

Matematika v šoli

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2024, letnik 30

2

Razvijanje
algoritmičnega
mišljenja

Integracija
umetne inteligence
v poučevanje

Raziskovalne naloge
iz matematike



Matematika v šoli

2024, letnik 30

2

VSEBINA

mag. Sonja Rajh

Matematika v voščilu 1

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

dr. Jasmina Ferme, dr. Barbara Arcet, dr. Alenka Lipovec

Razvijanje algoritmičnega mišljenja preko pisnega deljenja 2

dr. Barbara Arcet

**Integracija umetne inteligence v poučevanje:
Kako učinkovito oblikovati pozive?** 8

IZ RAZREDA

Ema Ptičak, Tadej Vovk

Reševanje polinomskih enačb z želvjo grafiko 15

Kaja Vreš

Raziskovanje kvadratnih palindromov 23

Ana Canzutti

Pomen načrtne rabe matematičnih terminov pri pouku matematike 30

Lidija Venko

Naravoslovni dan 39

Jasna Kvenderc Medvešek

Nadarjeni in potencialno nadarjeni dijaki pri pouku matematike 44

NOVICE

mag. Sonja Rajh

Konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2024 50

mag. Marija Lesjak Reichenberg, Zvonka Kos in mag. Sonja Rajh

Okrogla miza ob izidu tridesetega letnika revije Matematika v šoli 55

mag. Mateja Sirnik

Znanje slovenskih četrtošolcev v mednarodni raziskavi TIMSS 59

dr. Borut Jurčič Zlobec

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2024 60

dr. Ana Slavec

Predstavitve knjige Statistika za začetnike 64



ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
 letnik XXX, številka 2, 2024

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
 Predstavnica: Jasna Rojc

Odgovorna urednica: mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo
 Uredniški odbor:

dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
 Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo,
 dr. Andreja Drobnič Vidic, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
 mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
 mag. Valentina Herbay, Gimnazija Murska Sobota,
 Silva Kmetič, pedagoška svetovalka na ZRSŠ v pokoju,
 Lidija Pulko, Zavod RS za šolstvo,
 mag. Mateja Širnec, Zavod RS za šolstvo,
 Tadeja Vrtnjak, Osnovna šola Sveti Tomaž,
 Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
 dr. Amalija Žakelj, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta,
 dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravljice,
 dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
 dr. Nives Baranović, Univerza v Splitu, Filozofska fakulteta, Hrvaška.

Jezikovni pregled: Andraž Polončič Rupačič
 Prevod povzetkov v angleščino: Bumblebee, jezikovno svetovanje,
 Polonca Luznik, s. p.

Urednica založbe: Andreja Nagode
 Oblikovanje: Simon Kajtna
 Fotografije: avtorji člankov
 Računalniški prelom: Design Demšar, d. o. o.
 Tisk: Birografika Bori, d. o. o.
 Naklada: 510 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
 Zavod RS za šolstvo, OE Murska Sobota (za revijo Matematika v šoli),
 Slomškova ulica 33, 9000 Murska Sobota,
 e-naslov: revija.matematika@zrss.si
 Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana,
 faks: 01/30 05 199, e-naslov: založba@zrss.si
 Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 €
 za fizične osebe, 8,50 € za študente in upokojence. Cena posamezne
 številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kul-
 turo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne
 baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt für
 Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and
 Services (COBISS)



Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Matematika v voščilu

Pri novoletnih voščilih pogosto v želje vtremo del sebe in voščilo oblikuje-
 mo na način, ki nam je najbližji. Tako kot nekateri kemiki v voščilo vpletejo
 kemijske simbole (slika 1), matematiki v novoletna voščila vtremo lepoto,
 ki jo vidimo v matematiki. Poleg slik z matematičnim motivom (slika 2) so
 v voščilih pogosti številski izrazi, katerih vrednost je zapisana s številko leta.



Slika 1: Novoletno drevo iz voščila predmetne
 skupine za kemijo na ZRSŠ za leto 2018.



Slika 2: Pascalov trikotnik kot novoletna
 jelka, okrašena z zvezdami.

Ko sem oblikovala voščilo za leto 2024, je bila podobnost s številom $1024 = 2^{10}$
 očitna. Treba je bilo prišteti le še število $1000 = 10^3$.

Število 2025 je $81 \cdot 25$. Ker sta oba faktorja popolna kvadrata, oblikujemo
 zapis $2025 = 9^2 \cdot 5^2 = 45^2$. Zato vam želim, da bo leto popolnega kvadrata 45^2
 popolno v vseh dobrih stvareh.

Član uredniškega odbora revije *Matematika v šoli* iz Belgije, prof. dr. Adriaan
 Herremans, mi je poslal voščilo za leto $\sum_{a=1}^9 a^3$.

Torej je $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 +$
 $+ 343 + 512 + 729 = 2025$.

Ob tem sem se spomnila Nikomahovega izreka, ki je bil pred-
 stavljen v 1. številki 26. letnika revije *Matematika v šoli* (Razpet,
 2020). Zapomnila sem si ga prav zaradi nazorne geometrijske po-
 nazoritve za $n = 5$ (glejte QR-kodo s povezavo do članka).



Nikomahov izrek trdi, da je vsota kubov prvih n zaporednih naravnih števil
 enaka kvadratu n -tega trikotniškega števila, ki pa je vsota prvih n zaporednih
 naravnih števil:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Tako lahko število 2025 zapišemo kot kvadrat vsote prvih zaporednih devetih
 naravnih števil:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 45^2 = 2025.$$

Predlagam, da tudi sami otrokom, učencem ali dijakom predstavimo lepoto
 matematike z oblikovanjem novoletnega voščila. Podajmo jim naše voščilo in
 jih povabimo, da ustvarijo lastno.

mag. Sonja Rajh,
 odgovorna urednica

Vir

Razpet, M. (2020). »Nikomahov izrek.« *Matematika v šoli*, letnik 26, številka 1. https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2023/07/07_MarkoRazpet-1.pdf

Razvijanje algoritmičnega mišljenja preko pisnega deljenja

Developing Algorithmic Thinking Through Long Division

dr. Jasmina Ferme,^{1,2} dr. Barbara Arcet,^{1,2,3} dr. Alenka Lipovec^{1,2}

Pedagoška fakulteta¹, Fakulteta za naravoslovje in matematiko², Ekonomska fakulteta³ Univerze v Mariboru

Izvleček

Pisno deljenje odpira vrata v svet algoritmičnega in računalniškega mišljenja – dveh ključnih veščin za reševanje kompleksnih izzivov. Učenci se skozi ta proces učijo razčlenjevati naloge na obvladljive dele, prepoznati bistvene informacije, oblikovati natančne korake in popravljati morebitne napake. To niso le matematične spretnosti, temveč življenjske veščine, ki jih pripravljajo na tehnološko usmerjeno prihodnost. Raziskave poudarjajo, da algoritem dolgega načina deljenja omogoča večjo natančnost, sistematičnost ter preglednost korakov pa tudi posplošljivost, zato naj bo prednostna metoda poučevanja. Kratki način pa je odlična izbira za hitreje reševanje enostavnejših nalog ali izzive za naprednejše učence. Učitelji naj učencem predstavijo tudi alternativne pristope, kot je nizozemska metoda, ki spodbuja razumevanje mestne vrednosti in prilagodljivo reševanje. Pri učenju in poučevanju je pomembno, da učenci usvojijo različne metode pisnega deljenja in poznajo ter razumejo smisel izvedbe vsakega koraka v postopku pisnega deljenja, saj tako razvijajo tudi temelje za računalniško mišljenje. S temi spretnostmi bodo ne le uspešnejši pri matematiki, temveč tudi bolje pripravljeni na reševanje problemov v realnem svetu.

