SCHNIRELMANNOV IZREK

VINKO MEDIC

Šolski center Novo mesto

Math. Subj. Class. (2010): 11P32

Lev Schnirelmann[1] (1905–1938) je leta 1930 dokazal, da je vsako naravno število, večje od ena, vsota končnega števila praštevil. To je zelo pomemben izrek in hkrati prvi odmevnejši rezultat v zvezi z Goldbachovo domnevo. V tem članku bo predstavljen dokaz z njegovim kriterijem za celoštevilske množice kot baze s končnim redom.

SCHNIRELMANN'S THEOREM

In 1930 Schnirelmann proved that every integer greater than one is the sum of a finite number of primes. This is a great theorem, the first significant result on the Goldbach conjecture. In this contribution we shall apply Schnirelmann's criterion for a set of integers to be a basis of finite order.

1. Uvod

Goldbachova domneva je eden najstarejših problemov v teoriji števil in nasploh v matematiki. Hilbert jo je leta 1900 uvrstil na seznam triindvajsetih največjih matematičnih izzivov dvajsetega stoletja. Goldbachova domneva je zapisana na osmem mestu, skupaj s splošno Riemannovo hipotezo, in je eden od redkih problemov s tega seznama, ki ni rešen. Originalna domneva je bila prvič zapisana v pismu, ki ga je Christian Goldbach (1690–1764) 7. junija 1742 poslal Eulerju. V njem je trdil, da lahko vsako naravno število, večje od 5, zapišemo kot vsoto treh praštevil. Euler je odgovoril, da se strinja z domnevo, vendar je ne zna dokazati. Kasneje jo je spremenil v drugo obliko, ki pravi, da lahko vsako sodo naravno število, večje od dve, zapišemo kot vsoto dveh praštevil (isto praštevilo lahko uporabimo dvakrat). Primeri: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$, ... Ta oblika je danes znana kot *krepka* Goldbachova domneva. Obstaja tudi *šibka* oblika Goldbachove domneve, ki pravi, da je vsako liho naravno število, večje od 5, vsota treh praštevil. Obe domnevi sta do sedaj ostali nerešeni, čeprav je rešitev šibke domneve bliže kot rešitev krepke. V tem članku bo predstavljen Schnirelmannov pristop k reševanju problema.

[1] Ruski matematik, Luzinov učenec

2. Schnirelmannova gostota

Naj bo A množica nenegativnih celih števil. Za vsako realno število x naj pomeni $A(x)$ število pozitivnih elementov množice A, ki ne presegajo x, tj.

$$A(x) = \sum_{\substack{a \in A \\ 1 \leq a \leq x}} 1.$$

Funkcijo $x \mapsto A(x)$ imenujemo *števna funkcija množice* A. Za $x > 0$ velja $0 \leq A(x) \leq [x] \leq x$, kjer označuje $[x]$ največje celo število, ki ne presega x.

Definicija 1. *Schnirelmannovo gostoto* množice A definiramo s predpisom

$$\sigma(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{A(n)}{n}.$$

Ker je $\sigma(A) \leq \frac{A(n)}{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je $0 \leq \sigma(A) \leq 1$.

Poglejmo si nekaj primerov množic naravnih števil in jim določimo števno funkcijo ter Schnirelmannovo gostoto.

(a) Za množico $A = \mathbb{N}$ vseh naravnih števil je $A(n) = n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, njena Schnirelmannova gostota pa je $\sigma(A) = 1$. Ker tudi obratno hitro vidimo, je $\sigma(A) = 1$ natanko takrat, ko je $A = \mathbb{N}$.

(b) Za množico B, ki vsebuje vsa naravna števila razen enega, npr. $B = \mathbb{N} \setminus \{m\}$, je števna funkcija $B(n) = n$ za $n < m$ in $B(n) = n - 1$ za $n \geq m$, zato velja $\sigma(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{B(n)}{n} = \frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$. Če je $m = 1$, je $B(1) = 0$ in zato $\sigma(B) = 0$.

