NIK - SPIELMANN

GEOMETRISCHE ANSCHAUUNGSLEHRE

FÜR

UNTER - GYMNASIEN

II.

PER ASPERA AD ASTRA

Močniks

Geometrische Anschauungslehre

für

Unter-Gymnasien.

Bearbeitet von

Johann Spielmann,

k. k. Schulrat, Direktor der Staatsrealschule im IV. Bez. in Wien.

II. Abteilung

(für die III. und IV. Klasse).

Mit 91 Figuren.

Zweiundzwanzigste, wesentlich unveränderte Auflage.

Mit hohem k. k. Ministerialerlaß vom 8. März 1904, Z. 7692, allgemein zulässig erklärt.

Preis, geheftet 1 K, gebunden 1 K 50 h.

WIEN.

Verlag von F. Tempsky.

1904.

Bemerkung.

Bei der Bearbeitung der 21. und 22. Auflage sollte den Instruktionen vom Jahre 1900 Rechnung getragen werden, ohne die 20. Auflage die mit Ausschluß aller übrigen approbiert worden war, nach kurzer Zeit neuerdings unbrauchbar zu machen. Für den gleichzeitigen Gebrauch beider Auflagen in derselben Klasse schien Übereinstimmung in den Paragraphen- und Figurennummern notwendig. Daher konnten die nicht mehr zum Lehrstoff gehörigen Teile, deren Umfang übrigens unbedeutend ist, nicht ausgeschieden werden, sie wurden aber durch kleinen Druck erkenntlich gemacht. Dagegen waren an einigen Stellen kurze Ergänzungen notwendig: § 9, II; § 14, 4; § 15, 3; § 27, 5 und 6; § 41, 3; § 42, 5; die Erklärung des sphärischen Winkels, Zweieckes und Dreieckes in § 128 und § 130.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

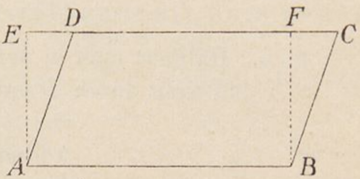
I. Flächengleichheit der ebenen Figuren.

§. **1.** Die Größe der Fläche, welche die Grenzlinien einer Figur einschließen, heißt der *Flächeninhalt* dieser Figur.

Zwei Figuren, welche denselben Flächeninhalt haben, heißen *flächengleich*. Zwei kongruente Figuren sind auch flächengleich.

§. **2.** Errichtet man (Fig. 1) in den Endpunkten A und B des schiefwinkligen Parallelogrammes $ABCD$ zu der Seite AB die Normalen AE und BF, so erhält man das Rechteck $ABFE$, welches mit dem Parallelogramme $ABCD$ gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Die rechtwinkligen Dreiecke BFC und AED sind kongruent; addiert man jedes derselben zu dem Trapeze $ABFD$, so müssen auch die Summen gleich sein, d. i. $ABCD = ABFE$.

Fig. 1.



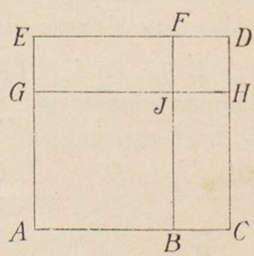
Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist also flächengleich einem Rechtecke, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Aus diesem Lehrsatze folgt:

Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

§. **3.** Unter dem *Rechtecke zweier Strecken* versteht man das Rechteck, welches diese Strecken zu Seiten hat; unter dem *Quadrate einer Strecke* versteht man das Quadrat, welches diese Strecke zur Seite hat.

Fig. 2.



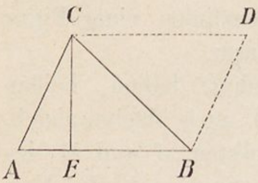
Es sei (Fig. 2) AC die Summe der Strecken AB und BC und $ACDE$ das Quadrat dieser Streckensumme. Macht man $AG = AB$, zieht $BF \parallel AE$ und $GH \parallel AC$, so ist $ACDE = ABJG + DFJH + BCHJ + FEGJ$.

Nun ist, wie aus der Figur hervorgeht, $ABJG$ das Quadrat der Strecke AB und $DFJH$ das Quadrat der Strecke BC, ferner sowohl $BCHJ$ als auch $FEGJ$ ein Rechteck mit den Strecken AB und BC. Man hat somit folgenden Satz:

Das Quadrat einer Streckensumme ist gleich der Summe der Quadrate der zwei Strecken vermehrt um das doppelte Rechteck beider Strecken.

§. 4. Zieht man (Fig. 3) durch zwei Eckpunkte B und C eines Dreieckes ABC Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht das Parallelogramm $ABDC$, welches mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat und von welchem das Dreieck ABC die Hälfte ist.

Fig. 3.



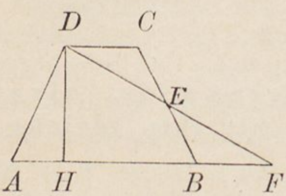
Jedes Dreieck ist demnach die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Hieraus folgt auch:

Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

§. 5. Halbiert man in dem Trapeze $ABCD$ (Fig. 4) den Schenkel BC in E und zieht durch D und E die Gerade, welche die Verlängerung von AB in F trifft, so ist $\triangle CDE \cong BFE$. Addiert man zu dem Vierecke $ABED$ einmal das $\triangle CDE$ und dann das $\triangle BFE$, so müssen also die Summen gleich sein, d. i. Trapez $ABCD$ = Dreieck AFD.

Fig. 4.

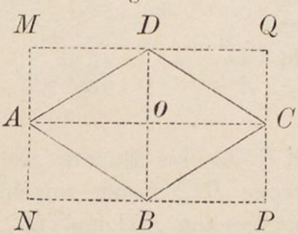


Da nun in dem $\triangle AFD$ die Grundlinie $AF = AB + BF = AB + CD$, also gleich der Summe der Parallelseiten des Trapezes, und die Höhe DH gleich der Höhe des Trapezes ist, so folgt:

Jedes Trapez ist flächengleich einem Dreiecke, das die Summe der parallelen Seiten zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat.

§. 6. Es sei $ABCD$ (Fig. 5) ein Viereck, dessen Diagonalen zueinander normal sind. Zieht man durch die Eckpunkte des Viereckes zu den Diagonalen parallele Gerade, so schließen diese ein Rechteck $MNPQ$ ein, dessen Seiten den Diagonalen des gegebenen Viereckes gleich sind. Da nun dieses Rechteck aus zwei kleineren Rechtecken besteht, $AMQC$ und $ANPC$, von denen die Dreiecke ADC und ABC einzeln die Hälfte sind, so folgt:

Fig. 5.

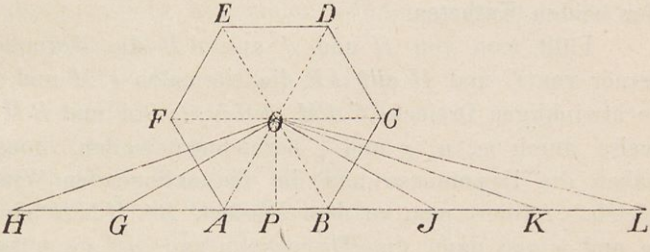


Ein Viereck mit Diagonalen, die zueinander normal sind, ist die Hälfte eines Rechteckes, welches die beiden Diagonalen zu Seiten hat.

Solche Vierecke sind insbesondere das Deltoid, der Rhombus und das Quadrat.

§. 7. Es sei (Fig. 6) O der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygons $ABCDEF$ und $OP \perp AB$. Zieht man die Strecken OA, OB, OC,.., so wird das Polygon in lauter kongruente Dreiecke zerlegt. Trägt man nun alle Seiten des Polygons auf der verlängerten AB auf und zieht von den Endpunkten zu dem Punkte O Strecken, so ist $\triangle HOL = \triangle AOB \times 6$ (§. 4), Polygon $ABCDEF = \triangle AOB \times 6$, daher Polygon $ABCDEF = \triangle HOL$.

Fig. 6.



J e d e s r e g e l m ä ß i g e P o l y g o n i s t a l s o f l ä c h e n g l e i c h e i n e m D r e i e c k e, d a s d e n U m f a n g d e s P o l y g o n s z u r G r u n d l i n i e u n d d e n A b s t a n d s e i n e s M i t t e l p u n k t e s v o n e i n e r S e i t e z u r H ö h e h a t. (Seitenradius)

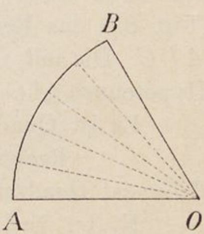
§. 8. 1. Läßt man in einem regelmäßigen Polygon die Anzahl der Seiten ohne Ende zunehmen, so nähert sich das Polygon ohne Ende einem Kreise, der Umfang des Polygons der Peripherie und der Abstand des Mittelpunktes des Polygons von einer Seite dem Halbmesser des Kreises. Aus §. 7 folgt daher auch der Satz:

E i n K r e i s i s t f l ä c h e n g l e i c h e i n e m D r e i e c k e, d a s d i e P e r i p h e r i e d e s K r e i s e s z u r G r u n d l i n i e u n d d e n H a l b m e s s e r z u r H ö h e h a t.

2. Ebenso ergibt sich:

E i n K r e i s s e k t o r i s t f l ä c h e n g l e i c h e i n e m D r e i e c k e, d a s d i e L ä n g e d e s K r e i s b o g e n s z u r G r u n d l i n i e u n d d e n H a l b m e s s e r z u r H ö h e h a t.

Fig. 7.



Denkt man sich nämlich den Bogen des Kreissektors AOB (Fig. 7) in sehr kleine Bogen geteilt, die man als Strecken betrachten kann, und zieht man zu den Teilungspunkten Halbmesser, so erscheint der Kreissektor als eine Summe von Dreiecken, deren Grundlinien zusammen den Bogen AB des Sektors geben und deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser OA ist. Die Summe dieser Dreiecke ist aber flächengleich einem einzigen Dreiecke, das die Länge des Kreisbogens zur Grundlinie und den Halbmesser des Sektors zur Höhe hat.

§. **9.** Es sei in dem $\triangle ABC$ (Fig. 8*a*) der Winkel A ein rechter. Beschreibt man über der Hypotenuse BC und den Katheten AB und AC die Quadrate $BCJH$, $ABED$ und $ACGF$, so läßt sich zeigen, daß das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Fällt man von H und J auf AB die Normalen HK und JL, ferner von C und H auf JL die Normalen CM und HN, so sind die rechtwinkligen Dreiecke CJM, JHN, CBA und BHK, die wir folgeweise durch m, n, p und q bezeichnen wollen, kongruent; denn sie haben die Hypotenuse und die ihr anliegenden Winkel wechselseitig gleich. Addiert man zu dem Fünfeck $BCMNH$ einmal die Dreiecke m und n und dann die Dreiecke p und q, so müssen die Summen gleich sein. Im ersten Falle erhält man zur Summe das Quadrat $BCJH$,

Fig. 8*a*.

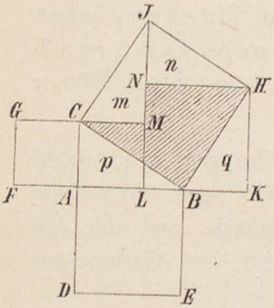


Fig. 8*b*.

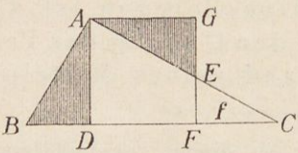
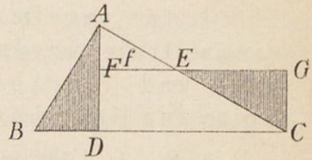


Fig. 8*c*.



im zweiten Falle die beiden Quadrate $NHKL$ und $ACML$, welche bezüglich mit den Quadraten $ABED$ und $ACGF$ kongruent sind. Es ist demnach

Quadrat $BCJH$ = Quadrat $ABED$ + Quadrat $ACGF$; d. h.

I. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten. (Pythagoreischer Lehrsatz.)

Durch die Höhe AD auf die Hypotenuse wird das Dreieck ABC (Fig. 8*b*) in zwei rechtwinklige Dreiecke ABD und ADC zerschnitten; legt man das kleinere ABD mit seiner Hypotenuse einmal bei A, dann bei C an AC, so ist $ADFG$ (Fig. 8*b*) das Höhenquadrat, $DFGC$ (Fig. 8*c*) das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten des Dreieckes ABC. Die mit f bezeichneten Dreiecke sind kongruent, weil sie in der Hypotenuse $(AC - AB)$ und in den anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Es ist Quadrat $ADFG = ABC - f$,

Rechteck $DFGC = ABC - f$;

daher ist Quadrat $ADFG$ = Rechteck $DFGC$.

II. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Höhenquadrat gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse.

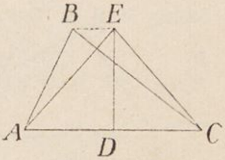
Konstruktionsaufgaben.

Verwandlung geradliniger Figuren.

§. **10.** Eine geradlinige Figur in eine andere verwandeln heißt, eine Figur konstruieren, welche bestimmten Bedingungen entspricht und mit der gegebenen flächengleich ist.

Ein Dreieck ABC (Fig. 9) mit Beibehaltung der Grundlinie in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Fig. 9.

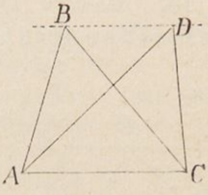


Zieht man durch B die Parallele zu AC, so sind alle Dreiecke, die AC zur Grundlinie haben und deren Scheitel in jener Parallelen liegen, flächengleich. Soll das Dreieck überdies gleichschenklig sein, so ist die Symmetrale von AC der geometrische Ort für den Scheitel. Daher ist AEC das gesuchte Dreieck.

§. **11.** 1. Ein Dreieck ABC (Fig. 10) mit Beibehaltung einer Seite AC in ein anderes zu verwandeln, das an dieser Seite einen gegebenen Winkel m enthält.

Man ziehe durch B die zu AC parallele Gerade und konstruiere in A an AC den Winkel $CAD = m$, dessen zweiter Schenkel jene Parallele in D schneidet. Zieht man dann CD, so ist ACD das verlangte Dreieck.

Fig. 10.

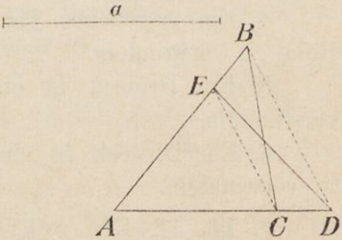


2. Ein gegebenes Dreieck in ein an der Grundlinie rechtwinkliges zu verwandeln.

§. **12.** 1. Ein Dreieck ABC (Fig. 11) mit Beibehaltung eines Winkels A in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

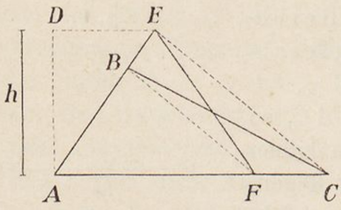
Man trage a auf AC von A aus bis D auf und ziehe BD; ferner ziehe man $CE \parallel BD$ und verbinde D und E durch die Strecke DE. Die beiden Dreiecke CED und CEB haben dieselbe Grundlinie CE und gleiche Höhe, sind also gleich. Fügt man zu ACE das Dreieck CDE hinzu, so erhält man ADE; addiert man aber zu ACE das Dreieck CBE, so hat man ABC; es ist daher das Dreieck ADE, welches die Grundlinie a hat, dem gegebenen Dreiecke ABC gleich.

Fig. 11.



2. Ein Dreieck ABC (Fig. 12) mit Beibehaltung eines Winkels A in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Fig. 12.



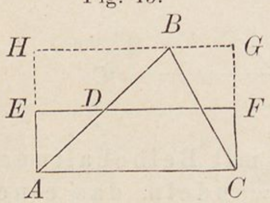
Man errichte in A auf AC die Normale, schneide davon $AD = h$ ab, ziehe durch D die Parallele zu AC, welche die verlängerte Seite AB in E trifft. Zieht man nun EC, ferner $BF \parallel EC$ und endlich EF, so ist AEF das verlangte Dreieck.

3. Konstruiere ein Dreieck mit den Seiten 4 *cm*, 3 *cm* (Grundlinie) und 2 *cm* und verwandle dasselbe

a) in ein gleichschenkliges Dreieck über der Grundlinie 3 *cm*;
b) in ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete 3 *cm*;
c) in ein Dreieck mit einem Winkel von 60°;
d) in ein Dreieck mit der Grundlinie 35 *mm*, (22 *mm*);
e) in ein Dreieck mit der Höhe 26 *mm*, (15 *mm*);
f) in ein Dreieck mit einem Winkel 30° und der Grundlinie 5 *cm*;
g) in ein Dreieck mit dem Winkel 45° und der Höhe 25 *mm*!

§. **13.** 1. Ein Dreieck ABC (Fig. 13) in ein Rechteck von derselben Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 13.



Man errichte in A und C die Normalen auf AC und ziehe durch B die Parallele zu AC. Dann ist das Rechteck $ACGH$ doppelt so groß als das Dreieck ABC. Macht man $AE = EH$ und zieht $EF \perp$ zu AH, so ist das Rechteck $ACFE$ gleich dem Dreieck ABC.

2. Ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck von derselben Höhe zu verwandeln.

3. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck von derselben Grundlinie zu verwandeln.

4. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck von derselben Höhe zu verwandeln.

5. Ein Dreieck in ein Parallelogramm von derselben Höhe zu verwandeln.

6. Ein Dreieck in ein Parallelogramm von derselben Grundlinie zu verwandeln.

§. **14.** 1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Auflösung ist schon §. 2 angeführt worden.

2. Ein gegebenes Parallelogramm mit Beibehaltung der Grundlinie in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel enthält.

Die Auflösung ist jener der Aufgabe in §. 11, 1 ähnlich.

3. Ein gegebenes Parallelogramm mit Beibehaltung der Winkel in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Die Verwandlung kann mit Rücksicht auf §. 12, 1 ausgeführt werden.

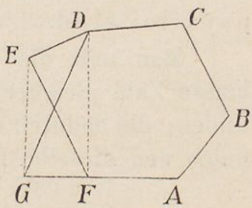
4. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Die Aufgabe kann mit Benützung des zweiten Flächensatzes in §. 9 gelöst werden.

§. **15.** 1. Ein Polygon $ABCDEF$ (Fig. 14) in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.

Man ziehe die Diagonale DF und die mit ihr Parallele EG, welche die verlängerte AF in G trifft. Zieht man DG, so ist das Polygon $ABCDG$ gleich dem Polygon $ABCDEF$, weil beide aus gleichen Teilen bestehen.

Fig. 14.



2. Zeichne ein beliebiges Sechseck und verwandle es in ein Dreieck!

Das Sechseck wird in ein Fünfeck, dieses in ein Viereck und dieses in ein Dreieck verwandelt.

3. Ein Polygon in ein Quadrat zu verwandeln.

§. **16.** 1. Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich den Seiten der gegebenen Quadrate sind; die Hypotenuse dieses Dreieckes ist die Seite des verlangten Quadrates.

2. Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse der Seite des größeren und dessen eine Kathete der Seite des kleineren gegebenen Quadrates gleich ist; die zweite Kathete ist dann die Seite des gesuchten Quadrates.

3. Zeichne ein Quadrat, welches der Summe dreier gegebener Quadrate gleich ist!

4. Zeichne ein Quadrat, welches *a)* das Doppelte, *b)* das Dreifache, *c)* die Hälfte eines gegebenen Quadrates ist!

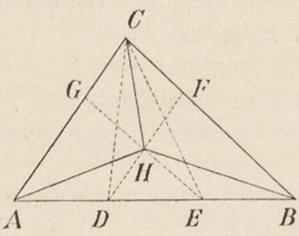
Teilung geradliniger Figuren.

§. **17.** 1. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Teile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in so viele gleiche Teile, als verlangt werden, und verbinde die Teilungspunkte durch Strecken mit jenem Eckpunkte!

2. Ein Dreieck ABC (Fig. 15) in drei gleiche Teile so zu teilen, daß die Teilungslinien von den drei Eckpunkten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

Fig. 15.



Man teile eine Seite AB in den Punkten D und E in drei gleiche Teile und ziehe CD und CE; dann sind die Dreiecke ACD, DCE, BCE gleich. Zieht man nun $DF \parallel AC$ und $EG \parallel BC$, so sind die vom Schnittpunkte H aus gezogenen Geraden AH, BH, CH die gesuchten Teilungslinien. Denn es ist $\triangle ACH = \triangle ACD = \frac{1}{3} \triangle ABC$, ferner $\triangle BCH = \triangle BCE = \frac{1}{3} \triangle ABC$; daher muß auch $\triangle ABH = \frac{1}{3} \triangle ABC$ sein.

§. **18.** Ein Parallelogramm in mehrere gleiche Teile so zu teilen, daß alle Teilungslinien zu einer Seite parallel sind.

Man teile die dieser Seite anliegenden Gegenseiten in die verlangte Zahl gleicher Teile und ziehe durch die Teilungspunkte gerade Linien; die dadurch entstehenden Parallelogramme haben gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe und sind daher einander gleich.

II. Ausmessung der ebenen Figuren.

1. Ausmessung der geradlinigen Figuren.

Umfang und Flächeninhalt.

§. **19.** Bei der Ausmessung der ebenen Gebilde kommen der Umfang und der Flächeninhalt derselben in Betracht.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, hat man die Summe aller Seitenlängen zu bilden. Ist die Figur gleichseitig, so ist der Umfang gleich der Länge einer Seite multipliziert mit der Anzahl der Seiten.

Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt daher keiner weiteren Schwierigkeit.

§. **20.** Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, d. i. um die Fläche der Figur zu messen, muß man irgend eine bestimmte Fläche als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft dieselbe in der gegebenen Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Fläche.

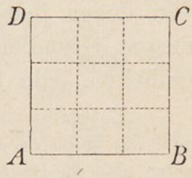
Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein Quadratmeter (m^2), ein Quadratdezimeter (dm^2), ..., je nachdem die Seite einem Meter, Dezimeter, ... gleich ist.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht übrigens nicht durch unmittelbares Auftragen der genannten Quadratmaße auf die zu messende Fläche, da dieses sehr mühsam und meistens auch unausführbar wäre. Man bestimmt vielmehr den Flächeninhalt mittelbar, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße mißt und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch Rechnung findet.

Das Quadrat.

§. **21.** Beträgt eine Seite des Quadrates $ABCD$ (Fig. 16) 3 dm, so zerfällt, wenn man jede Seite in 3 gleiche Teile teilt und die gegenüberstehenden Teilungspunkte durch Strecken verbindet, das gegebene Quadrat in lauter kleinere Quadrate, deren jedes 1 dm^2 darstellt; und zwar enthält der Streifen längs der Seite AB 3 dm^2, der darüber befindliche Streifen ebenfalls 3 dm^2 und der dritte Streifen auch 3 dm^2. Man hat also im ganzen 3 mal 3 dm^2 = 9 dm^2.

Fig. 16.



Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert; oder kürzer: der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz einer Seite.

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch s und die Maßzahl seines Flächeninhaltes durch f, so ist

$$f = s^2.$$

Sind S und F die Maßzahlen der Seite und des Flächeninhaltes eines zweiten Quadrates, so ist auch $F = S^2$, daher

$$F : f = S^2 : s^2, \text{ d. h.}$$

Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

§. **22.** Ein Quadrat, dessen Seite 10 dm ist, hat $10 \times 10\, dm^2 = 100\, dm^2$; ein solches Quadrat ist nun 1 m^2; daher ist

$$1\, m^2 = 100\, dm^2.$$

Ebenso folgt:

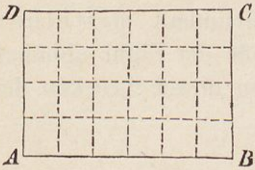
$$1\, dm^2 = 100\, cm^2,$$
$$1\, cm^2 = 100\, mm^2.$$

100 m^2 nennt man als Bodenflächenmaß ein Ar (a), 100 Ar oder 10000 m^2 ein Hektar (ha).

Das Rechteck und das Parallelogramm überhaupt.

§. 23. 1. Es sei der Flächeninhalt des Rechteckes $ABCD$ (Fig. 17), in welchem die Grundlinie $AB = 6$ *cm* und die Höhe $AD = 4$ *cm* ist, zu bestimmen.

Fig. 17.



Teilt man AB in 6, AD in 4 gleiche Teile und zieht zu denselben durch die Teilungspunkte parallele Linien, so ist ein jedes der dadurch entstehenden Quadrate 1 cm^2 und man hat 4 Streifen solcher Quadrate, je von 6 cm^2; der Flächeninhalt des Rechteckes $ABCD$ beträgt daher 4mal 6 $cm^2 = 24$ cm^2. Durch ähnliche Zeichnungen und Schlüsse findet man, daß ein Rechteck, welches 7 *m* lang und 3 *m* breit ist, 7×3 Flächeneinheiten, von denen jede 1 m^2 ist, enthält; daß die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie und Höhe 8 *dm* und 5 *dm* sind, 8×5 Flächeneinheiten, jede 1 dm^2, enthält.

Enthalten die Maßzahlen der Seiten Brüche, ist z. B. die Grundlinie $= 4\frac{3}{4}$ *m* und die Höhe $= 3\frac{1}{2}$ *m*, so bringe man sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner, setze also die Grundlinie $4\frac{3}{4}$ $m = \frac{19}{4}$ *m* und die Höhe $= 3\frac{1}{2}$ $m = \frac{7}{2}$ $m = \frac{14}{4}$ *m*. Nimmt man nun $\frac{1}{4}$ *m* als Einheit des Längenmaßes an, so ist dieselbe in der Grundlinie 19mal, in der Höhe 14mal enthalten; also enthält das Rechteck 19×14 Quadrate, deren Seite $\frac{1}{4}$ *m* ist. Solche Quadrate gehen aber 16 auf 1 m^2. Man erhält also die Maßzahl des Flächeninhaltes eines Rechteckes auf m^2 bezogen, wenn man das Produkt 19×14 durch 16 dividiert; dieselbe ist somit

$$\frac{19 \times 14}{16} = \frac{19}{4} \times \frac{14}{4} = \frac{19}{4} \times \frac{7}{2}.$$

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes wird also gefunden, wenn man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe (oder die Maßzahl der *Länge* mit jener der *Breite*) *multipliziert.*

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Rechteckes und f die Maßzahl seines Flächeninhaltes, so ist

$$f = g . h.$$

Wird das Produkt zweier Faktoren durch den einen Faktor dividiert, so erhält man den andern Faktor. Es ist daher

$$g = \frac{f}{h} \text{ und } h = \frac{f}{g}.$$

2. Aus dem obigen Satze und §. 2 folgt allgemein:

Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Drückt man durch G und g die Maßzahlen der Grundlinien, durch H und h die Maßzahlen der Höhen zweier Parallelogramme und durch F und f die Maßzahlen ihrer Flächeninhalte aus, so ist:

1) $F:f = G.H:g.h.$

2) Für $G = g$ hat man $F:f = H:h$.

3) Für $H = h$ hat man $F:f = G:g$.

Welche Sätze ergeben sich aus diesen Proportionen?

Das Dreieck und das Trapez.

§. 24. 1. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe. (§. 4 und §. 23, 2.)

Wird in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete als Grundlinie angenommen, so stellt die andere Kathete die Höhe vor.

Bezeichnen g und h die Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe eines Dreieckes und f seinen Flächeninhalt, so hat man

$$f = \frac{gh}{2} = \frac{g}{2}.h = g.\frac{h}{2};\ g = \frac{2f}{h} \text{ und } h = \frac{2f}{g}.$$

Für die Flächenverhältnisse der Dreiecke ergeben sich hieraus analoge Beziehungen wie in §. 23 für die Flächenverhältnisse der Parallelogramme.

2. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Maßzahl der Summe der Parallelseiten und der Maßzahl der Höhe. (§. 5 und §. 24, 1.)

Sind a und b die Maßzahlen der Parallelseiten, h die Maßzahl der Höhe, so ist $f = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{a+b}{2}\,h = (a+b)\,\frac{h}{2}$; da $\frac{a+b}{2}$ die Mittellinie m des Trapezes ist, so ist auch $f = mh$.