Ključne besede: pisno deljenje, tradicionalni algoritmi, algoritmično mišljenje

Abstract

Long division opens the door to the world of algorithmic and computational thinking - two critical skills for solving complex challenges. This process teaches students to break tasks into manageable chunks, identify essential information, formulate precise steps and correct mistakes. These are not only mathematical skills but also life skills that prepare them for a technology-driven future. According to research, the long-division algorithm improves precision, systematicity, transparency of steps, and generalisability and should, therefore, be the preferred teaching method. On the other hand, the short method is ideal for completing easy tasks fast or challenging more advanced learners. Teachers should also introduce students to alternative approaches, such as the Dutch method, which promotes an understanding of place value and adaptability in problem-solving. Students must learn the different methods of long division and grasp the meaning of how to carry out each step in the long division process to create the foundations for computational thinking. These skills will make them more successful in mathematics and better prepare them for real-world situations.

Keywords: long division, traditional algorithms, algorithmic thinking

Uvod

Glede na učni načrt za matematiko v osnovni šoli je obvladovanje pisnega deljenja z enomestnim oziroma dvomestnim deliteljem minimalni standard znanja učencev 4. oziroma 5. razreda. Učenci druge triade morajo tako poznati in obvladovati algoritem pisnega deljenja, čeprav se zdi, da ga v vsakdanjiku kasneje samostojno vedno redkeje izvajajo. Razlog za slednje predstavljajo pametni telefoni in druga tehnologija, ki nam skoraj na vsakem koraku omogoča rabo računalna. S tega vidika bi lahko rekli, da smisel obvladovanja pisnega deljenja blede, a treba se je zavedati, da imata poznavanje in obvladovanje omenjenega algoritma tudi druge funkcije.

Postopek pisnega deljenja je kompleksen, saj poleg pisnega deljenja samega, torej poznavanja postopka, zahteva tudi znanje številnih drugih matematičnih konceptov, na primer deljenje z ostankom, obvladovanje algoritmov pisnega odštevanja in pisnega množenja ter s tem avtomatizacijo počevanja. Razumevanje in učinkovito izvajanje postopka pisnega deljenja dodatno zahteva tudi obvladovanje koncepta mestne vrednosti ter sposobnost ocenjevanja pri računanju. Tako lahko rečemo, da preko poučevanja pisnega deljenja razvijamo in utrjujemo tudi številne druge matematične koncepte.

Poznavanje in obvladovanje algoritma pisnega deljenja ima aplikativno vrednost pri kasnejši obravnavi drugih matematičnih

vsebin in konceptov, kot sta na primer krajšanje ulomkov (recimo pri krajšanju ulomka $\frac{165}{9}$ s številom 3 velikokrat mentalno izvedemo algoritem pisnega deljenja z enomestnim deliteljem) ali pretvorba ulomka v decimalno številko. Pomembna vloga pisnega deljenja se pokaže tudi pri deljenju polinomov, ki predstavlja posplošitev algoritma z vidika elementov, ki nastopijo v vlogi deljenca in delitelja.

Pri pisnem deljenju gre za izvedbo postopka, sestavljenega iz več zaporednih korakov, ki jih po potrebi večkrat ponovimo. Gre torej za izvedbo algoritma, kar implicira, da z izvajanjem pisnega deljenja razvijamo in krepimo algoritmično mišljenje, eno izmed nepogrešljivih sposobnosti današnjega časa. Poučevanju pisnega deljenja v funkciji razvijanja algoritmičnega mišljenja se posvetimo v tem prispevku.

Algoritem in algoritmično mišljenje

Algoritem je natančno določen nabor navodil, ki se izvajajo v končnem številu korakov za reševanje določenega problema (Baaquie in Kwek, 2023). Lahko bi torej rekli, da je algoritem navodilo za reševanje dane naloge oziroma problema. Z drugimi besedami, gre za zaporedje ukazov ali korakov, ki nas vodijo do rešitve problema.

Z algoritmi se zelo pogosto srečujemo v vsakdanjiku, že od zgodnjega otroštva, četudi se njihove prisotnosti ne zavedamo. Na primer zavezovanje vezalk, vožnja avtomobila, sledenje receptu pri kuhanju, umivanje zob, uporaba pomivalnega ali pralnega stroja, uporaba samopostrežne blagajne ali bankomata, sestavljanje pohištva ... vse to so primeri, pri katerih z izvedbo določenege, nam znanega ali podanega postopka opravimo dano nalogo.

Med osnovnošolskim matematičnim izobraževanjem izvajamo številne postopke, za katere vemo, da nas bodo privedli do rešitve naloge; sledimo postopkom oziroma izvajamo algoritme: rišemo krožnico z danim polmerom, pri čemer sledimo znanemu postopku konstrukcije; pri preverjanju, ali je dano število deljivo z 9, seštejemo vse številke števila in določimo, ali je ta vsota deljiva z 9; pri izračunu ploščine likov ali prostornine teles uporabimo znane obrazce, s pomočjo Eratostenovega sita določamo praštevila, algoritmom sledimo pri konstrukciji vzporednice ali pravokotnice na dano premico skozi določeno točko itd. Tudi v srednješolski matematiki se sledenje algoritmom ne konča, na primer uporaba Evklidovega in Hornerjevega algoritma, reševanje kvadratne enačbe ali iskanje enačbe tangente na graf funkcije skozi dano točko.

S pojmom algoritem je tesno povezan izraz algoritmično mišljenje. Kot navajata Sadykova in Il'bahtin (2020), je algoritem glavno orodje obdelave podatkov in hkrati tudi končni rezultat algoritmičnega mišljenja. Sadykova in Il'bahtin (2020) po pregledu številnih definicij algoritmičnega mišljenja navajata, da večina raziskovalcev algoritmično razmišljanje opredeljuje kot sistem diskretnih dejanj, ki jih imenujeta načini oz. poti razmišljanja. Omenjeni načini razmišljanja predstavljajo sistem, sestavljen iz dveh tipov komponent: 1) vmesne naloge in končna naloga oziroma cilj; 2) razumevanje operacij, ki naj bi vodile do zaporedja in izvedbe teh nalog. Pri algoritmičnem mišljenju gre torej za sistem miselnih metod oziroma načinov razmišljanja, ki ga potrebujemo za to, da lahko ustvarimo zaporedje oziroma vrstni red,

po katerem bomo pridobivali vmesne rezultate za rešitev dane naloge, načrtovali strukturo dejanj in izvajanje te, vse to pa nas bo vodilo do rešitve dane naloge.