(c) Za množico C, ki vsebuje vse večkratnike naravnega števila d in število 1, tj. $C = \{1\} \cup \{kd; k \in \mathbb{N}\}$, smo za primer, ko je $d = 1$, že ugotovili, da ima množica C gostoto 1. Če pa $d \neq 1$, je števna funkcija $C(n) = \left[\frac{n}{d}\right] + 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato velja $\sigma(C) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\left[\frac{n}{d}\right]+1}{n} = \frac{1}{d}$. Vidimo, da z večanjem razlike d v aritmetičnem zaporedju Schnirelmannova gostota pada, vendar ostaja pozitivna.

(d) Za množico D, ki vsebuje potence danega naravnega števila k, tj. $D = \{1\} \cup \{k^n; n \in \mathbb{N}\}$, je za $k = 1$ očitno $\sigma(D) = 0$, saj je v D le eno število. V primeru, ko je $k > 1$, pa je števna funkcija $D(n) = [\log_k n] + 1$. Tako je njena gostota $\sigma(D) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{[\log_k n]+1}{n} = 0$.

(e) V zadnjem primeru si oglejmo še množico P, ki vsebuje 1 in vsa praštevila. Tokrat se števna funkcija $P(n)$ za velika števila n obnaša približno kot izraz $c\frac{n}{\ln n}$, pri čemer je c pozitivna konstanta (praštevilski izrek, glej [1]), zato je njena gostota $\sigma(P) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{c}{\ln n} = 0$.

Schnirelmannova gostota je pomembna mera za velikost podmnožic nenegativnih celih števil. Za nadaljevanje potrebujemo nov pojem baze končnega reda.

Definicija 2. Podmnožica A nenegativnih celih števil se imenuje *baza reda* h, če hA vsebuje vsa nenegativna cela števila (tj. če lahko vsako nenegativno celo število zapišemo kot vsoto h, ne nujno različnih števil iz A). Množici A pravimo *baza končnega reda*, če je baza reda h za neko število $h \geq 1$.

Če so $A_1, \ldots, A_h$ podmnožice nenegativnih celih števil, je vsota $A_1 + \cdots + A_h$ sestavljena iz vseh nenegativnih celih števil oblike $a_1 + \cdots + a_h$, kjer je $a_i \in A_i$ za vsak $i = 1, \ldots, h$. Če je $A_i = A$ za vse $i = 1, \ldots, h$, pa naj bo $hA = \underbrace{A + \cdots + A}_{h\text{-krat}}$.

Po točki (a) z začetka razdelka je podmnožica A baza reda h natanko tedaj, ko je $\sigma(hA) = 1$. Schnirelmann je prišel do preprostega, vendar pomembnega odkritja, da je podmnožica nenegativnih celih števil, ki vsebuje 0 in ima pozitivno gostoto, baza končnega reda (glej izrek 8 na koncu tega razdelka). Preden pa to dejstvo dokažemo, si oglejmo najpomembnejše lastnosti Schnirelmannove gostote.

Trditev 3. *Naj bosta A in B podmnožici celih števil, ki vsebujeta* 0. *Če je $n \geq 0$ in $A(n) + B(n) \geq n$, je $n \in A + B$.*

Dokaz. Če je $n \in A$ ali $n \in B$, je očitno $n \in A + B$; zato predpostavimo $n \notin A \cup B$. Definirajmo množici $A' = \{n - a \colon a \in A, 1 \leq a \leq n-1\}$ in $B' = \{b \colon b \in B, 1 \leq b \leq n-1\}$. Potem je moč množice A' enaka $|A'| = A(n)$, ker $n \notin A$, in moč množice B' je $|B'| = B(n)$, ker $n \notin B$. Očitno velja

$$A' \cup B' \subseteq [1, n-1]\,.$$

Ker je

$$|A'| + |B'| = A(n) + B(n) \geq n\,,$$

mora biti

$$A' \cap B' \neq \emptyset\,.$$

Torej je $n - a = b$ za neka $a \in A$ in $b \in B$ oziroma $n = a + b \in A + B$. ∎