Die Maßzahl des Flächeninhaltes eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Mittellinie und der Höhe.

Das Viereck mit zueinander normalen Diagonalen.

§. 25. 1. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rhombus oder eines Deltoids ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der beiden Diagonalen. (§. 6 und §. 23, 1.)

2. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der Hälfte der zweiten Potenz der Maßzahl der Diagonale.

Das Vieleck.

§. **26.** 1. Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen des Umfanges und des Abstandes des Mittelpunktes von einer Seite. (§. 7 und §. 24, 1.)

Bezeichnen a, r, u und f folgeweise die Maßzahlen für die Seite eines regelmäßigen n-Eckes, für den Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite, für den Umfang und den Flächeninhalt, so ist

$$u = na \text{ und } f = \frac{ur}{2} = \frac{na.r}{2}; \text{ und umgekehrt}$$

$$a = \frac{u}{n}, \; u = \frac{2f}{r}, \; r = \frac{2f}{u} \text{ und } a = \frac{2f}{nr}.$$

2. Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Polygons kann man auf eine der folgenden Arten bestimmen:

a) Man zerlege das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, berechne den Inhalt jedes derselben und addiere alle Dreiecksflächen.

b) Man ziehe durch die zwei entferntesten Eckpunkte eine Strecke und fälle auf diese von allen übrigen Eckpunkten Normale; dadurch zerfällt das Polygon in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und dann addiert werden.

Aufgaben.

§. **27. Konstruktionsaufgaben.**

Die Richtigkeit folgender Gleichungen durch geometrische Konstruktion zu beweisen.

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (§. 3).

2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, wenn $a > b$ ist (Fig. 18).

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, wenn $a > b$ ist (Fig. 19).

4. $(a+b)c = ac + bc$ (Fig. 20) und für $a > b$ $(a-b)c = ac - bc$.

Die geometrische Darstellung der Formeln 4 veranschaulicht die Addition oder Subtraktion zweier Rechtecke von gleichen Grundlinien oder gleichen Höhen.

5. Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien oder gleichen Höhen *a)* zu addieren, *b)* zu subtrahieren.

6. Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien oder gleichen Höhen *a)* zu addieren, *b)* zu subtrahieren.

Fig. 18.

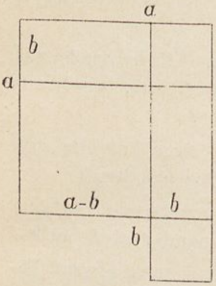


Fig. 19.

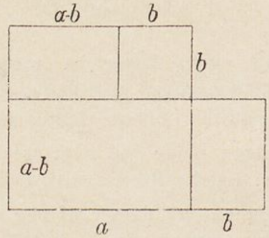
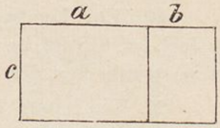


Fig. 20.



§. **28.** Rechnungsaufgaben.

1. Die Seite eines Quadrates ist *a*) 21 *m*, *b*) 3·417 *m*, *c*) 6 *dm* 4 *cm* 5 *mm*; wie groß ist der Umfang, wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates?

2. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Umfang 2·58 *m* beträgt?

3. Der Umfang eines Quadrates ist *a*) 2·8 *m*, *b*) 4 *m* 3 *dm* 8 *cm*, *c*) 19·356 *dm*; wie groß ist eine Seite, wie groß ist der Flächeninhalt?

4. Wie groß ist die Summe der Quadrate zweier Strecken, deren eine 5·3 *dm*, die andere 8 *dm* 5 *cm* lang ist?

5. Ein Garten bildet ein Quadrat, eine Seite mißt 22·5 *m*; wie groß ist die Gartenfläche?

6. Wie viel kosten 12 quadratförmige Glastafeln von 4·8 *dm* Seitenlänge, wenn das m^2 zu 6 K 80 h gerechnet wird?

7. Die Grundlinie eines Rechteckes beträgt 23 *dm*, die Höhe 15 *dm*; wie groß ist *a*) der Umfang, *b*) der Flächeninhalt?

8. Bestimme den Flächeninhalt folgender Rechtecke:

a) Länge = 14 *cm*, Breite = 8 *cm*;
b) „ = 7·4 *m*, „ = 3·5 *m*;
c) „ = $18\frac{1}{2}$ *dm*, „ = $14\frac{3}{4}$ *dm*!

9. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechteckes, das 53·2 *dm* lang ist und dessen Breite $\frac{3}{14}$ der Länge beträgt?

10. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 24 *m*, die Grundlinie ist 9·2 *m*; wie groß ist die Höhe?

11. Ein Rechteck ist 9·4 *dm* breit und hat 86·2 *dm* im Umfange; wie groß ist *a*) die Länge, *b*) der Flächeninhalt des Rechteckes?

12. Ein Rechteck hat 34 dm^2 Inhalt und 8 *dm* Länge; wie groß ist die Breite?

13. Der Umfang eines Rechteckes mißt 210 *m*, die Grundlinie ist doppelt so lang als die Höhe; wie groß ist *a*) die Grundlinie, *b*) die Höhe, *c*) der Flächeninhalt?

14. Wie vielmal so groß wird die Fläche eines Rechteckes, wenn man die Länge und die Breite verdoppelt?

15. Um wie viel wird der Inhalt eines Rechteckes von 4·56 *dm* Länge und 3·45 *dm* Breite kleiner, wenn jede Seite um 0·75 *dm* kleiner wird?

16. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Deltoids, dessen Diagonalen 4·52 *dm* und 2·15 *dm* sind?

17. Bestimme den Flächeninhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen *a*) 3·5 *dm* und 5·4 *dm*, *b*) 1·04 *m* und 0·85 *m* sind!

18. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Diagonale *a*) 2 *m*, *b*) 3·5 *m*, *c*) 1 *m* 4 *dm* 8 *mm* ist?

19. Ein Quadrat hat denselben Umfang wie ein Rechteck mit den Seiten 48 *m* und 32 *m*; um wie viel ist der Flächeninhalt des ersteren größer als der des letzteren?

20. Ein Landmann kauft einen Acker im angegebenen Flächenmaße von $1\frac{1}{2}$ Joch = 0·8632 *ha*. Er mißt denselben und findet als Länge 284 *m*, als Breite 30 *m*; wurde ihm das Flächenmaß des Ackers richtig angegeben?

21. Von einem 283 *m* langen Felde will man eine gleich lange Parzelle von 38·205 *a* Flächeninhalt abteilen; welche Breite wird diese Parzelle erhalten?

22. Wie viel Bäume können an dem Umfange eines Gartens von 144·2 *m* Länge und 82·6 *m* Breite gesetzt werden, wenn sie 4·2 *m* voneinander abstehen?

23. In einem Zimmer sind 54 m^2 Wandfläche zu tapezieren; man nimmt Tapeten von 48 *cm* Breite; wie viel Stück Tapeten braucht man, wenn jedes Stück $2\frac{1}{2}$ *m* lang ist?

24. Ein Stück Land von 270 *m* Länge und 150 *m* Breite soll mit einem andern von gleichem Inhalte, das $\frac{5}{6}$ der Länge des ersteren hat, vertauscht werden: wie breit muß das letztere sein?

25. Eine Wiese ist 104·8 *m* lang und 47·5 *m* breit; wie viel Heu gibt sie, wenn man auf 1 *a* durchschnittlich 28 *kg* Heu rechnet?

26. Wie teuer kommt ein Bauplatz von 25 *m* Länge und 19 *m* Breite, wenn das m^2 mit $7\frac{3}{5}$ K bezahlt wird?

27. Ein Spiegel ist 2 *m* 8 *dm* hoch und 1 *m* 9 *dm* breit; der Rahmen ist 4 *cm* breit; wie groß ist der Inhalt der sichtbaren Spiegelfläche?

28. Ein Acker ist 124 *m* lang und 20 *m* breit; wie viel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf 1 *ha* 3·5 *hl* Weizen aussät?

29. *A* läßt einen quadratförmigen Garten von 27 *m* Seitenlänge, *B* einen flächengleichen, rechteckigen Garten von 45 *m* Länge mit einer Mauer umgeben; welcher hat eine längere Umfassungsmauer herzustellen?

30. Ein Hausgang von 14·4 *m* Länge und 2·2 *m* Breite soll mit Platten belegt werden. Wie viel Platten wird man brauchen, wenn jede 3 *dm* lang und 2 *dm* breit ist? Wie teuer kommt das Belegen, wenn jede Platte samt Einlegen auf $3\frac{3}{5}$ K kommt?

31. Jemand besitzt einen rechtwinkligen Garten, welcher 64·5 *m* lang und 41·2 *m* breit ist. Er will an dessen Umfange ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 3·4 *m* haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

32. Durch die Mitte eines rechtwinkligen Gartens von 32·4 *m* Länge und 20·7 *m* Breite geht sowohl nach der Länge als nach der Breite ein 1·6 *m* breiter Weg; wie viel Gartengrund bleibt übrig?

---

33. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 2·4 *dm*, 2·7 *dm* und 3 *dm* sind?

34. Wie groß ist der Umfang eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite *a*) 1·5 *m*, *b*) 17·5 *cm* ist?

35. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist 2·6 *dm*, jeder Schenkel 2·1 *dm*; wie groß ist der Umfang?

36. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Umfang 5 *m* 76 *cm* beträgt?

37. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes ist 4·89 *m*, die Grundlinie 1·25 *m*; wie groß ist jeder Schenkel?

38. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Grundlinie 54 *cm*, dessen Höhe 35 *cm* ist?

39. Berechne den Flächeninhalt folgender Dreiecke:

a) Grundlinie 18 *cm*, Höhe 16 *cm*; 144
b) „ 2·345 *m*, „ 1·724 *m*; 2·02139
c) „ $25\frac{2}{5}$ *dm*, „ $14\frac{1}{2}$ *dm*! 179·15 ($\frac{3}{20}$)

40. Suche den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten sind: *a*) 7·9 *m* und 3·9 *m*; *b*) 49·5 *dm* und 37·8 *dm*!

41. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist 27 m^2 56 dm^2 25 cm^2, eine Kathete 5 *m* 25 *cm*; wie groß ist die andere Kathete?

42. Welche Höhe hat ein Dreieck von 12 *m* Grundlinie, das an Inhalt einem Rechtecke von 15·2 *m* Grundlinie und 8·4 *m* Höhe gleich ist?

43. Wie groß ist die Höhe eines Dreieckes von 8·1 *m* Grundlinie, das einem Quadrate von 5·4 *m* Seitenlänge flächengleich ist?

44. Zwei Seiten eines Dreieckes sind 345 *cm* und 450 *cm*, und die Höhe, welche der ersten Seite entspricht, beträgt 157·5 *cm*; wie groß ist die Höhe in Bezug auf die zweite Seite?

45. Ein Dach hat die Form eines Dreieckes mit 11·2 *m* Grundlinie und 8·5 *m* Höhe; wie groß ist seine Fläche?

46. Ein Trapez hat 4·5 *m* Höhe, die parallelen Seiten sind 6·8 *m* und 4·2 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

47. Suche den Flächeninhalt eines Trapezes, wenn gegeben sind:

a) die Parallelseiten 3·4 *dm* und 7·2 *dm*, die Höhe 4·2 *dm*;
b) „ „ 12·745 *m* und 8·655 *m*, „ „ 8·8 *m*!

48. In einem Trapeze, dessen Inhalt 567 cm^2 beträgt, sind die Parallelseiten 3·6 *dm* und 2·7 *dm*; wie weit stehen sie voneinander ab?

49. Ein Trapez mißt 124·8 dm^2, die Höhe beträgt 6·4 *dm*, eine der beiden parallelen Seiten 12·8 *dm*; wie groß ist die zweite Parallelseite?

50. Ein Bauplatz bildet ein Trapez, dessen Parallelseiten 35·2 *m* und 33·5 *m* betragen und welches 21·4 *m* zur Höhe hat; wie groß ist dessen Flächeninhalt?

51. Eine Wiese hat die Form eines Trapezes, dessen Parallelseiten 140·7 *m* und 109·3 *m* sind und dessen Inhalt 1·5 *ha* beträgt; wie groß ist der Abstand der Parallelseiten?

52. Ein Hofraum von der Form eines Trapezes, dessen Parallelseiten 20·4 *m* und 18·5 *m* sind und 15 *m* voneinander abstehen, soll mit Steinplatten, deren jede 25 dm^2 deckt, gepflastert werden; wie viel solche Platten sind zur Pflasterung nötig?

53. Ein trapezförmiger Garten, der 9·6 *m* breit und an dem einen Ende 20·75 *m*, an dem andern 14·25 *m* lang ist, wurde für 924 K gekauft; wie hoch kam 1 m^2 zu stehen?

54. Ein Ackerstück, das 112 *m* lang, an dem einen Ende 56·2 *m* und an dem andern 43·8 *m* breit ist, soll mit Roggen besät werden; wie viel Roggen ist zur Aussaat erforderlich, wenn man auf 32 *a* 1 *hl* Roggen rechnet?

55. Die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes ist 4·7 *dm*; wie groß ist der Umfang?

56. Ein Quadrat hat 3·6 *m* zur Seite; wie groß muß die Seite eines regelmäßigen Sechseckes sein, damit dieses mit dem Quadrate gleichen Umfang habe?

57. In einem Trapezoide ist die durch zwei Eckpunkte gezogene Diagonale 5·24 *dm* lang, ihre Abstände von den beiden andern Eckpunkten sind 3·56 *dm* und 2·35 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Viereckes?

Berechne den Flächeninhalt folgender Polygone:

Fig. 21.

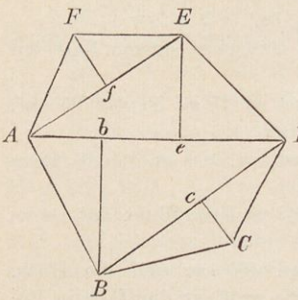
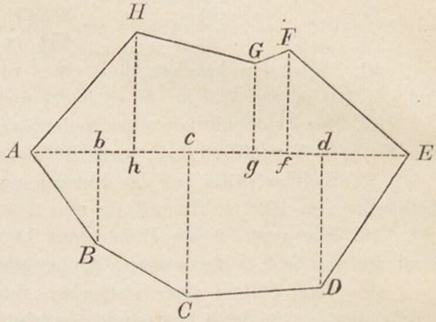


Fig. 22.



58. In dem Polygon $ABCDEF$ (Fig. 21) ist gegeben: $AD = 19{\cdot}6\ m$, $Bb = 10{\cdot}6\ m$, $Ee = 7{\cdot}8\ m$, $BD = 17{\cdot}7\ m$, $Cc = 3{\cdot}8\ m$, $AE = 14{\cdot}3\ m$, $Ff = 5{\cdot}2\ m$.

59. In dem Polygon $ABCDEFGH$ (Fig. 22) ist gegeben: $Bb = 6{\cdot}8\ m$, $Cc = 10{\cdot}6\ m$, $Dd = 10{\cdot}1\ m$, $Ff = 8{\cdot}3\ m$, $Gg = 6{\cdot}2\ m$, $Hh = 9{\cdot}2\ m$; ferner $Ab = 5{\cdot}6\,m$, $bh = 2{\cdot}6\ m$, $hc = 4{\cdot}2\ m$, $cg = 4{\cdot}6\ m$, $gf = 3\ m$, $fd = 2{\cdot}8\ m$, $dE = 5{\cdot}8\ m$.

2. Ausmessung des Kreises.

Länge der Peripherie.

§. 29. Ein einem Kreise eingeschriebenes Vieleck hat einen kleineren, ein umgeschriebenes Vieleck einen größeren Umfang als der Kreis. Der Umfang des dem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen, regelmäßigen Sechseckes ist $6\ r$, der Umfang des diesem Kreise umgeschriebenen Quadrates $8\,r$. Die Peripherie des Kreises ist sonach größer als der dreifache und kleiner als der vierfache Durchmesser, oder die Zahl, welche angibt, wie oft der Durchmesser in der Peripherie enthalten ist, liegt zwischen 3 und 4. Diese Verhältniszahl bezeichnet man mit π, dem Anfangsbuchstaben des griechischen Wortes „Peripherie".

Man kann für π auf mechanischem Wege einen Näherungswert erhalten, wenn man einen dünnen Faden in mehreren Windungen um einen Zylinder legt, aus der Länge des Fadens und der Anzahl der Windungen die Länge einer Windung bestimmt und diese dann durch den Durchmesser des Zylinders dividiert. Man findet auf diese Weise, daß der Durchmesser in der Peripherie nahezu 3·14mal enthalten ist oder daß π nahezu gleich $3{\cdot}14$ oder $\frac{22}{7}$ ist.

Auf geometrischem Wege kann man π auch auf folgende Weise bestimmen. Berechnet man den Umfang des regelmäßigen ein- und umgeschriebenen n-Eckes, so erhält man einen unteren und einen oberen Grenzwert für die Peripherie des Kreises. Diese Grenzwerte werden der Zahl für die Peripherie des Kreises um so näher kommen, je größer n ist, das heißt je mehr Punkte das ein- und umgeschriebene Vieleck mit der Peripherie des Kreises gemeinsam hat.

Bezeichnet man mit u und U die Umfänge des ein- und umgeschriebenen, regelmäßigen n-Eckes und mit d die Länge des Kreisdurchmessers, so ergeben die Berechnungen:

für das	6-Eck	$u = d \times 3$	$U = d \times 3 \cdot 464102..$
„ „	12-Eck	$u = d \times 3 \cdot 105828..$	$U = d \times 3 \cdot 215390..$
„ „	24-Eck	$u = d \times 3 \cdot 132629..$	$U = d \times 3 \cdot 159660..$
	...		
„ „	3072-Eck	$u = d \times 3 \cdot 141592..$	$U = d \times 3 \cdot 141594..$

Da nun die Peripherie des Kreises immer zwischen den Umfängen der ein- und der umgeschriebenen Vielecke liegt, so ist der Durchmesser in der Peripherie annähernd 3·14159..mal enthalten, oder $\pi = 3 \cdot 14159..$ und die Peripherie des Kreises $= d \times 3 \cdot 14159..$

Die Zahl $\pi = 3 \cdot 14159..$, welche also das Verhältnis zwischen der Peripherie und dem Durchmesser eines Kreises ausdrückt, heißt nach Ludolph von Ceulen, der sie auf 35 Dezimalen berechnet hat, die Ludolphische Zahl. Auf 10 Dezimalen genau ist

$$\pi = 3 \cdot 1415926536...$$

In Rechnungen, welche keine große Genauigkeit erfordern, werden für π die Zahlen 3·14..., 3·1416..., oder $\frac{22}{7}$ gebraucht.

Die Zahl π wurde ihrer Wichtigkeit wegen auf mehrere Arten mit großer Genauigkeit berechnet und es ergab sich, daß die Darstellung in einer endlichen Zahl nicht möglich ist, daß also die Aufgabe: eine Gerade zu konstruieren, welche so lang ist als die Peripherie des Kreises, nur angenähert gelöst werden kann.

§. **30.** Drückt man durch r, d und p bezüglich die Maßzahlen des Halbmessers, des Durchmessers und der Peripherie eines Kreises aus, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden:

1. $p = d\pi$, 2. $p = 2r\pi$; d. h.

a) Die Peripherie des Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser oder doppelten Halbmesser und der Ludolphischen Zahl.

Ferner folgt:

$$3.\ d = \frac{p}{\pi}, \qquad 4.\ r = \frac{p}{2\pi} = \frac{p}{2} : \pi;$$

b) Der Durchmesser eines Kreises ist gleich der Peripherie dividiert durch die Ludolphische Zahl;

c) Der Halbmesser eines Kreises ist gleich der Peripherie dividiert durch die doppelte Ludolphische Zahl oder gleich der halben Peripherie dividiert durch die Ludolphische Zahl.

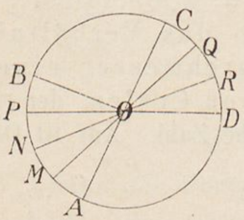
Sind R und r die Halbmesser, D und d die Durchmesser, P und p die Peripherien zweier Kreise, so ist

$P = D\pi$ und $p = d\pi$, daher $P : p = D : d = R : r$; d. h.

d) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser oder wie ihre Halbmesser.

§. **31.** Wenn (Fig. 23) die Winkel AOM, MON, NOP, POB, COQ, QOR, ROD einander gleich sind, so müssen auch die Bogen AM, MN, NP, PB, CQ, QR, RD und ebenso auch die zu diesen Bogen gehörigen Kreissektoren gleich sein.

Fig. 23.



Es ist daher nicht nur der Winkel AOM in dem Winkel AOB 4 mal und in COD 3 mal enthalten, sondern es kommt ebenso der Bogen AM in AB 4 mal, in CD 3 mal vor; und es ist auch der Kreissektor AOM in dem Sektor AOB 4 mal, in COD 3 mal enthalten, so daß:

Winkel $AOB : COD = 4 : 3$,
Bogen $AB : CD = 4 : 3$,
Sektor $AOB : COD = 4 : 3$.

Daraus folgt:

Zwei Bogen wie auch zwei Sektoren desselben Kreises verhalten sich so wie die ihnen entsprechenden Zentriwinkel.

§. **32.** Ein Bogen kann im Gradmaße durch Grade, Minuten und Sekunden oder im Längenmaße durch die Längeneinheit gemessen werden. Durch das Gradmaß ist nur das Verhältnis des Bogens zum ganzen Umfang bestimmt.

Um einen Kreisbogen, der im Gradmaße gegeben ist, im Längenmaße und umgekehrt zu bestimmen, wendet man den aus §. 31 hervorgehenden Satz an:

Die Länge eines Bogens verhält sich zu der Peripherie wie der entsprechende Zentriwinkel zu 360^0.

Bezeichnet in einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, b das Längenmaß eines Kreisbogens, dessen Gradmaß m ist, der also dem Zentriwinkel m^0 entspricht, so hat man nach diesem Satze

$$b : 2r\pi = m^0 : 360^0, \text{ oder}$$
$$b : r\pi = m^0 : 180^0,$$

aus welcher Proportion jede der drei Größen b, m, r berechnet werden kann, wenn die beiden andern gegeben sind. Man erhält

$$b = \frac{mr\pi}{180}, \quad m = \frac{180b}{r\pi} \text{ und } r = \frac{180b}{m\pi}.$$

Man erhält für

1 Bogengrad $= r\pi : 180 = 0{\cdot}017453293\ldots \times r$,
1 Bogenminute $= r\pi : 10800 = 0{\cdot}000290888\ldots \times r$,
1 Bogensekunde $= r\pi : 648000 = 0{\cdot}000004848\ldots \times r$.

Flächeninhalt des Kreises.

§. **33.** 1. Aus §. 8, 1 und §. 24, 1 folgt:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie und dem Halbmesser.

Sind r, p und f bezüglich die Maßzahlen des Halbmessers, der Peripherie und des Flächeninhaltes eines Kreises, so hat man

$$f = \frac{p.r}{2} = \frac{p}{2}.r = p.\frac{r}{2}.$$

2. Aus $f = p.\frac{r}{2}$ folgt wegen $p = 2r\pi$ auch

$$f = 2r\pi.\frac{r}{2}, \text{ oder } f = r^2\pi; \text{ d. h.}$$

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Ludolphischen Zahl.

3. Wenn R und r die Halbmesser, F und f die Flächeninhalte zweier Kreise ausdrücken, so ist

$$F = R^2\pi \text{ und } f = r^2\pi,$$

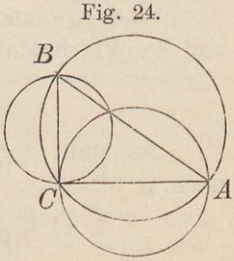
daher $$F : f = R^2 : r^2; \text{ d. h.}$$

Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Ein Kreis mit einem 2-, 3-, 4mal so großen Halbmesser hat daher einen 4-, 9-, 16mal so großen Flächeninhalt.

§. **34.** Ist ABC (Fig 24) ein bei C rechtwinkliges Dreieck und beschreibt man über den drei Seiten als Durchmessern Kreise, so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

Fig. 24.



$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

daher auch $\frac{AB^2}{4} = \frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4}$, oder

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2;$$

folglich, wenn man die letzten Ausdrücke mit π multipliziert,

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2\pi = \left(\frac{AC}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{BC}{2}\right)^2\pi.$$

Diese drei Größen bedeuten nun nach der Reihe die Flächen der über der Hypotenuse und über den beiden Katheten beschriebenen Kreise.

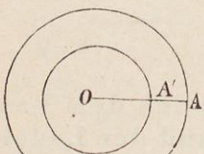
Der Flächeninhalt des über der Hypotenuse beschriebenen Kreises ist also gleich der Summe aus den Flächeninhalten der beiden über den Katheten beschriebenen Kreise.

Beschreibe einen Kreis, welcher *a)* der Summe, *b)* der Differenz zweier gegebener Kreise gleich ist!

Einen Kreis zu zeichnen, welcher *a)* das Doppelte, *b)* die Hälfte eines gegebenen Kreises ist.

Dieselben Aufgaben bezüglich der Peripherien zu lösen.

Fig. 25.



§. **35.** Den Flächeninhalt eines Kreisringes zu finden.

Sind $OA = R$ und $OA' = r$ (Fig. 25) die Halbmesser der beiden konzentrischen Kreise und f der Flächeninhalt des Kreisringes, so hat man:

$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi.$$

(In Worten?)

§. **36.** Für den Flächeninhalt eines Kreissektors folgt aus §. 8, 2 und §. 24, 1 der Satz:

Der Flächeninhalt eines Kreissektors ist gleich dem halben Produkte aus der Länge seines Bogens und dem Halbmesser.

Sind r, b und f die Maßzahlen des Halbmessers, der Bogenlänge und des Flächeninhaltes eines Kreissektors, so hat man

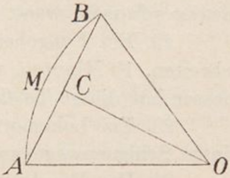
$$f = \frac{b \, . \, r}{2}.$$

Ist statt der Bogenlänge b das Gradmaß m^0 gegeben, so ist nach §. 32

$$b = \frac{m\,r\,\pi}{180}, \text{ folglich } f = \frac{m\,r^2\pi}{360} \text{ und } m^0 = \frac{360^0 f}{r^2\pi}.$$

Zusatz. Wenn man zu den Endpunkten der Sehne AB (Fig. 26), welche dem Kreissegmente ABM entspricht, Halbmesser zieht, so erhält man den Kreissektor AOB, welcher aus jenem Segmente und aus dem Dreiecke AOB zusammengesetzt ist. Zieht man daher vom Inhalte des Sektors den Inhalt des Dreieckes ab, so gibt die Differenz den Flächeninhalt des Kreissegments.

Fig. 26.



§. 37. Aufgaben.

1. Der Durchmesser eines Kreises ist *a)* 3 *m*, *b)* $2\frac{1}{2}$ *m*, *c)* 0·56 *m*, *d)* 5·48 *dm*; wie groß ist die Peripherie?

2. Der Halbmesser eines Kreises ist *a)* 3·7 *m*, *b)* 16·5 *m*, *c)* 1·205... *m*; wie groß ist die Peripherie?

3. Die Peripherie eines Kreises beträgt *a)* 5 *m*, *b)* 27 *dm*, *c)* 339·202... *cm*, *d)* 2506·99... *mm*; wie groß ist der Durchmesser? (π = 3·1416...)

4. Suche den Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie beträgt: *a)* 44 *dm*, *b)* 18·2 *cm*, *c)* 1 *m* 5 *dm* 3 *cm*!

5. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Halbmesser beträgt: *a)* 4 *m*, *b)* 2·92 *m*, *c)* 3·28 *dm*, *d)* $41\frac{1}{4}$ *cm*!

6. Der Durchmesser eines Kreises ist *a)* 3·75 *m*, *b)* 21·02 *dm*, *c)* 1 *m* 5 *cm*, *d)* 259·3... *mm*; wie groß ist *m)* die Peripherie, *n)* der Flächeninhalt?

7. Die Peripherie eines Kreises ist *a)* 17·97 *dm*, *b)* 5 *m* 8 *dm* 5 *mm*, *c)* $219\frac{1}{2}$ *mm*; wie groß ist *m)* der Halbmesser, *n)* der Flächeninhalt?