Lehmann (2024) navaja naslednje kognitivne spretnosti, ki so združene v algoritmičnem mišljenju: dekompozicija, abstrakcija, ustvarjanje algoritma (algoritmizacija) in odpravljanje napak algoritma. Omenjene kognitivne spretnosti natančneje opišemo v nadaljevanju.

Dekompozicija je proces razčlenitve problema ali naloge na manjše, obvladljive enote – podprobleme, ki so funkcionalni elementi celotnega sistema (Shute idr., 2017). Ti podproblemi omogočajo obravnavo in reševanje posameznih delov neodvisno, s čimer se kompleksni problemi poenostavijo, nove situacije pa postanejo razumljivejše. Na primer, nalogo določanja prostornine sestavljenega telesa razbijemo na izračune prostornin posameznih teles, katerih formule že poznamo.

Abstrakcija je proces ustvarjanja modela problema ali sistema z izpostavitvijo bistvenih komponent ter opustitvijo nepomembnih podrobnosti (Shute idr., 2017). Tako se oblikuje poenostavljena predstavitev, ki omogoča razumevanje delovanja sistema in reševanje povezanih problemov. Ključni cilj abstrakcije je zmanjšanje kompleksnosti, pri čemer se ohrani vse, kar je potrebno za analizo in rešitev problema. Na primer, pri reševanju problemov največjega pretoka modeliramo sistem kot graf, ki vključuje vozlišča in povezave med njimi, pomembne za tok vode, medtem ko neupoštevane podrobnosti, kot so pešpoti, ne vplivajo na rešitev.

Algoritmizacija zajema oblikovanje natančnega zaporedja korakov, ki vodijo do rešitve določenega problema (Lehmann, 2024). Proces vključuje identifikacijo vhodnih podatkov, določitev pričakovanih izhodov in zasnovanje ključnih korakov, ki povezujejo eno z drugim. Pri tem so ključni algoritmični koncepti, kot so ponavljanje (zanke), uporaba vmesnih rezultatov in spremenljivk, ki omogočajo učinkovito izvedbo zapletenih nalog. Algoritmizacija tako omogoča prehod od abstraktnega modela do praktične rešitve, ki jo je mogoče implementirati in preveriti v različnih situacijah.

Odpravljanje napak ali razhroščevanje je postopek sistematičnega testiranja in prilagajanja algoritma, da bi zagotovili njegovo pravilnost in učinkovitost (Shute idr., 2017). To vključuje testiranje algoritma z različnimi vhodnimi podatki, vključno s standardnimi in robnimi primeri, da se preveri njegovo delovanje v vseh scenarijih. Ob odkritju napak sledi iterativno prilagajanje algoritma, dokler ne doseže želenega delovanja. Poleg tega proces vključuje razmislek o možnih izboljšavah, kar pripomore k večji zanesljivosti in optimizaciji algoritma. Tako odpravljanje napak ni zgolj zagotavljanje pravilnosti, temveč tudi priložnost za izboljšanje kakovosti rešitve.

Algoritmično mišljenje, dekompozicija in abstrakcija pa so poleg prepoznavne vzorcev tudi sestavni del računalniškega mišljenja (Li idr., 2020). Vloga računalniškega mišljenja je ključna v sodobnih poklicih, kot so programiranje, podatkovna analiza in umetna inteligenca, kar narekuje njegovo vključevanje v izobraževanje že na osnovno- in srednješolski ravni. Razvoj algoritmičnega mišljenja je še posebej pomemben v matematiki, saj podpira logično in ustvarjalno reševanje problemov ter spodbuja

prilagodljivost – lastnosti, ki so zelo cenjene na trgu dela. Nakazuje se tudi, da integracija računalniškega in algoritmičnega mišljenja v matematično izobraževanje izboljšuje razumevanje (Kovalchuk idr., 2020; Stephens in Kadijevich, 2020).

Pri poučevanju in učenju matematike je pomembno, da učenci razumejo in uporabljajo pisne algoritme, kot je deljenje, saj te metode pomembno prispevajo k razvoju algoritmičnega razmišljanja. Čeprav se deljenje v sodobni praksi, vključno z računalniškimi procesorji, uporablja manj pogosto, ostaja ta operacija nepogrešljiva na področjih, kot so grafični prikazi in umetna inteligenca (Zhang, 2020). Prav zato pisni algoritem deljenja predstavlja odlično izhodišče za poglobljen vpogled v uporabnost algoritmičnega mišljenja v učnem procesu.

Kako pisno delimo?

Učenci med izobraževanjem spoznajo različne strategije oziroma načine računanja. Ti se med drugim ločijo tudi po tem, kako operiramo s števili: ali pri tem konstantno upoštevamo koncept mestne vrednosti ali ne (Hickendorff idr., 2018, 2019).

V prvem primeru gre za to, da pri računanju vseskozi neposredno upoštevamo dejstvo, da je naš številski sistem mestni oziroma pozicijski. Na vsakem koraku računanja torej ne uporabimo le izbrane števke števila, temveč vseskozi upoštevamo tudi njeno pozicijo oziroma mesto v številu. Tako neprenehoma operiramo s številom, ki ga števka skupaj z njeno pozicijo v številu predstavlja. Na primer, če imamo število 83 in ga obravnavamo na opisani način, v procesu računanja ne uporabimo le števila 8, temveč število 80. Pri seštevanju števil 83 in 12 tako v posameznem koraku seštevanja ne seštejemo števil 8 in 1 (kot posameznih števk števil), temveč $80 + 10$. Takšen način računanja običajno izvajamo, ko računamo ustno.

V nasprotnem primeru v nekaterih korakih računanja operiramo le s posameznimi števki števila, brez upoštevanja njihovih pozicij v številu in s tem zavedanja, katero število pravzaprav posamezna števka v številu predstavlja. Na primer, pri seštevanju števil 83 in 12 lahko tako v nekem koraku seštevanja seštejemo števili 8 in 1 (in pri tem ni nujno, da se zavedamo, da gre dejansko za vsoto $80 + 10$) ter rezultat, število 9 (lahko brez vedenja, da gre za število 90), zapišemo na ustrezno mesto števila, ki bo predstavljalo vsoto danih dveh števil. Omenjeni način računanja se kaže pri izvedbi tradicionalnih pisnih algoritmov seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja, ki jih poučujemo v Sloveniji. V posameznih fazah izvedbe posameznega algoritma namreč operiramo le s posameznimi števki danih števil, pri čemer pa je razvijanje številskih predstav potisnjeno v ozadje.

