{cases}$$

Razmislimo sedaj, zakaj takšno pravilo. Druga vrstica pravi, da ko sta znaka $S[i]$ in $T[j]$ različna, potem na tem mestu zagotovo ne more obstajati podniz. Ko pa sta znaka enaka, potem pogledamo mesto, kjer smo v obeh nizih primerjali njun predhodni znak, to je $S[i-1]$ in $T[j-1]$ oziroma v tabeli $L(i-1, j-1)$. Vrednost na tem mestu nam pove, koliko ujemanj po znakih je bilo do tega znaka. Če

→

		T_1	T_2	$\cdots$	T_j	$\cdots$	T_m
S_1							
S_2							
$\vdots$							
S_i							
$\vdots$							
S_n							

TABELA 1.
Primer tabele

je vrednost 0, potem ni bilo ujemanja, v nasprotnem primeru pa nam vrednost pove, koliko znakov se je že zaporedoma ujemalo do predhodnega znaka. Ker se tudi trenutna ujemata, vrednost povečamo za 1.

Kot neke vrste inicializacijo v tabelo najprej zapišemo 0 v prvo vrstico in prvi stolpec. Pomembno je, da pri izpolnjevanju tabele upoštevamo vrstni red izpolnjevanja od leve zgoraj proti desni spodaj, saj se nam v nasprotnem primeru lahko zgodi napaka, da vrednost ne obstaja. Razmislite, zakaj in kdaj bi se to zgodilo. Tretja vrstica je tudi razlog, zakaj imamo na začetku dodatni stolpec in vrstico. Vrednost $L(i-1, j-1)$ namreč dostopa do predhodne vrstice in stolpca, ki pa sploh ne bi nujno obstajala. Ko je tabela v celoti izpolnjena, poiščemo v tabeli največjo vrednost, ki nam pove dolžino najdaljšega podniza in je delna rešitev našega problema. Določitev podniza pa bomo razložili ob primeru v nadaljevanju.

Poglejmo si sedaj na primeru nizov *ACCA* in *CACC*, kako je izpolnjena tabela L, kot je prikazana v tabeli (2).

Metoda »hitrega očesa« lahko brez tabele hitro ugotovi, da je najdaljši skupni podniz *ACC* dolžine 3, kar pa je tudi enako največji vrednosti v tabeli.

		A	C	C	A
	0	0	0	0	0
C	0	0	1	1	0
A	0	1	0	0	1
C	0	0	2	1	0
C	0	0	1	3	0

TABELA 2.
Z uporabo pravila napolnjena tabela

Kako ta podniz razberemo iz tabele? Poglejmo še enkrat tabelo (2). Če poznamo pravilo, kako se je tabela ustvarila, hitro opazimo, da za rekonstrukcijo podniza potrebujemo največjo vrednost k in indeksa i ali j v tabeli. Potem je najdaljši skupni podniz enak $S[i-k..i]$ ali $T[j-k..j]$. V našem primeru je $k = 3$ in $j = 3$ oziroma $T[j-k..j] = T[0..3] =$ "*ACC*".

Zapišimo sedaj najprej algoritem, ki nam izpolni tabelo in vrne najdaljši niz.

```
NAJDALJŠI SKUPNI PODNIZ (S,m,T,n)
    for i := 0 to m do L(i,0) := 0
    for j := 0 to n do L(0,j) := 0
    dolzina := 0
    resitev := (0,0)
    for i := 1 to m do
       for j := 1 to n do
          if S[i] != T[j] then
             L(i,j) := 0
          else
             L(i,j) := 1 + L(i-1,j-1)
             if L(i,j) > dolzina then
                dolzina := L(i,j)
                resitev = (i,j)
     j = resitev[1]
     return T[j-dolzina, j]
```

Naloga Z uporabo opisanega algoritma poiščite najdaljši podniz v nizih *AAACCACA* in *ACACCCACCAA*. Rešitev naloge bo podana na koncu prispevka.