8. Wie lang ist ein Bogen von 20 Grad, wenn der Durchmesser des Kreises 5·4 *dm* beträgt?

9. Der Halbmesser eines Kreises ist 2 *dm*; wie groß ist die Länge eines Bogens von *a)* 30^0, *b)* 125^0, *c)* $75^0\ 30'$?

10. Ein Kreisbogen von 48^0 hat 426 *mm* Länge; wie groß ist der Halbmesser?

11. Der Bogen eines Kreises von 22·5 *cm* Durchmesser ist 29 *cm* lang; wie viel Grade umspannt der Bogen?

12. Der Halbmesser eines Kreises ist 8 *dm*; wie viel Grade enthält der Zentriwinkel, welcher zu einem Bogen von *a)* 5 *dm*, *b)* 12 *dm*, *c)* 2 *dm* 28 *mm* Länge gehört?

13. Wie viele Grade, Minuten und Sekunden hat der Kreisbogen, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist?

14. Welchen Umfang hat das Zifferblatt einer Turmuhr, dessen Durchmesser 0·96 *m* beträgt?

15. Ein Baumstamm hat an seinem dicken Ende 16 *dm* 2 *cm* im Umfange; wie groß ist der Durchmesser?

16. Man rechnet einen Grad des Erdäquators zu 15 geogr. Meilen; wie groß ist der Halbmesser des Äquators *a)* in geogr. Meilen, *b)* in *km*, da 1 geogr. Meile = 7·42044... *km* ist? (π = 3·14159...)

17. Ein Erdglobus hat 42 *cm* im Durchmesser; wie lang ist daran ein Grad des Äquators?

18. Die Stadt Graz hat eine geographische Breite von $47^0\ 4'$; wie viel *km* ist sie vom Äquator entfernt, wenn man den Meridian als einen Kreis von 6371·56 *km* Halbmesser annimmt?

19. Ein Grad des Parallelkreises unserer Erde, welcher durch Triest geht, hat 77·961, des Parallelkreises durch Wien 74·314, des Parallelkreises durch Prag 71·554 *km* Länge; wie groß ist der Halbmesser eines jeden dieser drei Parallelkreise?

20. Wie groß muß der Halbmesser eines runden Tisches gemacht werden, wenn 8 Personen daran sitzen sollen und man für jede 7·2 *dm* vom Umfange rechnet?

21. Wie viel Bäume kann man um einen kreisrunden Teich von 87 *m* Durchmesser pflanzen, wenn jeder 4 *m* vom andern entfernt sein soll?

22. Ein Fußgeher braucht, um den Umfang eines kreisrunden Teiches abzuschreiten, 10 Minuten, wenn er in jeder Sekunde 1·2 *m* zurücklegt; welchen Durchmesser hat dieser Teich?

23. Ein Lokomotivrad hat 1·2 *m* Durchmesser; wie vielmal muß es sich auf einem Schienenwege von 1 *km* umdrehen?

24. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist 25 *cm*; wie tief ist der Brunnen, wenn das Seil, welches bis auf den Boden reicht, 15 mal um die Winde geht?

25. Das Vorderrad eines Wagens hat 1·2 *m*, das Hinterrad 1·7 *m* im Durchmesser; wie viele Umläufe macht jenes mehr als dieses auf einer Entfernung von 4 *km*?

26. Wie groß ist der Druck der Luft auf eine Kreisfläche von 1·2 *m* Durchmesser, wenn der Luftdruck auf 1 cm^2 1·033 *kg* beträgt?

27. Der Umfang eines Baumstammes an der Schnittfläche ist 2·3 *m*; wie groß ist die Schnittfläche?

28. Wie groß ist der innere und der äußere Umfang eines eisernen Ringes, welcher 2·6 *cm* stark und im Lichten 3 *dm* weit ist?

29. Ein kreisrunder Turm hat in seinem Innern einen Umfang von 25·2 *m*, von außen einen Umfang von 35 *m*; wie dick ist das Gemäuer?

30. Die Halbmesser zweier konzentrischer Kreise sind *a*) $R = 6\,m$, $r = 4\,m$; *b*) $R = 35\,dm$, $r = 28\,dm$; wie groß ist die Fläche des Kreisringes?

31. Die Peripherien zweier konzentrischer Kreise sind 137 *cm* und 152 *cm*; wie groß ist der zwischen ihnen enthaltene Kreisring?

32. Der Durchmesser eines Kreises ist 1 *m*; wie groß ist der konzentrisch ausgeschnittene Kreis, wenn der Ring 1·7 *dm* breit ist?

33. Um einen kreisrunden Grasplatz, welcher 28 *m* 4 *dm* im Umfange hat, geht ein Weg von 1 *m* 4 *dm* Breite; welche Fläche nimmt dieser Weg ein?

---

34. Wie groß ist der Inhalt eines Kreissektors, dessen Halbmesser 3·24 *dm* und dessen Bogenlänge 4·5 *dm* ist?

35. Die Peripherie eines Kreises beträgt 249 *mm*; wie groß ist der Inhalt eines Sektors, dessen Zentriwinkel 75° beträgt?

36. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Sektors, dessen Bogen die Länge von 2·7 *dm* und das Gradmaß von 75° hat?

37. Wie viel Grade umfaßt der Bogen eines Kreissektors von 11·82743 dm^2 Inhalt, wenn der Halbmesser 5 *dm* ist? ($\pi = 3{\cdot}14159\ldots$)

38. Um wie viel ist die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser 8·5 *cm* größer als die Fläche des eingeschriebenen Quadrates?

39. Ein Tischler schneidet von einer hölzernen Kreisscheibe von 1·2 *m* Umfang ringsherum 0·5 *dm* ab; wie groß ist *a*) der Umfang, *b*) der Flächeninhalt der noch übrig bleibenden Scheibe?

40. Ein Schwungrad von 12 *m* Umfang macht in einer Minute 40 Umläufe; welche Geschwindigkeit hat ein Punkt seiner Peripherie, d. h. wie viel *m* legt er in einer Sekunde zurück?

41. Welchen Durchmesser muß ein Rad haben, wenn es während 1 Minute 72 Umläufe machen und ein Punkt seiner Peripherie 21 *m* Geschwindigkeit haben soll?

42. Wie viele Umläufe muß ein Mühlstein von 1 *m* Durchmesser in 1 Minute machen, damit ein Punkt seiner Peripherie eine Geschwindigkeit von 8 *m* erlange?

43. In eine kreisrunde Büchse von 2·8 *cm* Durchmesser gehen 100 Zündhölzchen; wie viel Zündhölzchen von derselben Dicke gehen in eine Büchse, deren Durchmesser 4 *cm* beträgt?

44. Auf einer Zielscheibe sind eine weiße und vier schwarze Ringflächen; der äußere weiße Ring ist 32 *cm*, jeder schwarze 2 *cm* breit; die Mitte der Scheibe bildet ein Kreis von 6 *cm* Durchmesser. Wie groß ist *a*) die ganze Zielscheibe, *b*) die mittlere Kreisfläche, *c*) jeder Kreisring?

III. Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

1. Proportionalität der Strecken.

§. **38.** Unter dem Verhältnisse zweier Strecken versteht man den Quotienten ihrer Maßzahlen in Beziehung auf eine und dieselbe Einheit.

Um das Verhältnis zweier Strecken in Zahlen auszudrücken, trage man die kleinere Strecke auf der größeren so oft auf, als es angeht.

a) Ist die kleinere Strecke CD (Fig. 27) in der größeren AB mehrmal, z. B. 3mal enthalten, so daß kein Rest übrig bleibt, so ist CD ein Maß von AB; das Verhältnis der Strecken AB und CD ist in diesem Falle gleich 3 : 1.

Fig. 27.

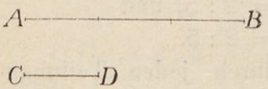
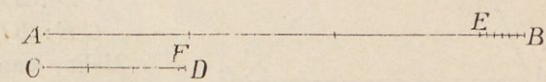


Fig. 28.



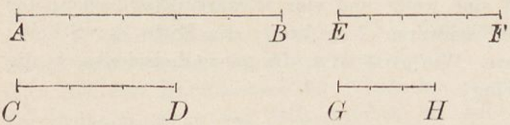
b) Läßt sich aber die kleinere Strecke auf der andern nicht genau auftragen, ist z. B. die Strecke CD (Fig. 28) in AB 3mal enthalten und bleibt noch ein Rest EB übrig, so trage man den Rest EB auf CD so oft auf, als es angeht; es sei EB in CD 3mal enthalten und es bleibe noch die Strecke FD übrig. Diesen Rest wird man wieder auf dem nächst vorhergehenden EB auftragen, und es sei FD in EB genau 6mal enthalten. Man hat dann

$$EB = 6FD,$$
$$CD = 3EB + FD = 19FD,$$
$$AB = 3CD + EB = 63FD.$$

Die Strecken AB und CD haben demnach das gemeinsame Maß FD, und zwar ist dieses in AB 63 mal, in CD 19 mal enthalten; das Verhältnis von AB zu CD ist also 63 : 19.

§. **39.** Die beiden Strecken AB und CD (Fig. 29) haben das Verhältnis 5 : 3; die Strecken EF und GH haben dasselbe Verhältnis 5 : 3. Die beiden Verhältnisse $AB : CD$ und $EF : GH$ können daher gleich gesetzt werden; man erhält so die Proportion $AB : CD = EF : GH$.

Fig. 29.



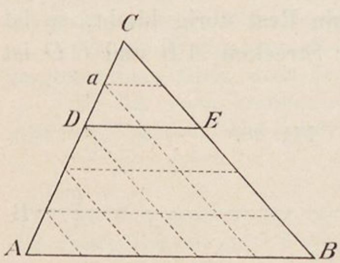
Man sagt in diesem Falle: die Strecken AB und CD sind den Strecken EF und GH proportional.

Ist $CD = EF$, so heißt $AB : CD = CD : GH$ eine stetige Proportion; CD ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und GH und GH die dritte stetige Proportionale zwischen AB und CD.

§. **40.** *a)* Im Dreiecke ABC (Fig. 30) sei $DE \parallel AB$ und Ca ein Maß, das in der Strecke AD 3 mal, in der Strecke DC 2 mal enthalten ist; es ist dann $AD : DC = 3 : 2$. Zieht man durch die Teilungspunkte von AC Parallele zu AB, so wird durch diese auch BC in 5 gleiche Teile geteilt, von denen auf BE 3 und auf EC 2 kommen; es ist daher auch $BE : EC = 3 : 2$. Aus beiden Proportionen folgt:

$$AD : DC = BE : EC.$$

Fig. 30.



b) Man hat ferner

$$CD : AC = 2 : 5, \text{ und}$$
$$CE : BC = 2 : 5.$$

Zieht man durch jeden Teilungspunkt von AC auch zu CB die Parallele, so wird dadurch auch AB in 5 gleiche Teile und DE in 2 gleiche Teile geteilt, und zwar sind die einzelnen Teile von AB ebenso groß als jene von DE, weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind; es ist daher auch $DE : AB = 2 : 5$. Man hat demnach

$$CD : AC = CE : BC = DE : AB.$$

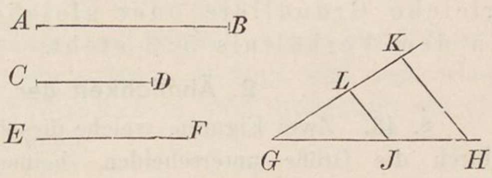
Zieht man daher in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so werden *a)* die beiden andern Seiten proportional geteilt und *b)* die Seiten des neuen Dreieckes sind proportional mit den Seiten des gegebenen Dreieckes.

Konstruktionsaufgaben.

§. **41.** 1. Zu drei gegebenen Strecken AB, CD und EF (Fig. 31) die vierte Proportionale zu finden.

Man konstruiere einen beliebigen Winkel G, schneide auf dessen Schenkeln $GH = AB$, $GJ = CD$, $GK = EF$ ab, ziehe HK und zu ihr parallel JL; dann ist $GH : GJ = GK : GL$, oder $AB : CD = EF : GL$, also GL die vierte Proportionale zu AB, CD und EF.

Fig 31.



2. Zu den Strecken AB und CD die dritte stetige Proportionale zu konstruieren.

Diese Aufgabe ist ein besonderer Fall der vorigen, es ist $EF = CD$.

3. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale zu konstruieren.

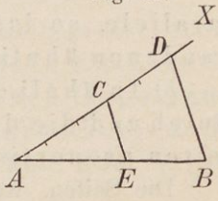
Ist x die mittlere geometrische Proportionale zu a und b, so ist $a : x = x : b$, daher $x^2 = ab$.

Mithin ist x die Seite des Quadrates, welches dem Rechteck mit den Seiten a und b flächengleich ist. Dadurch ist die Konstruktion auf §. 14, 4 zurückgeführt.

§. **42.** 1. Eine Strecke AB (Fig. 32) in einem gegebenen Zahlenverhältnisse, z. B. $3 : 2$, zu teilen.

Man ziehe durch A einen beliebigen Strahl AX und trage auf demselben von A bis C 3, von C bis D 2 gleiche Teile auf; dann ist $AC : CD = 3 : 2$. Zieht man DB und zu ihr parallel CE, so ist auch $AE : EB = 3 : 2$, somit AB im Punkte E in dem Verhältnisse $3 : 2$ geteilt.

Fig. 32.



2. Eine gegebene Strecke in einem gegebenen Streckenverhältnisse zu teilen.

Ist die Strecke AB (Fig. 32) in zwei Teile zu teilen, welche sich so verhalten wie die Strecken AC und CD, so trage man auf AX die gegebenen Strecken AC und CD auf, ziehe DB und durch C die Gerade $CE \parallel DB$; dann ist $AE : EB = AC : CD$.

3. Eine gegebene Strecke AE (Fig. 32) in einem gegebenen Verhältnisse $3 : 5$ zu vergrößern.

4. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 32) in einem gegebenen Verhältnisse 5 : 3 zu verkleinern.

In 3. und 4. bleibt die Konstruktion dieselbe, wenn das Verhältnis der Vergrößerung oder Verkleinerung nicht in Zahlen, sondern in Strecken ausgedrückt ist; nur werden in diesem Falle auf dem Schenkel AX statt der Verhältniszahlen die Verhältnisstrecken aufgetragen.

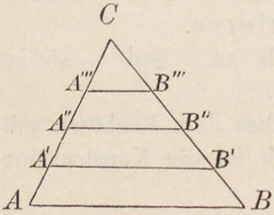
5. Ein Parallelogramm (Dreieck) zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Parallelogramm (Dreieck) gleiche Grundlinie oder gleiche Höhe hat und mit ihm in dem Verhältnis 5 : 3 steht.

2. Ähnlichkeit der Dreiecke.

§. **43.** Zwei Figuren, welche dieselbe Gestalt haben und sich nur durch die Größe unterscheiden, heißen ähnlich. Zwischen zwei ähnlichen Figuren wird das Zeichen $\backsim$ gesetzt.*)

Um die Merkmale zweier ähnlicher Dreiecke näher zu bestimmen, nehmen wir in dem Dreiecke ABC (Fig. 33) mit der Seite AB eine Parallelverschiebung vor; es wird hiebei jedes folgende Dreieck $A'B'C$, $A''B''C$,.... kleiner als das vorhergehende, dagegen bleibt die Gestalt derselben ganz unverändert. Alle diese Dreiecke haben also dieselbe Gestalt und sind somit einander ähnlich. In allen diesen Dreiecken sind je zwei gleichliegende Winkel gleich; auch folgt aus §. 40, daß die Seiten jedes neu entstehenden Dreieckes mit den Seiten des gegebenen Dreieckes proportional sind.

Fig. 33.



a) Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck mit dem neu entstandenen ähnlich.

b) In ähnlichen Dreiecken sind die Winkel paarweise gleich und die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten proportional.

Die Seiten, welche in ähnlichen Dreiecken den gleichen Winkeln gegenüberliegen, heißen gleichliegende oder homologe Seiten.

Umgekehrt: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben die Winkel paarweise gleich und die homologen Seiten proportional sind.

§. **44.** Die Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke und die Proportionalität ihrer Seiten stehen in einem so innigen Zusammenhange, daß man schon aus der ersteren auf die Ähnlichkeit der Dreiecke schließen kann.

*) $\backsim$ ist ein liegendes *s* (similis).

Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 34) der Winkel $A = D$, $B = E$, es muß dann auch $C = F$ sein.

Legt man das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß der Winkel F auf C fällt, so ist GH mit AB parallel (I. Abt., §. 41), folglich $CGH \sim ABC$; CGH ist aber das Dreieck DEF, daher auch $DEF \sim ABC$.

Sind in zwei Dreiecken alle drei Winkel paarweise einander gleich, so sind die Dreiecke ähnlich.

Da in zwei Dreiecken, welche zwei Winkel einzeln gleich haben, auch die dritten Winkel gleich sein müssen, so folgt, daß man schon aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken auf die Ähnlichkeit derselben schließen kann.

Fig. 34.

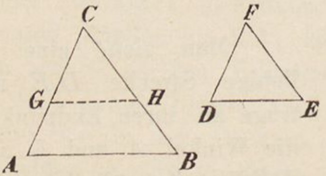
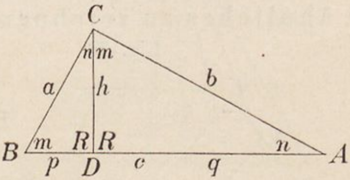


Fig. 35.



§. **45.** Es sei (Fig. 35) das Dreieck ABC bei C rechtwinklig. Zieht man die Höhe auf die Hypotenuse, so enthält jedes der Dreiecke ABC, CBD und ACD dieselben Winkel n, m, R, folglich sind sie paarweise ähnlich.

Aus $ABC \sim CBD$ folgt $c : a = a : p$.
Aus $ABC \sim ACD$ „ $c : b = b : q$.
Aus $CBD \sim ACD$ „ $p : h = h : q$.

Zieht man also in einem rechtwinkligen Dreiecke die Höhe auf die Hypotenuse, so ist 1. jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte derselben; 2. die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Aus der Proportion $p : h = h : q$ folgt $h^2 = pq$.

Welchen Lehrsatz enthält diese Gleichung?

§. **46.** Wenn jede Seite eines Dreieckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist als die homologe Seite eines ähnlichen Dreieckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Dreieckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Dreieckes.

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Umfänge so wie je zwei homologe Seiten.

§. **47.** Zieht man durch die Teilungspunkte der Seite BC (Fig. 30) die Parallelen zu AC, so zerfällt das Dreieck ABC in 25 kongruente Dreiecke, von welchen auf CDE 4 entfallen. Daher verhalten sich die Flächen der Dreiecke ABC und DEC, deren Seitenverhältnis 5 : 2 ist, wie 25 : 4.

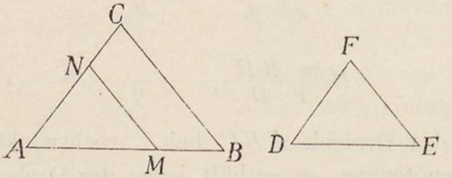
Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich daher wie die Quadrate homologer Seiten.

Wenn jede Seite eines Dreieckes 2, 3, 4, 5, 6 mal so groß ist als die homologe Seite eines ähnlichen Dreieckes, so ist der Flächeninhalt des ersten Dreieckes 4, 9, 16, 25, 36 mal so groß als jener des zweiten Dreieckes.

Konstruktionsaufgaben.

§. **48.** 1. Zu einem gegebenen Dreiecke ABC (Fig. 36) ein ähnliches zu zeichnen.

Fig. 36.



Man ziehe eine beliebige Strecke DE und trage an ihren Endpunkten die Winkel A und B auf; DEF ist dann ähnlich ABC. (§. 44.) (Unbestimmte Aufgabe.)

2. Ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck zu konstruieren, wenn die der Seite AB homologe Seite DE gegeben ist.

Man mache (Fig. 36) $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, $\sphericalangle E = \sphericalangle B$, so ist $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$. (Die Aufgabe ist bestimmt.)

3. Zu dem Dreiecke ABC (Fig. 36) ein ähnliches Dreieck zu konstruieren, so daß sich die Seiten des gegebenen Dreieckes zu den Seiten des neuen Dreieckes wie 3 : 2 verhalten.

Man suche zu AB die in dem Verhältnisse 3 : 2 verkleinerte Strecke, trage sie auf AB von A bis M auf und ziehe $MN \parallel BC$; dann ist AMN das verlangte Dreieck.

4. Zu einem Dreiecke ein ähnliches zu konstruieren, so daß die Seiten des gegebenen Dreieckes zu den Seiten des gesuchten in dem Verhältnisse 3 : 5 stehen.

5. Ein Dreieck ist gegeben; ein demselben ähnliches Dreieck so zu zeichnen, *a)* daß sich die Umfänge wie 2 : 3 verhalten; *b)* daß die Inhalte im Verhältnisse 9 : 16 stehen.

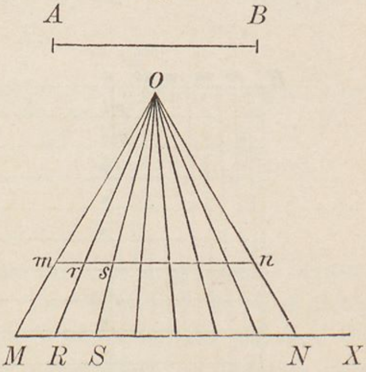
§. **49.** Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Teile zu teilen.

a) Eine Auflösung dieser Aufgabe wurde bereits in der I. Abteilung dieses Buches (§. 125) gezeigt; dieselbe ist jedoch, da dabei viele Parallele gezogen werden müssen, mühsam und kann leicht Fehler veranlassen.

Einfacher sind folgende Auflösungen:

b) Ist eine Strecke AB (Fig. 37) z. B. in 7 gleiche Teile zu teilen, so zieht man einen Strahl MX, trägt darauf 7 beliebige gleiche Teile bis N auf und konstruiert über MN das gleichseitige Dreieck MNO. Macht man nun $Om = On$ gleich der gegebenen Strecke AB und zieht mn, so ist auch Omn ein gleichseitiges Dreieck (warum?), und daher $mn = Om$ und parallel mit MN. Zieht man dann von O zu den Teilungspunkten von MN gerade Linien OR, OS, ..., welche mn in den Punkten r, s, .. schneiden, so wird in diesen Punkten $mn = AB$ in 7 gleiche Teile geteilt.

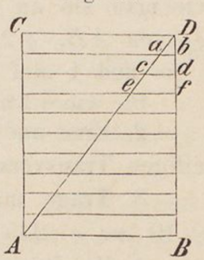
Fig. 37.



Da $mn \parallel MN$, so ist $mr : MR = Or : OR$ und $rs : RS = Or : OR$; folglich auch $mr : MR = rs : RS$. Nun ist $MR = RS$, somit auch $mr = rs$. Ebenso läßt sich die Gleichheit der übrigen Teile der Strecke mn nachweisen.

c) Es sei AB (Fig. 38) z. B. in 10 gleiche Teile zu teilen. Man errichte in A und B auf AB zwei Normale, trage auf jede 10 gleich große Teile bis C und D auf und ziehe durch je zwei zusammengehörige Teilungspunkte eine Strecke. Zieht man nun in dem Rechtecke $ABDC$ die Diagonale AD, so ist die Aufgabe gelöst. Da $ab \parallel AB$, so ist $ab : AB = Db : DB$; nun ist Db der zehnte Teil von DB, also muß auch ab der zehnte Teil von AB sein. Ebenso folgt, daß $cd = \frac{2}{10} AB$, $ef = \frac{3}{10} AB, \ldots$ ist.

Fig. 38.

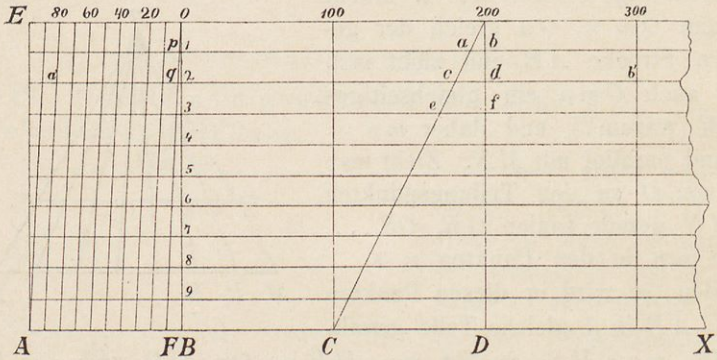


§. **50.** 1. Einen tausendteiligen verjüngten Transversal-Maßstab zu konstruieren.

Die Konstruktion eines verjüngten Transversal-Maßstabes beruht auf dem in §. 49 unter *c)* angegebenen Verfahren, eine Strecke in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Es sei AB in verjüngtem Maßstab 1 *dm*; man trage AB zehnmal bis X auf, so ist AX 1 *m*; um die *cm* und *mm* zu finden, errichte man in den Endpunkten von AX zwei Normale, trage darauf wieder 10 beliebig große, jedoch gleiche Teile auf und ziehe durch die letzten Teilungspunkte eine Strecke, welche der zuerst gezogenen Strecke parallel und gleich sein muß, und welche ebenfalls in 10 gleiche Teile geteilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Teilungspunkte gerade Linien, welche alle zu AX entweder normal oder parallel sind. Zieht man in irgend einer Abteilung eine Diagonale,

Fig. 39.



z. B. C 200, so ist ab der 10te Teil von CD, folglich auch von AB; cd enthält 2 solche Teile, ef 3 Teile, u. s. w. Diese Teile trägt man nun sowohl auf AB als $E0$ auf, zieht dann durch 0 und F sowie durch je zwei folgende Teilungspunkte Transversalen und schreibt an die Teilungspunkte die Zahlen so hin, wie man sie an der Figur sieht; dadurch wird p 1 $\frac{1}{10}$ von FB, oder $\frac{1}{100}$ von AB, q 2 $\frac{2}{100}$ von AB. Mithin stellen FB und p 1 bezüglich 1 *cm* und 1 *mm* dar.

Die wahre Länge von a' b' anzugeben.

2. Eine auf dem Papier gezogene Strecke mit Hilfe des tausendteiligen Transversal-Maßstabes zu messen.

3. Trage mit Hilfe dieses Maßstabes eine Strecke von *a)* 2 *dm*, *b)* 19 *cm*, *c)* 235 *mm*, *d)* 1 *dm* 8 *cm* 9 *mm* auf!

4. Zeichne mit Hilfe dieses Maßstabes ein Dreieck mit den Seiten 204 *mm*, 193 *mm* und 148 *mm*!

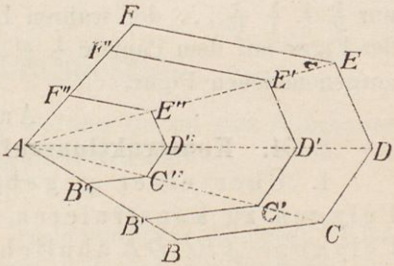
5. Von einem Dreiecke ABC ist das Seitenverhältnis $AB : AC = 5 : 6$ und der eingeschlossene Winkel $A = 60^0$ gegeben; konstruiere über der Seite 235 *mm* (homolog zu AB) ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck!

3. Ähnlichkeit der Polygone.

§. 51. Zwei Polygone heißen *ähnlich*, wenn sie dieselbe Gestalt haben.

Um die Eigenschaften ähnlicher Vielecke näher zu bestimmen, ziehe man in dem Vielecke $ABCDEF$ (Fig. 40) von A aus die Diagonalen AC, AD, AE und denke sich, daß sich die Punkte B, C, D, E, F in den Geraden AB, AC, AD, AE, AF so gegen den Punkt A hin bewegen, daß die Strecken $B'C'$, $C'D'$, ..., $B''C''$, $C''D''$, ... in jeder neuen Lage mit den gleichliegenden Seiten BC, CD, ... parallel bleiben; man erhält dabei immer kleinere Polygone $AB'C'D'E'F'$, $AB''C''D''E''F''$, ..., welche aber offenbar alle untereinander und mit dem gegebenen Polygone dieselbe Gestalt haben, also ähnlich sind. Der Winkel A ist allen diesen Polygonen gemeinschaftlich; die übrigen Winkel bleiben während der parallelen Bewegung der Seiten ebenfalls ungeändert, so daß alle diese Polygone nach der Ordnung gleiche Winkel haben. Auch geht aus §. 40 hervor, daß die Seiten eines jeden neuen Polygons mit den homologen Seiten des gegebenen proportional sind.