Trditev 4. *Naj bosta A in B podmnožici celih števil, ki vsebujeta 0. Če je $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$, je $n \in A + B$ za vsako nenegativno celo število n.*

Dokaz. Če označimo $\sigma(A) = \alpha$ in $\sigma(B) = \beta$, je za $n \geq 0$

$$A(n) + B(n) \geq (\alpha + \beta)n \geq n\,,$$

zato iz trditve 3 sledi $n \in A + B$. ∎

Posledica 5. *Če je A množica celih števil, ki vsebuje 0 in za katero je $\sigma(A) \geq 1/2$, je A baza reda 2.*

Trditev 6. *Naj bosta A in B takšni podmnožici celih števil, ki vsebujeta 0. Potem je*

$$\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)\,. \tag{1}$$

Dokaz. Za utemeljitev te lastnosti ocenimo, koliko naravnih števil, ki ne presegajo n, vsebuje množica $A + B$. V ta namen razdelimo interval $[0, n]$ na $k + 1$ delov, pri čemer je $k = A(n)$. Torej naj bo $n \geq 1$, $a_0 = 0$ in

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq n$$

k pozitivnih elementov množice A, ki ne presegajo n. Ker je $0 \in B$, je $a_i = a_i + 0 \in A + B$ za vse $i = 1, \ldots, k$. Sedaj pa poiščimo na vsakem intervalu (a_i, a_{i+1}) števila, ki pripadajo množici $A + B$. Tako naj bo za $i = 0, \ldots, k - 1$,

$$1 \leq b_1 < \cdots < b_{r_i} \leq a_{i+1} - a_i - 1$$

$r_i = B(a_{i+1} - a_i - 1)$ pozitivnih elementov množice B, ki so manjši od $a_{i+1} - a_i$. Potem je

$$a_i < a_i + b_1 < \cdots < a_i + b_{r_i} < a_{i+1}$$

in

$$a_i + b_j \in A + B$$

za vse $j = 1, \ldots, r_i$. Nadalje poglejmo še števila na zadnjem intervalu $(a_k, n]$. Naj bo

$$1 \leq b_1 < \cdots < b_{r_k} \leq n - a_k$$

$r_k = B(n - a_k)$ pozitivnih elementov množice B, ki ne presegajo $n - a_k$. Potem je

$$a_k < a_k + b_1 < \cdots < a_k + b_{r_k} \leq n$$

in

$$a_k + b_j \in A + B$$

za vse $j = 1, \ldots, r_k$. Vendar ni nujno, da po zgornjem postopku dobimo vsa števila, saj lahko obstajata takšni števili a_i in b_j, da njuna vsota ni enaka nobeni vsoti iz naše razdelitve, pa vseeno ne presega števila n. Iz tega razloga je v množici $A + B$ več števil, ki ne presegajo števila n, kot pa v naši razdelitvi na $k+1$ delov. Označimo $\sigma(A) = \alpha$ in $\sigma(B) = \beta$ pa imamo

$$\begin{aligned}
(A + B)(n) \; &\geq \; A(n) + \sum_{i=0}^{k-1} B(a_{i+1} - a_i - 1) + B(n - a_k) \geq \\
&\geq \; A(n) + \beta \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i - 1) + \beta(n - a_k) = \\
&= \; A(n) + \beta(a_1 - a_0 - 1 + a_2 - a_1 - 1 + \cdots + \\
&\qquad + a_k - a_{k-1} - 1) + \beta(n - a_k)\,.
\end{aligned}$$

V tej vsoti se veliko členov odšteje. Od preostanka izpostavimo β in dobimo

$$(A + B)(n) \geq A(n) + \beta(-a_0 - k + n)\,.$$

Upoštevamo, da je $a_0 = 0$ in $k = A(n)$

$$(A + B)(n) \geq A(n) + \beta n - \beta A(n) = (1 - \beta)A(n) + \beta n\,.$$

Ker je $A(n) \geq \alpha n$, velja

$$(A + B)(n) \geq (1 - \beta)\alpha n + \beta n = (\alpha + \beta - \alpha\beta)n\,.$$

