MNOŽICE CELOŠTEVILSKIH IN RACIONALNIH RAZDALJ

JANKO BRAČIČ

Naravoslovnotehniška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14G05

V članku predstavimo nekaj rezultatov, povezanih s takšnimi množicami v ravnini, v katerih so vse medsebojne razdalje med točkami cela ali racionalna števila.

SETS OF INTEGRAL AND RATIONAL DISTANCES

We present a few results related to point sets in the plane such that all pairwise distances of points in the set are integral or rational.

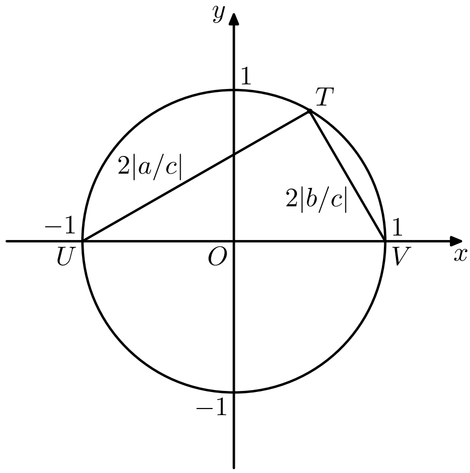
Članek je posvečen profesorju Milanu Hladniku ob njegovem 65. rojstnem dnevu.

Uvod

Podmnožica $\mathcal{S}$ točk v ravnini je *množica racionalnih razdalj*, če je razdalja $\mathrm{d}(A, B)$ med poljubnima točkama $A, B \in \mathcal{S}$ racionalno število. Če pa je razdalja med poljubnima točkama iz $\mathcal{S}$ celo število, rečemo, da je $\mathcal{S}$ *množica celoštevilskih razdalj*.

Verjetno bralcu ne bo težko poiskati primera množice celoštevilskih razdalj s tremi točkami. Še več, enostaven razmislek nas prepriča, da za poljubna naravna števila $p \leq q \leq r$, za katera velja $r \leq p+q$, obstajajo takšne točke A, B in C v ravnini, da je $\mathrm{d}(A, B) = p$, $\mathrm{d}(A, C) = q$ in $\mathrm{d}(B, C) = r$. Kaj pa množica celoštevilskih razdalj, ki ima več kot tri točke? Odgovor je seveda trivialen, če dovolimo, da so točke kolinearne. Očitno vsaka premica vsebuje neskončno podmnožico celoštevilskih razdalj. Preden nadaljuje z branjem, vabim bralca, da poišče štiri nekolinearne točke v ravnini, katerih medsebojne razdalje so naravna števila.

Leta 1945 sta Anning in Erdős [1] dokazala, da je vsaka neskončna množica celoštevilskih razdalj kolinearna. Po drugi strani pa sta pokazala, da za vsako naravno število n obstaja nekolinearna množica celoštevilskih razdalj z močjo n. Še istega leta je Ulam postavil vprašanje, ali obstaja v $\mathbb{R}^2$ gosta množica racionalnih razdalj. On sam je podvomil, da takšna množica res obstaja. Erdős se je k temu problemu občasno vračal v naslednjih desetletjih, a rešitve do danes še nihče ni našel. Tako je trditev, da v $\mathbb{R}^2$ ni goste



Slika 1. Konstrukcija množice racionalnih razdalj na enotski krožnici.

podmnožice racionalnih razdalj, znana kot *Erdős-Ulamova domneva* in je eno izmed mnogih odprtih vprašanj v *diskretni geometriji*.

V tem članku bomo navedli nekaj rezultatov, povezanih z množicami celoštevilskih in racionalnih razdalj. V naslednjem razdelku bomo obravnavali predvsem množice celoštevilskih razdalj in med drugim dokazali omenjeni izrek iz [1]. V tretjem razdelku se bomo ukvarjali z množicami racionalnih razdalj. Videli bomo, katere krožnice imajo goste podmnožice racionalnih razdalj. V zadnjem razdelku bomo na kratko spregovorili o Erdős-Ulamovi domnevi.

Bralec je verjetno že poiskal kakšno množico štirih točk v ravnini, katerih medsebojne razdalje so naravna števila. Če ne, naj se najprej prepriča, da je $\mathcal{S} = \{A(0,0),\ B(5,0),\ C(9,0),\ D(0,12)\}$ takšna množica, potem pa naj poišče takšno točko E v ravnini, da bo tudi $\mathcal{S} \cup \{E\}$ množica celoštevilskih razdalj.