Fig. 40.



In ähnlichen Polygonen sind die Winkel nach der Ordnung paarweise gleich und die homologen Seiten proportional.

Zwei regelmäßige Vielecke von derselben Seitenanzahl sind ähnlich.

Aus der obigen Darstellung folgt ferner:

a) *Ähnliche Polygone werden durch die homologen Diagonalen in ähnliche Dreiecke geteilt.*

b) *In ähnlichen Polygonen verhalten sich die homologen Diagonalen wie die homologen Seiten.*

§. 52. Wenn jede Seite eines Polygons 2 mal, 3 mal, 4 mal so groß ist als die homologe Seite eines ähnlichen Polygons, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Polygons, 2 mal, 3 mal, 4 mal so groß sein als der Umfang des zweiten Polygons.

Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich also so wie je zwei homologe Seiten.

§. 53. Zerlegt man zwei ähnliche Polygone, deren Seiten sich z. B. wie 5 : 3 verhalten, durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so verhalten sich nach §. 47 je zwei gleichliegende Dreiecke der beiden Vielecke wie 25 : 9; es müssen sich demnach auch die Summen aller dieser Dreiecke, d. h. die beiden Polygone selbst, wie 25 : 9 verhalten.

Die Flächeninhalte ähnlicher Polygone verhalten sich also wie die Quadrate der homologen Seiten.

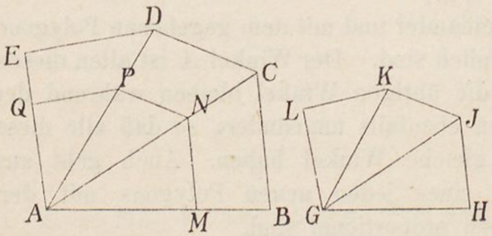
Wird eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf dem Papiere dargestellt, so daß jede Seite auf dem Papiere nur $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \ldots$ der wahren Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papiere $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{100}, \ldots$ von dem Flächeninhalte der aufgenommenen Figur.

Aufgaben.

§. 54. Konstruktionsaufgaben.

1. Über einer gegebenen Strecke GH (Fig. 41) ein Polygon zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Polygone $ABCDE$ ähnlich ist.

Fig. 41.



Man ziehe die Diagonalen AC, AD, mache $AM = GH$ und ziehe $MN \parallel BC$, $NP \parallel CD$, $PQ \parallel DE$; dann ist das Polygon $ABCDE \backsim AMNPQ$. Konstruiert man nun über GH ein Polygon $GHJKL$, welches mit $AMNPQ$ kongruent ist, so ist dasselbe das verlangte Polygon.

Welche Aufgabe würde vorliegen, wenn die Seite GH nicht gegeben wäre?

2. Zu einem gegebenen Polygon $ABCDE$ (Fig. 41) ein ähnliches so zu konstruieren, daß sich die homologen Seiten des gegebenen und des neuen Polygons wie 3 : 2 verhalten.

Man zerlege das gegebene Polygon in Dreiecke, indem man von einem Punkte A aus zu den Eckpunkten Strecken zieht, verkleinere dann die Strecke AB in dem Verhältnisse 3 : 2 und ziehe von M die Parallele MN zu BC, durch N die Parallele NP zu CD und so fort, so ist $AMNPQ$ das gesuchte Polygon.

3. Konstruiere zwei ähnliche Sechsecke, deren homologe Seiten das Verhältnis 4 : 5 haben!

§. 55. Rechnungsaufgaben.

1. Die homologen Seiten zweier ähnlicher Vierecke verhalten sich wie 3 : 4; wie groß ist die Fläche des zweiten Viereckes, wenn die des ersten 117 cm^2 beträgt?

2. Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke sind 58 cm und 87 cm, die Fläche des ersten Vieleckes ist 152 cm^2; wie groß ist die Fläche des zweiten?

3. Die Flächen zweier ähnlicher Vielecke sind 36 cm^2 und 225 cm^2, der Umfang des ersten Vieleckes ist 12 cm; wie groß ist der Umfang des zweiten?

4. Ein Vieleck soll so vergrößert werden, daß seine Fläche doppelt so groß wird; in welchem Verhältnisse müssen die Seiten vergrößert werden?

5. In einem Bauplane, in welchem 4 *cm* des gewählten Maßstabes 3 *m* in der Wirklichkeit vorstellen sollen, beträgt der Flächeninhalt des Grundrisses 5·2 dm^2; wie groß ist die wirkliche Baufläche?

6. Auf einer Landkarte sind die natürlichen Längen in dem Verhältnisse 1 : 250000, auf einer zweiten in dem Verhältnisse 1 : 50000 dargestellt; welche Fläche nimmt auf der ersten Karte ein Land ein, das auf der zweiten eine Fläche von 160 cm^2 hat?

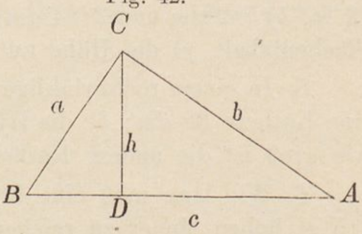
Anhang zur Planimetrie.

Planimetrische Rechnungsaufgaben, welche durch das Ausziehen der Quadratwurzel gelöst werden.

Das rechtwinklige Dreieck.

§. 56. Bezeichnet man in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 42) die Maßzahlen der Hypotenuse AB und der Katheten BC und AC bezüglich durch c, a und b, so sind c^2, a^2 und b^2 die Maßzahlen der Flächeninhalte der Quadrate über AB, BC und AC. Es folgt daher aus dem Pythagoreischen Lehrsatze (§. 9):

Fig. 42.



$$c^2 = a^2 + b^2; \text{ d. h.:}$$

I n j e d e m r e c h t w i n k l i g e n D r e i e c k e i s t d a s Q u a d r a t d e r M a ß z a h l d e r H y p o t e n u s e g l e i c h d e r S u m m e a u s d e n Q u a d r a t e n d e r M a ß z a h l e n d e r b e i d e n K a t h e t e n. (A r i t h m e t i s c h e r Ausdruck für den Pythagoreischen Lehrsatz.)

Bezeichnet man ferner mit h die Maßzahl der Höhe CD und mit f die Maßzahl für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreieckes ABC, so ist mit Rücksicht auf §. 24, 1

$$2f = ch = ab.$$

Mit Hilfe dieser und der obigen Gleichung lassen sich nun nachstehende Aufgaben lösen.

1. Gegeben sind die Katheten a und b; man suche die Größen c, h und f.

Zunächst ist $c^2 = a^2 + b^2$. Kennt man das Quadrat einer Zahl, so erhält man die Zahl selbst, indem man aus dem Quadrate die Quadratwurzel auszieht; also ist

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aus $ch = ab$ folgt dann $h = \frac{ab}{c}$; $f = \frac{ab}{2}$.

Ist z. B. aus den Katheten $b = 36$ *cm* und $a = 160$ *cm* die Hypotenuse c zu bestimmen, so hat man

$$b^2 = 36^2 = 1296$$
$$a^2 = 160^2 = 25600, \text{ daher}$$
$$c = \sqrt{26896} = 164. \quad a = 164 \, cm.$$

2. Gegeben sind die Hypotenuse c und die Kathete b; zu suchen sind a, h und f.

Aus $a^2 = c^2 - b^2$ folgt $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Dann ist $h = \frac{bc}{a}$ und $f = \frac{bc}{2}$.

3. Gegeben ist die Kathete b und der Flächeninhalt f; man suche die zweite Kathete a und die Hypotenuse c.

Aus $ab = 2f$ erhält man $a = \frac{2f}{b}$.

Dann ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind *a)* 35 *m* und 12 *m*, *b)* 7·2 *dm* und 3·84 *dm*; wie groß ist α) die Hypotenuse, β) der Flächeninhalt, γ) die Höhe auf die Hypotenuse?

5. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist *a)* die Hypotenuse 68 *dm*, eine Kathete 32 *dm*; *b)* die Hypotenuse 5·46 *m*, eine Kathete 2·72 *m*; wie groß ist die andere Kathete, wie groß der Flächeninhalt?

6. Wie lang muß eine Leiter sein, um bis zum oberen Ende einer 4·5 *m* hohen Mauer zu reichen, wenn sie unten 2·8 *m* von der Mauer absteht?

7. Eine 7 *m* lange Leiter wird gegen eine vertikale Wand so aufgestellt, daß sie unten 2·4 *m* von derselben absteht; wie hoch reicht an der Wand das obere Ende der Leiter?

Das Quadrat.

§. 57. Es seien a, d und f die Maßzahlen der Seite, der Diagonale und des Flächeninhaltes eines Quadrates.

1. Aus der Seite a eines Quadrates die Diagonale d zu berechnen.

Nach §. 56 ist $d^2 = a^2 + a^2$, oder $d^2 = 2a^2$. Zieht man die Quadratwurzel aus, so ergibt sich $d = \sqrt{2a^2}$ oder $d = a\sqrt{2}$.

2. Gegeben die Diagonale d; zu suchen die Seite a und der Flächeninhalt f.

Da $2a^2 = d^2$, so ist $a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{2d^2}{4}$, daher $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Aus $f = a^2$ folgt dann $f = \frac{d^2}{2}$. (Auch aus §. 6 ableitbar.)

3. Gegeben der Flächeninhalt f; gesucht wird a und d.

Aus $a^2 = f$ ergibt sich $a = \sqrt{f}$.

Aus $d^2 = 2a^2$ folgt ferner $d^2 = 2f$, somit $d = \sqrt{2f}$.

4. Die Diagonale eines Quadrates beträgt $1 \cdot 4$ *m*; wie groß ist *a)* die Seite, *b)* der Flächeninhalt?

5. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist $15 \cdot 1321 \ldots$ dm^2; wie groß ist *a)* die Seite, *b)* die Diagonale?

6. Wie lang ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist als zwei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten $2 \cdot 15$ *m* und $9 \cdot 12$ *m* sind?

Das Rechteck und der Rhombus.

§. 58. Man bezeichne die Maßzahlen der Seiten eines Rechteckes durch a und b, die Maßzahl der Diagonale durch d und die Maßzahl des Flächeninhaltes durch f.

1. Gegeben die Seiten a und b eines Rechteckes; zu suchen d und f.

Es ist $d^2 = a^2 + b^2$, daher $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; ferner ist $f = ab$.

2. Gegeben ist eine Seite a und die Diagonale d; man berechne b und f.

Es ist $b^2 = d^2 - a^2$; daher ist $b = \sqrt{d^2 - a^2}$.

Für den Flächeninhalt hat man sodann $f = ab$.

3. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes von *a)* $5 \cdot 6$ *m* Länge und $3 \cdot 3$ *m* Breite, *b)* $5 \cdot 72$ *m* Länge und $3 \cdot 15$ *m* Breite?

4. Die Diagonale eines Rechteckes ist $7 \cdot 3$ *dm*, eine Seite desselben $4 \cdot 8$ *dm*; wie groß ist die Seite eines flächengleichen Quadrates?

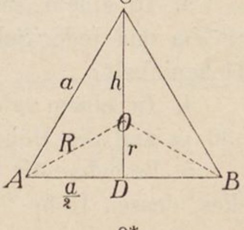
5. Wie groß ist die Seite eines Rhombus, dessen Diagonalen $2 \cdot 26$ *dm* und $1 \cdot 75$ *m* betragen?

6. Der Umfang eines Rhombus ist 212 *cm*, eine Diagonale 56 *cm*; wie groß ist der Flächeninhalt?

Das gleichseitige Dreieck.

§. 59. Es sei in dem gleichseitigen Dreiecke ABC (Fig. 43) die Seite $AB = AC = BC = a$, die Höhe $CD = h$, der Abstand des Mittelpunktes O von einer Seite $OD = r$, der Abstand $OA = R$, und f die Maßzahl des Flächeninhaltes.

Fig. 43.



1. Gegeben sei die Seite a; zu suchen h, f, r und R.

Es ist $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$,

daher $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $f = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ferner ist nach §. 79, 1. Abt.

$$r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ und } R = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2. Gegeben die Höhe h; zu suchen a, r, R und f.

Aus $\frac{a\sqrt{3}}{2} = h$ folgt $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Dann ist $f = \frac{ah}{2}$; ferner ist $r = \frac{h}{3}$ und $R = \frac{2h}{3}$.

3. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 8 *dm*; wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Flächeninhalt?

4. Berechne die Seite und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Höhe 2·4 *dm* beträgt!

5. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, das einem Quadrate von 15 *dm* Seitenlänge flächengleich ist?

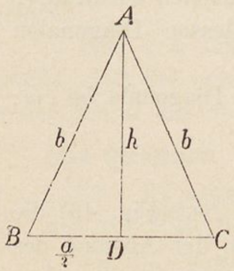
Ist f die Fläche eines gleichseitigen Dreieckes, so ist

$$a^2\sqrt{3} = 4f,\; a^2 = \frac{4f}{\sqrt{3}} = \frac{4f\sqrt{3}}{3},\; a = \sqrt{\frac{4f\sqrt{3}}{3}}.$$

Das gleichschenklige Dreieck.

§. **60.** Es sei in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 44) die Grundlinie $BC = a$, der Schenkel $AB = AC = b$ und die Höhe $AD = h$; die Maßzahl des Flächeninhaltes sei f.

Fig. 44.



1. Aus der Grundlinie a und dem Schenkel b die Höhe h und den Flächeninhalt f zu berechnen.

Man hat $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$,

daher $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, und damit $f = \frac{ah}{2}$.

2. Gegeben die Höhe h und der Schenkel b; zu suchen a und f.

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$, daher $\frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}$ und

$$a = 2\sqrt{b^2 - h^2};\text{ sodann } f = \frac{ah}{2}.$$

3. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4·8 *dm* und jeder Schenkel 2·5 *dm*; wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Flächeninhalt?

4. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 3·36 *m* und die Höhe 4·25 *m*; wie groß ist ein Schenkel?

5. Berechne die Seiten eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieckes, dessen Höhe 24 *cm* beträgt!

6. Ein gleichschenkliges Dreieck von 35 *cm* Höhe hat 944 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist der Umfang?

7. Ein Trapez mit den Parallelseiten 36 *mm* und 26 *mm* und der Höhe 19 *mm* ist flächengleich mit einem gleichschenkligen Dreiecke, dessen Grundlinie gleich ist der größeren jener Parallelseiten; wie groß ist die Höhe und ein Schenkel des Dreieckes?

Das regelmäßige Sechseck.

§. **61.** 1. Aus der Seite a eines regelmäßigen Sechseckes den Flächeninhalt f desselben zu bestimmen.

Da der Umfang des regelmäßigen Sechseckes $6a$, der Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite aber die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge a und daher nach §. 59, 1 gleich $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ist, so erhält man

$$f = \frac{6a \,.\, a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

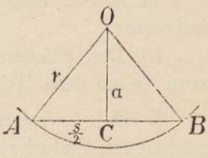
2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seitenlänge 4·24 *dm*?

3. Ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck haben gleichen Umfang, nämlich 2·4 *m*; um wie viel ist der Flächeninhalt des Quadrates kleiner als der des Sechseckes?

Der Kreis.

§. **62.** In einem Kreise (Fig. 45) vom Halbmesser $OA = r$ sei die Sehne $AB = s$ und ihr Zentralabstand $OC = a$; aus zweien dieser Größen die dritte zu berechnen.

Fig. 45.



Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACO ergibt sich

$$r^2 = \frac{s^2}{4} + a^2, \text{ daher } r = \sqrt{\frac{s^2}{4} + a^2}.$$

Ebenso erhält man

$$s = 2\sqrt{r^2 - a^2} \text{ und } a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Beispiele. 1. $s = 320$ *cm*, $a = 168$ *cm*; 2. $r = 117$ *dm*, $a = 108$ *dm*; 3. $r = 2\cdot4$ *m*, $s = 1\cdot6$ *m*.

§. **63.** 1. Aus dem Flächeninhalte f eines Kreises den Halbmesser r desselben zu berechnen.

Nach §. 33, 2 ist $r^2\pi = f$, daher $r^2 = \frac{f}{\pi}$, somit $r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$.

2. Der Flächeninhalt eines Kreises ist *a)* 10 dm^2, *b)* 4·8659...m^2, *c)* 31·47 cm^2; wie groß ist der Halbmesser?

3. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der an Inhalt gleich ist einem Quadrate mit der Seite 2 *m* 3 *dm*!

4. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 4·0115 dm^2; wie groß ist die Peripherie?

5. Der Durchmesser eines Kreises ist 315 *mm*; wie groß ist der Durchmesser eines andern Kreises, dessen Fläche sich zu der Fläche des ersteren Kreises wie 3 zu 4 verhält?

6. Die Halbmesser zweier Kreise sind 4·4 *dm* und 3·2 *dm*; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, welcher *a)* der Summe, *b)* der Differenz der Inhalte jener beiden Kreise gleich ist?

7. Um wie viel ist die Peripherie eines Kreises, dessen Flächeninhalt 1·54 m^2 ist, größer als der Umfang des diesem Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Sechseckes?

8. Wie groß ist die Peripherie eines Kreises, welcher einem gleichseitigen Dreiecke mit der Seite 18 *cm* flächengleich ist?

9. Ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat und ein Kreis haben gleichen Umfang; wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?

10. Wie groß ist der längere Halbmesser eines Kreisringes, welcher 86·24 dm^2 mißt und dessen kürzerer Halbmesser 4·2 *dm* lang ist?

11. Die Fläche eines Kreisringes beträgt 254·34 dm^2, der äußere Umfang 94·2 *dm*; wie groß sind die Halbmesser der beiden konzentrischen Kreise?

12. Wie breit muß der Raum um einen kreisrunden Schauplatz, dessen innerer Durchmesser 9 *m* ist, angenommen werden, damit darin 500 Personen sitzen können, wenn man für jede Person 75 dm^2 rechnet?

13. Der Flächeninhalt f eines Kreissektors und der zu seinem Bogen gehörige Zentriwinkel m^0 sind gegeben; suche den Halbmesser r!

Nach §. 36 ist $mr^2\pi = 360f$, folglich $r^2 = \frac{360f}{m\pi}$, daher $r = \sqrt{\frac{360f}{m\pi}}$.

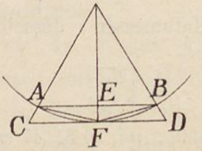
14. Der Flächeninhalt eines Kreissektors, der zu einem Zentriwinkel von 30^0 gehört, beträgt 37·5 dm^2; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

15. Der Halbmesser eines Kreissegmentes ist 2 *dm*, seine Sehne ist die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates; wie groß ist der Flächeninhalt des Abschnittes?

16. Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes mit dem Halbmesser r, wenn dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist, zu berechnen.

§. **64.** 1. Aus der Seitenlänge eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes die Seitenlänge des demselben Kreise umgeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenanzahl zu bestimmen.

Fig. 46.



Es sei AB (Fig. 46) die Seite eines dem Kreise, dessen Halbmesser AO gegeben ist, eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes. Zieht man den Halbmesser $OF \perp AB$ und durch F die Tangente an den Kreis, welche von den Verlängerungen der Halbmesser OA und OB in C und D geschnitten wird, so ist CD die Seite eines dem Kreise umgeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes, das ebenso viele Seiten hat als das eingeschriebene, dessen Seite AB ist.

Kennt man nun AB und $AO = FO$, so kann man auch CD bestimmen. Die Seiten CD und AB sind parallel, da sie beide auf FO senkrecht stehen, daher ist $\triangle CFO \sim AEO$, mithin $CF : AE = FO : EO$, folglich auch $CD : AB = FO : EO$. Von diesen Größen sind AB und FO gegeben, EO findet man aus dem rechtwinkligen Dreiecke AEO; es kann demnach aus der obigen Proportion auch CD berechnet werden.

2. Aus der Seitenlänge eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes die Seitenlänge des demselben Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes von doppelter Seitenanzahl zu bestimmen.

Es sei AB (Fig. 46) die Seite eines dem Kreise, dessen Halbmesser AO ist, eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes. Zieht man den Halbmesser $OF \perp AB$ und dann die Sehne AF, so ist diese die Seite des dem Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes, welches doppelt so viele Seiten als das frühere hat.

Sind nun AB und $AO = FO$ bekannt, so kann man aus dem rechtwinkligen Dreiecke AEO zunächst EO berechnen; subtrahiert man EO von FO, so hat man EF; aus dem rechtwinkligen Dreiecke AEF erhält man dann die gesuchte Seite AF.

3. Der Radius eines Kreises ist 1 *dm*; berechne die Seite *a)* des diesem Kreise umgeschriebenen, regelmäßigen Sechseckes, *b)* des eingeschriebenen, regelmäßigen Zwölfeckes und *c)* des umgeschriebenen, regelmäßigen Zwölfeckes!

4. Der Halbmesser eines Kreises beträgt 0·5 *dm*; um wie viel sind Umfang und Flächeninhalt dieses Kreises bezüglich größer als Umfang und Flächeninhalt *a)* des eingeschriebenen Quadrates, *b)* des eingeschriebenen, regelmäßigen Achteckes? — Um wie viel sind sie kleiner als Umfang und Flächeninhalt *c)* des umgeschriebenen Quadrates, *d)* des umgeschriebenen, regelmäßigen Achteckes?

Die Stereometrie.

I. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Bestimmung der Ebene.

§. **65.** Eine Fläche, in welcher sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. In den folgenden Betrachtungen wird sowohl die Gerade als auch die Ebene als unbegrenzt angesehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben oder aus dem Satze ersichtlich ist.

Durch zwei Punkte im Raume wird eine Gerade vollkommen bestimmt, d. h. es läßt sich durch zwei Punkte eine einzige gerade Linie ziehen. Legt man nun durch diese Gerade eine Ebene, so kann man dieselbe um die Gerade rings herum drehen, wodurch sie unzählig viele verschiedene Lagen einnimmt. Durch zwei Punkte oder durch eine gerade Linie ist demnach eine Ebene nicht bestimmt. Nimmt man aber außerhalb der Geraden noch einen Punkt an, so wird es unter jenen unzählig vielen Lagen, welche die Ebene während ihrer Umdrehung annehmen kann, eine einzige geben, in welcher die Ebene durch die gerade Linie und den außer ihr liegenden Punkt geht. Durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte kann demnach nur eine Ebene gelegt werden.

Die Lage einer Ebene ist daher eindeutig bestimmt:

1. durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte,
2. durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben,
3. durch zwei einander schneidende Gerade,
4. durch zwei parallele Gerade.

Jede Ebene kann durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden, und zwar, indem die bewegliche Gerade 1. längs zweier einander schneidender Geraden oder 2. längs zweier Parallelen hingleitet, oder 3. sich um einen ihrer Punkte dreht und dabei längs einer Geraden hingleitet, oder 4. längs einer zweiten Geraden parallel verschoben wird, oder 5. indem ein rechter Winkel sich um einen seiner Schenkel dreht.

1. Hauptlagen von Geraden und Ebenen.

§. **66.** Zwei gerade Linien können eine dreifache Lage haben: 1. sie schneiden einander; 2. sie sind parallel; 3. sie schneiden weder einander noch sind sie parallel. In den ersten beiden Fällen läßt sich durch die beiden Geraden eine Ebene legen, im dritten Falle ist dies nicht möglich. In diesem Falle sagt man, die Geraden kreuzen einander oder sie sind windschief.

Für jeden der drei Fälle sind Beispiele an den Kanten im Schulzimmer anzugeben.

§. **67.** Bei einer Parallelverschiebung zweier einander schneidender Geraden bleiben die Winkel, welche sie bilden, ungeändert.

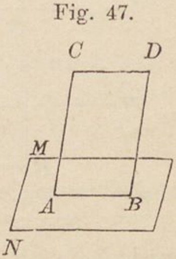
Wie für Winkel in der Ebene, gilt daher auch für Winkel des Raumes der Satz:

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind *a)* einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder beide Paare nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, dagegen *b)* supplementär, wenn nur ein Paar nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

§. **68.** Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Haben sie gemeinschaftliche Punkte, so sagt man, daß die Ebenen einander schneiden. Die gemeinschaftlichen Punkte zweier einander schneidender Ebenen liegen in einer Linie, welche die Durchschnittslinie der beiden Ebenen heißt. Diese muß eine Gerade sein. Denn verbindet man zwei gemeinschaftliche Punkte der beiden Ebenen durch eine Gerade, so können die beiden Ebenen keinen Punkt außerhalb dieser Geraden gemeinschaftlich haben; die beiden Ebenen würden dann zusammenfallen, da durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt eine Ebene bestimmt ist.

2. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

Fig. 47.



§. **69.** Haben eine Gerade und eine Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemeinschaftlich, so heißen sie parallel. Ist eine Gerade zu einer Ebene nicht parallel, so schneidet sie diese in einem Punkte, welcher Schnittpunkt oder Fußpunkt der Geraden heißt.

Ist (Fig. 47) MN eine Ebene, AB eine in dieser Ebene liegende Gerade, mit welcher CD parallel ist, so muß auch CD mit MN parallel sein. Denn durch die beiden Parallelen AB und CD ist die Ebene $ABDC$ bestimmt;

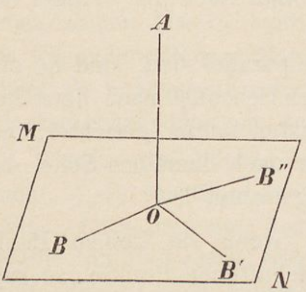
würde CD die Ebene MN schneiden, so müßte der Durchschnittspunkt nicht nur in MN sondern auch in der Ebene $ABDC$ sein, er müßte daher der Durchschnittslinie beider Ebenen, d. h. AB angehören, was nicht möglich ist, da $AB \parallel CD$ ist.

Daraus folgt:

Ist eine Gerade zu einer Geraden in einer Ebene parallel, so ist sie auch zur Ebene selbst parallel.

Umgekehrt: Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so ist sie auch zu jeder Geraden in dieser Ebene parallel, welche mit ihr in einer Ebene liegt.

Fig. 48.



§. 70. Dreht sich ein rechter Winkel AOB (Fig. 48) um den Schenkel AO, so beschreibt der andere Schenkel OB eine Ebene MN und der Schenkel AO ist auf dem andern Schenkel in jeder Lage desselben senkrecht. Man sagt, die Gerade AO ist zur Ebene selbst normal.

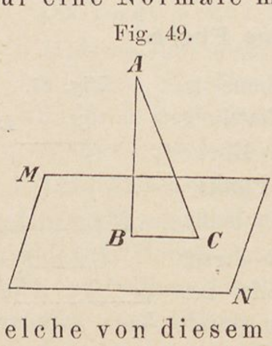
Eine Gerade ist zu einer Ebene normal, wenn sie zu allen Geraden der Ebene normal ist, welche durch ihren Fußpunkt gezogen werden.

Da die Ebene MN schon durch zwei Lagen des sich drehenden Schenkels bestimmt ist, die nicht in dieselbe Gerade fallen, z. B. durch BO und $B'O$, so ergibt sich:

Steht eine Gerade auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen werden, normal, so steht sie auf der Ebene selbst normal.

Von einem Punkte außerhalb einer Ebene ist zu dieser nur eine Normale möglich.

Fig. 49.



Denn ist AB (Fig. 49) normal auf MN, so muß in dem bei B rechtwinkligen Dreiecke ABC der Winkel C ein spitzer sein; AC ist also schief gegen MN.

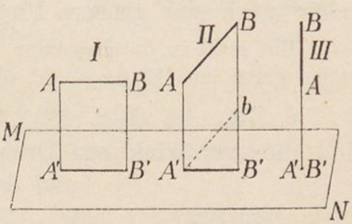
Da AC die Hypotenuse des Dreieckes ABC ist, so ist $AC > AB$. Daraus folgt:

Die Normale von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser Ebene ist die kürzeste Gerade, welche von diesem Punkte zu der Ebene möglich ist. Sie gibt den Abstand des Punktes von der Ebene an.

