Kovine, zlitine, tehnologije / letnik 28 / številka 1-2 / strani 237 do 243 / 1994

Modeliranje strjevanja pri kontinuiranem ulivanju z dvojno recipročno robno integralsko metodo

Modelling of continuous casting solidification by boundary element method with dual reciprocity

A.Košir, B.Šarler, *Institut "Jožef Stefan", Univerza v Ljubljani, Jamova 39, Ljubljana*

V članku pokažemo, kako uporabimo novo numerično metodo robnih elementov z dvojno recipročnostjo pri simulaciji strjevanja kovine ob pogojih, kakršni nastopajo pri kontinuiranem ulivanju. Kontinuirano ulivanje fizikalno opišemo s prenosom energije v nestisljivi snovi s fazno spremembo. Toplotni tok v snovi definira Fourierov zakon, pri čemer upoštevamo temperaturno odvisne lastnosti snovi.

Parcialno energijsko transportno-difuzijsko enačbo za dvofazno zmes pomnožimo z Greenovo funkcijo in jo integriramo po območju. Zaradi temperaturno odvisne toplotne prevodnosti temperaturo transformiramo po Kirchhoffu. Z dvakratno uporabo recipročnosti transformiramo integrale po območju na njegov rob. Območje in njegov rob diskretiziramo. Polje na robu območja opišemo z odsekoma ravnimi in konstantnimi robnimi elementi. Polje na območju predstavimo s prostorskimi zlepki 1+r in z linearnimi časovnimi zlepki. Časovna integracija sledi novi shemi, ki sta jo predlagala Voller in Swaminathan.

Analizirali smo občutljivost numeričnih rešitev za strjevanje neskončnega dvodimenzionalnega vogala in za enofazno enodimenzionalno klasično Stefanovo nalogo v odvisnosti od prostorske in časovne diskretizacije, Stefanovega števila in širine talilnega intervala.

Ključne besede: kontinuirano ulivanje, metoda robnih elementov, metoda dvojne recipročnosti, Stefanova naloga, prenos toplote in snovi.

This paper describes the application of the new dual reciprocity boundary element method for the energy transport in melting and solidification of metal in continuous casting process with realistic operational parameters. The continuous casting is described with energy transport in systems composed of incompressible phase-change material, with Fourier constitutive heat flux relation, and includes temperature dependent material properties.

The discretization of the Kirchhoff's transformed and heat source term reformulated governing equation is structured by the Green's function of the Laplace equation, the 1+r space spline dual reciprocity boundary-only representation of the domain integrals, and straight line boundary elements with constant space and linear time splines. The timestep iterations follow the new Voller and Swaminathan scheme.

The sensitivity of the results with respect to space-time discretization, Stefan number, and melting interval was investigated on a two-phase analytical solution for the solidification of an infinite rectangular corner and on the classical one-phase Stefan problem.

Key words:continuous casting, boundary element method, dual reciprocity method, Stefan problem, heat and mass transfer.

1 Uvod

Raziskovanje sistemov s tekočo in trdno fazo običajno zahteva interdisciplinarno teoretsko, eksperimentalno in numerično modeliranje faznih prehodov, mehanike trdnin in trasportnih pojavov. Njegov vpliv na številne bazične in aplikativne raziskave je zelo širok, kar kaže tudi izčrpen zbornik[1], opremljen z referencami in s ključnimi besedami.

Odkar je Wrobel[2] pokazal, da je numerična metoda robnih elementov (BEM) primerna tudi za diskretno aproksimativno reševanje nelinearnih transportnih enačb, se to metodo skuša uporabiti tudi pri problemih s taljenjem in strjevanjem.

2 Formulacija problema

Vzemimo fiksirano povezano območje Ω, ki ga omejuje rob Γ. Na tem območju naj bo snov s stalno gostoto ρ_0, temperaturno odvisnima toplotno prevodnostjo $k_{\mathcal{P}}$ in specifično toploto $c_{\mathcal{P}}$, kjer $\mathcal{P} = \mathcal{S}$ označuje trdno fazo in $\mathcal{P} = \mathcal{L}$ tekočo fazo.

Spremembo entalpije opisuje konvektivno-difuzijska enačba za kontinuumsko zmes

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(f_{\mathcal{S}}\,\rho_0\,H_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,\rho_0\,H_{\mathcal{L}}\right) + \\ &+\nabla\cdot\left(f_{\mathcal{S}}\,\rho_0 V_{\mathcal{S}}\,H_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,\rho_0 V_{\mathcal{L}}\,H_{\mathcal{L}}\right) \\ &= -\nabla\cdot\left(f_{\mathcal{S}}\,F_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,F_{\mathcal{L}}\right) + f_{\mathcal{S}}\,q_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,q_{\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{1}$$

Krajevno in časovno odvisni koeficient $f_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}, t)$ predstavlja volumski delež določene faze in je normiran z enačbo $f_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}} = 1$.