Na Nizozemskem so tradicionalni algoritem za operacijo deljenja opustili kmalu po letu 2000 v korist nove standardizirane strategije: pristopa, ki temelji na celotnih številih (Hickendorff idr., 2018, 2019). Zapis lahko opazujemo na sliki 1.

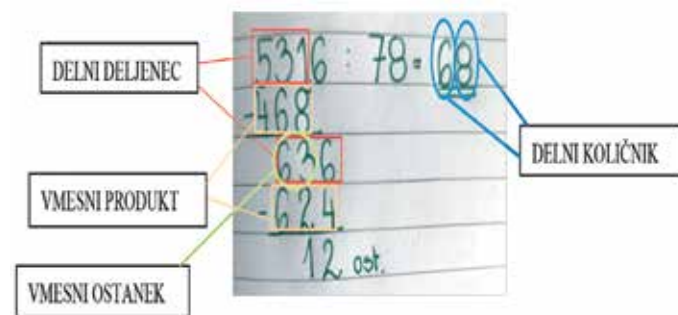
Na podlagi Slike 1 podrobneje razložimo postopek deljenja 544 s 34 z uporabo metode postopnega odštevanja večkratnikov delitelja. Najprej se od celotnega števila 544 odšteje desetkratni delitelj ($10 \cdot 34 = 340$). Tako se izračuna prvi delni ostanek 204 ($544 - 340 = 204$). Nato se od 204 odšteje trikratnik delitelja ($3 \cdot 34 = 102$) in dobi delni ostanek 102 ($204 - 102 = 102$). Postopek se ponovi. Od 102 se ponovno odšteje trikratnik delitelja

$$\begin{array}{r} 544:34 = \\ \underline{340} - 10 \times \\ 204 \\ \underline{102} - 3 \times \\ 102 \\ \underline{102} - 3 \times + \\ 0 \quad 16 \times \end{array}$$

Slika 1: Kako zapisujejo algoritem deljenja na Nizozemskem (vir: Fagginger Auer idr., 2018).

($3 \cdot 34 = 102$). Tokrat ostane 0, kar pomeni, da smo zaključili deljenje brez ostanka. Na koncu seštejemo, kolikokrat je bil delitelj 34 odštet od deljenca 544. Prvič je bil odštet desetkrat, nato trikrat in še enkrat trikrat. Skupaj torej šestnajstkrat, zato je količnik 16. Ta postopek poudarja postopno odštevanje večkratnikov delitelja, kar omogoča učencem, da razumejo logiko deljenja in prilagodljivo poiščejo delne količnike. Hkrati metoda krepi zavedanje mestne vrednosti. Osnovna razlika med algoritmom, ki ga uporabljamo v Sloveniji, in tistim, ki ga uporabljajo na Nizozemskem, je v tem, ali se vrednost mesta števk v številu upošteva ali ignorira.

Temeljna ideja slovenskega algoritma pisnega deljenja je izvajanje zaporednih deljenj delov deljenca (*delnih deljencev*) z deliteljem. Na vsakem koraku postopka tako izvedemo deljenje delnega deljenca z deliteljem, rezultat tega je *delni količnik*. Produkt med delnim količnikom in deliteljem poimenujemo *vmesni produkt*, razlika med omenjenima vrednostnima je *vmesni ostanek*. Vmesni ostanek skupaj z delom danega deljenca tvori nov *delni deljenec*. Vrednosti delnega deljenca, delnega količnika, vmesnega produkta ter vmesnega ostanka se tako v zaporednih korakih izvedbe algoritma pisnega deljenja spreminjajo.



Slika 2: Terminologija pisnega deljenja.

V primeru pisnega deljenja z enomestnim deliteljem deljenje delnega deljenca z deliteljem sovпада z deljenjem z ostankom (v okviru poštevanke). V tem primeru je določitev vmesnega količnika ter vmesnega ostanka direktna (določitev vmesnega produkta lahko celo opustimo). Nasprotno velja, če je delitelj dvomestno ali večmestno število. Takrat namreč določitev delnega količnika ter vmesnega ostanka običajno ni enostavna, ampak zahteva izvedbo dodatnih aktivnosti. V nadaljevanju prispevka te (skupaj s celotnim algoritmom pisnega deljenja) natančneje opisujemo. Omejimo se na primer pisnega deljenja z dvomestnim deliteljem.

Postopek izvedbe algoritma pisnega deljenja z dvomestnim deliteljem

Postopek izvedbe algoritma pisnega deljenja pričnemo pri največji oz. največjih desetiških enotah deljenca. Ponavljamo izvajanje naslednjih korakov: določimo delni deljenec; določimo delni količnik; določimo vmesni ostanek. Postopek zaključimo, ko je

delni deljenec manjši od delitelja. V nadaljevanju natančneje opišemo navedene tri ponavljajoče se korake v izvedbi algoritma pisnega deljenja.

1. Določitev delnega deljenca

Prvodoločeni delni deljenec je število, ki ga tvorijo števke, predstavljajoče največje desetiške enote deljenca. To število mora biti večje od delitelja ter manjše od njegovega desetkratnika (zato da bo količnik, dobljen pri deljenju delnega deljenca z deliteljem, enomestno število), kar od učencev zahteva znanje, vezano na primerjanje števil po velikosti. V naslednjih ponovitvah tega koraka algoritma pisnega deljenja delni deljenec določimo tako, da vmesnemu ostanku pripišemo naslednjo, še neuporabljeno števko deljenca. Če takšne števke ni več na voljo, se postopek zaključí.

2. Določitev delnega količnika

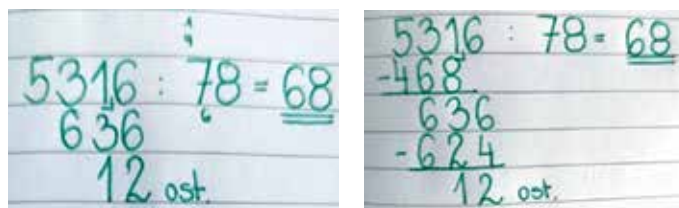
Delni količnik je število, ki ustreza vrednosti količnika v enakosti osnovnega izreka o deljenju. To je torej največji mogoči količnik; takšen, da se produkt tega z deliteljem najbolj približa delnemu deljencu, a ga ne preseže. Določitev delnega količnika ni vedno enostavna naloga (Fuson, 2023), kar izvira iz dejstva, da običajno nimamo memoriziranih vrednosti produktov dvomestnega števila (delitelja) s poljubnimi enomestnimi naravnimi števili. Zato določitev količnika in morebitnega ostanka pri omenjenem deljenju običajno ne poteka direktno, temveč zahteva izvedbo dodatnih postopkov, ki pa jih izvedemo z manj ali več dodatnimi zapisi ter na različne načine. Na način določitve delnega količnika vpliva tudi to, koliko pri pridobitvi delnega količnika uporabljamo ocenjevanja le-tega (torej ocenjevanja rezultata pri deljenju delnega deljenca z deliteljem). Običajno manjša prisotnost ocenjevanja pri določanju delnega količnika sovpada z več računanja slednjega. Pri računanju gre pravzaprav za računanje produktov med naravnimi števili in deliteljem. Računanje produktov delitelja z naravnimi števili lahko poteka direktno z množenjem, lahko pa uporabljamo tudi druge strategije, na primer seštevanje ter kombinacijo seštevanja/odštevanja in množenja (Hickendorff idr., 2019), kar lahko vključuje tudi rabo zakona o razčlenjevanju pri računanju.