Auch in einem Punkte einer Ebene läßt sich auf diese nur eine einzige normale Gerade ziehen.

§. **71.** Zieht man von einem Punkte A (Fig. 50) im Raume die Normale AA' auf die Ebene MN, so heißt der Fußpunkt A' dieser Normalen die *Projektion* und zwar die *Normalprojektion des Punktes* A auf die Ebene und die Ebene selbst die *Projektionsebene*.

Fig. 50.



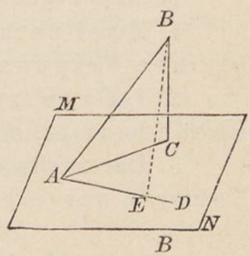
Unter der *Normalprojektion einer Linie* auf eine Ebene versteht man den Inbegriff der Projektionen sämtlicher Punkte jener Linie auf diese Ebene.

Die Projektion einer Strecke auf eine Ebene ist daher die Strecke zwischen den Projektionen ihrer Endpunkte auf diese Ebene. Ist A' die Projektion des Punktes A und B' die Projektion des Punktes B auf die Ebene MN, so ist die Strecke $A'B'$ die Projektion der Strecke AB auf diese Ebene.

§. **72.** Unter dem *Neigungswinkel* einer Geraden gegen eine Ebene versteht man den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Normalprojektion auf diese Ebene bildet.

Steht (Fig. 51) AB schief, BC dagegen normal auf der Ebene MN, so ist AC die Projektion der Geraden AB auf die Ebene MN und BAC ihr Neigungswinkel gegen diese Ebene.

Fig. 51.



Zieht man durch A in der Ebene MN irgend eine Gerade AD, macht $AE = AC$ und zieht BE, so ist diese länger als die Normale BC; in den Dreiecken ABE und ABC sind also zwei Seiten paarweise gleich, dagegen die dritten Seiten ungleich, daher liegt auch der größeren dieser Seiten ein größerer Winkel gegenüber (1. Abt., §. 76), also Winkel $BAE > BAC$. Daraus folgt:

Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist der kleinste unter allen Winkeln, welche sie mit Geraden bildet, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt gehen.

Welcher dieser Winkel ist der größte?

Zwischen den Strecken, ihren Projektionen und Neigungswinkeln gegen eine Ebene finden folgende Beziehungen statt:

1. Ist eine Strecke zu der Ebene parallel, d. i. ist der Neigungswinkel gleich Null, so ist ihre Projektion von gleicher Länge (Fig. 50, I);

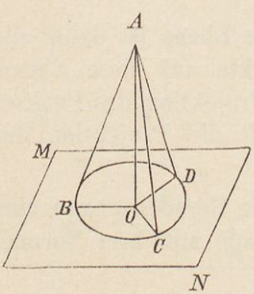
wächst der Neigungswinkel, so wird die Projektion kleiner (Fig. 50, II); wird der Neigungswinkel gleich 90°, d. h. ist die Strecke zu der Ebene normal, so wird die Länge der Projektion gleich Null (Fig. 50, III).

2. Bei gleichen Neigungswinkeln haben gleiche Strecken auch gleiche Projektionen und umgekehrt; zu einer größeren Strecke gehört auch eine größere Projektion und umgekehrt.

Wie groß ist die Projektion einer Strecke von 5 *dm* 2 *cm*, wenn ihr Neigungswinkel gegen eine Ebene *a*) 45°, *b*) 60°, *c*) 30° beträgt?

§. **73.** Ist (Fig. 52) $AO \perp MN$ und $AB = AC = AD$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke AOB, AOC und AOD kongruent und daher $OB = OC = OD$. Daraus folgt: Die Fußpunkte aller gleichen Strecken, die von einem Punkte zu einer Ebene gezogen werden, liegen in einem Kreise, welcher den Fußpunkt der Normalen zum Mittelpunkte hat; diese Strecken haben also gleiche Projektionen.

Fig. 52.



Umkehrung: Haben Strecken, welche von demselben Punkte außerhalb einer Ebene zu derselben gezogen werden, gleiche Projektionen, so sind sie einander gleich.

§. **74.** Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ändert sich bei einer Parallelverschiebung der Geraden nicht.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1. Zwei parallele Gerade bilden mit derselben Ebene gleiche Neigungswinkel.

2. Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer Ebene normal, so ist es auch die andere.

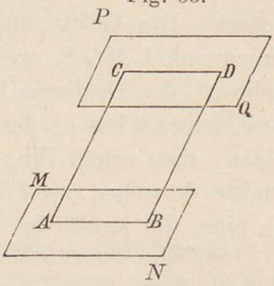
3. Der zweite dieser Sätze läßt folgende Umkehrung zu: Zwei Normale derselben Ebene sind parallel.

3. Lage der Ebenen gegeneinander.

§. **75.** Die beiden parallelen Ebenen MN und PQ (Fig. 53) werden durch die Ebene $ABDC$ geschnitten; die Durchschnittslinien sind AB und CD. Diese können als Gerade derselben Ebene $ABDC$ nur parallel sein, oder sie müssen einander schneiden. Würden sie einander etwa in dem Punkte E schneiden, so müßte E sowohl in MN als auch in PQ liegen, weil AB und CD diesen Ebenen angehören; dann aber würden die Ebenen einander schneiden. AB und CD müssen daher parallel sein.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Fig. 53.



Es seien (Fig. 53) AC und BD parallele Strecken zwischen den parallelen Ebenen MN und PQ. Legt man durch AC und BD die Ebene $ABDC$, so ist $AB \parallel CD$, daher ist $ABDC$ ein Parallelogramm und mithin $AC = BD$.

Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

§. **76.** Der Neigungswinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene ändert sich bei einer Parallelverschiebung der Ebene nicht. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1. Zwei parallele Ebenen bilden mit derselben Geraden gleiche Neigungswinkel.

2. Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer Geraden normal, so ist es auch die andere.

Der 2. Satz läßt auch die Umkehrung zu:

Zwei normale Ebenen derselben Geraden sind parallel.

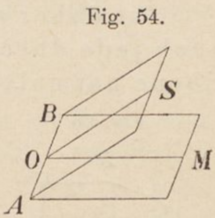
Da Gerade, die auf einer Ebene normal stehen, parallel sind, so gilt der Satz (§. 75):

Normale Gerade zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

Die normale Gerade zwischen parallelen Ebenen heißt der Abstand derselben; parallele Ebenen haben also in allen Punkten denselben Abstand.

§. **77.** Dreht sich eine halbbegrenzte Ebene ABM (Fig. 54) um die gerade Grenzlinie AB in der Richtung gegen ABS, so weicht sie bei dieser Drehung von ihrer ursprünglichen Lage AM umsomehr ab, je größer die Drehung ist.

Fig. 54.



Die Abweichung der Lagen zweier Ebenen, welche dieselbe Grenzlinie haben, heißt der Flächenwinkel oder Keil der beiden Ebenen; die gemeinschaftliche Grenzlinie nennt man die Kante und die beiden Ebenen Schenkelflächen oder Seiten des Keiles.

In dem von den Ebenen AM und AS gebildeten Keile ist AB die Kante, AM und AS sind die Schenkelflächen oder Seiten. Den Keil selbst bezeichnet man durch $M(AB)S$.

Die Größe eines Keiles $M(AB)S$ hängt von der Größe der Drehung ab, welche die eine Schenkelfläche AM um die Kante AB machen muß, um in die Lage der zweiten Schenkelfläche AS zu gelangen. Die Größe dieser Drehung aber wird gemessen durch den Linienwinkel MOS, welchen eine auf der Kante normale Gerade MO während der Drehung beschreibt. Der Linienwinkel MOS heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen AM und AS, welche den Keil bilden; man erhält ihn, wenn man auf die Kante in einem beliebigen Punkte derselben zwei Normale so errichtet, daß die eine Normale in die eine, die zweite in die andere Schenkelfläche fällt.

Oft wird der zwischen den Schenkelflächen liegende Teil des Raumes als Keil erklärt.

Da die Keile durch die zugehörigen Neigungswinkel gemessen werden, so gelten alle Bezeichnungen und Sätze, welche in der Planimetrie von den Winkeln entwickelt werden, auch von den Keilen, wenn man die Ausdrücke

Winkel, Scheitel, Schenkel, Gerade

bezüglich durch die Ausdrücke

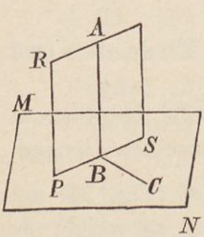
Keil, Kante, Schenkelfläche, Ebene

ersetzt.

Man unterscheidet auch hier hohle und erhabene, spitze, rechte, stumpfe und gestreckte Keile, ferner Neben- und Scheitelkeile.

§. 78. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so heißen diese aufeinander senkrecht oder normal, sonst schief.

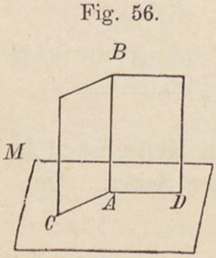
Fig. 55.



1. Es sei (Fig. 55) die Gerade $AB \perp MN$ und man lege durch AB eine Ebene RS, welche die Ebene MN in der Geraden PS schneidet; dann muß auch Ebene $RS \perp MN$ sein. Denn zieht man in der Ebene MN die Gerade $BC \perp PS$, so ist ABC der Neigungswinkel der Ebenen RS und MN; dieser Winkel ist aber ein rechter, da $AB \perp MN$ und daher auch $AB \perp BC$ ist, folglich $RS \perp MN$.

Ist daher eine Gerade zu einer Ebene normal, so ist auch jede durch die Gerade gelegte Ebene zu der ersten Ebene normal.

Fig. 56.



2. Ist $AB \perp MN$ (Fig. 56), so ist auch Ebene $ABC \perp MN$. Dreht man die Ebene ABC um AB, so ist sie in jeder Lage, z. B. ABD, ebenfalls $\perp MN$. Daraus folgt:

Sind zwei einander schneidende Ebenen zu einer dritten Ebene normal, so ist auch ihre Durchschnittslinie zu dieser Ebene normal.

§. **79.** Bei Parallelverschiebung der einen von zwei einander schneidenden Ebenen ändert sich der Neigungswinkel dieser Ebenen nicht. Daraus folgt:

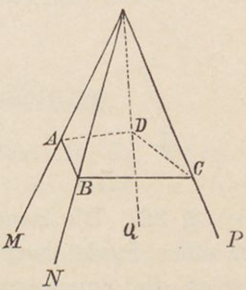
1. Zwei parallele Ebenen haben gegen dieselbe dritte Ebene gleiche Neigungswinkel.

2. Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer dritten Ebene normal, so ist auch die andere zu derselben normal.

4. Körperliche Ecken.

§. **80.** Gleitet ein Halbstrahl OM (Fig. 57), dessen Anfangspunkt O im Raume fest ist, längs des Umfanges eines Polygons $ABCD$ hin, so schließen die von ihm beschriebenen Ebenen MON, NOP, POQ... einen nach einer Seite unbegrenzten Raum ein, welcher eine körperliche oder Raumecke, auch bloß Ecke heißt.

Fig. 57.



Den festen Punkt O nennt man den Scheitel, die Ebenen MON, NOP, POQ... die Seitenflächen, die Schnittlinien je zweier aufeinander folgender Seitenflächen die Kanten, die von je zwei benachbarten Kanten gebildeten ebenen Winkel die Kantenwinkel oder Seiten und die Neigungswinkel je zweier anliegender Seitenflächen die Flächenwinkel oder bloß Winkel der Ecke. Die Ecke selbst heißt $OMNPQ$.

Zur Entstehung einer Ecke sind wenigstens drei Ebenen erforderlich. Eine Ecke hat so viele Seiten und so viele Winkel als Kanten. Nach der Anzahl der Kanten oder Seiten unterscheidet man dreikantige oder dreiseitige, vierkantige oder vierseitige,... Ecken.

Eine Ecke, in welcher alle Seiten gleich sind, heißt gleichseitig; eine Ecke, in welcher alle Winkel gleich sind, gleichwinklig; und eine Ecke, in welcher die Seiten und Winkel gleich sind, regelmäßig oder regulär.

§. **81.** Um aus drei gegebenen Kantenwinkeln $AOB = a$, $AOC = b$ und $BOD = c$ (Fig. 58), von denen a der größte sei, eine Ecke zu bilden, wird man die Ebenen AOC und BOD um die Geraden OA und OB auf derselben Seite der Ebene AOB so lange gegeneinander drehen, bis die Geraden OC und OD ineinander fallen. Würden diese Geraden gar nicht oder würden sie in der Ebene AOB zusammenfallen, so entstünde keine Ecke. Damit eine Ecke entstehe, müssen die Geraden OC und OD außerhalb der Ebene AOB in der

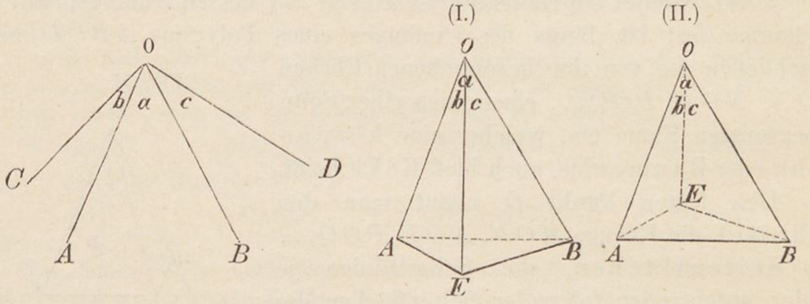
Geraden OE zusammenfallen, was nur möglich ist, wenn $b + c > a$ ist. Wenn aber die zwei kleinsten Seiten b und c zusammen größer sind als die dritte größte, so muß umsomehr $a + c > b$ und $a + b > c$ sein.

In jeder dreikantigen Ecke ist die Summe je zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Daraus folgt, daß jede Seite einer dreiseitigen körperlichen Ecke größer sein muß als die Differenz der beiden andern.

Vergleiche mit diesen Sätzen jene über die Seiten eines Dreieckes.

Fig. 58.



§. 82. Die Summe aller ebenen Winkel, welche in einer Ebene um einen Punkt herum liegen, ist gleich vier Rechten. Umgekehrt: beträgt die Summe aller ebenen Winkel um denselben Scheitel vier Rechte, so liegen dieselben in einer Ebene und können daher keine Ecke bilden. Daraus folgt:

In jeder Ecke ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

§. 83. Zwei Ecken, welche sich so ineinander legen lassen, daß ihre Kanten und Seitenflächen einander decken, heißen kongruent.

Soll diese Deckung möglich sein, so müssen nicht nur die Seiten und Winkel der beiden Ecken paarweise gleich sein, sondern auch in beiden Ecken in derselben Richtung aufeinander folgen. Die Anordnung der paarweise gleichen Stücke kann aber in den beiden Ecken auch entgegengesetzt sein.

Bei der in §. 81 angeführten Konstruktion einer Ecke aus drei gegebenen Kantenwinkeln (Fig. 58) kann nämlich die Drehung der Ebenen AOC und BOD um die Geraden OA und OB auf zweierlei Art geschehen, entweder auf der vorderen Seite der Ebene AOB (Fig. 58, I) oder auf der hinteren (Fig. 58, II). Die zwei Ecken, die dadurch entstehen, haben nach der Ordnung gleiche Kantenwinkel und gleiche Flächenwinkel und dennoch können sie im allgemeinen nicht so ineinander gelegt werden, daß Deckung stattfindet, weil ihre gleichen Bestandteile im entgegengesetzten Sinne der Drehung — in der einen Ecke von links nach rechts, in der andern von rechts nach links — aufeinander folgen. Die beiden Ecken stehen in derselben Beziehung zueinander wie ein Gegenstand zu seinem Spiegelbild oder wie die rechte Hand zur linken. Zwei solche Ecken heißen symmetrisch.

Legt man zwei symmetrische Ecken so aneinander, daß sie eine Seitenfläche gemeinsam haben und sie selbst auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, so steht die Strecke zwischen je zwei entsprechenden Punkten der beiden Ecken zu der gemeinsamen Seitenfläche normal und wird durch sie halbiert.

Die Ebene, in welcher bei dieser Lage die gemeinsame Seitenfläche liegt, heißt die Symmetrieebene der zwei symmetrischen Ecken.

II. Körper und ihre Ausmessung.

§. 84. Ein von allen Seiten begrenzter Raum ist ein Körper. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger oder eckiger Körper, auch Polyeder. Ein Körper, welcher entweder teils von ebenen, teils von gekrümmten Flächen oder von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt wird, heißt ein krummflächiger oder runder Körper.

Zur Begrenzung eines Polyeders sind wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen eines Polyeders heißen seine Flächen, die Schnittlinien der Flächen heißen die Kanten und die von den Flächen gebildeten Ecken die Ecken des Polyeders.

§. 85. Zwei Körper, welche so ineinander gelegt werden können, daß alle ihre Grenzflächen einander decken, heißen kongruent.

Zwei Körper, welche auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte derselben zu dieser Ebene normal steht und durch sie halbiert wird, heißen symmetrisch (§. 83) und die Ebene selbst heißt die Symmetrieebene der zwei Körper.

Sowohl in kongruenten als in symmetrischen Körpern sind je zwei entsprechende Strecken gleich, je zwei entsprechende Flächen kongruent und je zwei entsprechende Keile gleich; die entsprechenden Ecken aber sind nur in kongruenten Körpern kongruent, in symmetrischen dagegen symmetrisch. Zwei symmetrische Körper können daher im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden.

§. 86. Bei der Ausmessung der Körper hat man die Oberfläche und den Kubikinhalt derselben in Betracht zu ziehen.

Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben. Um daher die Oberfläche eines Körpers zu erhalten, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzfläche für sich zu bestimmen und alle gefundenen Flächen zu addieren.

§. 87. Die Größe des Raumes, welchen die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt dessen Kubikinhalt oder Volumen.

Zwei Körper, welche gleichen Kubikinhalt haben, heißen inhaltsgleich.

Um das Volumen eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Kubikmaßes an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl für das Volumen des Körpers.

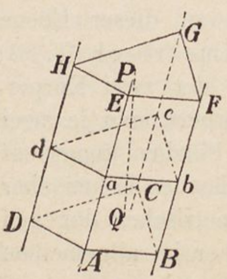
Als Einheit des Kubikmaßes wird ein Würfel (Kubus) angenommen, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, also ein Meter, ein Dezimeter, .. beträgt und der dann beziehungsweise Kubikmeter (m^3), Kubikdezimeter (dm^3), ... heißt. Einen Körper messen heißt also untersuchen, wie viel m^3, dm^3, u. s. w. darin enthalten sind. Es würde zu mühsam und in vielen Fällen unausführbar sein, diese Untersuchung durch wirkliches Neben- und Aufeinanderlegen der Kubikeinheit vorzunehmen; einfacher wird das Volumen eines Körpers mittelbar aus dem Maße der Strecken oder Flächen, von denen die Größe desselben abhängt, durch Rechnung gefunden.

1. Das Prisma.

Entstehung und Bestandstücke eines Prismas.

§. 88. Nimmt man mit einer unbegrenzten Geraden AE (Fig. 59) eine Parallelverschiebung längs des Umfanges eines Polygons $ABCD$... vor, so schließen die von ihr beschriebenen Ebenen, deren Schnittlinien BF, CG, DH,... parallel sind, einen nach zwei Seiten offenen Raum ein, welcher ein prismatischer Raum heißt. AE heißt die erzeugende Gerade, $ABCD$ das Leitpolygon.

Fig. 59.



Wird ein prismatischer Raum durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Prisma.

Die zwei parallelen Schnittflächen heißen die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen die Seitenflächen.

Die Grundflächen eines Prismas $ABCD$ und $EFGH$ sind kongruent, da die Seiten und Winkel paarweise gleich sind. $AB = EF$ als Parallele zwischen Parallelen, der Winkel bei A ist gleich dem Winkel bei E, weil die Schenkel parallel und gleichgerichtet sind.

Die Schnittlinien der Seitenflächen untereinander heißen Seitenkanten; sie sind parallel, da sie durch Parallelverschiebung der erzeugenden Geraden entstanden sind. Die Seitenflächen eines Prismas sind daher Parallelogramme.

Die Schnittlinien der Seitenflächen mit den Grundflächen heißen Grundkanten.

Ein Prisma ist also ein Körper, welcher von zwei parallelen und kongruenten Vielecken als Grundflächen und von so vielen Parallelogrammen, als eine Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen begrenzt ist.

Der Abstand PQ der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

Man kann sich ein Prisma auch durch eine Parallelverschiebung eines Polygons entstanden denken, bei welcher alle Eckpunkte desselben gerade Linien beschreiben.

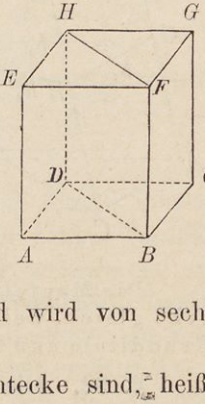
Einteilung der Prismen.

§. **89.** Nach der Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man dreiseitige, vierseitige und mehrseitige Prismen.

Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen heißt ein Prisma gerade oder schief, je nachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche normal oder schief stehen.

In einem geraden Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke und jede Seitenkante ist der Höhe des Prismas gleich.

Fig. 60.



Jedes gerade Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Polygone sind, heißt regelmäßig. Ein Prisma, in welchem alle Kanten gleich sind, heißt gleichkantig.

Ein Prisma $ABCDEFGH$ (Fig. 60), dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Dasselbe kann, wie jedes andere Prisma, gerade oder schief sein. Ein Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen begrenzt.

Ein gerades Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Es wird von sechs Rechtecken begrenzt.

Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten gleich sind, heißt ein Würfel oder Kubus. Es wird von sechs Quadraten begrenzt.

Ein schiefes Parallelepiped, dessen sämtliche Grenzflächen Rhomben sind, heißt ein Rhomboeder.

Schnitte der Prismen.

§. **90.** 1. Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur $abcd$ (Fig. 59) mit der Grundfläche kongruent. (Weshalb?)

2. Legt man durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten BF und DH (Fig. 60) eines Prismas die Ebene, so ist der Durchschnitt $BFHD$ ein Parallelogramm und heißt ein Diagonalschnitt des Prismas.

Jedes mehrseitige Prisma kann durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen zerlegt werden.

3. Wird ein Prisma durch eine auf den Seitenkanten normale Ebene geschnitten, so heißt die Schnittfigur ein normaler Querschnitt des Prismas.

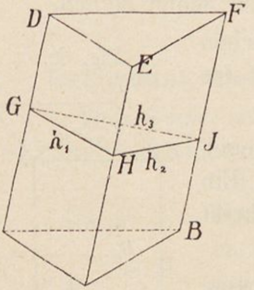
Kann in einem Prisma die Grundfläche selbst ein normaler Querschnitt sein?

Oberfläche eines Prismas.

§. **91.** Um die Oberfläche eines Prismas zu erhalten, berechnet man die Seitenflächen als Parallelogramme und addiert dieselben; ihre Summe heißt die Seitenoberfläche oder Mantelfläche. Zu dieser addiert man noch die doppelte Grundfläche.

Wird der Mantel eines geraden Prismas in eine Ebene aufgerollt, so ergibt sich:

Fig. 61.



Die Mantelfläche eines geraden Prismas ist einem Rechtecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Prismas zur Höhe hat.

Sind die Seiten des normalen Querschnittes eines schiefen Prismas (Fig. 61) h_1, h_2, $h_3 \ldots$, so sind die Seitenflächen sh_1, sh_2, $sh_3 \ldots$, daher der Mantel

$$m = sh_1 + sh_2 + sh_3 + \ldots$$
$$= s(h_1 + h_2 + h_3 \ldots) = su,$$

wenn u der Umfang des normalen Querschnittes ist.

Die Mantelfläche eines schiefen Prismas ist also einem Rechtecke gleich, welches den Umfang des normalen Querschnittes zur Grundlinie und eine Seitenkante des Prismas zur Höhe hat.

§. **92.** Die Oberfläche eines Würfels ist gleich der sechsfachen Fläche eines Grenzquadrates, somit der sechsfachen zweiten Potenz einer Kante.

Sind s und o die Maßzahlen der Kante und der Oberfläche eines Würfels, so ist

$$o = 6s^2, \text{ und umgekehrt } s = \sqrt{\frac{o}{6}}.$$

Sind S und O die Maßzahlen der Kante und der Oberfläche eines zweiten Würfels, so ist auch $O = 6S^2$, daher $O : o = S^2 : s^2$; d. h.: Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Kanten.

§. **93.** Stellt man die Grenzflächen eines Körpers in einer Ebene zusammenhängend dar, so heißt die Zeichnung das Netz des Körpers.

Man erhält das Netz eines Prismas, wenn man die Seitenflächen desselben nebeneinander konstruiert und an eine derselben oben und unten die Grundflächen zeichnet. Die Summe der Seitenflächen eines geraden Prismas bildet im Netz ein Rechteck.

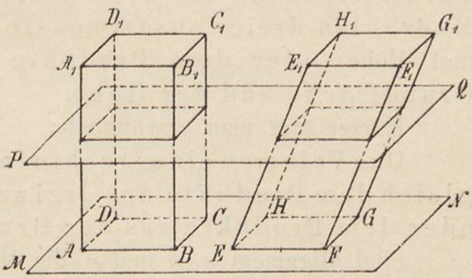
Aufgaben.

Das Netz zu zeichnen *a*) eines Würfels, *b*) eines rechtwinkligen Parallelepipedes, *c*) eines regelmäßigen, sechsseitigen Prismas, *d*) eines dreiseitigen, geraden gleichkantigen Prismas.

Volumen eines Prismas.

§. **94.** Die beiden Parallelepipede $ABCDA_1B_1C_1D_1$ und $EFGHE_1F_1G_1H_1$ sollen kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben. Beide stehen auf derselben Ebene MN. Legt man durch beide Körper zu MN parallele Ebenen unendlich nahe aneinander, so ergeben sich für beide Körper kongruente Schnittfiguren. Denkt man sich an die Stelle dieser Schnittfiguren unendlich dünne Platten, so haben diese dasselbe Volumen, daher sind auch die beiden Parallelepipede inhaltsgleich, da beide aus derselben Anzahl inhaltsgleicher Platten bestehen. Sind die Grundflächen der beiden Parallelepipede nur inhaltsgleich, so haben die Platten, aus welchen sie zusammengesetzt gedacht werden können, doch dasselbe Volumen. Ersetzt man die beiden Parallelepipede durch Prismen (z. B. durch ein vierseitiges und ein fünfseitiges) von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen, so findet man durch dieselbe Betrachtung, daß sie ebenfalls dasselbe Volumen haben. Auf beliebig geformte Körper ausgedehnt, ergibt sich folgender Satz:

Fig. 62.



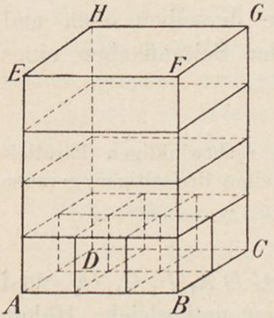
Zwei Körper, welche sich in eine solche Lage bringen lassen, daß sie mit jeder einzelnen Ebene, die zu einer bestimmten Ebene parallel ist, gleiche Schnittflächen geben, haben gleiches Volumen.

Dieser Satz heißt der Cavalieri'sche Satz. Aus demselben folgt:

Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben dasselbe Volumen.

§. **95.** Es sei (Fig. 63) die Maßzahl für das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu bestimmen, in welchem die Länge $AB = 3\ m$, die Breite $AD = 2\ m$ und die Höhe $AE = 4\ m$ ist. Da die Höhe $4\ m$ beträgt, so kann man das Parallelepiped in 4 gleiche Parallelschichten zerlegen, deren jede $1\ m$ hoch ist. Da ferner das Parallelepiped $3\ m$ lang und $2\ m$ breit ist, so läßt sich jede dieser Parallelschichten in $3 \times 2 = 6$ Würfel zerlegen, deren jeder 1 Kubikmeter ist. Die Maßzahl für das Volumen dieses Parallelepipeds ist sonach $6 \times 4 = 3 \times 2 \times 4 = 24$, und zwar auf das Kubikmeter als Einheit bezogen.