Specifična entalpija $H_{\mathcal{P}}$ za vsako izmed faz je enaka

$$H_{\mathcal{S}} = c_{\mathcal{S}}(T_H)T_H + \int_{T_H}^{T} c_{\mathcal{S}}(\theta)\,d\theta, \tag{2}$$

$$H_{\mathcal{L}} = c_{\mathcal{L}}(T_H)T_H + \int_{T_H}^{T} c_{\mathcal{L}}(\theta)\,d\theta + H_M^{o}, \tag{3}$$

kjer je T_H poljubna referenčna temperatura in H_M^{o} specifična talilna entalpija.

Hitrosti delcev vsake izmed faz $\mathbf{V}_{\mathcal{P}}(\mathbf{p}, t)$ sta v modelu čistega enoosneega strjevanja enaki $\mathbf{V}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{p}, t)$ in različni v modelu čistega stebričastega strjevanja, pri čemer vzamemo, da trdna faza v opazovanem sistemu miruje ali se giblje s stalno hitrostjo, $\mathbf{V}_{\mathcal{L}}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{p}, t)$, $\mathbf{V}_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{V}_{sys}$.

Toplotna tokova v vsaki izmed faz sta odvisna od različnih toplotnih prevodnosti v vsaki izmed faz in sta po Fourieru enaka

$$F_{\mathcal{P}} = -k_{\mathcal{P}}\,\nabla T$$

Konvektivno-difuzijsko enačbo (1) lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} &\rho_0 c\frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0\left(\left[\left(f_{\mathcal{S}}\right)c_{\mathcal{S}} - \frac{d f_{\mathcal{L}}}{d T}H_{\mathcal{S}}\right]\mathrm{V}_{\mathcal{S}}\right. \\ &\left.+\left[f_{\mathcal{L}}c_{\mathcal{L}} - \frac{d f_{\mathcal{L}}}{d T}H_{\mathcal{L}}\right]\mathrm{V}_{\mathcal{L}}\right)\cdot\nabla T \\ &= \nabla\cdot\left(k\,\nabla T\right) + q - \rho_0 H_{\mathcal{LS}}\frac{d f_{\mathcal{L}}}{d T}\frac{d T}{d t} \end{aligned} \tag{4}$$

pri čemer smo vpeljali oznaki za intenzivnost toplotnih izvorov in za razliko specifičnih entalpij med fazama

$$q = f_{\mathcal{S}}\,q_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,q_{\mathcal{L}}, \quad H_{\mathcal{LS}} = H_{\mathcal{L}} - H_{\mathcal{S}}. \tag{5}$$

Toplotna prevodnost in specifična toplota zmesi sta

$$k = k_0 + k_T = f_{\mathcal{S}}\,k_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,k_{\mathcal{L}}, \quad c = c_0 + c_T = f_{\mathcal{S}}\,c_{\mathcal{S}} + f_{\mathcal{L}}\,c_{\mathcal{L}}, \tag{6}$$

kjer konstanti k_0, c_0, predstavljata srednjo vrednost količin na izbranem temperaturnem intervalu in funkciji $k_T(T)$, $c_T(T)$, zajemata temperaturno odvisni del količin.

Začetno temperaturo v točki $\mathbf{p}$ ob času t_0 določa funkcija T_0

$$T(\mathrm{p}, t_0) = T_0(\mathrm{p}); \quad \mathrm{p} \in \Omega \oplus \Gamma. \tag{7}$$

Rob območja Γ razdelimo na ne nujno povezane dele Γ^D, Γ^N, Γ^R, na katerih veljajo Dirichletovi, Neumannovi oziroma Robinovi robni pogoji $\Gamma = \Gamma^D \oplus \Gamma^N \oplus \Gamma^R$. Robne pogoje v robni točki $\mathbf{p}$ ob času t, $t_0 \le t \le t_0 + \Delta t$, določajo predpisane funkcije T_Γ, F_Γ in h,

$$T(\mathrm{p}, t) = T_\Gamma(\mathrm{p}, t); \quad \mathrm{p} \in \Gamma^D, \tag{8}$$

$$-k\,\nabla T(\mathrm{p}, t)\cdot n_\Gamma(\mathrm{p}) = F_\Gamma(\mathrm{p}, t); \quad \mathrm{p} \in \Gamma^N, \tag{9}$$

$$-k\,\nabla T(\mathrm{p}, t)\cdot n_\Gamma(\mathrm{p}) = h\left[T(\mathrm{p}, t) - T_\Gamma(\mathrm{p}, t)\right]; \quad \mathrm{p} \in \Gamma^R, \tag{10}$$

ki morejo biti odvisne tudi od površinske temperature. Z dodatno zahtevo

$$-k\,\nabla T(\mathrm{p}, t)\cdot n_\Gamma(\mathrm{p}) = h\left[T(\mathrm{p}, t) - T_\Gamma(\mathrm{p}, t)\right]; \quad \mathrm{p} \in \Gamma^R, \tag{11}$$

problem dobro pogojimo.

S Kirchhoffovo transformacijo lineariziramo difuzijski člen

$$\mathcal{T} = T_{\mathcal{T}} + \int_{T_{\mathcal{T}}}^{T} \frac{k(\theta)}{k_0} d\theta = T + \int_{T_{\mathcal{T}}}^{T} \frac{k_T(\theta)}{k_0} d\theta, \tag{12}$$

kjer je $T_{\mathcal{T}}$ poljubna referenčna temperatura Kirchhoffove transformiranke.