Tako je

$$\frac{(A + B)(n)}{n} \geq \alpha + \beta - \alpha\beta$$

in

$$\sigma(A + B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{(A + B)(n)}{n} \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)\,. \qquad \blacksquare$$

Neenakost (1) lahko zapišemo tudi kot:

$$1 - \sigma(A + B) \leq (1 - \sigma(A))(1 - \sigma(B))$$

in jo posplošimo na vsoto poljubnih končnih podmnožic naravnih števil.

Trditev 7. *Naj bo h naravno število in $A_1, \ldots, A_h$ takšne podmnožice celih števil, da je $0 \in A_i$ za vsak $i = 1, \ldots, h$. Potem je*

$$1 - \sigma(A_1 + \cdots + A_h) \leq \prod_{i=1}^{h}(1 - \sigma(A_i))\,. \tag{2}$$

Formalni dokaz z indukcijo na število množic prepustimo bralcu. Na koncu si oglejmo še najpomembnejšo lastnost Schnirelmannove gostote.

Izrek 8. *Naj bo A podmnožica celih števil, ki vsebuje 0 in ima pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Potem je A baza končnega reda.*

Dokaz. Če je $\sigma(A) = \alpha > 0$, je $0 \leq 1 - \alpha < 1$; zato obstaja tako naravno število $l \geq 1$, da je

$$0 \leq (1 - \alpha)^l \leq 1/2\,.$$

Potem je po trditvi 7

$$1 - \sigma(lA) \leq (1 - \sigma(A))^l = (1 - \alpha)^l \leq 1/2$$

in tako

$$\sigma(lA) \geq 1/2\,.$$

Po posledici 5 je množica lA baza reda 2 in zato A baza končnega reda $2l$.
■

3. Schnirelmannov izrek

Sedaj se bomo posvetili dokazu Schnirelmannovega izreka. Pokazali bomo, da ima množica, sestavljena iz 0, 1 in naravnih števil, ki jih lahko predstavimo kot vsoto dveh praštevil, pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Za to pa potrebujemo različne ocene za povprečno število predstavitev naravnega števila kot vsote dveh praštevil. Preden začnemo, moramo vpeljati nekaj novih oznak.

Naj bo f poljubna realna ali kompleksna funkcija in g pozitivna funkcija. Zapis $f \ll g$ naj pomeni, da obstaja takšna konstanta $c > 0$, da velja

$$|f(x)| \leq cg(x)$$

za vse x iz definicijskega območja funkcije f. Oznaka $f \gg g$ pa naj pomeni isto kot $g \ll f$.

Naj $r(N)$ označuje število predstavitev naravnega števila N kot vsote dveh praštevil, pri čemer ločimo vrstni red sumandov. Naj bo $x \geq 2$ poljubno realno število. S $\pi(x)$ označimo število vseh praštevil, ki ne presegajo x (glej [1]). Če sta p in q praštevili, ki ne presegata $x/2$, njuna vsota $p+q$ ne presega x. Sedaj tvorimo vse možne vsote s tema dvema prašteviloma. Ker je do $x/2$ natanko $\pi(x/2)$ praštevil, dobimo natanko $\pi(x/2)^2$ urejenih parov vsot manjših ali enakih x. Vendar to niso vse vsote dveh praštevil, ki ne presegajo x, saj bi lahko veljalo $p+q \leq x$ tudi za praštevili, ki nista obe manjši od $x/2$. Torej velja

$$\sum_{N \leq x} r(N) \geq \pi(x/2)^2.$$

Uporabimo izrek Čebiševa, (glej [1], str. 173), ki pravi, da je $\pi(x/2) \gg \frac{x/2}{\log x/2}$, pa imamo

$$\sum_{N \leq x} r(N) \geq \pi(x/2)^2 \gg \frac{(x/2)^2}{(\log(x/2))^2} \gg \frac{x^2}{(\log x)^2}\,. \tag{3}$$