Fig. 63.



Die Maßzahl für das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist also gleich dem Produkte aus den Maßzahlen dreier zusammenstoßender Kanten (Länge, Breite und Höhe) oder dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Kürzer sagt man gewöhnlich:

Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus drei zusammenstoßenden Kanten oder dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Sind allgemein a, b und c die Maßzahlen der in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten und v die Maßzahl des Volumens, so ist $v = abc$, und umgekehrt $a = \frac{v}{bc}$, $b = \frac{v}{ac}$, $c = \frac{v}{ab}$.

Sind a und b die Seiten der Grundfläche g, so ist $g = ab$; c ist die Höhe h des rechtwinkligen Parallelepipeds; es ist dann $v = gh$.

§. **96.** Da nach §. 94 jedes Prisma gleiches Volumen mit einem rechtwinkligen Parallelepiped von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat, so gilt allgemein der Satz:

Das Volumen eines jeden Prismas ist dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe gleich.

Sind v, g, h die Maßzahlen für das Volumen, die Grundfläche und die Höhe eines Prismas, so ist $v = gh$; daher $g = \frac{v}{h}$, $h = \frac{v}{g}$.

Bezeichnen G und g die Maßzahlen der Grundflächen, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier Prismen und V und v die Maßzahlen ihrer Kubikinhalte, so hat man:

1) $V : v = G.H : g.h$.

2) Für $G = g$ ist $V : v = H : h$.

3) Für $H = h$ ist $V : v = G : g$.

Drücke diese Proportionen mit Worten aus!

§. **97.** Da ein Würfel (Kubus) ein rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Länge, Breite und Höhe ist, so folgt:

Das Volumen eines Würfels ist gleich der dritten Potenz einer Seite.

Darum nennt man auch in der Arithmetik die dritte Potenz einer Zahl den Kubus derselben.

Bezeichnen s und v die Maßzahlen der Kante und des Volumens eines Würfels, so ist

$$v = s^3, \text{ und umgekehrt } s = \sqrt[3]{v}.$$

Sind S und V die Kante und das Volumen eines zweiten Würfels, so ist auch $V = S^3$, daher $V : v = S^3 : s^3$; d. h.:

Die Volumina zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Kanten.

Wie ändert sich demnach das Volumen eines Würfels, wenn die Seite desselben verdoppelt wird? Wie die Oberfläche?

§. **98.** Ein Würfel, dessen Kante 10 dm beträgt, hat

$$10.10.10\ dm^3 = 1000\ dm^3.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Kubikmeter; also ist

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3.$$

Ebenso folgt $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$,

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

1 Kubikdezimeter heißt als Hohlmaß ein Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

§. **99.** Rechnungsaufgaben.

1. Die Kante eines Würfels ist *a)* 7 m, *b)* 2·13 m, *c)* 159 dm, *d)* 125 cm; wie groß ist die Oberfläche, wie groß das Volumen desselben?

2. Suche die Kante eines Würfels, dessen Oberfläche ist: *a)* 40344 cm^2, *b)* 22·18 m^2, *c)* 5080·86 cm^2!

3. Suche die Kante eines Würfels, dessen Volumen ist: *a)* 29791 cm^3, *b)* 16·003 dm^3, *c)* 1·157625 m^3!

4. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 30 dm^2; wie groß ist das Volumen?

5. Ein Würfel von 2 dm Seitenlänge wiegt 16 kg; wieviel wiegt ein anderer Würfel von derselben Dichte und von 6 dm Seitenlänge?

6. Wie viel dm^2 Blech ist zu einem würfelförmigen, oben offenen Gefäß, das 10 l fassen soll, erforderlich?

7. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Oberfläche doppelt so groß ist als die eines zweiten Würfels von 2 dm Kantenlänge? Wie groß ist die Kante des ersten Würfels, wenn die des zweiten a ist?

8. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Volumen doppelt so groß ist als das eines zweiten Würfels von 0·12 m Kantenlänge? Wie groß ist die Kante des ersten Würfels, wenn die des zweiten a ist?

9. Bestimme die Kante eines Würfels, dessen Inhalt gleich ist der Summe der Inhalte zweier Würfel von 1·2 dm und 2·1 dm Kantenlänge!

---

10. Ein rechtwinkliges Parallelepiped ist: a) 11 dm lang, 6 dm breit, 9 dm hoch; b) 4·2 dm lang, 1·5 dm breit, 1·2 dm hoch; c) 7·15 m lang, 3·72 m breit, 2·18 m hoch; wie groß ist die Oberfläche, wie groß das Volumen desselben?

11. Die Höhe eines geraden Prismas beträgt 5 m, die Grundfläche desselben ist ein Quadrat mit der Seite 3 m; wie groß ist a) die Oberfläche, b) das Volumen?

12. Wie groß ist a) die Grundfläche, b) das Volumen eines geraden Prismas, dessen Grundfläche ein 2·3 dm langes und 1·2 dm breites Rechteck und dessen Höhe 3·5 dm ist?

13. Wie hoch ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, das bei 75 cm Länge und 36 cm Breite 21600 cm^3 enthält?

14. Die beiden quadratischen Grundflächen eines geraden Parallelepipeds betragen zusammen 162 dm^2, die vier Seitenflächen 590·4 dm^2; wie groß ist das Volumen?

15. Wie viel m^3 hat eine Mauer, welche 11 m 2 dm lang, 8 dm dick und 3 m 2 dm hoch ist?

16. Man will eine Grube machen, welche bei einer Länge von 10 m und einer Tiefe von 4·2 m einen Inhalt von 273 m^3 haben soll; wie breit muß sie werden?

17. Ein gerades 8 dm hohes Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, wiegt 135 kg; wie groß ist jede Seite der Grundfläche, wenn jedes dm^3 2·7 kg wiegt?

18. Die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes ist ein Rechteck von 2 m Länge und 1·2 m Breite; wie tief muß das Gefäß sein, um 12 Hektoliter zu fassen?

19. In einem Prisma beträgt a) die Grundfläche 15 m^2, die Höhe 2·4 m; b) die Grundfläche 2·864 dm^2, die Höhe 9·2 dm; wie groß ist das Volumen des Prismas?

20. Die Grundfläche eines Prismas beträgt 31·78 m^2, das Volumen 15·7311 m^3; wie groß ist die Höhe?

21. Wie groß ist die Grundfläche eines 4·5 dm hohen Prismas, welches 124·2 dm^3 Inhalt hat?

22. Die Grundflächen eines 2·4 dm hohen geraden Prismas sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 0·5 dm und 1·2 dm; berechne a) die Oberfläche, b) das Volumen!

23. Die Höhe eines geraden Prismas ist h, die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a; berechne die Oberfläche o und das Volumen v! (§. 59, 1.)

24. Wie groß sind Oberfläche und Volumen eines geraden, dreiseitigen Prismas, in welchem jede Kante 3 dm beträgt?

25. Die Höhe eines geraden Prismas ist h, die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlinie a; bestimme die Oberfläche o und das Volumen v! (§. 61, 1.)

26. Ein rechtwinkliges Gefäß, dessen Grundfläche 2 *dm* lang und 1·8 *dm* breit ist, wird zum Teil mit Wasser gefüllt; um wie viel steigt das Wasser, wenn ein Metallwürfel mit der Kante 4 *cm* hineingelegt wird?

27. Es wird ein Keller gegraben, der 13·4 *m* lang, 8·2 *m* breit und 3·1 *m* tief werden soll; wie viel m^3 Erde muß man ausgraben und wie viele Wagen Erde werden fortzuschaffen sein, wenn man aus 5 m^3 festen Bodens durch das Graben 9 m^3 gelockerter Erde erhält und auf einen Wagen $\frac{3}{4}$ m^3 rechnet?

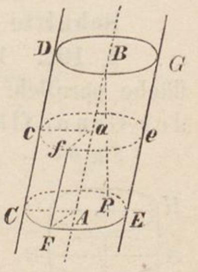
28. Beim Baue einer Eisenbahn wird die aus einem Einschnitte, welcher 165 *m* lang, oben 22 *m* und unten 8 *m* breit und 6·4 *m* tief ist, gewonnene Erdmasse auf ein 25 *a* enthaltendes Grundstück gleichmäßig verteilt; um wie viel wird letzteres dadurch erhöht?

2. Der Zylinder.

Entstehung und Bestandstücke eines Zylinders.

§. 100. Nimmt man mit einer unbegrenzten Geraden CD (Fig. 64) eine Parallelverschiebung längs des Umfanges des aus A mit dem Halbmesser AC beschriebenen Kreises vor, so beschreibt sie eine krumme Fläche, welche Zylinderfläche heißt; CD ist die erzeugende Gerade, der Kreis der Leitkreis; die durch den Mittelpunkt desselben parallel zur erzeugenden Geraden gezogene unbegrenzte Gerade AB heißt die Achse der Zylinderfläche, der von der Zylinderfläche eingeschlossene, nach zwei Seiten offene Raum ein zylindrischer Raum.

Fig. 64.



Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet die Zylinderfläche in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt. Denn es ist $ac = AC$, da $CAac$ ein Parallelogramm ist (§. 75), ebenso $af = AF$, daher $ac = af$.

Wird ein zylindrischer Raum durch zwei zu der Ebene des Leitkreises parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Zylinder.

Die beiden parallelen Schnittflächen, von denen die eine auch mit dem Leitkreise selbst zusammenfallen kann, heißen die Grundflächen, die gekrümmte Seitenfläche heißt der Mantel des Zylinders.

Man kann sich einen Zylinder $CEGD$ auch durch eine Parallelverschiebung einer Kreisfläche CE entstanden denken, bei welcher der Mittelpunkt A eine Gerade AB beschreibt.

Die Grundflächen eines Zylinders sind demnach zwei kongruente Kreise. Die Strecke AB, welche ihre Mittelpunkte verbindet, heißt die

Achse des Zylinders. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Mantelfläche in zwei geraden Linien; eine solche Schnittlinie CD heißt eine *Seite* des Zylinders. Alle Seiten eines Zylinders sind der Achse gleich und parallel. Der Abstand BP der beiden Grundflächen des Zylinders heißt die *Höhe* desselben.

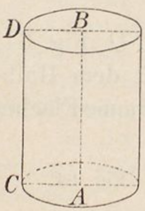
Da man sich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt, so kann man auch sagen:

Ein Zylinder ist ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind.

Einteilung der Zylinder.

§. **101.** Ein Zylinder, dessen Achse auf der Grundfläche normal steht, heißt ein *gerader* (Fig. 65), jeder andere ein *schiefer* Zylinder.

Fig. 65.



Einen geraden Zylinder kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein Rechteck $ABDC$ um eine seiner Seiten, z. B. AB, als Achse herumdreht. In einem geraden Zylinder ist die Höhe der Achse gleich.

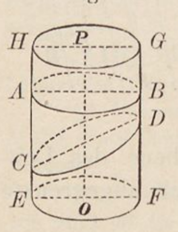
Ist auch ein schiefer Zylinder ein Rotationskörper bezüglich der als „Achse" bezeichneten Geraden AB?

Ein gerader Zylinder, in welchem die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt *gleichseitig*.

Schnitte des Zylinders.

§. **102.** 1. Wird ein Zylinder (Fig. 66) durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche AB ein *mit der Grundfläche kongruenter Kreis*. (§. 100.)

Fig 66.



2. Ist die Schnittebene nicht parallel zur Grundfläche und trifft sie alle Seiten des Zylinders, so ist der Schnitt CD beim geraden Zylinder eine krumme Linie, welche *Ellipse* heißt.

3. Geht die schneidende Ebene durch die Achse, so ist die Schnittfläche, welche in diesem Falle ein *Achsenschnitt* heißt, ein *Parallelogramm*, z. B. $EFGH$. (Weshalb?) In einem geraden Zylinder ist jeder Achsenschnitt ein *Rechteck*, in einem gleichseitigen Zylinder ein *Quadrat*.

Oberfläche eines Zylinders.

§. **103.** Wird die Mantelfläche eines geraden Zylinders in eine Ebene aufgerollt, so ergibt sich:

Die Mantelfläche eines geraden Zylinders ist gleich einem Rechtecke, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Zylinders zur Höhe hat.

Um die ganze Oberfläche eines geraden Zylinders zu erhalten, addiert man zu der Mantelfläche den doppelten Flächeninhalt der Grundfläche.

Drückt man durch r, h, m und o bezüglich den Halbmesser der Grundfläche, die Höhe, die Mantelfläche und die Oberfläche eines geraden Zylinders aus, so ist $2r\pi$ der Umfang, $r^2\pi$ der Flächeninhalt der Grundfläche, und daher

$$m = 2r\pi.h, \text{ und}$$

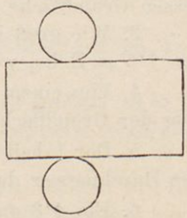
$$o = 2r^2\pi + 2rh\pi \text{ oder } o = 2r\pi\,(r+h).$$

Im gleichseitigen Zylinder ist $h = 2r$, daher $m = 4r^2\pi$ und $o = 6r^2\pi$. Ist R der Halbmesser der Grundfläche und O der Inhalt eines zweiten gleichseitigen Zylinders, so hat man $O = 6R^2\pi$, daher $O:o = R^2:r^2$.

§. **104.** Aufgabe. Das Netz eines geraden Zylinders zu konstruieren.

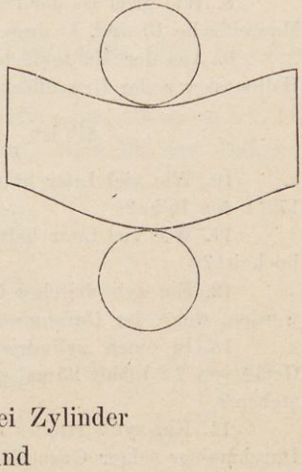
Man zeichne (Fig. 67) ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe des Zylinders gleich ist, und beschreibe sodann zwei der Grundfläche gleiche Kreise, von denen der eine die Grundlinie, der andere die gegenüberliegende Seite des Rechteckes berührt.

Fig. 67.



Der abgewickelte Mantel eines schiefen Zylinders ist kein Parallelogramm, sondern eine von zwei parallelen Geraden und zwei krummen Linien begrenzte Figur (Fig. 68). Daraus folgt, daß die obige Formel für die Berechnung des Mantels eines geraden Zylinders auf den schiefen nicht anwendbar ist.

Fig. 68.



Volumen eines Zylinders.

§. **105.** Da jeder Zylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so folgt aus §. 96:

Die Maßzahl für das Volumen eines Zylinders ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe und v das Volumen eines Zylinders, so ist $v = r^2\pi h$.

Ähnlich wie in §. 96 erhält man für zwei Zylinder

$$v:v' = r^2:r'^2, \text{ für } h = h', \text{ und}$$

$$v:v' = h:h', \text{ für } r = r'. \text{ (In Worten?)}$$

Für den gleichseitigen Zylinder ist $h = 2r$, daher $v = 2r^3\pi$.

Ist R der Halbmesser der Grundfläche und V der Inhalt eines zweiten gleichseitigen Zylinders, so hat man auch $V = 2R^3\pi$, daher

$$V : v = R^3 : r^3.$$

§. **106.** Unter einer zylindrischen Röhre versteht man einen Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Zylinder liegt, die eine gemeinschaftliche Achse haben. Ihr Volumen ist gleich der Differenz der Volumina dieser beiden Zylinder. Sind also R und r die Halbmesser derselben und ist h die Höhe der zylindrischen Röhre, so ist ihr Volumen

$$v = R^2\pi h - r^2\pi h = (R^2 - r^2)\pi h.$$

§. **107.** Rechnungsaufgaben.*)

1. In einem geraden Zylinder beträgt *a*) der Halbmesser der Grundfläche 3 *dm*, die Höhe 5 *dm*; *b*) der Durchmesser der Grundfläche 1·57 *m*, die Höhe 1·29 *m*; wie groß ist die Mantelfläche, wie groß das Volumen des Zylinders?

2. Berechne die Oberfläche eines geraden Zylinders, der 7·5 *dm* hoch ist und dessen Grundfläche 17·4 *dm* im Umfange hat!

3. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Zylinders von 1·5 *m* Höhe, wenn die Mantelfläche 1·1386 m^2 beträgt?

4. Von einem geraden Zylinder beträgt die Oberfläche 28·9665 dm^2, der Umfang der Grundfläche 4·71 *dm*; wie groß ist die Höhe des Zylinders?

5. Der Inhalt eines Zylinders ist 37·268 dm^3; wie groß ist die Höhe, wenn der Durchmesser der Grundfläche 3·7 *dm* beträgt?

6. Ein 4·3 *dm* hoher Zylinder hat 20 dm^3 Inhalt; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche?

7. Wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen eines gleichseitigen Zylinders, dessen Seite $2\frac{3}{5}$ *m* beträgt?

8. Wie groß ist der Halbmesser eines gleichseitigen Zylinders, wenn *a*) dessen Mantelfläche 10 dm^2, *b*) dessen Volumen 10 dm^3 beträgt?

9. Aus der Mantelfläche m und dem Volumen v eines geraden Zylinders den Halbmesser r der Grundfläche zu berechnen.

$$\text{Es ist } \frac{v}{m} = \frac{r^2\pi . h}{2r\pi . h} = \frac{r}{2}; \text{ daher } r = \frac{2v}{m}.$$

10. Wie viel Liter hält ein zylindrisches Gefäß von 86 *mm* Durchmesser und 172·1 *mm* Höhe?

11. Wie viel Liter hält ein zylindrisches Gefäß, das 503·1 *mm* weit und ebenso hoch ist?

12. Ein zylindrisches Gefäß soll 1 *l* halten; wie hoch muß dasselbe gemacht werden, wenn der Durchmesser im Lichten 108·4 *mm* betragen soll?

13. In einen zylindrischen Wasserbehälter von 6 *dm* Durchmesser wird ein Gefäß von 2 *l* Inhalt 25mal geleert; wie hoch wird das Wasser in jenem Behälter stehen?

14. Ein zylindrisches Gefäß faßt $\frac{1}{2}$ *hl* und ist 400 *mm* hoch; wie groß ist der Durchmesser seiner Grundfläche?

---

*) Bei den Rechnungen beachte man, daß die Zahl π eine unvollständige Dezimalzahl ist.

15. Ein Baumstamm von 3·3 *m* Länge und 66 *cm* Dicke wird mit 28½ K bezahlt; wie teuer wird das m^3 gerechnet, wenn er annähernd als Zylinder betrachtet werden kann?

16. Wie viel dm^3 Wasser schafft eine Pumpe bei jedem Hube in die Höhe, wenn der Durchmesser des Zylinders oder Stiefels im Lichten 21 *cm* und der Hub 4·2 *dm* beträgt?

17. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von 200 m^2 ganz überwalzt werden soll und die Walze 1·2 *m* lang ist und 3 *dm* im Durchmesser hat?

18. Ein gerader Zylinder hat eine Grundfläche von 3 *dm* Durchmesser und zur Höhe 2 *dm*; ein anderer hat nur 1·6 *dm* Höhe und mit dem vorigen gleiche Mantelfläche; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche des zweiten Zylinders?

19. Ein Würfel ist inhaltsgleich mit einem geraden Zylinder, dessen Höhe 2·4 *dm* und dessen Mantelfläche 7·54 dm^2 beträgt; wie groß ist die Oberfläche des Würfels?

20. Ein Balken von 5·2 *m* Länge, 3 *dm* Breite und 2·6 *dm* Höhe ist nach der Länge zylindrisch ausgehöhlt; wie groß ist sein Volumen, wenn der Durchmesser der Höhlung 18 *cm* beträgt?

21. Bei einer zylindrischen Röhre, welche 5 *cm* dick ist, beträgt der innere Durchmesser 18 *cm* und die Höhe 2·85 *m*; wie groß ist ihre innere und äußere Mantelfläche?

22. Eine zylindrische Röhre ist 32 *dm* lang und im Innern 1·4 *dm* weit; welches Volumen hat dieselbe, wenn ihre Dicke 5 *cm* beträgt?

23. Die Höhe eines zylindrischen Turmes, dessen äußerer Umfang 13 *m* ist, beträgt 7·2 *m* und die Dicke der Mauer 86 *cm*; wie viel m^3 Mauerwerk enthält der Turm?

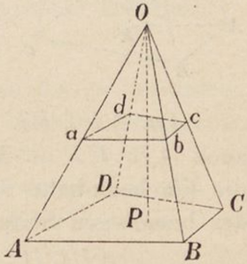
24. Zu einer Wasserleitung von 1580 *m* Länge braucht man Röhren von Blei, welche 13 *mm* dick sind und deren Weite im Lichten 79 *mm* beträgt; wie viel kostet das dazu erforderliche Blei, wenn 1 dm^3 Blei 11·35 *kg* wiegt, wenn für 100 *kg* Blei 36 K bezahlt und wegen des Anschlusses der Röhren 2% dazugerechnet werden?

3. Die Pyramide.

§. 108. Eine körperliche Ecke (§. 80) wird auch ein p y r a m i d a l e r R a u m genannt.

Wird ein pyramidaler Raum (Fig. 69) durch eine Ebene $ABCD$, welche alle Kanten desselben trifft, geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper eine P y r a m i d e.

Fig. 69.



Die Schnittfläche $ABCD$ nennt man die G r u n d f l ä c h e, die Dreiecke AOB, BOC, COD,... die S e i t e n f l ä c h e n und den Punkt O, in welchem alle Seitenflächen zusammentreffen, den S c h e i t e l der Pyramide. Die Schnittlinien je zweier benachbarter Seitenflächen heißen S e i t e n k a n t e n, die Schnittlinien der Seitenflächen mit der Grundfläche G r u n d k a n t e n. Die Normale OP vom Scheitel auf die Grundfläche heißt die H ö h e der Pyramide.

Einteilung der Pyramiden.

§. **109.** Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten ist eine Pyramide drei-, vier- oder mehrseitig.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, heißt gerade, jede andere schief. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenvieleck, der Mittelpunkt des demselben umgeschriebenen Kreises ist der Fußpunkt der Höhe; die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke.

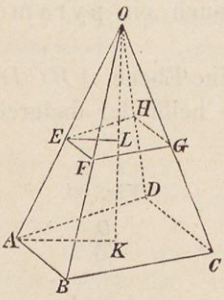
Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist, heißt regelmäßig oder regulär. Die Seitenflächen einer solchen Pyramide sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke; die Höhe eines jeden derselben heißt die Seitenhöhe der regelmäßigen Pyramide.

Eine gleichkantige Pyramide ist eine solche, bei welcher alle Kanten gleich lang sind. Da sie gleiche Seitenkanten besitzt, muß sie eine gerade Pyramide sein. Da ihre Grundfläche ein Sehnenpolygon mit gleichen Seiten ist, so ist sie ein regelmäßiges Polygon. Mithin muß eine gleichkantige Pyramide zugleich regelmäßig sein. Ihr Mantel ist von kongruenten, gleichseitigen Dreiecken gebildet. Da die Bildung einer Ecke durch sechs gleichseitige Dreiecke nicht mehr möglich ist, so folgt, daß es nur drei-, vier- und fünfseitige, gleichkantige Pyramiden geben kann.

Schnitte der Pyramide.

§. **110.** 1. Es sei die Pyramide $OABCD$ (Fig. 70) durch die mit der Grundfläche $ABCD$ parallele Ebene $EFGH$ geschnitten; OK und OL seien die Abstände der beiden Flächen vom Scheitel O.

Fig. 70.



Da $AB \parallel EF$ und $BC \parallel FG$ (§. 75), so ergibt sich (§. 40):

$$AB : EF = BO : FO,$$
$$BC : FG = BO : FO; \text{ daher}$$
$$AB : EF = BC : FG;$$

ebenso kann die Proportionalität aller Seitenpaare der Grundfläche und der Durchschnittsfigur bewiesen werden; überdies sind die Winkel der beiden Polygone paarweise gleich (§. 67); daher $ABCD \backsim EFGH$.

Da $AK \parallel EL$ ist (§. 75), so ist $AO : EO = KO : LO$, daher auch $AB : EF = KO : LO$ und $AB^2 : EF^2 = KO^2 : LO^2$; da sich die Flächeninhalte ähnlicher Polygone so verhalten wie die Quadrate der homologen Seiten (§. 53), so folgt:

$$ABCD : EFGH = AB^2 : EF^2 = KO^2 : LO^2.$$

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit der Grundfläche ähnlich und es verhalten sich die Inhalte beider Flächen wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Man kann sich daher eine Pyramide auch durch eine Parallelverschiebung eines Polygons $ABCD$ (Fig. 69) längs der Geraden AO entstanden denken, welches in jeder Lage (wie $abcd$) sich ähnlich bleibt und stetig kleiner wird, bis es in dem Punkte O verschwindet.

Aufgabe.

In dem Abstande $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der Höhe gerechnet vom Scheitel wird durch eine Pyramide eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt. Der Inhalt der Durchschnittsfigur ist mit dem der Grundfläche zu vergleichen.

2. Legt man durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten einer Pyramide eine Ebene, so ist die Schnittfigur ein Dreieck und heißt ein Diagonalschnitt der Pyramide.

Jede mehrseitige Pyramide kann durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Pyramidenstumpf.

§. **111.** Durch einen mit der Grundfläche parallelen Querschnitt wird eine Pyramide (Fig. 70) in zwei Teile geteilt, einen zwischen diesen parallelen Ebenen enthaltenen Körper, den man eine abgekürzte Pyramide oder einen Pyramidenstumpf nennt, und eine kleinere Pyramide, welche die Ergänzungspyramide des Stumpfes heißt. Ein Pyramidenstumpf $ABCDEFGH$ ist daher der Unterschied zweier Pyramiden $OABCD$ und $OEFGH$, deren Grundflächen die untere und die obere Grundfläche des Stumpfes sind und deren gemeinschaftlicher Scheitel O in dem Schnittpunkte der verlängerten Seitenkanten des Stumpfes liegt.

Die Grundflächen eines Stumpfes sind ähnliche Polygone, die Seitenflächen Trapeze. Der Abstand LK der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes. Ist die ganze Pyramide regelmäßig, so ist auch der zugehörige Pyramidenstumpf regelmäßig; die Seitenflächen desselben sind gleichschenklige, kongruente Trapeze.

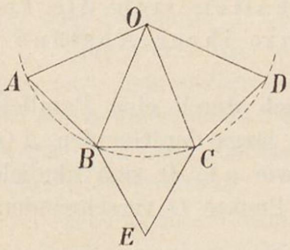
Oberfläche einer Pyramide.

§. **112.** Um die Oberfläche einer Pyramide zu bestimmen, sucht man die Mantelfläche, d. i. die Summe aller Seitendreiecke, und addiert zu ihr den Flächeninhalt der Grundfläche.

Ist die Pyramide eine regelmäßige, so braucht man, um die Mantelfläche zu erhalten, nur ein Seitendreieck zu berechnen und dessen Flächeninhalt mit der Anzahl der Seitenkanten zu multiplizieren.

Aufgabe. Das Netz einer Pyramide zu konstruieren.

Fig. 71.



Man konstruiere die Seitendreiecke nebeneinander so, daß sie die Spitze gemeinschaftlich haben, und lege dann an eines dieser Dreiecke die Grundfläche.

Um insbesondere das Netz einer geraden Pyramide zu konstruieren, beschreibe man (Fig. 71) mit einer Seitenkante als Radius aus O einen Kreisbogen, ziehe darin die Sehnen AB, BC und CD gleich den Seiten der Grundfläche und zeichne dann unter BC die Grundfläche BCE.

Ist die Pyramide, deren Netz Fig. 71 enthält, nur gerade?

Volumen einer Pyramide.

§. **113.** Haben zwei Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen und liegen sie mit ihren Grundflächen auf derselben Ebene auf, so geben sie mit jeder zu den Grundflächen parallelen Ebene gleiche Schnittflächen. Denn heißen G und G' ihre Grundflächen, h ihre Höhe, d der Abstand der Schnittebene vom Scheitel, ferner F und F' die Schnittflächen, so ist (nach §. 110, 1) $G : F = h^2 : d^2$ und $G' : F' = h^2 : d^2$, daher auch $G : F = G' : F'$. Da aber $G = G'$, so ist auch $F = F'$.