Enačbo (4) pomnožimo z Greenovo funkcijo za Laplaćeovo enačbo $T^*(\mathbf{p};\mathbf{s})$ in jo integriramo po vsem območju in po času $[\Omega] \times [t_0, t_0+\Delta t]$.

Po daljšem računu, ki je podrobno predstavljen v [6], dobimo robno območno integralsko enačbo

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \rho_0 c_0 \mathcal{T}(\mathrm{p}, t_0 + \Delta T) T^*(\mathrm{p};\mathrm{s})\, d\Omega \\ &- \int_\Omega \rho_0 c_0 \mathcal{T}(\mathrm{p}, t_0) T^*(\mathrm{p};\mathrm{s})\, d\Omega \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla \mathcal{T} T^*\, d\Omega\, dt\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_\Gamma k_0 T^* \nabla \mathcal{T} \cdot d\Gamma\, dt \\ &- \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_\Gamma k_0 \mathcal{T} \nabla T^* \cdot d\Gamma\, dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} c^*(\Omega, \mathrm{s})\, k_0\, \mathcal{T}(\mathrm{s}, t)\, dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_\Omega \left[q + \Upsilon \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} \right] T^*\, d\Omega\, dt,\end{aligned} \tag{14}$$

pri čemer smo vpeljali naslednje funkcije

$$\begin{aligned}\Lambda = \rho_0 \frac{k_0}{k} \Bigg(&\left[(1 - f_L) c_S - \frac{df_L}{dT} H_S \right] \mathrm{V}_S \\ &+ \left[f_L\, c_L + \frac{df_L}{dT} H_L \right] \mathrm{V}_L \Bigg),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\Upsilon = \rho_0 \left[c_0 - \frac{k_0}{k} \left(c + H_{LS} \frac{df_L}{dT} \frac{\partial f_L}{\partial T} \right) \right], \tag{16}$$

$$c^*(\Omega, \mathrm{s}) = \int_\Omega \nabla^2 T(\mathrm{p};\mathrm{s})\, d\Omega. \tag{17}$$

Greenova funkcija v dveh dimenzijah je enaka

$$T_2^*(\mathrm{p};\mathrm{s}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_0}{|\mathrm{p} - \mathrm{s}|}.$$

Začetni in robni pogoji (8)-(10) se po Kirchhoffu transformirajo v

$$\mathcal{T}(\mathrm{p}, t_0) = \int_{T_{\mathcal{T}}}^{T_0} \frac{k}{k_0} d\theta, \quad \mathrm{p} \in \Omega \oplus \Gamma, \tag{18}$$

$$\mathcal{T}(\mathrm{p}, t) = \int_{T_{\mathcal{T}}}^{T_\Gamma} \frac{k}{k_0} d\theta, \quad \mathrm{p} \in \Gamma^D, \tag{19}$$

$$-k_0\, \nabla \mathcal{T}(\mathrm{p}, t) \cdot n_\Gamma(\mathrm{p}) = F_\Gamma; \quad \mathrm{p} \in \Gamma^N, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&-k_0\, \nabla \mathcal{T}(\mathrm{p}, t) \cdot n_\Gamma(\mathrm{p}) = \\ &= h \left[\mathcal{T}(\mathrm{p}, t) - \mathcal{T}_\Gamma - \int_{T_{\mathcal{T}}}^{T[\mathcal{T}(\mathrm{p},t)]} \frac{k_T}{k} d\theta \right]; \ \mathrm{p} \in \Gamma^R.\end{aligned} \tag{21}$$

3 Rešitveni postopek

Iščemo numerično rešitev enačbe (14) po času $t = t_0 + \Delta t$ ob podanih začetnih in robnih pogojih. Začetni čas je označen s t_0 in pozitivni časovni korak z Δt. Pri reševanju enačbe (14) uporabimo dvojno recipročnost[7], s katero integracijsko domeno prestavimo z območja na njegov rob. S to koristno metodo poljubno skalarno funkcijo $\mathcal{F}(\mathbf{p}, t)$ na območju Ω aproksimiramo z $n = 1, 2, \ldots, N$ prostorskimi $\psi_n^p(\mathbf{p})$ in časovnimi zlepki $\psi_n^t(t)$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(\mathrm{p}, t) \approx \psi_n^p(\mathrm{p})\, \psi_n^t(t), \quad \mathcal{F}(\mathrm{p}_m, t) = \psi_{nm}^p \psi_n^t(t), \\ &\psi_n^t(t) = \left[\psi_{nm}^p \right]^{-1} \mathcal{F}(\mathrm{p}_m, t).\end{aligned} \tag{22}$$

Kjerkoli mogoče je v besedilu uporabljena Einsteinova vsota.