3. Določitev vmesnega ostanka

Ko določimo ustrezní delni količnik, sledi določitev vmesnega ostanka. Načini njegove določitve se ločijo po tem, ali pred določitvijo vmesnega ostanka določimo vmesni produkt, ali ne. S tega vidika ločimo dolg in kratek način pisnega deljenja. V kratkem načinu deljenja vmesnega produkta ne izračunamo, preden se lotimo določanja vmesnega ostanka; vrednost oziroma velikost vmesnega produkta tako ni znana; znane bodo le števke, ki v tem produktu nastopijo. Pri tem načinu izračunamo razliko med delnim deljencem in vmesnim produktom s pomočjo algoritma pisnega odštevanja. Sočasno oziroma izmenično z izvajanjem tega algoritma poteka tudi izvedba algoritma pisnega množenja (za določitev števk vmesnega produkta). Gre torej za izmenjujoča se množenje in odštevanje, ki ju izvajamo v posameznih korakih pisnih algoritmov množenja in odštevanja pri obravnavi posameznih števk števil.

Kratki način pisnega deljenja (v fazi določitve vmesnega ostanka) ponazarjamo še na primeru deljenja števila 5316 s številom 78 (Slika 3). Ko število 531 delimo s številom 78, dobimo 6. Vmesni ostanek pridobimo z izmeničnim množenjem in odštevanjem s

pomočjo algoritmov pisnega množenja (delnega količnika 6 in delitelja 78) in odštevanja (vmesnega produkta od delnega deljenca 531). Najprej obravnavamo enice: število 6 pomnožimo s številom 8 (enice delitelja), rezultat je 48. Sedaj izvedemo odštevanje enic: od enic delnega deljenca (531) odštejemo enice pridobljenega produkta, število 8 (desetice števila 48 si zabeležimo, ker jim bomo uporabili pri obravnavi desetic števil). Ker odštevanje 1 – 8 ni izvedljivo v okviru naravnih števil, lahko z uporabo zakona o ohranitvi razlike ta izraz nadomestimo z izrazom 11 – 8, pri čemer pripišemo 1 k deseticam produkta med delnim količnikom in deseticami delitelja (ko bomo množili 6 in 7, bomo temu produktu poleg števila 4 prišteli še 1). Rezultat odštevanja, število 3, podpišemo pod enice obravnavanega delnega deljenca. Postopek ponovimo še pri deseticah števil.



Slika 3: Kratki način in dolgi način pisnega deljenja.

Pri dolgem načinu pisnega deljenja določanje ostanka pri deljenju delnega deljenca z deliteljem poteka v dveh fazah. Najprej izračunamo produkt med deliteljem in delnim količnikom, nato pa izvedemo še odštevanje omenjenega produkta od delnega deljenca. Za razliko od kratkega načina pisnega deljenja omenjena množenje in odštevanje nista izvedena nujno s pomočjo tradicionalnih algoritmov. Pri tem načinu izvedbe algoritma nekoliko bolj poudarimo velikost obravnavanih števil. Pri odštevanju delnega deljenca in vmesnega produkta sta ti vrednosti zapisani, iz česar je jasno razvidna njuna vrednost (in ne le vrednosti števk). Glede na to, kako pridobimo omenjeni vmesni produkt in izračunamo razliko, če ter kam posamezne izračune napišemo, ločimo več variacij: vmesne produkte lahko na primer določimo in zapišemo v sklopu enega matematičnega izraza ali kot posamezne dodatne izračune (stranske račune). V nekaterih primerih so vmesni produkti ter vmesni ostanki določeni mentalno, izračuni zanje niso zapisani, izraz deljenja pa predvsem vmesnih produktov ne vključuje. Iz samega zapisa izraza deljenja v takšnih primerih pravzaprav ni mogoče določiti, ali gre za dolgo deljenje (kjer so nekateri izračuni izvedeni mentalno) ali prej opisano kratko deljenje. Iz opisa postopka izvedbe algoritma pisnega deljenja pri deljenju z dvomestnim ali večmestnim deliteljem izhaja, da so osnovni koraki algoritma sicer določeni, nekateri vmesni koraki pa so lahko izvedeni na različne načine (na primer določitev vmesnega ostanka). Slednje implicira raznolikost algoritmov pisnega deljenja tako z vidika uporabe strategij računanja kot z vidika različnosti zapisovanja izrazov.

Izvedba algoritma pisnega deljenja ter njeno razumevanje nista enostavna. To izhaja predvsem iz dejstev, da algoritem pisnega deljenja vključuje tudi izvedbo drugih računskih operacij, predvideva ocenjevanje pri računanju ter se v primerjavi z drugimi algoritmi pisnega računanja prične pri najvišjih desetiških enotah. Razumevanje ter izvedba omenjenih elementov pisnega deljenja sta v tesni povezavi s konceptom mestne vrednosti, enim izmed zahtevnejših konceptov matematike za učence. Večina napak, ki se zgodijo pri izvedbi algoritma pisnega deljenja, je posledica

dica slabega razumevanja tega algoritma (kar se kaže na primer v izpuščanju vrednosti 0 v rezultatu – bodisi kot vmesne ali zadnje številke števila) ter slabega obvladovanja drugih operacij, ki jih ta algoritem zahteva (Sturm, 2016). Kot smo omenili, je število produktov, ki jih določimo z namenom določitve ustreznega delnega količnika odvisno tudi od vloge ocenjevanja delnega količnika. Slednje pri učencih in dijakih velikokrat povzroča težave. Raziskave namreč kažejo, da imajo učenci glede na osnovne računske operacije največ težav ravno pri ocenjevanju rezultata pri deljenju (Rubenstein, 1985).

Kratki ali dolgi način?