Odkrivanje plagiatov

Opisani postopek iskanja podnizov lahko izkoristimo tudi pri preprostem ugotovaljanju plagiatov (v Sloveniji plagiatov ne iščejo na tak način). V tem primeru poiščemo najdaljši podniz in ga odstranimo iz obeh nizov. Postopek ponavljamo, dokler še obstajajo podnizi dolžine vsaj k, kjer je $k > 2$. Ko z odstranjevanjem zaključimo, uporabimo krajšega od originalnih nizov in dolžino okrajšanega niza delimo z dolžino originalnega niza. Dobimo vrednost med 0 in 1, kjer 0 pomeni popolno ujemanje, torej smo našli popoln plagiat, vrednost 1 pomeni, da sta niza v celoti različna, vmesna vrednost pa pomeni stopnjo ujemanja dveh nizov.

Zaključek

Najdaljši skupni podniz je podoben algoritmu za iskanje razdalje med nizi, ki je podrobneje opisan v [2]. Če namreč v slednjem algoritmu prepovemo brisanje, vrivanje in zamenjavo, dovolimo pa kopiranje, ki ga obtežimo s ceno 1, dobimo ravno algoritem za iskanje najdaljšega skupnega podniza.

V tem prispevku smo predstavili algoritem za iskanje najdaljšega podniza v dveh nizih. Algoritem deluje tudi v iskanju med k različnimi nizi. V tem primeru dobi vsak niz svojo dimenzijo v tabeli, ki jo je potrebno izračunati. Razmislite, kako bi bilo potrebno razširiti algoritem za iskanje v več nizih hkrati.

Rešitev naloge: Najdaljši skupni podniz je dolg 4. Obstajata dva takšna podniza *CCAC* in *ACCA*.

Literatura

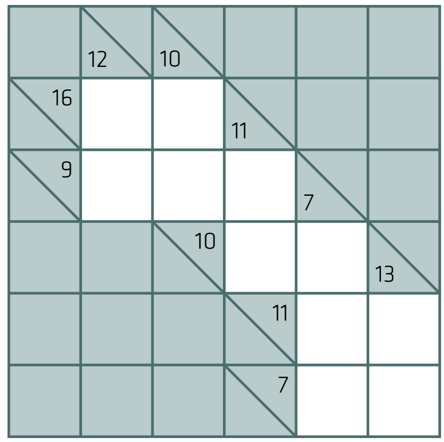
[1] Deoksiribonukleinska kislina, `http://sl.wikipedia.org/wiki/Deoksiribonukleinska_kislina`, dostopano 25. 9. 2014.

[2] A. Taranenko, *Razdalja med nizi*, Presek **35** 1, 25–27, 2007/08.

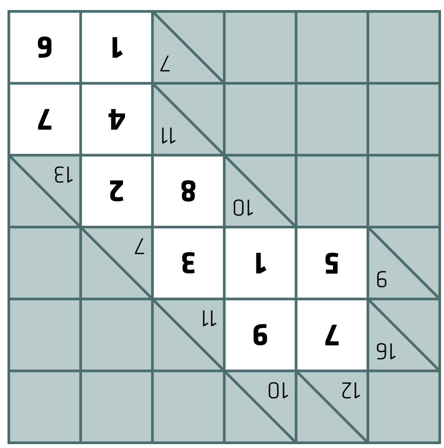
www.presek.si

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 42/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke 42. letnika Preseka je **Fahrenheitov termometer.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Anja Blatnik iz Ribnice, Cecilija Praprotnik iz Tržiča in Oskar Nemec iz Lendave, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Kaplja kot lupa

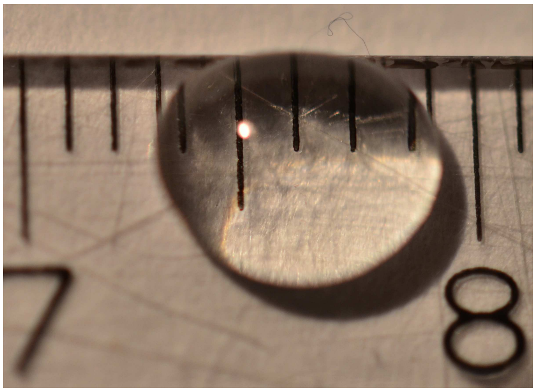
Aleš Mohorič

→ **Kaplja deluje kot neke vrste povečevalno steklo (lupa) zato, ker ima ukrivljeno površino in je iz vode, ki ima lomni kvocient drugačen kot zrak. Na sliki 1 lahko vidimo, da kaplja poveča predmet za njo.**