Iz definicije funkcije $\hat{\psi}_n^p$,

$$\nabla^2 \hat{\psi}_n^p(\mathrm{p}) = \psi_n^p(\mathrm{p}), \tag{23}$$

in iz druge Greenove enakosti sledi, da se lahko z Greenovo funkcijo T^* uteženi integrali funkcij $\mathcal{F}(\mathbf{p}, t)$ in $\mathcal{G}(\mathbf{p}, t)\, \nabla \mathcal{F}(\mathbf{p}, t)$, kjer je $\mathcal{G}$ poljubna vektorska funkcija, na območju Ω transformirajo v vrsto N integralov po robu območja,

$$\int_\Omega \mathcal{F} T^*\, d\Omega \approx \psi_n(\mathrm{s}) \left[\psi_{nm}^p \right]^{-1} \mathcal{F}(\mathrm{p}_m, t), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{G} \cdot \nabla \mathcal{F} T^*\, d\Omega \approx \psi_n(\mathrm{s}) \left[\psi_{nu}^p \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \mathcal{G}(\mathrm{p}_u, t) \cdot \nabla \psi_l^p(\mathrm{p}_u) \left[\psi_{lm}^p \right]^{-1} \mathcal{F}(\mathrm{p}_m, t),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\psi_n(s) = \left[\int_\Gamma \mathcal{T}^* \nabla \hat{\psi}_n^p \cdot d\Gamma - \int_\Gamma \hat{\psi}_n^p \nabla \mathcal{T}^* \cdot d\Gamma + c^*(\Omega, s)\hat{\psi}_n^p(s)\right] \tag{26}$$

Učinkovitost transformacije (24,25) je močno odvisna od izbire prostorskih zlepkov $\hat{\psi}_n^p$. Po predlogu Partridga et al.[7] smo izbrali za prostorske zlepke funkcije

$$\psi_n^p(p) = \sum_{i_\psi=0}^{I_\psi} |p - p_n|^{i_\psi}, \quad \hat{\psi}_n^p(p) = \sum_{i_\psi=0}^{I_\psi} \frac{|p - p_n|^{i_\psi+2}}{(i_\psi+2)^2}, \tag{27}$$

s prvim redom razvoja, $I_\psi = 1$. Numerični rešitveni postopek za nelinearno integralsko enačbo (14) sam po sebi zahteva iteracijo po časovnem koraku. Pri časovni iteraciji upoštevamo nelinearna člena Λ and Υ po nedavno razviti robustni in točni shemi Vollerja in Swaminathana[8]. Bistvene prilagoditve te sheme za dvojno recipročno metodo vsebuje enačba (34).

Osnovno enačbo (14) diskretiziramo z linearnimi časovnimi zlepki prek časovnega intervala $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Rob diskretiziramo z N_Γ robnimi odsekoma ravnimi elementi Γ_k z odsekoma konstantnimi vrednostmi. Prvih N_Γ točk polja $\mathbf{p}_n$, ki jih upoštevamo v zlepkih (27), sovpada z geometrijskimi središči robnih elementov, naslednjih N_Ω točk pa je lahko poljubno posejanih po notranjosti območja Ω.

Enačbo (14) rešimo, tako da konstruiramo sistem j=1,2,...,N algebraičnih enačb. Te enačbe določa diskretizirana enačba (14), kjer točka izvora $\mathbf{s}$ sovpada s točko polja $\mathbf{p}_n$. Izvedeni sistem algebraičnih enačb zapišemo v simbolični obliki

$$\begin{aligned} &F_{jm}^{t_0+\Delta t\,i}\mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t) + T_{jm}^{t_0+\Delta t} \cdot \nabla \mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t) \\ &= F_{jm}^{t_0}\mathcal{T}(p_m, t_0) + T_{jm}^{t_0} \cdot \nabla \mathcal{T}(p_m, t_0) + \\ &+ q_{jm}^{t_0+\Delta t} q(p_m, t_0+\Delta t) + q_{jm}^{t_0} q(p_m, t_0), \end{aligned} \tag{28}$$

ki jo moramo pred reševanjem preurediti ustrezno robnim pogojem. Zgornji indeks i označuje vrednost spremenljivke pri i-ti iteraciji. Matrični elementi so določeni z enačbami