Množice celoštevilskih razdalj

Čeprav bomo v tem razdelku govorili predvsem o množicah celoštevilskih razdalj, začnimo obravnavo z množicami racionalnih razdalj. Da vsaka premica v ravnini vsebuje gosto podmnožico racionalnih razdalj oziroma neskončno podmnožico celoštevilskih razdalj, je trivialno. Kaj pa krožnica? Očitno krožnica ne more vsebovati neskončne podmnožice celoštevilskih razdalj. (V premislek: vsaka omejena množica točk v ravnini ima samo končne podmnožice celoštevilskih razdalj.) Ali vsebuje krožnica gosto podmnožico racionalnih razdalj? Poglejmo enotsko krožnico s središčem v koordinatnem začetku

$$\mathcal{K}(O,1) = \{T(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2+y^2=1\}.$$

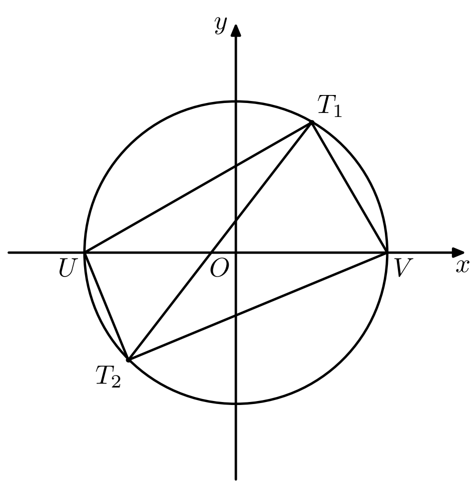
Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, cela števila, za katera velja $a^2+b^2=c^2$. Potem točka $T(\frac{a^2-b^2}{c^2}, \frac{2ab}{c^2})$ očitno leži na krožnici $\mathcal{K}(O,1)$. Njena oddaljenost od točke $U(-1,0) \in \mathcal{K}(O,1)$ je $2|\frac{a}{c}|$ in oddaljenost od $V(1,0) \in \mathcal{K}(O,1)$ je $2|\frac{b}{c}|$. To sta racionalni števili.

Spomnimo, Ptolemajev izrek pravi, da so v tetivnem štirikotniku $ABCD$ stranice in diagonali povezane z enakostjo $|\overline{AC}||\overline{BD}| = |\overline{AB}||\overline{CD}|+|\overline{AD}||\overline{BC}|$. Če sta $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(O,1)$ točki, ki ju določajo cela števila $a_1, b_1, c_1 \neq 0$ oziroma $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ tako, kot smo navedli prej, potem so U, V, T_1 in T_2 oglišča tetivnega štirikotnika, v katerem je daljica $\overline{T_1T_2}$ bodisi stranica bodisi diagonala, vendar je v vsakem primeru njena dolžina racionalni izraz dolžin preostalih stranic in diagonal, ki pa so, kot smo že ugotovili, racionalna števila. Sklenemo torej lahko, da je

$$\mathcal{S} = \left\{T\left(\frac{a^2-b^2}{c^2}, \frac{2ab}{c^2}\right); \quad a,b,c \in \mathbb{Z}, c \neq 0: \ a^2+b^2=c^2\right\} \tag{1}$$

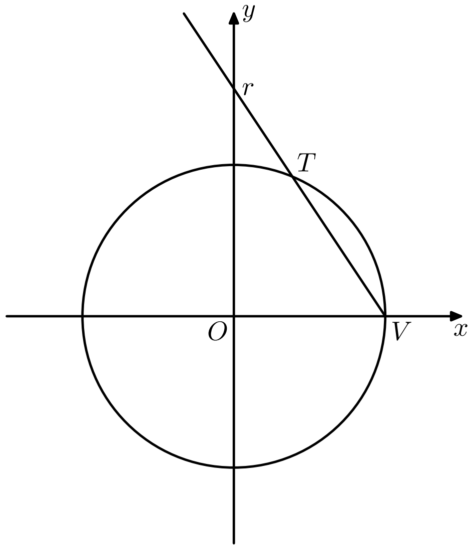
množica racionalnih razdalj. Pokažimo, da je gosta v $\mathcal{K}(O,1)$. Naj bo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{K}(O,1)$ definirana z

$$\varphi: \ r \mapsto T\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}, \frac{2r}{r^2+1}\right) \qquad (r \in \mathbb{R}).$$



Slika 2. Tetivni štirikotnik z racionalnimi stranicami in diagonalami.

To je zvezna preslikava, ki $\mathbb{R}$ bijektivno preslika v $\mathcal{K}(O,1)\setminus\{V(1,0)\}$ (glejte sliko 3). Racionalno število $\frac{p}{q}$, kjer je $p\in\mathbb{Z}$ in $q\in\mathbb{N}$, se preslika v točko



Slika 3. Projekcija krožnice na premico.