Vprašanje, ki ga obravnavamo v tem prispevku – ali je primernejši kratki ali dolgi način deljenja, ni novo. John (1930) je ugotovila, da učenci, ki uporabljajo dolgi način, pri matematičnih problemih dosegajo večjo natančnost in hitrost. Olander in Sharp (1932) sta poročala, da dolgi način omogoča do štirikrat več točnih količnikov, kar potrjuje tudi Grossnickle (1936), ki opozarja na ključno vlogo učiteljev pri izbiri metode poučevanja. Tudi Bathelt idr. (1986) so ugotovili, da kratki način pri nemških četrtošolcih povzroča več napak, zlasti pri zahtevnejših primerih deljenja. Schulz in Leuders (2018) pa opozarjata, da poučevanje krajših algoritmov negativno vpliva na razvoj alternativnih strategij in razumevanje številskih odnosov, kar omejuje prilagodljivost učencev pri reševanju nalog. Novejše raziskave predvsem sledijo pristopom, ki poudarjajo, da učenci potrebujejo poznavanje več strategij zato, da se lahko odločajo za najučinkovitejšo. Če npr. delimo 12012 z 12 je strategija dekompozicije $12012 : 12 = (12000 + 12) : 12 = 1000 + 1$ učinkovitejša kot tradicionalni algoritem pisnega deljenja, kar pa ne velja za $5316 : 68$. A tudi novejše raziskave kažejo, da algoritmi, ki temeljijo na števkih,

pogosto vodijo do večjega števila napak, in poudarjajo prednosti algoritmov, kot je nizozemski, ki ne temeljijo na števkih (Hickendorff idr., 2018, 2019). Težave z večmestnim deljenjem niso omejene le na učence, temveč se z njimi pogosto srečujejo tudi učitelji razrednega pouka. Raziskave iz različnih držav kažejo, da številni učitelji pri reševanju zahtevnejših nalog deljenja izkazujejo pomanjkanje samozavesti in omejen nabor strategij. Kljub temu pa učitelji, katerih izobraževanje je poudarjalo razumevanje številskih odnosov, izstopajo z večjo prilagodljivostjo in uspešnostjo pri poučevanju deljenja (Fernández Verdú idr., 2014; Kaasila idr., 2010; Ortiz-Laso in Diego-Mantecón, 2020).

Raziskave o deljenju v slovenskem šolskem prostoru so redke in temeljijo na majhnih vzorcih učencev, kar otežuje splošne zaključke o rabi dolgega in kratkega načina. Jamšek (2011) je na vzorcu petošolcev analizirala oba načina, vendar ni mogla potrditi hipoteze, da manj uspešni učenci pogosteje uporabljajo daljši način. Polutnik (2017) je v raziskavi s 17 petošolci ugotovil, da se večina učencev (14) raje odloča za daljši način deljenja, pri katerem naredijo polovico manj napak kot pri krajšem. Skvarča (2019) je na podlagi pregleda učnih gradiv za 4. razred ugotovila, da ta pri obravnavi pisnega deljenja z enomestnim deliteljem prikazujejo kratki način deljenja, nekatera oba načina, nobeno od pregledanih gradiv pa ne obravnava zgolj dolgega načina deljenja. V omenjeno obravnavo so bila zajeta naslednja gradiva: *Igra števil in oblik* (Centa idr., 2006), *Matematika 4* (Hodnik Čadež in Uran, 2016), *Radovednih 5*, *Matematika 4* (natančnejši podatki niso navedeni), *Svet matematičnih čudes 4* (Cotič idr., 2007) ter *Igraje v matematiko 4* (Hernja in Vesenjaj, 2002). Pri deljenju z dvomestnim deliteljem sta v dveh pregledanih gradivih za 5. razred (Kopasić, 2022; Bajramović idr., 2014) predstavljena oba načina deljenja.

Zaključek

Ugotovitve raziskav kažejo, da je dolgi način deljenja primernejši za poučevanje kot standardna metoda, saj zagotavlja večjo natančnost in prilagodljivost, medtem ko kratki način deljenja lahko služi kot učinkovita bližnjica za obetavnejše učence ali enostavnejše primere. Menimo, da primarno poučevanje dolgega načina deljenja v primerjavi s kratkim načinom tudi dandanes nudi nekaj prednosti, izpostavljamo tri. Prva je večja natančnost. Ta metoda deljenja sistematično razbije proces na manjše korake, ki omogočajo boljši fokus in temeljito preverjanje morebitnih napak. To je še posebej pomembno pri deljenju z večmestnimi števili, kjer je kratko deljenje pogosto napornejše zaradi manjšega števila korakov in slabše preglednosti. Druga pomembna prednost dolgega načina je njegova izobraževalna vrednost. Ta metoda učence bolje pripravi na razumevanje kompleksnejših matematičnih konceptov, kot so deljenje polinomov, deljenje v drugih številskih sestavih in druge algebrske razlage deljenja. Dolgi način zahteva in spodbuja globlje razumevanje aritmetičnih principov, saj morajo učenci razumeti pomen vsakega koraka v procesu, kar povečuje njihovo matematično razumevanje in logično razmišljanje. Tretja prednost je visoka vizualna preglednost. Vsi koraki postopka so jasno zapisani, kar učencem omogoča, da lažje sledijo celotnemu procesu deljenja in razumejo, kako posamezne številke vplivajo na končni rezultat.

Pomembno je poudariti, da je ključnega pomena, da učenci spoznajo več načinov/algoritmov deljenja, saj jim to omogoča prilagodljivo in učinkovito reševanje nalog. S tem pridobijo sposobnost izbire metode, ki je zanje in za dani račun najprimernejša, kar prispeva k boljšemu razumevanju in uspešnosti pri matematičnih izzivih.

Literatura

- Al Fedaghi, S. in Alkhalidi, A. A. (2019). Thinking for computational thinking. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)*, 10(2). <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100277>
- Baaquie, B. E. in Kwek, L. C. (2023). Classical Gates and Algorithms. V *Quantum Computers. Theory and Algorithms* (str. 37–69). Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-7517-2_3