$$\begin{aligned} F_{jm}^{t_0+\Delta t\,i} &= \frac{\Delta t}{2}\psi_n(s_j)[\psi_{nu}]^{-1}\Lambda^i_{t_0+\Delta t\,u} \cdot \nabla\psi_l^p(p_u)[\psi_{lm}]^{-1} \\ &+ \psi_n(s_j)[\psi_{nm}^p]^{-1}\left[\rho_0 c_0 - \Upsilon^i_{t_0+\Delta t\,m} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\Upsilon}{d\mathcal{T}}\mathcal{T}\right)^i_{t_0+\Delta t\,m}\right] \\ &+ \delta_{km}\frac{\Delta t\, k_0}{2}\int_{\Gamma_k} \nabla \mathcal{T}^*(p; s_j) \cdot d\Gamma + \delta_{jm}\frac{\Delta t\, c^*(\Omega, s_j)k_0}{2}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} F_{jm}^{t_0} &= -\frac{\Delta t}{2}\psi_n(s_j)[\psi_{nu}]^{-1}\Lambda[\mathcal{T}(p_u, t_0)] \cdot \\ &\cdot \nabla\psi_l^p(p_u)[\psi_{lm}]^{-1} + \psi_n(s_j)[\psi_{nm}^p]^{-1} \\ &\cdot \left[\rho_0 c_0 - \Upsilon[\mathcal{T}(p_m, t_0)] + \frac{1}{2}\left(\frac{d\Upsilon}{d\mathcal{T}}\mathcal{T}\right) \cdot \right. \\ &\left. \cdot [\mathcal{T}(p_m, t_0)]\,\mathcal{T}(p_m, t_0)\right] - \delta_{km}\frac{\Delta t\, k_0}{2} \cdot \\ &\cdot \int_{\Gamma_k} \nabla \mathcal{T}^*(p; s_j) \cdot d\Gamma + \delta_{jm}\frac{\Delta t\, c^*(\Omega, s_j)k_0}{2}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$T_{jm}^{t_0+\Delta t} = -\,T_{jm}^{t_0} = -\,\delta_{km}\frac{\Delta t\, k_0}{2}\int_{\Gamma_k} \mathcal{T}^*(p; s_j)\,d\Gamma, \tag{31}$$

$$q_{jm}^{t_0+\Delta t} = q_{jm}^{t_0} = \psi_n(s_j)[\psi_{nm}^p]^{-1}\frac{\Delta t}{2}. \tag{32}$$

Vrednost $\Xi_{t_0+\Delta t\, m}$, kjer Ξ označuje bodisi Λ bodisi Υ, pri (i +1)-iti iteraciji izračunamo iz prejšnjih iteracij i in (i −1) z enačbo

$$\begin{aligned} \Xi^{i+1}_{t_0+\Delta t\, m} &= \Xi\left[\mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t)\right] + \frac{d\Xi}{d\mathcal{T}}\left[\mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t)\right] \\ &\left[\mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t) - \mathcal{T}^{i-1}(p_m, t_0+\Delta t)\right], \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Xi}{d\mathcal{T}}\mathcal{T}\right)^{i+1}_{t_0+\Delta t\, m} &= \frac{d\Xi}{d\mathcal{T}}\left[\mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t)\right] \times \\ &\times\left[2\,\mathcal{T}^i(p_m, t_0+\Delta t) - \mathcal{T}^{i-1}(p_m, t_0+\Delta t)\right]. \end{aligned} \tag{34}$$

časovno iteracijo ustavimo, ko absolutna vrednost razlike Kirchhoffove spremenljivke v dveh zaporednih korakih v vseh mrežnih točkah $\mathbf{p}_m$ ne presega vnaprej določenega pozitivnega števila $\mathcal{T}_\delta$.

4 Numerični primeri

Da bi preverili obnašanje rešitvenega postopka, smo si izbrali dva različna fizikalna testna primera. Prvi je standardni dvodimenzionalni testni primer strjevanja polneskončnega pravokotnega vogala, drugi je klasični enodimenzionalni enofazni Stefanov problem. Rešitev prvega problema smo primerjali s polanalitično rešitvijo[9] in rešitev drugega problema z analitično rešitvijo[10].

Računsko območje predstavlja kvadrat $0 \leq x \leq 1.5 \times 0 \leq y$ 1.5. V obeh primerih smo za snovne lastnosti izbrali reprezentativne enotske vrednosti $\rho_0 = 1$, $c_S = c_L = 1$, $k_S = k_L = 1$ in temperaturo tališča $T_M^o = 1$.

V testnem primeru 1 je v kvadratu ob začetnem času tekočina s temperaturo $T_0 = 1.3$. Na stranicah $x = 0$ in $y = 0$ veljajo Dirichletovi robni pogoji s stalno temperaturo $T_\Gamma = 0$ in na stranicah $x = 1.5$ and $y = 1.5$ Neumannovi robni pogoji s popolno izolacijo $F_\Gamma = 0$.

V testnem primeru 2 je v kvadratu ob začetnem času tekočina pri temperaturi tališča $T_0 = 1.0$. Na stranici $y = 0$ velja Dirichletov pogoj s temperaturo $T_\Gamma = 0$ in na preostalih stranicah Neumannov pogoj s popolno izolacijo $F_\Gamma = 0$.

Ostri fazni prehod pri temperaturi T_M^o zaradi večje numerične stabilnosti rešitvenega postopka nadomestimo s talilnim intervalom od $T_S^o - T_M^o - \Delta T_M^o$ do $T_L^o = T_M^o + \Delta T_M^o$. Delež tekoče frakcije določa enačba

$$f_L = \begin{cases} 0; & T < T_S^o, \\ \left(T - T_S^o\right) / \left(T_L^o - T_S^o\right); & T_S^o \leq T \leq T_L^o, \\ 1; & T > T_L^o, \end{cases} \tag{35}$$