$T(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\frac{2pq}{p^2+q^2})\in\mathcal{S}$. Ko $\frac{p}{q}$ preteče celotno množico $\mathbb{Q}$, dobimo množico $\mathcal{S}\setminus\{V(1,0)\}$. Ker je $\mathbb{Q}$ gosta v $\mathbb{R}$, je $\mathcal{S}\setminus\{V(1,0)\}$ gosta v $\mathcal{K}(O,1)\setminus\{V(1,0)\}$ oziroma $\mathcal{S}$ je gosta v $\mathcal{K}(O,1)$. Dokazali smo naslednjo trditev:

Trditev 1. *Krožnica $\mathcal{K}(O,1)$ vsebuje gosto podmnožico racionalnih razdalj.*

Posledica 2. *Za vsako naravno število $n\geq 3$ obstaja nekolinearna množica celoštevilskih razdalj z močjo n.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{S}$ množica iz (1). Izberimo poljubne točke $T_i(x_i,y_i)\in\mathcal{S}$ $(1\leq i\leq n)$. Njihove medsebojne razdalje so pozitivna racionalna števila, recimo

$$\mathrm{d}(T_i,T_j)=\frac{p_{ij}}{q_{ij}},\qquad p_{ij},q_{ij}\in\mathbb{N}\quad(1\leq i<j\leq n).$$

Naj bo v najmanjši skupni večkratnik števil q_{ij} $(1\leq i<j\leq n)$ in naj bo $A_i(vx_i,vy_i)$ za vse $1\leq i\leq n$. Potem so $A_1,\ldots,A_n$ nekolinearne točke, katerih medsebojne razdalje so naravna števila

$$\mathrm{d}(A_i,A_j)=\frac{vp_{ij}}{q_{ij}}\quad(1\leq i<j\leq n).$$ ■

Pokažimo, da velja tudi drugi del Anning-Erdősevega izreka. Uporabili bomo eleganten dokaz, ki ga je Erdős objavil v kratki notici [4].

Trditev 3. *Vsaka nekolinearna množica celoštevilskih razdalj v ravnini je končna.*

Dokaz. Naj bosta $P, Q \in \mathbb{R}^2$ poljubni točki, katerih medsebojna razdalja je naravno število, recimo $\mathrm{d}(P, Q) = k$. Če je $R \in \mathbb{R}^2$ takšna točka, da sta tudi razdalji $\mathrm{d}(P, R)$ in $\mathrm{d}(Q, R)$ naravni števili, potem iz trikotniške neenakosti

$$\mathrm{d}(P, R) \leq \mathrm{d}(P, Q) + \mathrm{d}(Q, R) = k + \mathrm{d}(Q, R)$$

sledi

$$\mathrm{d}(P, R) - \mathrm{d}(Q, R) \leq k.$$

Podobno vidimo, da velja tudi

$$\mathrm{d}(Q, R) - \mathrm{d}(P, R) \leq k.$$

To pomeni, da je

$$|\,\mathrm{d}(P, R) - \mathrm{d}(Q, R)| = j$$

za neko število $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Množica točk

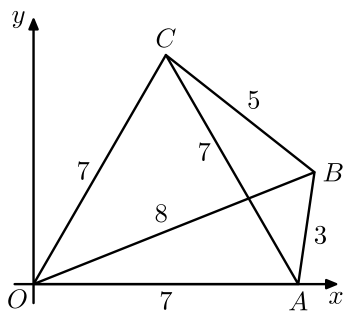
$$\mathcal{H}_j(P, Q) = \{T \in \mathbb{R}^2; \quad |\,\mathrm{d}(P, T) - \mathrm{d}(Q, T)| = j\}$$

je hiperbola z goriščema P in Q, če je $j \in \mathbb{N}$, in je simetrala daljice $\overline{PQ}$, ko je $j = 0$ (na to simetralo lahko gledamo kot na izrojeno hiperbolo z goriščema P in Q). Povzemimo: točka R, za katero sta razdalji $\mathrm{d}(P, R)$ in $\mathrm{d}(Q, R)$ naravni števili, leži na eni od hiperbol $\mathcal{H}_j(P, Q)$, $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Vzemimo zdaj, da je $\mathcal{S}$ nekolinearna množica celoštevilskih razdalj. Naj bodo $A, B, C \in \mathcal{S}$ nekolinearne točke. Označimo $\mathrm{d}(A, C) = m$ in $\mathrm{d}(B, C) = n$. Če je $T \in \mathcal{S}$ točka, različna od točk A, B in C, potem T leži na eni od hiperbol $\mathcal{H}_i(A, C)$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, in na eni od hiperbol $\mathcal{H}_j(B, C)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, torej na presečišču dveh takšnih hiperbol. Ker so A, B, C nekolinearne točke, imata družini hiperbol $\{\mathcal{H}_i(A, C);\ i = 0, 1, \ldots, m\}$ in $\{\mathcal{H}_j(B, C);\ j = 0, 1, \ldots, n\}$ le končno mnogo presečišč. Se pravi, da je v $\mathcal{S}$ lahko le končno mnogo točk. ∎