V [2] najdemo izrek (Theorem 7.2 na strani 186), ki pravi, da za vsako sodo naravno število N velja

$$r(N) \ll \frac{N}{(\log N)^2} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{N}{(\log N)^2} \sum_{d|N} \frac{1}{d}\,. \tag{4}$$

Ta neenakost velja tudi za liha naravna števila, saj je liho naravno število N vsota dveh praštevil natanko tedaj, ko je $N-2$ praštevilo. Za takšno liho naravno število je torej $r(N) = 2$. Naj bo $x \geq 1$ poljubno realno število. Z uporabo neenakosti (4) dobimo

$$\sum_{N \leq x} r(N)^2 \ll \sum_{N \leq x} \frac{N^2}{(\log N)^4} \left(\sum_{d|N} \frac{1}{d}\right)^2.$$

Ker je funkcija $\frac{N^2}{(\log N)^4}$ naraščajoča, jo navzgor ocenimo z največjo vrednostjo pri x. Vsoto $\left(\sum\limits_{d|N} \frac{1}{d}\right)^2$ pa zapišemo v ekvivalentni obliki

$$\left(\sum_{d_1|N} \frac{1}{d_1}\right)\left(\sum_{d_2|N} \frac{1}{d_2}\right) = \sum_{d_1|N}\sum_{d_2|N} \frac{1}{d_1 d_2}\,.$$

Zdaj imamo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{N\le x}\left(\sum_{d|N} \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{N\le x}\sum_{d_1|N}\sum_{d_2|N} \frac{1}{d_1 d_2}\,.$$

Zamenjamo vrstni red seštevanja in dobimo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{d_1,d_2\le x} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\substack{N\le x\\ d_1|N,d_2|N}} 1.$$

Zadnja vsota je različna od 0 samo v primeru, ko d_1 in d_2 hkrati delita N. To pomeni natanko takrat, ko njun najmanjši skupni večkratnik $[d_1, d_2]$ deli N. Vsoto ocenimo navzgor, pa dobimo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{d_1,d_2\le x} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\substack{N\le x\\ [d_1,d_2]|N}} 1 \le \frac{x^2}{(\log x)^4} \sum_{d_1,d_2\le x} \frac{1}{d_1 d_2}\,\frac{x}{[d_1,d_2]}\,.$$

Izpostavimo x, upoštevamo oceno $[d_1, d_2] = \frac{d_1 d_2}{(d_1,d_2)} \ge (d_1 d_2)^{1/2}$ za najmanjši skupni večkratnik $[d_1, d_2]$ in največji skupni delitelj (d_1, d_2) števil d_1 in d_2 ter zopet uvedemo sumacijsko spremenljivko d:

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^3}{(\log x)^4} \sum_{d_1,d_2\le x} \frac{1}{d_1^{3/2} d_2^{3/2}} = \frac{x^3}{(\log x)^4}\left(\sum_{d\le x} \frac{1}{d^{3/2}}\right)^2.$$

Zadnja vsota konvergira, ko gre x čez vse meje, ker je eksponent v imenovalcu večji od ena. Tako dobimo

$$\sum_{N\le x} r(N)^2 \ll \frac{x^3}{(\log x)^4}. \tag{5}$$

Po Cauchy-Schwarzevi neenakosti velja

$$\left(\sum_{N\le x} r(N)\right)^2 \le \sum_{\substack{N\le x\\ r(N)\ge 1}} 1 \sum_{N\le x} r(N)^2.$$

Vsota $\sum_{\substack{N\le x\\ r(N)\ge 1}} 1$ prešteje vsa naravna števila N, ki ne presegajo x in jih lahko vsaj na en način zapišemo kot vsoto dveh praštevil. Torej je ta vsota enaka števni funkciji $A(x)$ za množico A vseh naravnih števil, ki se dajo zapisati kot vsota dveh praštevil. Tako imamo

$$\left(\sum_{N\le x} r(N)\right)^2 \le A(x) \sum_{N\le x} r(N)^2.$$

Iz neenakosti izrazimo $A(x)$, tako da je

$$A(x) \ge \frac{\left(\sum\limits_{N\le x} r(N)\right)^2}{\sum\limits_{N\le x} r(N)^2}\,.$$