Numerično izračunane temperature $T_{\text{cal}} = \psi_n^p(\mathrm{p})\psi_n^p(t)$ smo primerjali z $N_{\text{com}} = 10201$ temperaturo, izračunano s primerjalno metodo [9, 10] na enakomerni mreži p_{com} , kjer so točke postavljene v sečišča premic y = konst. in x = konst. , kot kaže **slika 1**. Največja absolutna napaka $T_{\max}$ in povprečna absolutna napaka T_{ave} numerične rešitve sta definirani z enačbama

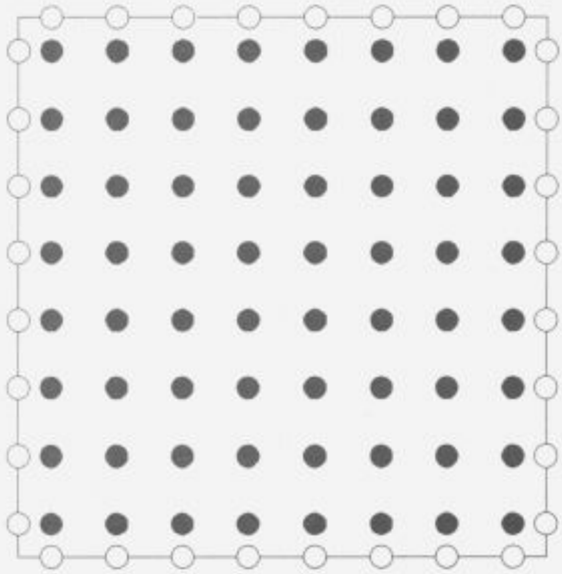
$$T_{\max} = \max \left|T_{\text{cal}}\left(\mathrm{p}_{\text{com}\,n}, t\right) - T_{\text{ana}}\left(\mathrm{p}_{\text{com}\,n}, t\right)\right|; \quad n = 1, 2, \ldots, N_{\text{com}}, \tag{36}$$

$$T_{\text{ave}} = \frac{1}{N_{\text{com}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{com}}} \left|T_{\text{cal}}\left(\mathrm{p}_{\text{com}\,n}, t\right) - T_{\text{ana}}\left(\mathrm{p}_{\text{com}\,n}, t\right)\right|; \tag{37}$$

Mejna razlika temperatur T_δ v dveh zaporednih iteracijah je enaka 0.001.

Tabela 1: Vrednosti diskretizacijskih parametrov.

Mreža	N_Γ	N_Ω	N
${}^1M$	12	16	28
${}^2M$	32	64	96
${}^3M$	48	144	192
Korak			Δt
${}^1\Delta t$			0.01
${}^2\Delta t$			0.005
${}^3\Delta t$			0.001



Slika 1: Razporeditev mrežnih točk v mreži ${}^2M$. Robne točke so označene s krožnicami ○ in notranje točke s polnimi krogi ●. Mreži ${}^1M$ in ${}^3M$ sta sestavljeni iz podobno razporejenih, vendar različno gosto posejanih točk.

Figure 1: Position of mesh points of ${}^2M$ mesh. Boundary nodes are represented by empty circles ○ and inner nodes by full circles ●. Meshes ${}^1M$ in ${}^3M$ are similar, but with different number of points.

5 Zaključek

V članku je predstavljen eden izmed prvih poskusov, kako numerično rešiti večdimenzionalni problem s premičnim robom in s prenosom energije, kjer se integracija skrči le na konstantne fizikalne količine z roba območja. Pokažemo, da je uporabljena metoda primerna pri Stefanovih nalogah obravnavanega tipa.

Glavna prednost metode je preprostost uporabe različnih tipov robnih pogojev, preprosta generacija mreže, zmanjšanje števila spremenljivk in možnost uporabe pri problemih z geometrijskim premičnim robom. Glavna slabost metode je velikost končnega algebraičnega sistema enačb, ker moramo upoštevati tudi notranje točke. To slabost lahko odpravimo z učinkovito tehniko podstrukturiranja v kombinaciji z adaptivno strategijo, od katerih sta obe v razvoju.

6 Oznake

Latinske črke

c, c_0, c_T	specifična toplota, konstantni, spremenjivi del
f	volumski delež faze
F	toplotni tok
h	toplotna prestopnost
H	entalpija
H_{LS}	razlika entalpij

$H^o_{\mathcal{M}}$	specifična talilna toplota
k, k_0, k_T	toplotna prevodnost, konstantni, spremenjivi del
N_Γ, N_Ω	število robnih, notranjih točk
p, **s**	točka polja, izvora
t, t_0	čas, začetni čas
Δt	časovni korak
T	temperatura
T^*	Greenova funkcija
T_0	začetni pogoj
T_Γ	temperatura na robu
$T^o_{\mathcal{S}}$	temperatura *solidus*
$T^-_{\mathcal{M}}$	temperatura taljenja
$T^o_{\mathcal{L}}$	tempratura *likvidus*
$\Delta T_{\mathcal{M}}$	talilni interval
V	hitrost
q	moč toplotnega izvora
$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$	skalarna, vektorska funkcija
F, **T**, q	matrični element