- Bajramović, N., Repnik, A., Kociper, M., Cigula, S., Slana Mesarič, M., Antolin Drešar, D., Ferk, E. in Visočnik, D. (2014). *Matematika 5: i-učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. <http://eucbeniki.sio.si/mat5/index.html>
- Bathelt, I. Post, S. in Padberg, F. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 32(3), 29–44. <https://pub.uni-bielefeld.de/record/1775208>
- Centa, N., Frigelj, J., Kožuh V. in Rakun Beber, M. (2006). *Igra števil in oblik 4*. Učbenik za matematiko v 4. razredu osnovne šole (2. izdaja). Založba Rokus Klett d. o. o.
- Cotič, M., Felda, D., Bremec, B., Pisk, M. in Benčina Smotlak, N. (2007). *Svet matematičnih čudes 4, Kako poučevati matematiko v 4. razredu devetletne osnovne šole*. Priročnik. DZS, d. d.
- Fagginger Auer, M. F., Hickendorff, M. in van Putten C. M. (2018) Training Can Increase Students' Choices for Written Solution Strategies and Performance in Solving Multi-Digit Division Problems. *Frontiers in Psychology*, 9, 1644. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01644>
- Fernández Verdú, C., Callejo de la Vega, M.L. in Torres, M. M. (2014) Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. [Pre-service teachers' knowledge when they interpret primary school students' answers to quotitive division problems]. *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 407–424. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias>
- Fuson, K. C. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. V J. Kilpatrick, W. G. Martin in D. Schifter (Ur.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (str. 68–94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Grossnickle, F. E. (1936). The Incidence of Error in Division with a One Figure Divisor when Short and Long Forms of Division are Used. *The Journal of Educational Research*, 29(7), 509–511.
- Hernja, S. in Vesenjaj, P. (2002). *Igraje v matematiko 4*. Učbenik za pouk matematike v 4. razredu devetletne osnovne šole. Pikal, d. o. o., založništvo.
- Hickendorff M., Torbeyns J., Verschaffel L. (2018). Grade-related differences in strategy use in multidigit division in two instructional settings. *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), 169–187. <https://doi.org/10.1111/bjdp>
- Hickendorff, M.; Torbeyns, J.; Verschaffel, L. (2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. V Fritz, A., Haase, V.G., Räsänen, P., (Ur.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (str. 543–560). Springer: Cham, Switzerland.
- Hodnik Čadež, T. in Uran, T. (2016). *Matematika 4. 3.del*. Matematika za četrty razred osnovne šole. Ljubljana: Modrijan založba, d. o. o.
- Jamšek, S. (2011). *Strategije reševanja nalog pisnega deljenja v 5. razredu osnovne šole*. Diplomsko delo. Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- John, L. (1930). The Effect of Using the Long-Division Form in Teaching Division by One-Digit Numbers, *The Elementary School Journal*, 30(9), 675–692. <https://www.jstor.org/stable/995877>
- Kaasila, R., Pehkonen, E. in Hellinen, A. (2010) Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 247–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9213-1>
- Kopasić, M. (2022). *Radovednih pet, Matematika 5, 3. del, samostojni delovni zvezek*. Založba Rokus Klett, d. o. o.
- Kovalchuk, M., Voievoda, A., Prozor, E. (2020). Algorithmic Thinking as the Meaningful Component of Cognitive Competencies of the Future Engineer. *Universal Journal of Educational Research*, 8(11B), 6248–6255. <https://doi.org/10.13189/ujer.2020.082263>
- Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D., in Duschl, R. A. (2020). Computational thinking is more about thinking than computing. *Journal for STEM Education Research*, 3, 1–18. <https://doi.org/10.1007/s41979-020-00030-2>
- Lehmann, T.H. (2024). How current perspectives on algorithmic thinking can be applied to students' engagement in algorithmizing tasks. *Mathematics educational Research Journal*, 36, 609–643. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00462-0>
- Olander, H. T., Preston Sharp, E. (1932). Long division versus short division. *The Journal of Educational Research*, 26(1), 6–11. <https://www.jstor.org/stable/27525562>
- Ortiz-Laso, Z., in Diego-Mantecón, J. M. (2020). Strategies of Pre-Service Early Childhood Teachers for Solving Multi-Digit Division Problems. *Sustainability*, 12(23), 10217. <https://doi.org/10.3390/su122310217>
- Polutnik, T. (2017). *Pisno deljenje z dvomestnim deliteljem*. Magistrsko delo. Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru.
- Rubenstein, R. N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 106–119.
- Sadykova, O. V., Il'bahtin, G. G. (2020). The Definition of Algorithmic Thinking. V Proceedings of the International Session on Factors of Regional Extensive Development (FRED 2019), (str. 419–422). <https://doi.org/10.2991/fred-19.2020.85>
- Schulz, A. in Leuders, T. (2018). Learning trajectories towards strategy proficiency in multi-digit division - a latent transition analysis of strategy and error profiles. *Learning and Individual Differences*, 66, 54–69. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.04.014>
- Shute, V. J., Sun, C., in Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, 22, 142–158. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003>
- Skvarča, T. (2019). *Neformalno znanje o pisnem deljenju pri učencih tretjega in četrtega razreda osnovne šole*. Magistrsko delo. Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- Stephens, M., in Kadijevich, D. M. (2020). Computational/algorithmic thinking. V Lerman, S. (Ur.) *Encyclopedia of mathematics education* (str. 117–123). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100044
- Sturm, S. (2016). *The Great Divide: A Study That Examines the Understanding of Long Division Across Multiple Generations* (Doktorska disertacija), State University of New York at Fredonia. <https://soar.suny.edu/handle/20.500.12648/258>
- Zhang, X. D. (2020). A matrix algebra approach to artificial intelligence. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-15-2770-8>

Integracija umetne inteligence v poučevanje: Kako učinkovito oblikovati pozive?

Integrating AI in Education: Effective Prompting

dr. Barbara Arcet

Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Izvleček

Članek obravnava uporabo generativne umetne inteligence (genUI) v izobraževanju, s posebnim poudarkom na optimizaciji pozivov, ki jih jezikovni modeli umetne inteligence uporabljajo za generiranje vsebine. Namen prispevka je prikazati učinkovitost inženiringa pozivov pri pripravi učnih vsebin ter rezultate delavnice za izobraževanje učiteljev na tem področju. Na delavnici za učitelje matematike in naravoslovja smo predstavili osem ključnih priporočil za optimizacijo pozivov. Udeleženci so na začetku in koncu delavnice zapisali pozive za pripravo učne priprave, kar je omogočilo primerjavo začetnih in končnih pozivov. Rezultati so pokazali, da so udeleženci po delavnici bistveno izboljšali natančnost in specifičnost svojih pozivov ter bolje opredelili ciljno občinstvo. Največji napredek je bil opažen pri specifičnosti, medtem ko je bilo manj izboljšav pri uporabi negativnih pozivov in poizvedovanju, katere podatke model potrebuje za kakovosten odgovor, kar nakazuje potrebo po nadaljnjem usposabljanju. Glavne ugotovitve članka poudarjajo pomen ustreznega izobraževanja učiteljev za učinkovito integracijo umetne inteligence (UI) v izobraževalni proces. S pravilnim pristopom k pisanju pozivov lahko učitelji bistveno izboljšajo kakovost učnih priprav in učinkoviteje uporabljajo UI v učilnicah, kar pripomore k boljši pripravi učencev na prihodnost, kjer bo UI igrala vse večjo vlogo.

Ključne besede: umetna inteligenca, generativna umetna inteligenca, poziv, izobraževanje

Abstract

This paper explores Generative Artificial Intelligence (GenAI) in education, focusing on optimising prompts used by AI language models to generate content. The paper aims to demonstrate the effectiveness of prompt engineering in designing learning content and to present the outcomes of a teacher training workshop on this subject. A mathematics and science teacher training workshop proposed eight critical recommendations for improving prompts. The participants jotted down the prompts for their lesson preparation at the beginning and end of the session, allowing them to compare to the prompts before and after. The results demonstrated that the workshop considerably enhanced the accuracy and specificity of the prompts and the target audience. The most significant improvement was observed in specificity. However, there was less improvement in using negative prompts and determining what information the model needs for a qualitative response, indicating the need for further training. The key findings highlight the importance of proper teacher training on effective AI integration in the educational process. With the appropriate approach to writing prompts, teachers can considerably improve the quality of their classroom preparation and use AI more effectively, helping to better prepare students for a future in which AI will play an increasingly crucial role.