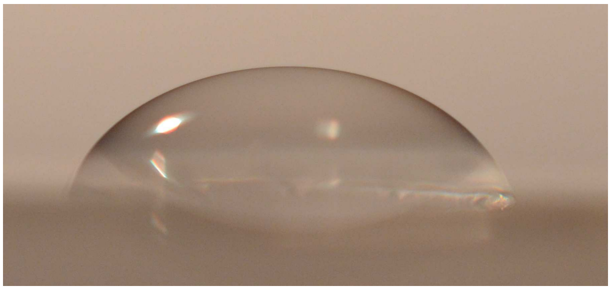
Stranski pogled na kapljo (slika 2) razkrije približno obliko krogelne kapice.

Razmerje med višino in premerom kapice je odvisno od velikosti kaplje in od površine, na kateri je kaplja (voda nekatere površine omoči bolj, druge manj). V našem primeru je razmerje enako 2 : 6,5. Premer kaplje 6 mm enostavno odčitamo na sliki 1. Z malo računanja pridemo do ugotovitve, da je krivinski polmer zgornje ploskve enak $r = 3{,}4$ mm.

Če obravnavamo tako kapljico kot plankonveksno lečo, lahko izračunamo goriščno razdaljo leče z izrazom $f = \frac{r}{n-1}$, v katerem nastopa lomni kvocient vode $n = 1{,}3$. Goriščna razdalja je 11 mm. Povečava lupe je definirana z razmerjem tangensa zornega kota, pod katerimi opazujemo predmet skozi lupo, in tangensa zornega kota, pod katerim opazujemo predmet na normalni zorni razdalji $r_0 = 25$ cm.



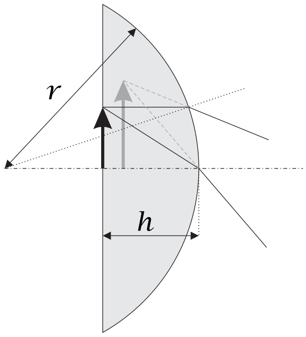
SLIKA 1.
Kaplja poveča predmet za njo; zareze milimetrske skale ravnila so pod kapljo bolj narazen kot drugje.



SLIKA 2.
Kaplja od strani

Če je predmet blizu gorišča lupe, povečavo zapišemo z izrazom $N_l = \frac{r_0}{f}$. Povečavo izračunamo in dobimo 22. Ta odgovor seveda že na prvi pogled (slika 1) ne drži. Na sliki 1 lahko z ravnilom izmerimo razdaljo med dvema milimetrskima zarezama pod kapljo in drugje ter z razmerjem teh dolžin dobimo za povečavo 1,2. To je mnogo manj, kar pomeni, da kaplje ne smemo obravnavati kot lupo. Razlog je v tem, da kaplja stoji tik ob predmetu, kadar pa opazujemo z lupo, predmet odmaknemo od lupe skoraj za goriščno razdaljo. Povečavo v našem primeru izračunamo drugače. Pri računanju si pomagamo z žarkovnim diagramom na sliki 3.

Račun poenostavimo tako, da opazujemo obosne žarke in dobimo za povečavo kaplje $N = \frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{h}{r}}$. Z izmerjenimi in izračunanimi podatki dobimo povečavo 1,1, kar je bližje povečavi, določeni s slike.



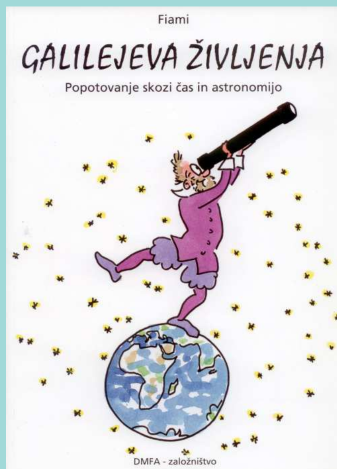
SLIKA 3.
Žarkovni diagram za preslikavo predmeta, postavljenega tik ob plankonveksno lečo.

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.