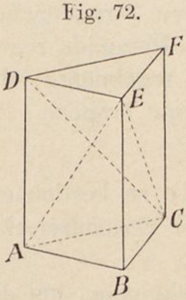
Werden also zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen in demselben Abstande vom Scheitel parallel zur Grundfläche geschnitten, so sind die Schnittflächen gleich.

Hieraus folgt nach dem Cavalieri'schen Satze (§. 94):

Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind inhaltsgleich.

§. **114.** Es sei $ABCDEF$ (Fig. 72) ein dreiseitiges Prisma. Schneidet man dasselbe durch die Ebene AEC, so zerfällt es in die dreiseitige Pyramide $EABC$ und in die vierseitige $EACFD$. Durch die Ebene CED wird die letztere wieder in zwei dreiseitige Pyramiden $EACD$ und $ECDF$ zerlegt, so daß das dreiseitige Prisma aus drei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt erscheint. Es läßt sich nun zeigen, daß diese drei Pyramiden inhaltsgleich sind. Die Pyramiden $EACD$ und $ECDF$ haben nämlich gleiche Grundflächen ACD und CDF, welche in derselben Ebene liegen, und denselben Scheitel E, daher auch dieselbe Höhe; folglich sind sie gleich. In den Pyramiden $EACD$ und $EABC$ kann man den Scheitel in C annehmen; die Grundflächen EAB und EAD liegen dann in derselben Ebene und sind einander gleich; die

Fig. 72.



beiden Pyramiden haben demnach auch gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe, sind also inhaltsgleich. Es sind somit alle drei Pyramiden untereinander gleich. Daraus folgt:

Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

§. **115.** Aus §§. 114 und 96 folgt:

Die Maßzahl für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Da auch jede mehrseitige Pyramide mit einer dreiseitigen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe inhaltsgleich ist, so gilt allgemein der Satz:

Die Maßzahl für das Volumen einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Bedeutet g die Maßzahl des Flächeninhaltes der Grundfläche einer Pyramide, h der Höhe und v des Volumens, so ist

$$v = \frac{gh}{3},\ g = \frac{3v}{h},\ h = \frac{3v}{g}.$$

Für die Volumsverhältnisse der Pyramiden ergeben sich hieraus dieselben Beziehungen wie in §. 96 für die Volumsverhältnisse der Prismen.

§. **116.** Rechnungsaufgaben.

1. In einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide ist eine Grundkante 1·3 m; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide, wenn deren Seitenhöhe 1·8 m beträgt?

2. In einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide beträgt die Mantelfläche 1·036 m^2, die Seitenhöhe 1·48 m; wie groß ist eine Seite der Grundfläche?

3. Wie groß ist das Volumen einer Pyramide, wenn
   a) die Grundfläche 18 cm^2 und die Höhe 6·5 cm,
   b) „ „ 2 m^2 35 dm^2 und die Höhe 7·2 dm ist?

4. In einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von 1·1 m Länge und 0·9 m Breite und das Volumen 1·188 m^3; wie groß ist die Höhe?

5. Das Volumen einer 7·5 dm hohen Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist 40 dm^3; wie groß ist eine Seite der Grundfläche?

6. In einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide beträgt eine Grundkante 4 dm und eine Seitenkante 6·3 dm; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* das Volumen?

7. In einer regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide beträgt die Höhe 5·483 m und jede Seite der Grundfläche 2·804 m; wie groß ist das Volumen? (§. 59, 1.)

8. In einer regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide ist eine Grundkante 12 cm und eine Seitenkante 22 cm; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* das Volumen?

9. Von einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide sind die Grundkante a und die Seitenkante b gegeben; man bestimme die Höhe h der Pyramide, die Seitenhöhe s, die Mantelfläche m und das Volumen v.

Da der Abstand des Mittelpunktes eines regelmäßigen Sechseckes von einem Eckpunkte gleich ist der Seite desselben, so ist die Höhe h der Pyramide eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse b und dessen zweite Kathete a ist, daher $h = \sqrt{b^2 - a^2}$. Die Seitenhöhe s ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes mit b als Hypotenuse und $\frac{a}{2}$ als zweiter Kathete; daher

$$s = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Hiernach ergibt sich

$$m = 3\,a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ und } v = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}.$$

10. In einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide ist a eine Grundkante und h die Höhe; man berechne die Mantelfläche m und das Volumen v.

$$m = 3\,a \sqrt{h^2 + \frac{3\,a^2}{4}} \text{ und } v = \frac{a^2\,h\sqrt{3}}{2}.$$

11. In einer geraden, sechsseitigen Pyramide ist jede Seite der Grundfläche 14 *cm* und die Seitenhöhe 36 *cm*; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* das Volumen?

12. Die Grundfläche einer geraden 0·6 *m* hohen Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck von 0·26 *m* Seitenlänge; wie groß ist die Kante eines Würfels von gleichem Inhalte?

13. Eine vierseitige Pyramide, deren quadratische Grundfläche 4·6 *m* im Umfange hat, ist 1·5 *m* hoch; wie groß ist ihr Gewicht, wenn das dm^3 2·7 *kg* wiegt?

14. Wie viel wiegt eine dreiseitige 8 *dm* hohe Pyramide aus Gußeisen, wenn jede Seite der Grundfläche 2·8 *dm* beträgt und 1 dm^3 Gußeisen 7·1 *kg* wiegt?

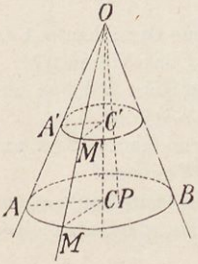
15. Das Dach eines Gartenhauses ist eine achtseitige Pyramide; es soll mit Kupfer eingedeckt werden; wie viel m^2 Kupferplatten braucht man dazu, wenn jede Seitenkante 1·5 *m*, jede Grundkante 1 *m* mißt?

16. Ein viereckiges Zelt ist 4 *m* lang, 3 *m* breit und bis zum Dache 3·5 *m* hoch; an die Seitenwände setzt sich ein pyramidales Dach, dessen Spitze von jeder Ecke 2·8 *m* absteht; wie viel Meter Leinwand von 12 *dm* Breite sind zu diesem Zelte erforderlich?

4. Der Kegel.

§. 117. Gleitet ein Halbstrahl OA (Fig. 73), dessen Anfangspunkt O im Raume fest ist, längs des Umfanges des aus C mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreises hin, so beschreibt er eine krumme Fläche, welche Kegelfläche oder konische Fläche heißt. OA heißt die erzeugende Gerade, der Kreis Leitkreis, OC Achse der Kegelfläche; der von der Kegelfläche eingeschlossene, nach einer Seite offene Raum heißt ein konischer oder kegelförmiger Raum. Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet die konische Fläche in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt.

Fig. 73.



Legt man nämlich durch OC und OA, ebenso durch OC und OM je eine Ebene, so ist $AC \parallel A'C'$ und $MC \parallel M'C'$ (§. 75), daher

$$AC : A'C' = OC : OC',$$
$$MC : M'C' = OC : OC',$$

somit $AC : A'C' = MC : M'C'$; da aber $AC = MC$ ist, so muß auch $A'C' = M'C'$ sein.

Wird ein kegelförmiger Raum durch eine zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Kegel. Die Schnittfläche, welche mit dem Leitkreise selbst zusammenfallen kann, ist ein Kreis und heißt die Grundfläche, die gekrümmte Seitenfläche der Mantel, der Punkt O der Scheitel des Kegels. Die Strecke OC, welche den Scheitel des Kegels mit dem Mittelpunkte dieses Kreises verbindet, heißt die Achse. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Mantelfläche in zwei geraden Linien; eine solche Strecke OA heißt eine Seite des Kegels. Die vom Scheitel zur Grundfläche gezogene Normale OP heißt die Höhe der Kegels.

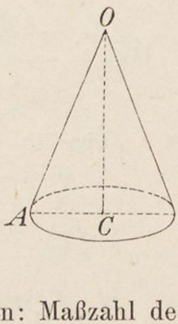
Einen Kegel $OAMB$ kann man sich auch durch eine Parallelverschiebung eines Kreises entstanden denken, bei welcher der Mittelpunkt C in der Geraden CO fortrückt und dabei der Kreis selbst an Größe stetig abnimmt, bis er im Punkte O verschwindet.

Ein Kegel kann als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, angesehen werden.

Einteilung der Kegel.

§. 118. Steht die Achse eines Kegels auf der Grundfläche desselben normal, so heißt der Kegel ein gerader (Fig. 74), sonst ein schiefer. Ein gerader Kegel entsteht, wenn sich ein rechtwinkliges Dreieck ACO um eine Kathete CO als Achse herumdreht; die andere Kathete AC beschreibt dabei die Grundfläche, die Hypotenuse OA die Mantelfläche des Kegels. In einem geraden Kegel stellt die Achse zugleich die Höhe vor; alle Seiten desselben sind einander gleich.

Fig. 74.



Ist auch ein schiefer Kegel ein Rotationskörper bezüglich der als „Achse" bezeichneten Geraden OC (Fig. 73)?

Ein gerader Kegel, dessen Seite gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche, heißt gleichseitig.

Sind in einem geraden Kegel von den drei Größen: Maßzahl des Halbmessers der Grundfläche $= r$, Maßzahl der Höhe $= h$ und Maßzahl der Seite $= s$, zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte berechnet werden. Man hat

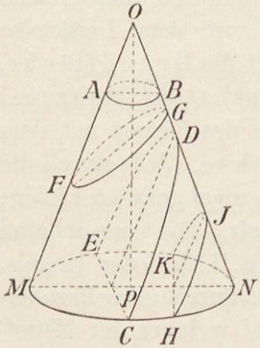
$$s = \sqrt{r^2 + h^2}, \qquad h = \sqrt{s^2 - r^2}, \qquad r = \sqrt{s^2 - h^2}.$$

Beispiele: 1) Gegeben $r = 5\ cm$, $h = 12\ cm$; zu suchen s.
2) „ $r = 11\ cm$, $s = 61\ cm$; „ „ h.
3) „ $s = 2{\cdot}5\ dm$, $h = 2{\cdot}4\ dm$; „ „ r.

Schnitte des Kegels.

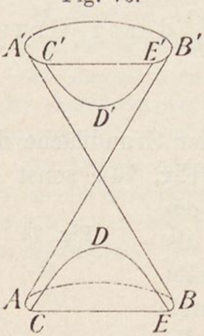
§. 119. 1. Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein Kreis AB (Fig. 75) §. 117. Die Schnittfläche und die Grundfläche verhalten sich, wie bei der Pyramide (§. 110, 1), so wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Fig. 75.



2. Ist die schneidende Ebene nicht parallel zur Grundfläche, so ist die Schnittfigur *a)* im allgemeinen eine Ellipse FG, wenn die Schnittebene alle Seiten des Kegels oder deren Verlängerungen trifft; *b)* eine Parabel CDE, wenn die Schnittebene nur zu einer Seite des Kegels parallel ist; und *c)* eine Hyperbel HJK, wenn die Schnittebene zu zwei Seiten parallel ist. Die Hyperbel besteht aus zwei Ästen, welche durch den Durchschnitt der Ebene mit den beiden Teilen einer vollständigen Kegelfläche entstehen, deren Erzeugende eine nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade ist. (Fig. 76.) Man nennt deshalb diese krummen Linien Kegelschnittslinien.

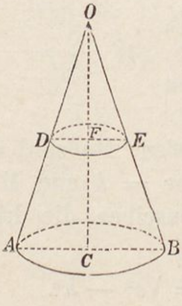
Fig. 76.



3. Geht die schneidende Ebene durch die Achse des Kegels, so ist der Schnitt MON ein Dreieck. In einem geraden Kegel sind alle Achsenschnitte kongruente, gleichschenklige, in einem gleichseitigen Kegel kongruente, gleichseitige Dreiecke.

Kegelstumpf.

Fig. 77.



§. 120. Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene DE (Fig. 77) geschnitten, so wird derselbe in zwei Teile geteilt, einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthaltenen Körper, welcher ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstumpf genannt wird, und einen kleineren Kegel, welcher der Ergänzungskegel des Stumpfes heißt. Ein Kegelstumpf $ABED$ ist daher der Unterschied zweier Kegel, welche die Grundflächen des Stumpfes zu ihren Grundflächen haben und deren Scheitel der Punkt ist, in welchem die erweiterte Mantelfläche des Stumpfes zusammenläuft. Der Abstand CF der beiden Kreisflächen ist die Höhe des Kegelstumpfes. Der Kegelstumpf heißt gerade oder schief, je nachdem der ganze Kegel gerade oder schief ist.

Oberfläche eines Kegels.

§. **121.** Da alle Punkte der Peripherie des Grundkreises bei einem geraden Kegel von dem Scheitel desselben gleich weit entfernt sind, so erhält man durch das Aufrollen des Mantels eines geraden Kegels einen Kreisausschnitt, welcher die Peripherie der Grundfläche zum Bogen und die Seite des Kegels zum Halbmesser hat. Daher ist die Mantelfläche eines geraden Kegels gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der Peripherie der Grundfläche und der Seite.

Sind m, s und r bezüglich die Maßzahlen des Mantels, der Seite und des Radius der Grundfläche eines geraden Kegels, so ist

$$m = 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = r\pi s.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $m = 2r^2\pi$.

Die ganze Oberfläche eines geraden Kegels ist

$$o = r^2\pi + rs\pi = r\pi\,(r + s).$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $o = 3r^2\pi$.

Ist O die Oberfläche eines zweiten gleichseitigen Kegels, dessen Grundfläche R zum Radius hat, so ist

$$O : o = 3R^2\pi : 3r^2\pi = R^2 : r^2.$$

Zusatz. Um das Netz eines geraden Kegels zu erhalten, hat man an den Bogen des Kreisausschnittes, den man durch Aufrollen des Mantels erhält, noch den Grundkreis zu zeichnen (Fig. 78). Da die Seiten eines schiefen Kegels nicht gleich sind, so ist der Mantel desselben nach der Abwicklung kein Kreisausschnitt (Fig. 79). Die oben entwickelte Formel für die Berechnung des Mantels eines geraden Kegels gilt daher nicht für den schiefen.

Fig. 78.

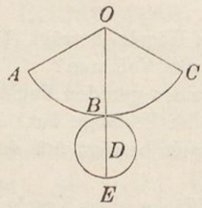
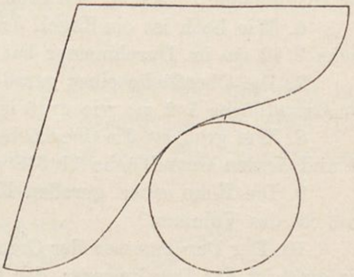


Fig. 79.



Volumen eines Kegels.

§. **122.** Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt aus §. 115:

Die Maßzahl für das Volumen eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels, so ist dessen Volumen

$$v = \frac{r^2 \pi . h}{3}.$$

Ist in einem geraden Kegel statt der Höhe h die Seite s gegeben, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher

$$v = \frac{r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}}{3}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $h = r\sqrt{3}$ und

$$v = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}.$$

Heißt V das Volumen eines zweiten gleichseitigen Kegels, dessen Grundfläche R zum Halbmesser hat, so ist

$$V : v = \frac{R^3 \pi \sqrt{3}}{3} : \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3} = R^3 : r^3.$$

§. **123.** Rechnungsaufgaben.*)

1. In einem geraden Kegel beträgt der Halbmesser der Grundfläche 3·81 *dm*, die Seite 5·26 *dm*; wie groß ist *a*) die Mantelfläche, *b*) die Oberfläche des Kegels?

2. Die Grundfläche eines geraden Kegels beträgt 15 dm^2, die Seite 4 *dm*; wie groß ist die Oberfläche desselben?

3. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist 23·55 dm^2, der Halbmesser seiner Grundfläche 1·5 *dm*; wie groß ist *a*) die Seite, *b*) die Höhe des Kegels?

4. In einem Kegel beträgt der Halbmesser der Grundfläche 5 *dm*, die Höhe 4·8 *dm*; wie groß ist das Volumen?

5. In einem geraden Kegel, welcher 4 *m* hoch ist, beträgt der Durchmesser der Grundfläche 2·1582 *m*; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen des Kegels?

6. Wie hoch ist ein Kegel, dessen Inhalt 1137·385 dm^3 ist und dessen Grundfläche 8·42 *dm* im Durchmesser hat?

7. Die Oberfläche eines geraden Kegels beträgt 11·304 m^2, der Halbmesser der Grundfläche 1·2 *m*; wie groß ist das Volumen?

8. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Inhalt 25·7892 m^3 ist und dessen Grundfläche 11·346 *m* im Umfange hat?

9. Die Höhe eines geraden Kegels beträgt 5·8 *dm*, eine Seite 6·4 *dm*; wie groß ist das Volumen?

10. Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels ist 0·3 *m*, die Höhe 0·24 *m*; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche eines zweiten Kegels, der 0·32 *m* hoch ist und mit dem ersten gleiches Volumen hat?

11. In einem gleichseitigen Kegel sei s die Seite und h die Höhe; aus einer dieser Größen die andere zu bestimmen.

12. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7·5 *dm*; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen?

---

*) Man beachte, daß die Zahl π eine unvollständige Dezimalzahl ist.

13. Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels ist 2530 cm^2; wie groß ist dessen Volumen?

14. Das Volumen eines gleichseitigen Kegels ist 0·16 m^3; berechne dessen Oberfläche!

15. Ein gleichseitiger Kegel hat 3 *dm* Durchmesser; wie groß ist die Seite eines Würfels, welcher mit dem Kegel gleiche Oberfläche hat?

16. Ein gleichseitiger Zylinder mit der Seite 2 *dm* hat mit einem gleichseitigen Kegel gleiche Oberfläche; wie groß ist das Volumen des gleichseitigen Kegels?

17. In welchem Verhältnisse stehen die Volumina eines Zylinders und eines Kegels, wenn sie gleichen Radius der Grundfläche und gleiche Höhe haben?

18. Der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels ist 1·5 *m*, die Höhe 1·8 *m*; eine Pyramide hat mit dem Kegel denselben Scheitel und zur Grundfläche ein der Grundfläche des Kegels eingeschriebenes Quadrat; wie groß ist der Unterschied *a*) der Oberflächen, *b*) der Volumina beider Körper?

19. Das kegelförmige Dach eines Turmes, welches 3·8 *m* Seitenlänge und unten 3·3 *m* im Durchmesser hat, soll mit Kupferblech eingedeckt werden; wie viel m^2 Blech braucht man dazu?

20. Eine Tanne hat am untern Ende 6·2 *dm* im Durchmesser und ist 18 *m* hoch; welches Volumen hat sie, wenn sie annähernd als Kegel angesehen werden kann?

21. Ein aufgeschütteter Kornhaufen hat annähernd die Form eines Kegels, dessen Umfang am Boden 10·5 *m* beträgt; wie viel Hektoliter Korn enthält der Haufen, wenn er 1·7 *m* hoch ist?

22. Ein Kegel von Messing, welcher 1·62 *dm* hoch ist, wiegt 3·56076 *kg*; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche, wenn 1 dm^3 Messing 8·4 *kg* wiegt? ($\pi = 3·1416\ldots$).

23. Ein gleichseitiger Kegel aus Eisen soll 20 *kg* haben; wie groß wird seine Höhe sein, wenn 1 dm^3 Eisen 7·12 *kg* wiegt?

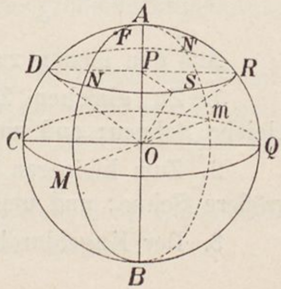
24. Ein kegelförmiger Sandhügel, der 82·4 *m* im Umfang und 9·6 *m* Höhe hat, wird abgegraben; wie viel m^3 Sand liefert derselbe, wenn sich der Sand durch das Auflockern um $\frac{1}{8}$ vermehrt?

5. Die Kugel.

Entstehung und Erklärungen.

§. **124.** Dreht sich ein Halbkreis *ACB* (Fig. 80) um den begrenzenden Durchmesser *AB* als Achse, so beschreibt er eine gekrümmte Fläche, welche so beschaffen ist, daß alle ihre Punkte von dem Mittelpunkte *O* des rotierenden Halbkreises gleiche Abstände haben; sie wird Kugelfläche genannt. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt Kugel.

Fig. 80.



Eine Kugel ist demnach ein Körper, welcher von einer einzigen gekrümmten Fläche so begrenzt wird, daß jeder Punkt derselben von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit absteht.

Dieser Punkt O heißt der Mittelpunkt der Kugel. Der Abstand OD des Mittelpunktes von irgend einem Punkte der Kugelfläche heißt ein Halbmesser oder Radius; eine Strecke DR, welche zwei Punkte der Kugelfläche verbindet, heißt eine Sehne und eine Sehne CQ, welche durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; ebenso sind auch alle Durchmesser einander gleich.

Jeder Punkt D des rotierenden Halbkreises beschreibt einen Kreis DNR, dessen Halbmesser DP zu AB normal ist. Alle so beschriebenen Kreise sind parallel.

Die Kugelfläche und der Punkt.

§. **125.** Der Abstand irgend eines Punktes vom Mittelpunkte einer Kugel heißt der Zentralabstand des Punktes.

Ein Punkt liegt auf der Kugelfläche, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Zentralabstand gleich dem Halbmesser der Kugel, kleiner oder größer als derselbe ist.

Die Kugelfläche und die Gerade.

§. **126.** Der Abstand irgend einer Geraden vom Mittelpunkte einer Kugel heißt der Zentralabstand der Geraden.

Ist der Zentralabstand einer Geraden größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Gerade mit der Kugelfläche keinen Punkt gemeinschaftlich. Ist der Zentralabstand der Geraden gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich, während alle andern Punkte außerhalb der Kugel liegen; sie heißt eine Tangente der Kugelfläche. Ist endlich der Zentralabstand der Geraden kleiner als der Halbmesser, so schneidet sie die Kugelfläche in zwei Punkten.

Ist (Fig. 80) der Halbmesser einer Kugel $OD = r$, die Länge der Sehne $DR = s$ und ihr Zentralabstand $OP = a$, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke DPO

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{s^2}{4}}, \qquad s = 2\sqrt{r^2 - a^2}, \qquad a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Aus den letzten zwei Ausdrücken ergibt sich:

1. Zu gleichen Zentralabständen gehören in derselben Kugel gleiche Sehnen; und umgekehrt.

2. Zum kleineren Zentralabstande gehört in derselben Kugel die größere Sehne; und umgekehrt.

3. Der Kugeldurchmesser ist die größte Kugelsehne.

Die Kugelfläche und die Ebene.

§. 127. Der Abstand irgend einer Ebene von dem Mittelpunkte einer Kugel heißt der Zentralabstand der Ebene.

Ist der Zentralabstand einer Ebene größer als der Halbmesser der Kugel, so hat die Ebene mit der Kugelfläche keinen Punkt gemeinschaftlich. Ist der Zentralabstand einer Ebene gleich dem Halbmesser, so hat sie mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich und heißt eine Berührungs- oder Tangentialebene; sie enthält alle Tangenten, welche im Berührungspunkte an die Kugel gelegt werden können. Ist der Zentralabstand einer Ebene kleiner als der Halbmesser, so schneidet die Ebene die Kugelfläche.

§. 128. Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Die Richtigkeit dieses Satzes geht schon aus der Entstehungsweise der Kugel hervor, kann aber auch für sich leicht nachgewiesen werden.

Es sei DNR (Fig. 80) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpunkte O die Normale OP auf die Schnittebene, zieht von P nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Strecken PD und PS, ferner noch die Halbmesser OD und OS, so ist $PD = PS$ (§. 73). Daraus folgt, daß alle Umfangspunkte des Schnittes DNR von P gleichen Abstand haben, daß also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis DNR wird ein Kugelkreis genannt.

Zwischen dem Halbmesser $OD = r$ der Kugel, dem Halbmesser $PD = \varrho$ des Kugelkreises und dem Zentralabstande $OP = a$ des letzteren bestehen, da das Dreieck DPO rechtwinklig ist, die Beziehungen:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + a^2}, \qquad \varrho = \sqrt{r^2 - a^2}, \qquad a = \sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

Daraus folgt:

1. Zu gleichen Zentralabständen gehören gleiche Kugelkreise; und umgekehrt.

2. Zum kleineren Zentralabstande gehört ein größerer Kugelkreis; und umgekehrt.

3. Am größten wird ein Kugelkreis, wenn er durch den Mittelpunkt der Kugel geht; er heißt deshalb geradezu ein größter Kugelkreis oder auch ein Hauptkreis; jeder andere Kugelkreis heißt ein Nebenkreis.

Der Halbmesser eines Hauptkreises ist gleich dem Halbmesser der Kugel. Alle Hauptkreise sind daher einander gleich.

Zur eindeutigen Bestimmung eines Hauptkreises sind außer dem Kugelmittelpunkte noch zwei mit ihm nicht in gerader Linie liegende Punkte erforderlich.

Durch die Endpunkte eines Durchmessers kann man unzählig viele Hauptkreise, durch zwei Punkte, welche nicht Endpunkte eines Durchmessers sind, nur einen einzigen Hauptkreis legen.

Der Neigungswinkel der Ebenen zweier Hauptkreise wird der sphärische Winkel derselben genannt.

§. **129.** Ein durch zwei Punkte M und N (Fig. 80) der Kugelfläche gelegter Hauptkreis wird durch diese Punkte in zwei Bogen geteilt, den Bogen MN und $MBmAN$. Der kleinere Bogen MN des durch zwei Punkte M und N gelegten Hauptkreises heißt der sphärische Abstand der beiden Punkte.

Für jeden Kugelkreis nennt man den auf seiner Ebene normalen Kugeldurchmesser die Achse und deren Endpunkte die Pole des Kugelkreises. Alle parallelen Kugelkreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole. Jeder Pol eines Kugelkreises hat von allen Punkten desselben gleiche sphärische Abstände; diese heißen sphärische Halbmesser des Kugelkreises. Jeder Kugelkreis hat auf der Kugelfläche zwei sphärische Halbmesser.

Jeder Pol eines Hauptkreises hat von allen Punkten desselben den sphärischen Abstand von 90^0.

Legt man durch den Punkt F (Fig. 80) und die Pole A, B des Kugelkreises DNR den Hauptkreis, so liegen zwischen F und den Punkten N und N' zwei Bogen, von welchen der kleinere FN der sphärische Abstand des Punktes F von dem Kugelkreis DNR heißt.

Meridiane und Parallelkreise am Globus, Erdachse, Nord- und Südpol, Äquator, geographische Breite und Länge.

Wie groß ist der sphärische Winkel der Meridiane von Paris und Wien?

Wie groß ist der sphärische Abstand Wiens vom Äquator?

§. **130.** Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so zerfällt sie in zwei Teile, welche man Kugelabschnitte nennt; sie sind untereinander gleich oder ungleich, je nachdem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht oder nicht; im ersten Falle heißt jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel. Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes heißt eine Kugelmütze oder Kalotte. Eine Kugelmütze $ADNR$ (Fig. 80) kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Kreisbogen AD eines Hauptkreises um den Durchmesser AB als Achse herumdreht.

Ein Teil der Kugelfläche, welcher von zwei größten Halbkreisen begrenzt wird, heißt ein sphärisches Zweieck. (Fig. 80: $ACBMA$.)

Ein Teil der Kugelfläche, welcher von drei Bogen größter Kugelkreise begrenzt wird, heißt ein sphärisches Dreieck. (Fig. 80: ACM.)

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Teil der Kugel eine Kugelschicht und der dazu gehörige Teil der Kugeloberfläche eine Kugelzone (Gürtel). Eine Kugelzone $CMQDNR$ (Fig. 80) kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Kreisbogen CD eines Hauptkreises um den Durchmesser AB herumdreht.

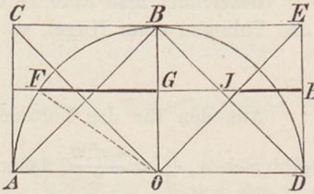
Dreht sich ein Sektor AOD eines Hauptkreises um einen seiner Halbmesser AO, so heißt der dadurch beschriebene Körper $ODARN$ ein Kugelausschnitt oder ein Kugelsektor.