Množice celoštevilskih razdalj, ki smo jih srečali do sedaj, so bile posebne: bodisi so vse točke ležale na isti krožnici bodisi so vse točke razen kvečjemu ene bile na isti premici. Ali obstajajo množice racionalnih razdalj z veliko točkami, pri čemer pa večina točk ni na isti premici oziroma krožnici? Rekli bomo, da je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ množica točk v *splošni legi*, če nobene tri točke iz $\mathcal{S}$ ne ležijo na isti premici in nobene štiri točke iz $\mathcal{S}$ ne ležijo na isti krožnici. Definicija je netrivialna, če so v $\mathcal{S}$ vsaj štiri točke, zato najprej naloga za bralca: poiščite v $\mathbb{R}^2$ množico celoštevilskih razdalj v splošni legi z vsaj štirimi točkami. Naloga ni tako preprosta, kot se zdi na prvi pogled. Trik, da ogliščem pravokotnega trikotnika s celoštevilskimi stranicami dodamo četrto točko tako, da dobimo pravokotnik s celoštevilskimi stranicami in diagonalama, ni dober, saj ležijo oglišča pravokotnika na isti krožnici in torej niso v splošni legi. Navajamo naslednji zgled:

Zgled 1. Ni težko preveriti, da so točke $O(0,0)$, $A(7,0)$, $B(\frac{52}{7},\frac{12\sqrt{3}}{7})$ in $C(\frac{7}{2},\frac{7\sqrt{3}}{2})$ v splošni legi. To lahko razberemo tudi s slike 4, na kateri smo navedli še medsebojne razdalje med točkami.



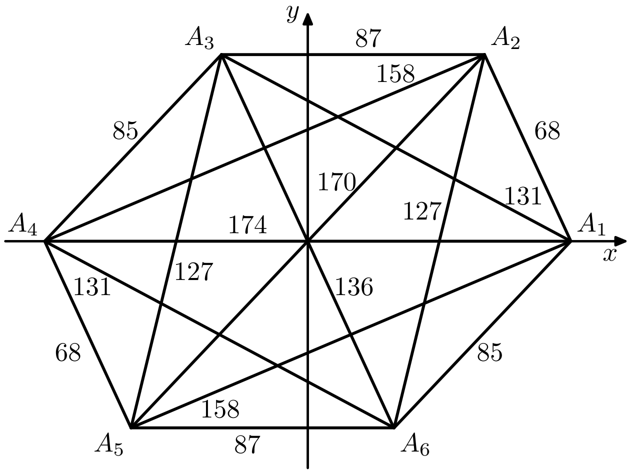
Slika 4. Erdősev štirikotnik.

Bralec se je verjetno prepričal, da poiskati množico celoštevilskih razdalj s štirimi točkami v splošni legi ni enostavna naloga. Toliko zahtevnejše je poiskati primere množic celoštevilskih razdalj s petimi ali celo več točkami v splošni legi. Vendar je takšnih množic kar nekaj. Na sliki 5 je verjetno prvi primer takšne množice s šestimi točkami. Odkril ga je Jean Lagrange okrog leta 1982.

Množicam celoštevilskih razdalj v splošni legi nekateri rečejo *Erdősevi mnogokotniki.* V zgledu 1 je tako naveden primer Erdősevega štirikotnika in Lagrangeeva množica je Erdősev šestkotnik. Dolgo je bilo odprto vprašanje, ali obstajajo Erdősevi sedemkotniki. Problem sta šele pred kratkim rešila Kreisel in Kurz [6]. Našla sta (seveda s pomočjo računalnika) množico celoštevilskih razdalj s sedmimi točkami v splošni legi:

$$A_1(0,0),\ A_2(22\,270,0),\ A_3\Big(\frac{26\,127\,018}{2\,227},\frac{932\,064\sqrt{2002}}{2\,227}\Big),\ A_4\Big(\frac{245\,363}{17},\frac{3\,144\sqrt{2002}}{17}\Big),$$

$$A_5\Big(\frac{17\,615\,968}{2\,227},\frac{238\,464\sqrt{2002}}{2\,227}\Big),\ A_6\Big(\frac{56\,068}{17},\frac{3\,144\sqrt{2002}}{17}\Big),\ A_7\Big(\frac{19\,079\,044}{2227},-\frac{54\,168\sqrt{2002}}{2227}\Big).$$



Slika 5. Lagrangeev primer Erdősevega šestkotnika.