Grške črke

ρ_0	konstantna gostota
Γ	rob
Γ_k	k-ti robni element
Ω	območje
Λ	konvektivni člen
$\mathcal{T}$	Kirchoffova spremenljivka
Υ	izvorni člen
Ξ	Λ ali Υ
Ψ^p_n	prostorski zlepek
Ψ^t_n	časovni zlepek
Ψ	integralski izraz

Spodnji indeksi

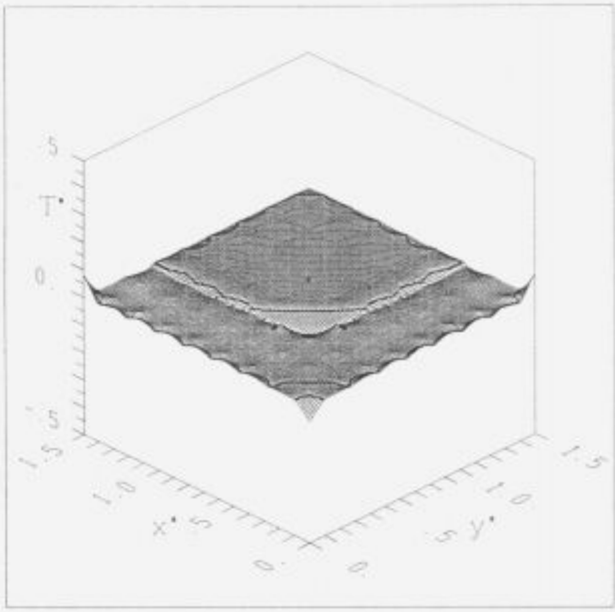
$\mathcal{P}$	faza
$\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$	trdna, tekoča faza
i	iteracijski indeks
jklmnu	sumacijski indeks
ave	povprečje
cal	izračunano
com	primerjalno
max	maksimum
sys	sistem

Zgornji indeksi

D	Dirichletov robni pogoj
N	Neumannov robni pogoj
R	Robinov robni pogoj

Tabela 2: Testni primer II. Absolutna napaka numerično izračunanih temperatur na mreži ${}^2\mathcal{M}, {}^3\Delta T$ ob času $t = 0.1$ za različne latentne toplote in različne širine talilnega intervala. Specifične talilne toplote so zapovrstjo ${}^1H^o_{\mathcal{M}}$, ${}^2H^o_{\mathcal{M}}$ in ${}^3H^o_{\mathcal{M}}$ enake 0.25, 0.50 oziroma 1.00. Prvi dve vrstici sta bili izračunani pri širini talilnega intervala $\Delta T_{\mathcal{M}} = 0.01$ in zadnji dve pri $\Delta T_{\mathcal{M}} = 0.001$.

	specifična talilna toplota		
napaka	${}^1H^o_{\mathcal{M}}$	${}^2H^o_{\mathcal{M}}$	${}^3H^o_{\mathcal{M}}$
T_{max}	0.276	0.513	0.649
T_{ave}	0.093	0.167	0.234
T_{max}	0.175	0.370	0.453
T_{ave}	0.062	0.113	0.150



Slika 2: Testni primer I. Aksonometrični pogled na napako interpolirane rešitve $T^* = T_{cal} - T_{ana}$ pri diskretizaciji ${}^2\mathcal{M}$, ${}^2\Delta t$, $\Delta H^0_{\mathcal{M}} = 0.25$, $\Delta T_{\mathcal{M}} = 0.05$ in ob času $t = 0.1$. Poudarjene krivulje predstavljajo točno rešitev $T^* = 0$. Karakteristično je napaka za vse enoobmočne sheme zaradi ekstrapolacije največja v ogliščih kvadrata in ob medfaznem robu.

Figure 2: Test case I. Spatial view on error of interpolated solution $T^* = T_{cal} - T_{ana}$ using discretization ${}^2\mathcal{M}$, ${}^2\Delta t$, $\Delta H^0_{\mathcal{M}} = 0.25$, $\Delta T_{\mathcal{M}} = 0.05$ at time $t = 0.1$. Bold curves represent accurate solution $T^* = 0$. Due to extrapolation and characteristicaly for one domain schemes the error is maximal on interphase boundary.

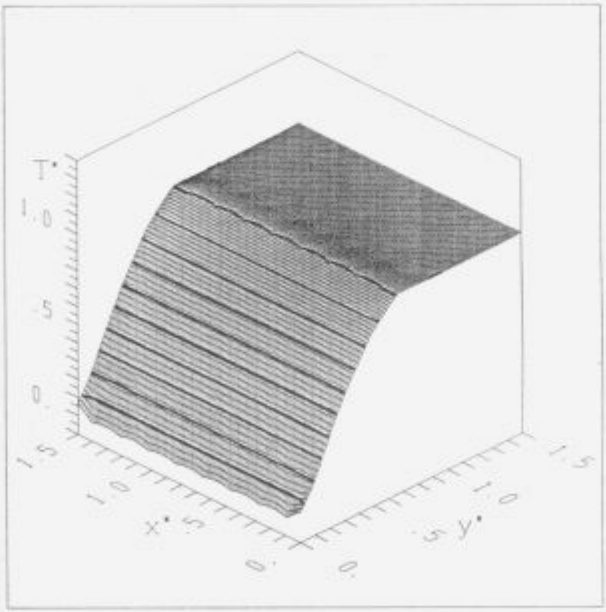
7 Zahvala

Predstavljena raziskava je del osnovnih raziskav projekta Računalniška mehanika taljenja in strjevanja. Avtorja se za podporo zahvaljujeta Ministrstvu za znanost in tehnologijo Republike Slovenije in Mednarodnemu biroju Raziskovalnega centra Jülich, Nemčija. Predstavljena metoda je bila uporabljena za simulacijo vertikalnega polkontinuiranega ulivanja