Volumen und Oberfläche einer Kugel.

§. 131. Ist r der Radius einer Kugel, so ist ihr Volumen $v = \frac{4r^3\pi}{3}$.

1. Drehen sich (Fig. 81) der Quadrant $OAFB$, das Rechteck $AOBC$ und das Dreieck BCO um die Achse $OB = r$ herum, so beschreibt der Quadrant eine Halbkugel, das Rechteck den der Halbkugel umgeschriebenen Zylinder und das Dreieck den dem Zylinder eingeschriebenen Kegel. Das Volumen der Halbkugel ist gleich dem durch den Kegel ausgehöhlten Zylinder. Denn beide Körper stehen auf derselben Grundfläche auf; schneidet man sie in der Höhe $OG = DH = a$ durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so ist der Schnitt mit der Halbkugel ein Kreis mit dem Flächeninhalte $FG^2 \cdot \pi = (r^2 - a^2)\,\pi$,

Fig. 81.



und der Schnitt mit dem ausgehöhlten Zylinder ein Kreisring mit dem gleichen Flächeninhalte $(GH^2 - GJ^2)\,\pi = (r^2 - a^2)\,\pi$, da das Dreieck OGJ gleichschenklig, rechtwinklig, also $GJ = OG = a$ ist. Es folgt daher nach dem Cavalierischen Satze:

Das Volumen einer Halbkugel ist gleich der Differenz der Volumina des umgeschriebenen Zylinders und des diesem Zylinder eingeschriebenen Kegels.

Das Volumen des Zylinders ist $r^3\pi$, das Volumen des Kegels $\frac{r^3\pi}{3}$, daher das Volumen der Halbkugel $r^3\pi - \frac{r^3\pi}{3} = \frac{2r^3\pi}{3}$ und das Volumen der ganzen Kugel

$$v = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Umgekehrt ist $r^3 = \frac{3v}{4\pi}$, daher $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$.

Heißt R der Halbmesser und V das Volumen einer zweiten Kugel, so ist auch $V = \frac{4 R^3 \pi}{3}$, daher

$$V : v = \frac{4\pi}{3} . R^3 : \frac{4\pi}{3} . r^3 = R^3 : r^3; \text{ d. h.}$$

Die Volumina zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

2. Für das Volumen einer Kugel läßt sich noch ein zweiter Ausdruck ableiten.

Legt man durch einen Durchmesser der Kugel sehr viele größte Kreise und normal darauf mehrere Parallelkreise, so zerfällt die Oberfläche der Kugel in lauter viereckige und dreieckige Figuren, welche man für eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Kreise sehr groß angenommen wird. Betrachtet man dann jedes dieser Vierecke und Dreiecke als Grundfläche einer Pyramide, deren Scheitel im Mittelpunkte der Kugel liegt, so erscheint die Kugel als die Summe von lauter Pyramiden, deren gleiche Höhe der Halbmesser der Kugel ist und deren Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel geben. Hieraus folgt:

Eine Kugel ist inhaltsgleich mit einer Pyramide, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat; oder mit Rücksicht auf §. 115:

Die Maßzahl für das Volumen einer Kugel ist gleich dem Produkte aus der Maßzahl der Oberfläche und dem dritten Teile der Maßzahl des Halbmessers.

Bezeichnet man durch r den Halbmesser, durch o die Oberfläche und durch v das Volumen einer Kugel, so ist

$$v = o \cdot \frac{r}{3}.$$

Aus den für das Volumen erhaltenen Ausdrücken $v = \frac{4 r^3 \pi}{3}$ und $v = o . \frac{r}{3}$ ergibt sich $o . \frac{r}{3} = \frac{4 r^3 \pi}{3}$, daher

$$o = 4 r^2 \pi.$$

§. 132. Ist r der Radius einer Kugel, so ist ihre Oberfläche $4 r^2 \pi$.

Da $r^2 \pi$ den Flächeninhalt eines größten Kreises ausdrückt, so ergibt sich der Satz:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.

Umgekehrt folgt $r^2 = \frac{o}{4\pi}$, daher $r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$.

Heißt R der Halbmesser und O die Oberfläche einer zweiten Kugel, so ist auch $O = 4 R^2 \pi$, daher

$$O : o = 4 R^2 \pi : 4 r^2 \pi = R^2 : r^2; \text{ d. h.}$$

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Halbmesser.

§. **133.** Rechnungsaufgaben.*)

1. In einer Kugel von 24 *cm* Halbmesser wird im Abstande 6 *cm* vom Mittelpunkte eine Sehne gezogen; wie lang ist dieselbe?

2. Wie groß ist der Abstand einer 4·6 *dm* langen Sehne vom Mittelpunkte einer Kugel mit 4 *dm* Halbmesser?

3. Der Flächeninhalt eines Hauptkreises einer Kugel ist 19·6 cm^2; wie groß ist ein 2 *cm* vom Kugelmittelpunkte abstehender Nebenkreis?

4. Der Flächeninhalt eines Kugelkreises ist 6·16 cm^2, der Abstand desselben vom Kugelmittelpunkte ist 22·5 *cm*; wie groß ist der Halbmesser der Kugel?

5. Berechne die Oberfläche und den Kubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser *a*) 2 *dm*, *b*) 1·5 *m*, *c*) 1·25 *m*, *d*) $25\frac{1}{2}$ *cm* ist!

6. Der Umfang eines größten Kugelkreises beträgt 7·1 *m*; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen der Kugel?

7. Wie groß ist das Volumen einer Kugel, deren größter Kreis 14·8617 m^2 Flächeninhalt hat?

8. Die Oberfläche einer Kugel beträgt *a*) 88 dm^2, *b*) 4988·92 cm^2, *c*) 1·81703 m^2; wie groß ist der Halbmesser?

9. Suche den Halbmesser einer Kugel, deren Volumen *a*) 33510·4 dm^3, *b*) 5715 dm^3 beträgt!

10. Wie groß ist das Volumen einer Kugel, deren Oberfläche 22 dm^2 beträgt?

11. Das Volumen einer Kugel ist 22 dm^3; wie groß ist ihre Oberfläche?

12. Ein Kugelkreis, welcher 9 *cm* vom Mittelpunkte der Kugel absteht, hat 454·74 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) der Inhalt dieser Kugel?

13. Wie verhalten sich *a*) die Oberflächen, *b*) die Kubikinhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser 0·36 *m* und 0·48 *m* sind?

14. Wie verhalten sich die Volumina zweier Kugeln, deren Oberflächen sich wie 16 : 25 verhalten?

15. Wie verhalten sich die Oberflächen zweier Kugeln, deren Volumina sich wie 27 : 64 verhalten?

16. Von zwei Kugeln hat die eine 28 *cm*, die andere 15 *cm* im Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Oberfläche der Summe der Oberflächen der beiden andern Kugeln gleich ist?

17. Von zwei Kugeln hat die eine 3 *dm*, die andere 1·8 *dm* im Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser einer dritten Kugel, deren Volumen der Summe der Volumina der beiden andern Kugeln gleich ist?

18. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Inhalt doppelt so groß ist als der Inhalt einer Kugel von 12·75 dm^2 Oberfläche?

19. Wie groß ist die Kante eines Würfels, welcher mit einer Kugel von 1·5 *dm* Durchmesser gleiches Volumen hat?

20. Der Durchmesser einer Kugel ist gleich der Kante eines Würfels; wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Körper?

21. Aus einem hölzernen Würfel von 25 dm^3 Volumen soll die größtmögliche Kugel gearbeitet werden; welches Volumen wird die Kugel haben?

22. Der Durchmesser einer Kugel ist ebenso groß als der Durchmesser eines gleichseitigen Zylinders; wie verhalten sich die Volumina dieser zwei Körper?

---

*) Bei den Rechnungen beachte man, daß die Zahl π eine unvollständige Dezimalzahl ist.

23. Eine Kugel hat gleichen Durchmesser mit der Grundfläche eines gleichseitigen Kegels; wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Körper?

24. Ein gerader Kegel hat 1·5 *m* im Durchmesser und 1·8 *m* Höhe; wie groß muß der Durchmesser einer Kugel sein, die mit jenem Kegel gleiche Oberfläche haben soll?

25. Ein Würfel, ein gleichseitiger Zylinder und eine Kugel haben gleiche Oberfläche; wie verhalten sich die Volumina dieser drei Körper?

26. Ein Würfel, ein gleichseitiger Zylinder und eine Kugel haben gleiches Volumen; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

27. In einen gleichseitigen Zylinder werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Volumina dieser drei Körper?

28. Um eine Kugel sind ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

29. Wie viel m^2 Kupferplatten sind zur Bedeckung einer Kuppel erforderlich, welche eine Halbkugel von 9 *m* Durchmesser vorstellt?

30. Ein kugelrunder Turmknopf soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn der Durchmesser 1·05 *m* beträgt und wenn für 1 m^2 Vergoldung 48 K 80 h zu zahlen ist?

31. Ein aus Taft verfertigter, mit Leuchtgas gefüllter Luftballon hat 6·5 *m* im Durchmesser: *a*) wie viel m^2 Taft sind dazu erforderlich? *b*) wie viel wiegt das im Ballon enthaltene Leuchtgas, wenn 1 m^3 Gas 0·724 *kg* wiegt?

32. Ein Dampfzylinder ist 8 *dm* weit und 1·4 *m* lang und hat zu beiden Seiten zwei halbkugelförmige Endstücke; wie viel m^3 Dampf faßt derselbe?

33. Wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen unserer Erde, wenn man sie als eine vollkommene Kugel betrachtet, deren Durchmesser 12737·8 *km* ist? (π = 3·1415927...)

34. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 32 *cm*; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde?

35. Wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen unseres Mondes, da dessen Durchmesser 3482 *km* beträgt?

36. Der Durchmesser der Sonne ist 108·7mal so groß als der Durchmesser der Erde; wie verhält sich das Volumen der Sonne zum Volumen der Erde?

37. Der äußere Durchmesser einer Hohlkugel ist 3 *dm* und der innere 2·9 *dm*; wie groß ist ihr Kubikinhalt?

38. Eine Hohlkugel hat zum äußeren Halbmesser 2 *dm*, die Wandstärke beträgt 2·5 *cm*; wie groß ist *a*) der Hohlraum der Kugel, *b*) der Inhalt der Kugelschale?

39. Wenn man den Halbmesser der Erde = 6368·9 *km* und die Höhe ihrer Luftschicht = 63 *km* setzt, wie viel km^3 erhält man für das Volumen der Luftschicht?

6. Die regelmäßigen Körper.

§. **134.** Ein Polyeder, dessen Grenzflächen kongruente, regelmäßige Polygone sind und kongruente, regelmäßige Ecken bilden, heißt ein regelmäßiger oder regulärer Körper.

Aus dem Satze, daß die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke kleiner als 360° sein muß (§. 82), folgt, daß es nur fünf regelmäßige Polyeder geben kann.

Denn der Winkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes beträgt 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf eine Ecke bilden; aus sechs oder mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da ihre Summe 360° oder mehr als 360° beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Körper begrenzt werden, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder.

Das Tetraeder (Fig. 82) wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

Das Oktaeder (Fig. 83) wird von 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten.

Fig. 82.

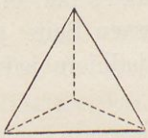


Fig. 83.

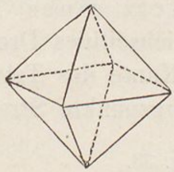
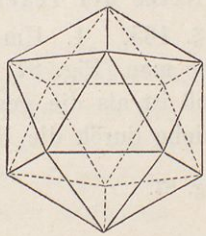


Fig. 84.



Das Ikosaeder (Fig. 84) wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je fünf eine Ecke bilden; es hat 12 Ecken und 30 Kanten.

Der Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammentreffen; aus vier oder mehr als vier rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden. Es gibt daher nur einen einzigen von Quadraten begrenzten Körper; er heißt Hexaeder, Kubus oder Würfel.

Das Hexaeder (Fig. 85) wird von 6 Quadraten eingeschlossen und hat 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten.

Fig. 85.

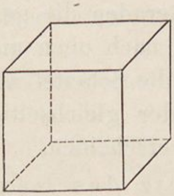
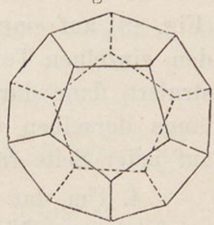


Fig. 86.



In einem regelmäßigen Fünfecke ist jeder Winkel 108°; von solchen Winkeln können nur drei eine Ecke bilden. Es gibt daher einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten Körper. Dieser heißt Dodekaeder (Fig. 86); er hat 12 Seitenflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist 120°. Da schon drei derselben 360° betragen, so kann von solchen Winkeln keine Ecke gebildet werden. Ebensowenig kann aus den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als sechs Seiten eine Ecke entstehen.

Es gibt demnach nur fünf regelmäßige Körper.

In jedem regelmäßigen Polyeder gibt es einen Punkt, der von allen Seitenflächen wie auch von allen Eckpunkten gleich weit absteht. Er heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Polyeders.

Legt man durch den Mittelpunkt und durch alle Kanten eines regelmäßigen Körpers Ebenen, so wird dieser in kongruente Pyramiden zerlegt, welche die Seitenflächen des regelmäßigen Polyeders zu Grundflächen und den Abstand des Mittelpunktes von einer Seitenfläche zur gleichen Höhe haben.

Netze der regelmäßigen Polyeder.

§. **135.** 1. Um das Netz eines Tetraeders zu erhalten, zeichne man (Fig. 87) ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite doppelt so groß ist als die gegebene Kante des Tetraeders, halbiere jede Seite und ziehe durch die Halbierungspunkte Strecken.

Fig. 87.

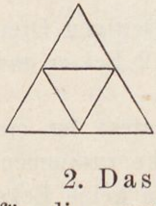


Fig. 88.

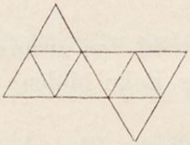
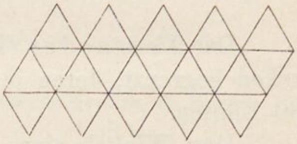


Fig. 89.



2. Das Netz eines Oktaeders erhält man, indem man (Fig. 88) für die gegebene Kante zuerst das Netz eines Tetraeders konstruiert und dann an dieses ein zweites ganz gleiches Tetraedernetz so zeichnet, daß beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben.

3. Das Netz eines Ikosaeders wird erhalten, indem man (Fig. 89) auf einer Geraden die gegebene Kante fünfmal aufträgt, über den einzelnen Teilen nach oben und unten gleichseitige Dreiecke konstruiert, dann durch die Scheitel auf einer Seite eine Gerade zieht und längs derselben wieder gleichseitige Dreiecke zeichnet, so daß ihrer auf jeder Seite fünf erscheinen.

4. Um das Netz des Hexaeders oder Würfels zu erhalten, zeichnet man (Fig. 90) über einer Geraden mit der Seite des Würfels vier Quadrate nebeneinander und überdies noch zwei Quadrate an den entgegengesetzten Seiten eines jener ersteren Quadrate.

5. Das **Netz des Dodekaeders** erhält man, indem man (Fig. 91) über der gegebenen Kante ein regelmäßiges Fünfeck beschreibt, über den Seiten desselben wieder regelmäßige Fünfecke konstruiert, wobei man sich mit Vorteil der Verlängerung der Diagonalen bedient, und an dieses Netz ein zweites ihm vollkommen gleiches so zeichnet, daß beide Netze eine gemeinschaftliche Seite haben.

Fig. 90.

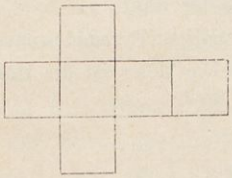
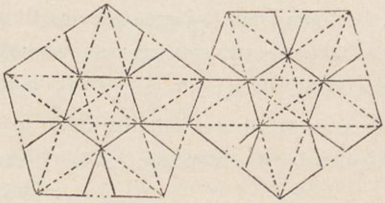


Fig. 91.



Ausmessung der regelmäßigen Körper.

§. **136.** Wie die Oberfläche und das Volumen eines Hexaeders oder Würfels berechnet werden, ist bereits in der Lehre von den Prismen angeführt worden. In Bezug auf die Ausmessung der übrigen regelmäßigen Polyeder beschränken wir uns auf die folgenden, mit Anwendung der bisher vorgenommenen Sätze lösbaren Aufgaben.

1. Gegeben ist die Kante a eines *a)* Tetraeders, *b)* Oktaeders, *c)* Ikosaeders; man berechne die Oberfläche des Körpers.

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite a ist (§. 59, 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, folglich ist

$$a)\ \text{Oberfläche des Tetraeders} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3};$$

$$b)\ \quad „ \quad „ \ \text{Oktaeders} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3};$$

$$c)\ \quad „ \quad „ \ \text{Ikosaeders} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}.$$

2. Wie verhalten sich die Oberflächen eines Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders von gleicher Kantenlänge?

3. Bestimme die Oberfläche eines *a)* Tetraeders, *b)* Oktaeders, *c)* Ikosaeders für die Kante 1·2 *dm*!

4. Ein Tetraeder, ein Oktaeder und ein Ikosaeder haben die gleiche Oberfläche o; wie groß ist die Kante eines jeden dieser Körper?

5. Wie groß ist das Volumen v eines Tetraeders mit der Kante a?

Das Tetraeder ist eine regelmäßige, dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ist.

Die Höhe dieser Pyramide ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, das eine Seitenkante a zur Hypotenuse und den Radius des der Grundfläche umgeschriebenen Kreises $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (§. 59, 1) zur zweiten Kathete hat; sie ist also gleich

$$\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Man hat daher für das Volumen

$$v = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{9} = \frac{a^3\sqrt{9.2}}{36} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

6. Bestimme das Volumen v eines Oktaeders mit der Kante a!

Das Oktaeder setzt sich aus zwei regelmäßigen, vierseitigen Pyramiden zusammen. Die Grundfläche jeder dieser Pyramiden ist a^2. Die Höhe ist die Hälfte der Diagonale eines Quadrates mit der Seite a, also $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Folglich ist das Volumen beider Pyramiden

$$v = 2 \,.\, a^2 \,.\, \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

7. Wie groß ist das Volumen eines *a)* Tetraeders, *b)* Oktaeders, wenn die Kante 6 *cm* beträgt?

8. Wie verhalten sich die Volumina eines Tetraeders, eines Oktaeders und eines Hexaeders von gleicher Kantenlänge?

9. Wie groß ist das Volumen einer Kugel, welche einem Oktaeder von 8 *cm* Kantenlänge *a)* eingeschrieben, *b)* umgeschrieben ist?

7. Gewicht und Volumen der Körper. Volumsbestimmung mittels eines Gefäßes oder mittels des Gewichtes.

§. 137. Auf eine ganz einfache Weise wird das Volumen eines beliebigen Körpers mit Hilfe eines prismatischen oder zylindrischen Gefäßes bestimmt, dessen Grundfläche bekannt und an dessen Seitenwand die innere Höhe in Dezimeter und Zentimeter eingeteilt ist. Man legt den zu messenden Körper in ein solches Gefäß, füllt dieses mit Wasser so hoch, daß der Körper ganz von Wasser bedeckt ist, und merkt sich die Höhe des Wasserstandes; hierauf wird der Körper herausgenommen und die Höhe des nun niedrigeren Wasserstandes abgelesen. Der Inhalt des zu bestimmenden Körpers ist nun gleich dem Inhalte eines prismatischen oder cylindrischen Körpers, welcher mit dem Gefäße gleiche Grundfläche hat und dessen Höhe der Differenz der beiden Wasserstände gleich ist. Wenn der zu messende Körper das Wasser einsaugt, so verwendet man feinen Sand zum Füllen des Gefäßes.

Mittels eines solchen Gefäßes kann man auch den Inhalt irgend eines andern unregelmäßigen Gefäßes finden. Man füllt dieses mit

Wasser, schüttet dasselbe dann in das mit der Skala versehene Gefäß und berechnet aus der Grundfläche desselben und der Höhe des Wassers den gesuchten Inhalt; am einfachsten wird diese Methode, wenn die Skala direkt das Volumen angibt.

§. **138.** Das Volumen eines Körpers kann auch mittels des Gewichtes desselben bestimmt werden.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine Unterlage ausübt, heißt das absolute Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das eine Kubikeinheit, z. B. ein Kubikdezimeter, des Körpers hat, nennt man dessen spezifisches Gewicht. Z. B. 1 dm^3 Silber wiegt 10·51 kg; dies ist das spezifische Gewicht des Silbers für 1 dm^3 als Kubikeinheit.

Bei den Angaben über das spezifische Gewicht nehmen wir durchgängig 1 dm^3 als Kubikeinheit und 1 kg als Gewichtseinheit an.

Nachstehend folgen die spezifischen Gewichte einiger Körper:

1 Kubikdezimeter

Bernstein	wiegt	1·08 kg	Kupfer, gehämmert	wiegt	8·88 kg
Blei	„	11·35 „	„ gegossen .	„	8·79 „
Buchenholz	„	0·74 „	Marmor	„	2·72 „
Eichenholz.......	„	0·86 „	Messing (im Mittel)	„	8·40 „
Eisen, geschmiedet	„	7·79 „	Platin...........	„	21·45 „
„ gegossen ..	„	7·12 „	Quecksilber......	„	13·60 „
Elfenbein........	„	1·83 „	Silber...........	„	10·51 „
Gold............	„	19·36 „	Steinkohle (im Mittel)	„	1·30 „
Granit (im Mittel).	„	2·70 „	Zink	„	7·19 „
Korkholz	„	0·24 „			

Es sei z. B. der Kubikinhalt eines Silberbarrens, der 32 kg wiegt, zu bestimmen.

Da 1 dm^3 Silber 10·51 kg wiegt, so nehmen 32 kg Silber so viel dm^3 Raum ein, wie oft 10·51 kg in 32 kg enthalten sind; man hat daher 32 : 10·51... = 3·045.... Das Volumen ist also 3·045.. dm^3.

Das Volumen eines Körpers in Kubikdezimetern wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogrammen durch das spezifische Gewicht für 1 dm^3 dividiert.

Umgekehrt findet man aus dem Volumen eines Körpers das absolute Gewicht desselben, wenn man dessen spezifisches Gewicht mit der Maßzahl des in dm^3 ausgedrückten Volums multipliziert. Ist z. B. das absolute Gewicht von 225 dm^3 Messing zu bestimmen, so hat man

1 dm^3 Messing wiegt 8·40... kg

225 „ „ wiegen 8·40... $kg \times 225 = 1890\ kg$.

Mittels des Gewichtes kann auch der Inhalt eines wie immer geformten Gefäßes auf eine sehr einfache Art bestimmt werden. Man wägt zuerst das leere Gefäß ab, füllt es mit Wasser, wägt sodann das volle Gefäß ab und subtrahiert das erste Gewicht von dem zweiten. So viele Kilogramm diese Gewichtsdifferenz beträgt, ebenso viele Kubikdezimeter oder Liter hält das Gefäß.

§. **139.** Aufgaben.

1. In ein prismatisches Gefäß von 47 *cm* Länge und 32 *cm* Breite, welches bis zu einer Höhe von 24 *cm* mit Wasser gefüllt war, wurde ein unregelmäßiger Körper gesenkt, so daß ihn das Wasser bedeckte; das Wasser stand dann 36 *cm* hoch. Welches Volumen hat der Körper?

2. Ein zylindrisches Gefäß von 3 *dm* Durchmesser und 4 *dm* Höhe, worin sich 2·7 *dm* hoch Wasser befand, war, nachdem man einen unregelmäßigen Körper hineingelegt hatte, gerade gefüllt; wie groß ist das Volumen dieses Körpers?

3. Ein zylindrisches Glas, dessen innere Höhe 1 *dm* und dessen Durchmesser 1·5 *dm* beträgt, ist ganz mit Wasser gefüllt; wenn nun eine Kugel von 8 *cm* Durchmesser in das Glas gesenkt wird, so wird daraus ein Teil des Wassers ausfließen. Wie groß ist das Gewicht des Wassers in dem Gefäß, nachdem die Kugel wieder herausgenommen wurde?

4. Wie groß ist der Inhalt eines Gefäßes, das leer 1·5 *kg*, mit Wasser gefüllt 14·8 *kg* wiegt?

5. Wie viel *kg* wiegt das Wasser, das in einem Gefäße von 165 *cm* Länge 85 *cm* Breite und 7 *dm* Tiefe enthalten ist?

6. Ein Stück Blei wiegt 24 *kg*; welches ist sein Volumen?

7. Wie viel m^3 enthält ein Balken von *a*) Eichenholz, *b*) Buchenholz, der 135 *kg* wiegt?

8. Wie groß ist die Kante eines Marmorwürfels, der 184 *kg* wiegt?

9. Eine eiserne Walze von 2·5 *m* Länge wiegt 680 *kg*; wie groß ist ihr Durchmesser?

10. Eine Kugel aus Elfenbein wiegt 12·135 *dkg*; wie groß ist ihr Halbmesser?

11. Wie viel Kilogramm wiegt eine Platte von Gußeisen, welche 1·9 *m* lang, 0·2 *m* breit und 0·08 *m* dick ist?

12. Wie viel wiegt ein Zylinder aus Eichenholz, wenn seine Länge 28 *dm* und sein Durchmesser 3·5 *dm* beträgt?

13. Auf den Ecksäulen eines Gartentores liegen zwei kugelförmige Körper aus Granit; wie viel *kg* wiegen dieselben, wenn jeder 5·2 *dm* im Durchmesser hat?

14. Wie viel wiegt eine hohle Kugel aus Messing, bei welcher der innere Durchmesser 3 *dm* beträgt und das Messing 1 *cm* dick ist?

15. Ein Hektoliter Wein wiegt 100·8 *kg*; wie groß ist das spezifische Gewicht dieses Weines?

16. Ein Faß von 0·6 m^3 Inhalt ist mit Öl gefüllt, das 520 *kg* wiegt; welches spezifische Gewicht hat das Öl?

17. An einem Zuckerhute, der die Gestalt eines geraden Kegels hat, beträgt der Umfang der Grundfläche 6 *dm* und die Seite 5 *dm*; wie groß ist das spezifische Gewicht des Zuckers, wenn der Zuckerhut 6·8 *kg* wiegt?

18. Eine messingene Walze soll 4 *kg* wiegen und 3 *dm* lang sein; welchen Durchmesser muß man der Walze geben?

19. Es soll ein Zylinder aus Gußeisen gegossen werden, der 1 *kg* wiegt und 4 *cm* im Durchmesser hat; wie groß wird die Höhe sein?

20. Es sollen zylinderförmige Gewichte von je 1 *kg* und zwar *a*) aus Blei, *b*) aus Messing, *c*) aus Gußeisen gegossen werden; wie viel *cm* muß der Durchmesser betragen, wenn er nur die Hälfte der Höhe des Zylinders sein soll?

21. Die Größe des Druckes einer Flüssigkeit auf den Boden eines Gefäßes ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die Bodenfläche des Gefäßes und deren Höhe die Höhe des Flüssigkeitsstandes ist. Wie groß ist der Druck auf den Boden eines zylindrischen Gefäßes von 1·2 *dm* Durchmesser, das bis zu einer Höhe von 2 *dm* mit Regenwasser (spezifisches Gewicht = 1·09 *kg*) gefüllt ist?

22. Die Bodenfläche eines prismatischen Gefäßes von 1 *m* Länge und 5 *dm* Breite kann nur einen Druck von 170 *kg* aushalten; bis zu welcher Höhe darf dieses Gefäß mit Baumöl (spezifisches Gewicht = 0·92 *kg*) gefüllt werden?

23. Die Größe des Luftdruckes auf eine Fläche ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche jene Fläche und deren Höhe der jeweilige Barometerstand ist. Wie groß ist der Luftdruck auf eine Fläche von 1 dm^2 bei einem Barometerstande von 742 *mm*?

24. Wie groß ist bei demselben Barometerstande der Luftdruck *a*) auf die Oberfläche eines Würfels von 1 *dm* Seitenlänge, *b*) auf die Oberfläche einer Halbkugel von 2 *dm* Durchmesser?

INHALT.

Die Stereometrie.