V naslednji tabeli so navedene medsebojne razdalje med temi točkami:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	0	22 270	22 098	16 637	9 248	8 908	8 636
A_2		0	21 488	11 397	15 138	20 698	13 746
A_3			0	10 795	14 450	13 430	20 066
A_4				0	7 395	11 135	11 049
A_5					0	5 780	5 916
A_6						0	10 744
A_7							0

Zdaj, ko je problem Erdősevega sedemkotnika rešen, se postavlja vprašanje, ali obstaja kakšen Erdősev osemkotnik.

Množice racionalnih razdalj

Kot smo videli v trditvi 1, ima krožnica $\mathcal{K}(O,1)$ gosto podmnožico racionalnih razdalj. Ali to velja za vsako krožnico? Da lahko odgovorimo, potrebujemo nekaj splošnih trditev o množicah racionalnih razdalj. Pokažimo, da nekatere preslikave v ravnini preslikajo množice racionalnih razdalj v množice racionalnih razdalj.

Trditev 4. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ množica racionalnih razdalj in naj bodo $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{Q}$ poljubna števila. Potem so tudi*

(i) $\mathcal{S} + (a,b) = \{T(x+a, y+b);\quad T'(x,y) \in \mathcal{S}\}$,

(ii) $r\mathcal{S} = \{T(rx, ry); \quad T'(x,y) \in \mathcal{S}\}$ *in*

(iii) $\rho_\alpha(\mathcal{S}) = \{T(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha); \quad T'(x,y) \in \mathcal{S}\}$ *množice racionalnih razdalj.*

Dokaz. Zlahka preverimo, da trditev velja. Poglejmo, recimo, množico $\rho_\alpha(\mathcal{S})$. Naj bosta $T_1(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$ in $T_2(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha, x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha)$ poljubni točki v $\rho_\alpha(\mathcal{S})$. Potem sta $T_1'(x_1, y_1)$ in $T_2'(x_2, y_2)$ v $\mathcal{S}$, kar pomeni, da velja

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(T_1, T_2) = \\ &\sqrt{((x_2-x_1)\cos\alpha - (y_2-y_1)\sin\alpha)^2 + ((x_2-x_1)\sin\alpha + (y_2-y_1)\cos\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \mathrm{d}(T_1', T_2') \in \mathbb{Q}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem v točki $S(p,q)$ in s polmerom $r > 0$. *Inverzija* glede na krožnico $\mathcal{K}$ je preslikava

$$\iota:\ \mathbb{R}^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{S\},$$

ki točki T priredi tisto točko $T' = \iota(T)$ na poltraku, ki se začne v S in gre skozi T, za katero velja

$$\mathrm{d}(S,T)\,\mathrm{d}(S,T') = r^2.$$

Če ima $T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{S\}$ koordinati (x,y), potem sta koordinati preslikane točke $T' = \iota(T)$ dani z

$$x' = p + \frac{r^2(x-p)}{(x-p)^2 + (y-q)^2} \quad \text{in} \quad y' = q + \frac{r^2(y-q)}{(x-p)^2 + (y-q)^2}. \tag{2}$$

Ni se težko prepričati, da ι preslika T' nazaj v točko T. Od tod sledi, da je ι bijektivna preslikava na prebodeni ravnini $\mathbb{R}^2 \setminus \{S\}$. Če ravnini $\mathbb{R}^2$ dodamo *točko v neskončnosti* S_∞, da dobimo razširjeno ravnino $\widetilde{\mathbb{R}}^2$, potem lahko inverzijo ι razširimo do bijekcije na $\widetilde{\mathbb{R}}^2$, pri čemer velja $\iota(S) = S_\infty$ in $\iota(S_\infty) = S$. Na premice v razširjeni ravnini lahko gledamo kot na krožnice z neskončno velikim polmerom in s središčem v S_∞. Zdaj se ni težko prepričati, da v razširjeni ravnini inverzija preslika krožnice v krožnice (bralec naj premisli, kam se preslikajo krožnice in premice, ki vsebujejo točko S). Poglejmo naslednji poseben primer, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju.