Po deljenju z x dobimo

$$\frac{A(x)}{x} \ge \frac{1}{x}\frac{\left(\sum\limits_{N\le x} r(N)\right)^2}{\sum\limits_{N\le x} r(N)^2}\,.$$

Upoštevajmo oceni (3) in (5), pa od tod sledi

$$\frac{A(x)}{x} \gg \frac{1}{x}\frac{\frac{x^4}{(\log x)^4}}{\frac{x^3}{(\log x)^4}} \gg 1\,.$$

Prepričajmo se, da ima množica $A = \{0,1\} \cup \{p+q : p,q \quad \text{praštevili}\}$ pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Pravkar smo videli, da obstaja takšno število $c_1 > 0$, da je $A(x) \ge c_1 x$ za vsa dovolj velika števila $x \ge x_0$. Ker pa 1 pripada množici A, obstaja takšno število $c_2 > 0$, da je $A(x) \ge c_2 x$ tudi za $1 \le x \le x_0$. Torej $A(x) \ge cx$ za vse $x \ge 1$, pri čemer je $c = \min\{c_1, c_2\}$. Iz tega lahko sklepamo, da je Schnirelmannova gostota množice A pozitivna.

Izrek 9 (Schnirelmann). *Obstaja takšno naravno število H, da lahko vsako naravno število, večje kot ena, zapišemo kot vsoto kvečjemu H praštevil.*

Dokaz. Pokazali smo, da ima množica

$$A = \{0,1\} \cup \{p+q\colon p,q \text{ sta praštevili}\}$$

pozitivno Schnirelmannovo gostoto. Zato obstaja po izreku 8 takšno naravno število h, da je vsako nenegativno celo število N vsota natanko h elementov množice A. Naj bo $N \geq 2$ oziroma $N-2 \geq 0$. Zapišimo $N-2$ kot vsoto k enic in l parov praštevil p_i, q_i, pri čemer velja $k+l \leq h$ $(k,l \geq 0)$. Torej je

$$N-2 = \underbrace{1+\cdots+1}_{k} + (p_1+q_1) + \cdots + (p_l+q_l)\,.$$

Če je k sodo število, to je $k = 2m$, potem po prenosu števila 2 na desno stran dobimo

$$N = \underbrace{2+\cdots+2}_{m+1} + (p_1+q_1) + \cdots + (p_l+q_l)\,.$$

Vidimo, da je tedaj N vsota $m+1+2l$ praštevil. V primeru, da je k liho število $k = 2m+1$, pa imamo

$$N = \underbrace{2+\cdots+2}_{m} + 3 + (p_1+q_1) + \cdots + (p_l+q_l)\,.$$

Torej je tudi v tem primeru N vsota $m+1+2l$ praštevil. Ker števili l in $m+l$ ne presegata h, velja $m+1+2l \leq 2h+1$. Ugotovili smo, da lahko vsako naravno število $N > 1$ zapišemo kot vsoto kvečjemu $2h+1 = H$ praštevil.

■

Število H se imenuje Schnirelmannova konstanta in je po Schnirelmannovih izračunih znašala 300 000. Kasneje so konstanto z natančnejšimi ocenami močno zmanjšali. Najboljši rezultat doslej je leta 1995 dosegel Olivier Ramaré, ki je pokazal, da je Schnirelmannova konstanta enaka največ 6. Torej lahko vsako naravno število, ki je večje od 1, zapišemo kot vsoto kvečjemu šestih praštevil.

LITERATURA

[1] J. Bračič, *Uvod v analitično teorijo števil*, Podiplomski seminar iz matematike 26, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2003.

[2] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics 164, Springer-Verlag, 1996.

[3] *Goldbach Conjecture*, `http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html`.