aluminijevih zlitin v IMPOL Slovenska Bistrica in TALUM Kidričevo, kontinuiranega ulivanja jekel v ACRONI Jesenice in horizon-talnega kontinuiranega ulivanja bakrovih zlitin v Mariborska Livarna Maribor.

Tabela 3: Testni primer I. Absolutna napaka numerično izračunane temperature pri H^o_{SL} = 0.25 in ΔT_{SL} = 0.01 ob času t = 0.1 za različne prostorsko-časovne diskretizacije. Tabela prikazuje konvergenco metode z manjšanjem časovnega koraka in z gostenjem mreže. Čas računanja ene iteracije na mrežah ${}^1M$, ${}^2M$ ali ${}^3M$ je približno 45, 200 oziroma 1000 sekund procesorskega časa na 25 MHz PC s procesorjem i486 in s prevajalnikom NDP Fortran 77.

	dikretizacija				
napaka	${}^1M\,{}^1\Delta T$	${}^1M\,{}^2\Delta T$	${}^1M\,{}^3\Delta T$	${}^2M\,{}^2\Delta T$	${}^3M\,{}^2\Delta T$
T_{max}[K]	0.437	0.372	0.293	0.141	0.088
T_{ave}[K]	0.106	0.089	0.068	0.055	0.014



Slika 3: Testni primer II. Aksonometrični pogled na interpolirano rešitev pri diskretizaciji ${}^2M\,{}^2\Delta t$ z vrednostmi ΔH^o_{SL} = 0.5, ΔT_{SL} = 0.01 ob času t = 0.1. Poudarjene krivulje so izoterme pri T^* = 0.0, 0.1, 0.2, ... , 1.0.

Figure 3: Test case II. Spatial view on interpolated solution using discretization ${}^2M\,{}^2\Delta t$ by ΔH^o_{SL} = 0.5, ΔT_{SL} = 0.01 at time t = 0.1. Bold curves represent isothermes T^* = 0.0, 0.1, 0.2, ... , 1.0.

8 Literatura

1 Šarler, B.- Bibliography on Stefan problem 1992, Technical report IJS-DP-6561, "Jožef Stefan" Institute, Ljubljana, 1992.

2 Wrobel, L.C. and Brebbia, C.A. - An Overview of Boundary Element Applications to Nonlinear Heat Transfer Problems, Nonlinear Computational Mechanics - State of the Art, Ed. Wriggers, P. and Wagner, W., Springer-Verlag, Berlin, pp.226-239, 1991.

3 Šarler, B., Mavko, B. and Kuhn, G. - Chapter 16: A Survey of the Attempts for the Solution of Solid-Liquid Phase Change Problems by the Boundary Element Method, Computational Methodsnderline for Free and Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow, Ed. Wrobel, L.C. and Brebbia, C.A. Computational Engineering Series, Elsevier Applied Science, London, pp.373-400, 1993.

4 Bennon, W.D. and Incropera, F.P. - A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems - I.Model Formulation, Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.30, pp.2161-2170, 1987.

5 Šarler, B., Mavko, B. and Kuhn, G. - A BEM Formulation for Momentum, Energy and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems, Z.angew.Math.Mech., Vol.73, pp.T868-T873, 1993.

6 B.Šarler, B.Mavko, G.Kuhn, Formulation of convection-conduction energy transport in multiconstituent solid-liquid phase change systems for BEM solution techniques, International Journal for Engineering Analysis by Boundary Elements, Vol.11, (1993), pp.109-117.

7 Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C. - The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Elsevier Applied Science, London, 1992.

8 Voller, V.R. and Swaminathan, C.R. - General Source-Based Method for Solidification Phase Change, Num.Heat Transfer, Vol.19B, pp.175-189, 1991.

9 Rathjen, K.A. and Jiji, L.M. - Heat Conduction With Melting or Freezing in a Corner, J.Heat Transfer, Vol.93, pp.101-109, 1971.

10 Stefan, J. - Über Einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, Aus den Şitzungsberichten d.kais.Akademie d.Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw.Classe, Bd.XCVIII.Abth.II.a.März, 1889.

11 Siegel, R. - Boundary Perturbation Method for Free Boundary Problem in Convectively Cooled Continuous Casting, J.Heat Transfer, Vol.230, pp.230-235, 1986.

12 Dalhuijsen, A.L. and Segal, A. - Comparison of Finite Element Techniques for Solidification Problems, Int.J. Numer. Methods Eng., Vol.23, pp.1807-1829, 1986.