Zgled 2. Za inverzijo glede na krožnico $\mathcal{K}(O,1)$ velja

$$\iota:\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Naj bo $r > 0$. Pokažimo, da ι preslika premico, ki je parametrično podana z $x = r$, $y = t$ ($t \in \mathbb{R}$), v krožnico s središčem v točki $(\frac{1}{2r}, 0)$ in s polmerom $\frac{1}{2r}$. Ker velja

$$\left(\frac{r}{r^2+t^2} - \frac{1}{2r}\right)^2 + \left(\frac{t}{r^2+t^2}\right)^2 = \frac{1}{4r^2},$$

je $\iota(r, t) = \left(\frac{r}{r^2+t^2}, \frac{t}{r^2+t^2}\right)$ res točka na krožnici s središčem v točki $(\frac{1}{2r}, 0)$ in s polmerom $\frac{1}{2r}$. Opazimo, da je točka $(0, 0)$ na tej krožnici. Vanjo se preslika točka v neskončnosti. Naj bo zdaj $(u, v) \neq (0, 0)$ poljubna točka na krožnici s središčem v $(\frac{1}{2r}, 0)$ in s polmerom $\frac{1}{2r}$. Potem kratek račun pokaže, da je $\iota(u, v) = (r, r\frac{v}{u})$, torej točka na premici $x = r$, $y = t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Trditev 5. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ množica racionalnih razdalj. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem v točki $S(p, q) \in \mathcal{S}$ in s polmerom $r > 0$, za katerega velja $r^2 \in \mathbb{Q}$. Če je ι inverzija glede na $\mathcal{K}$, potem je $\iota(\mathcal{S} \setminus \{S\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ množica racionalnih razdalj.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je za poljubni točki $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2) \in \mathcal{S} \setminus \{S\}$ razdalja $\mathrm{d}(\iota(T_1), \iota(T_2))$ racionalno število. Najprej opazimo, da je za poljubno točko $T(x, y) \in \mathcal{S} \setminus \{S\}$ razdalja $\mathrm{d}(S, T) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ racionalno število, saj je $\mathcal{S}$ množica racionalnih razdalj in sta $S, T \in \mathcal{S}$. Koordinati točk $\iota(T_j)$ ($j = 1, 2$) sta (glejte (2))

$$x'_j = p + \frac{r^2(x_j - p)}{(x_j - p)^2 + (y_j - q)^2} \quad \text{in} \quad y'_j = q + \frac{r^2(y_j - q)}{(x_j - p)^2 + (y_j - q)^2}.$$

Z nekaj računanja dobimo

$$\mathrm{d}(\iota(T_1), \iota(T_2)) = r^2 \frac{\mathrm{d}(T_1, T_2)}{\mathrm{d}(S, T_1)\,\mathrm{d}(S, T_2)}.$$

Ker so po predpostavki r^2, $\mathrm{d}(T_1, T_2)$, $\mathrm{d}(S, T_1)$ in $\mathrm{d}(S, T_2)$ racionalna števila, je tudi $\mathrm{d}(\iota(T_1), \iota(T_2))$ racionalno število. ∎

Zdaj lahko povemo, katere krožnice v ravnini imajo goste podmnožice racionalnih razdalj.

Izrek 6. *Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem v točki $S(p, q)$ in s polmerom $r > 0$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(i) r^2 je racionalno število;

(ii) $\mathcal{K}$ ima gosto podmnožico racionalnih razdalj;

(iii) obstajajo tri točke $A, B, C \in \mathcal{K}$, katerih medsebojne razdalje so racionalna števila.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Naj bo $\mathcal{L}$ premica, ki je parametrično podana z $x = \frac{1}{2r}$, $y = t$ $(t \in \mathbb{R})$. Kot smo videli v zgledu 2, preslika inverzija glede na krožnico $\mathcal{K}(O,1)$, označimo jo z ι, premico $\mathcal{L}$ v krožnico

$$\mathcal{K}: \quad (x-r)^2 + y^2 = r^2,$$

natančneje $\iota(\mathcal{L}) = \mathcal{K} \setminus \{O\}$. Množica točk

$$\mathcal{S}_0 = \{(\tfrac{1}{2r}, \tfrac{m}{r^2m^2-1}); \quad m \in \mathbb{Q} \setminus \{\tfrac{1}{r}, -\tfrac{1}{r}\}\}$$

je gosta podmnožica v $\mathcal{L}$. Za poljubni točki $T_1(\frac{1}{2r}, \frac{m_1}{r^2m_1^2-1})$, $T_2(\frac{1}{2r}, \frac{m_2}{r^2m_2^2-1}) \in \mathcal{S}_0$ je

$$\mathrm{d}(T_1,T_2) = \left| \frac{m_1}{r^2m_1^2-1} - \frac{m_2}{r^2m_2^2-1} \right| \in \mathbb{Q},$$

tako da je $\mathcal{S}_0$ množica racionalnih razdalj. Ker je za vsako točko $T(\frac{1}{2r}, \frac{m}{r^2m^2-1}) \in \mathcal{S}_0$ razdalja do koordinatnega začetka O enaka $\mathrm{d}(O,T) = \frac{r^2m^2+1}{r^2m^2-1} \in \mathbb{Q}$, je tudi $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{O\}$ množica racionalnih razdalj. Uporabimo trditev 5, pa vidimo, da je tudi $\iota(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{K}$ množica racionalnih razdalj. Ker je $\mathcal{S}_0$ gosta podmnožica v $\mathcal{L}$, je $\iota(\mathcal{S}_0)$ gosta podmnožica v $\mathcal{K}$, saj je ι zvezna preslikava.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Ta implikacija očitno velja.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Označimo $a = \mathrm{d}(A,B)$, $b = \mathrm{d}(B,C)$ in $c = \mathrm{d}(A,C)$. Krožnica $\mathcal{K}$ je trikotniku ABC očrtana, zato velja

$$r = \frac{abc}{4p},$$

kjer je p ploščina trikotnika ABC. Po Heronovem obrazcu je $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemer je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ polovica obsega. Se pravi, da velja

$$r^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Ker so a, b, c racionalna števila, je tudi r^2 racionalno število. ∎

Za premice in krožnice v ravnini smo ugotovili, kdaj vsebujejo kakšno gosto podmnožico racionalnih razdalj. Kaj pa druge krivulje? V [7] sta Solymosi in de Zeeuw pokazala, da razen premic in krožnic druge algebraične krivulje ne premorejo neskončnih podmnožic racionalnih razdalj (pri tem so mišljene takšne algebraične krivulje, katerih kakšna komponenta ni premica ali krožnica). V posebnem, vsaka podmnožica racionalnih razdalj elipse (ki ni krožnica) ali hiperbole ali parabole je končna. Na primer, za parabolo $y = x^2$ so znane le podmnožice racionalnih razdalj v splošni legi s kvečjemu štirimi točkami. Takšen primer so točke z abscisami

$$x_1 = \frac{539228453671869790410167}{972795087302019959766880 0}, \quad x_2 = \frac{1331012266196114465365521 37}{291838526190605987930064 00},$$
$$x_3 = \frac{1135884384473851748882954 3}{2918385261906059879300640 0}, \quad x_4 = \frac{675673470109327990784143 3}{9727950873020199597668800}.$$

Ker so vse abscise pozitivne, so te točke seveda v splošni legi. Več o podmnožicah racionalnih razdalj parabole $y = x^2$ lahko bralec najde v [2, 3].

Erdős-Ulamova domneva

Na koncu se vrnimo k Erdős-Ulamovi domnevi. Vzemimo, da obstaja gosta podmnožica racionalnih razdalj v $\mathbb{R}^2$, označimo jo s $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$. Ta hipotetična množica ima nekatere zanimive lastnosti. Na primer, Solymosi in de Zeeuw [7, Theorem 2.2] sta dokazala: če ima množica racionalnih razdalj $\mathcal{S}$ na neki premici $\mathcal{L}$ (ali krožnici $\mathcal{K}$) neskončno mnogo točk, potem so vse točke, razen mogoče štirih (oziroma treh), na premici $\mathcal{L}$ (oziroma krožnici $\mathcal{K}$). Od tod sledi, da je za vsako premico $\mathcal{L}$ in vsako krožnico $\mathcal{K}$ presek $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}} \cap \mathcal{L}$ oziroma $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}} \cap \mathcal{K}$ končna množica. Namreč, če bi bil kateri od omenjenih presekov neskončen, bi vse točke iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$, razen mogoče končno mnogo, bile na neki premici oziroma krožnici. To pa nasprotuje predpostavki, da je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta podmnožica v $\mathbb{R}^2$. Že prej smo omenili, da algebraične krivulje, katerih del ni premica ali krožnica, sploh nimajo neskončnih podmnožic racionalnih razdalj. Sklenemo torej lahko, da je presek $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ s katero koli algebraično krivuljo v $\mathbb{R}^2$ končna množica.

Ker je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta podmnožica v $\mathbb{R}^2$, vsebuje vsaj dve različni točki. Z uporabo preslikav iz trditve 4 lahko $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ preoblikujemo v gosto podmnožico racionalnih razdalj v $\mathbb{R}^2$, ki pa vsebuje koordinatni začetek $O(0, 0)$ in točko $V(1, 0)$. Brez škode za splošnost privzemimo, da je že $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ takšna množica. Seveda, ker je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta v $\mathbb{R}^2$, obstaja takšna točka v njej, ki leži v zgornji polravnini, recimo točka $A(a, \sqrt{b})$, kjer je $b > 0$. Če sta $P(p_1, p_2)$ in $Q(q_1, q_2)$ poljubni točki iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$, so števila

$$\mathrm{d}(P, O)^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad \mathrm{d}(Q, O)^2 = q_1^2 + q_2^2 \quad \text{in} \quad \mathrm{d}(P, Q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$

racionalna. Zaradi

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - (p_1 - q_1)^2 - (p_2 - q_2)^2)$$

je racionalno tudi število $p_1 q_1 + p_2 q_2$. Vzemimo za Q točko V, pa dobimo $p_1 \in \mathbb{Q}$. Ugotovili smo, da je abscisa vsake točke iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ racionalno število.

V posebnem, število a, abscisa točke A, je racionalno. Iz $\mathrm{d}(A,O)^2 = a^2 + b \in \mathbb{Q}$ zato sledi, da je $b \in \mathbb{Q}$. Zdaj, ko vemo, da so abscise točk iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ racionalna števila, iz $p_1q_1 + p_2q_2 \in \mathbb{Q}$ sklepamo, da je tudi produkt ordinat p_2q_2 poljubnih dveh točk iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ racionalno število. V posebnem, ko je $Q = A$, dobimo $p_2\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, kar nam da $p_2 = s\sqrt{b}$ za neko racionalno število s (upoštevali smo, da je b racionalno število). Pokazali smo, da je

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}} \subseteq \{T(t, s\sqrt{b});\quad t, s \in \mathbb{Q}\},$$

pri čemer je b neko pozitivno racionalno število. Med drugim od tod sledi, da je množica $\mathcal{S}_{eu}$ števna.

V teoriji grafov je znan Fáryjev izrek, ki pravi, da lahko vsak ravninski graf narišemo tako, da so povezave daljice, ki se ne sekajo. Še vedno pa je odprto vprašanje, znano kot *Harborthova domneva*, ali lahko graf narišemo tako, da bodo povezave daljice, ki se ne sekajo in katerih dolžine so naravna števila. Če je Erdős-Ulamova domneva napačna in torej množica $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ obstaja, potem bi Harborthova domneva veljala: vsak ravninski graf lahko narišemo z daljicami, ki se ne sekajo in katerih dolžine so cela števila. Namreč, če je $\mathcal{G}$ ravninski graf z n vozlišči, potem po Fáryjevem izreku obstajajo takšne točke $V_1, \ldots, V_n$ v ravnini, ki predstavljajo vozlišča grafa, da so vse povezave iz grafa predstavljene z daljicami, ki se ne sekajo. Ker je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta množica, lahko blizu vsake točke V_j $(j = 1, \ldots, n)$ najdemo kakšno točko iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$. Če izberemo točke $V_1', \ldots, V_n' \in \mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ tako, da je V_j' dovolj blizu V_j za vsak indeks $j = 1, \ldots, n$, lahko $\mathcal{G}$ realiziramo na točkah $V_1', \ldots, V_n'$, pri tem pa bodo povezave še vedno daljice. Še več, ker so točke $V_1', \ldots, V_n'$ v $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$, so dolžine daljic racionalna števila. Če zdaj naredimo ustrezen razteg ravnine, dobimo realizacijo grafa $\mathcal{G}$ na nekih točkah $V_1'', \ldots, V_n''$, pri čemer pa so povezave daljice, ki se ne sekajo in imajo celoštevilske dolžine.

LITERATURA

[1] N. Anning in P. Erdős, *Integral distances*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 598–600.

[2] G. Campbell, *Points on $y = x^2$ at rational distance*, Math. Comp. **73** (2004), 2093–2108.

[3] A. Choudhry, *Points at rational distances on a parabola*, Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), 413–424.

[4] P. Erdős, *Integral distances*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), str. 996.

[5] P. Erdős, *Some combinatorial and metric problems in geometry*, v: *Intuitive Geometry*, Coll. Math. Soc. János Bolyai **48** (1987), 167–177.

[6] T. Kreisel in S. Kurz, *There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle*, Discrete Comput. Geom. **39** (2008), 786–790.

[7] J. Solymosi in F. de Zeeuw, *On a question of Erdős and Ulam*, Discrete Comput. Geom. **43** (2010), 393–401.