Keywords: artificial intelligence, generative artificial intelligence, prompt, education

O umetni inteligenci

V zadnjih letih, še posebej intenzivno pa od novembra 2022, ko je podjetje OpenAI predstavilo ChatGPT, smo priča izjemnemu razmahu prostodostopnih modelov umetne inteligence, kar je spodbudilo njeno uporabo, porajanje dilem, strahov, navdušenja in številnih vprašanj. Eno naj-

osnovnejših med njimi je: Kaj je umetna inteligenca (UI)? Definicija je izmuzljiva in pogosto povzroča težave tudi strokovnjakom, ki raziskujejo to področje. Da bi se izognili pomanjkljivim formulacijam, ki so lahko hkrati preobsežne in neobvladljive, bomo sledili zgledu spletne strani Elements of AI (Elements of AI, 2024), kjer je na voljo brezplačen spletni tečaj o osnovah UI v slovenščini, in izpostavili

dve lastnosti, ki sta potrebni za sisteme, da jih lahko označimo kot umetno inteligentne. Ti lastnosti sta avtonomnost in prilagodljivost. **Avtonomnost** je definirana kot zmožnost samostojnega izvajanja nalog v kompleksnih okoljih brez stalnega nadzora uporabnika, **prilagodljivost** pa kot sposobnost izboljšanja delovanja z učenjem iz izkušenj.

Mnogo pripomočkov, ki jih uporabljamo v vsakodnevnem življenju, deluje s pomočjo UI. Primeri vključujejo prepoznavo obraza za odklepanje pametnega telefona, navigacijo in izbiro optimalne poti do cilja ter aplikacije za učenje tujega jezika. Socialna omrežja in ponudniki pretočnih vsebin, ki nam predlagajo naslednje izbire za branje, gledanje ali poslušanje, prav tako uporabljajo različne sisteme UI.

UI zaradi svoje integracije v naša življenja prinaša številne koristi in udobje, vendar tudi tveganja in etične dileme. Sistemi UI se učijo na podlagi ogromnih količin podatkov, katerih viri so pogosto vprašljivi. Na primer, navigacijski sistem za izbiro najhitrejša poti z ene strani mesta na drugo potrebuje podatke o lokaciji uporabnikov, ki se gibljejo po mestu. Kako se počutimo ob misli, da obstaja baza podatkov, ki natančno ve, kje smo bili v vsakem trenutku, ko je bil naš mobilni telefon vklopljen in smo ga imeli pri sebi? Kaj vse morajo vedeti o nas virtualni pomočniki, da nam olajšajo vsakodnevne opravke? Je naše simpatiziranje z najljubšo politično stranko res naša svobodna izbira, če pa nas algoritmi UI na socialnih omrežjih zapirajo v mehurčke, ki nam ponujajo le ozek spekter novic in komentarjev? Kot že omenjeno, je UI težko definirati, in če je nek pojem težko opredeliti, je še težje oblikovati zakonodajo, ki bi ga urejala.

Zakonodaja o umetni inteligenci

Evropska unija je kot prva na svetu letos marca sprejela celovit pravni okvir o UI, imenovan Akt o umetni inteligenci (Evropski parlament, 2024). Cilj tega regulativnega okvira je zagotoviti jasne zahteve in obveznosti glede specifičnih uporab UI, pri čemer opredeljuje štiri ravni tveganja za sisteme UI:

1. Nesprejemljivo tveganje: Prepovedani so sistemi UI, ki ogrožajo varnost, preživetje in pravice ljudi. Primeri vključujejo sklepanje o čustvenem stanju na delovnem mestu ali v izobraževalnih ustanovah (razen za zdravstvene ali varnostne namene). Na primer situacija, prikazana v znanem videu iz kitajske šole, kjer učenci nosijo naglavne trakove za merjenje pozornosti (Slika 1), v EU ne bo dovoljena. Prepovedano bo tudi družbeno točkovanje,



Slika 1: Naglavni trakovi iz kitajskih šol ter QR-koda do posnetka *How China is Using Artificial Intelligence in Classrooms* | WSJ <https://youtu.be/JMLsHI8aV0g?si=niwCt65XMTDwvA6u>



biometrična kategorizacija na podlagi občutljivih podatkov, biometrična identifikacija (razen v primerih iskanja oseb ali preprečevanja terorističnih napadov), neciljano zbiranje slik obrazov, usmerjanje vedenja in izkoriščanje ranljivosti.

2. Visoko tveganje: Sistemi UI, za katere bo potrebno dovoljenje sodnega ali drugega neodvisnega organa. Sem sodijo sistemi, ki se uporabljajo v izobraževanju ali poklicnem usposabljanju, saj lahko vplivajo na dostop do izobraževanja in karijerne poti posameznikov. To vključuje točkovanje izpitov in sisteme, ki se uporabljajo za zaposlovanje, upravljanje delavcev ter dostop do samozaposlitve (npr. programska oprema za razvrščanje življenjepisov pri zaposlovanju). Pred dajanjem na trg bodo zanje veljale stroge obveznosti, kot so visoka kakovost podatkovnih naborov za vnos v sistem, zmanjševanje tveganj in diskriminatornih rezultatov ter beleženje dejavnosti za zagotovitev sledljivosti rezultatov.

3. Omejeno tveganje: Nanaša se na nevarnosti, povezane s pomanjkanjem preglednosti pri uporabi UI. Za to vrsto UI bodo predpisana opozorila, ki bodo uporabnike informirala, da se, na primer, pogovarjajo s pogovornimi agenti in ne z dejansko osebo.

4. Minimalno tveganje ali brez tveganja: Večina sistemov UI, ki se trenutno uporabljajo, spada v to kategorijo. Sem sodijo navigacijski sistemi, videoigre, filtri za neželeno e-pošto in podobno.

Ta pravni okvir je namenjen zagotavljanju varnosti in zaščite pravic posameznikov ob hkratnem spodbujanju inovacij in razvoja na področju UI. Pravila se nanašajo

na ponudnike sistemov UI, ne na nas kot uporabnike.

Umetna inteligenca v izobraževanju

Ob vsesplošnem razmahu novih tehnologij, ki so se na različnih področjih trdno vpele v naša življenja, je očitno, da bomo tudi v izobraževanju morali stopiti v korak z njimi. Digitalna preobrazba, ki jo prinaša napredek na področju UI, zahteva prilagoditev izobraževalnih sistemov za pripravo učencev na prihodnost. DigComp2.2: Okvir digitalnih kompetenc za državljane (Vourikari idr., 2022), ki podaja digitalne smernice za razvoj na ravni EU, v priročniku iz leta 2022 vključuje kompetence, ki zajemajo tudi znanja, spretnosti in stališča s področja UI na vseh petih področjih: informacijska in podatkovna pismenost; komuniciranje in sodelovanje; ustvarjanje digitalnih vsebin; varnost; reševanje problemov.

V skladu s temi smernicami smo v okviru projekta SETCOM, podprtega z Norveškim finančnim mehanizmom, sodelovali tudi partnerji z Univerze v Mariboru, in sicer Pedagoška fakulteta, Fakulteta za naravoslovje in matematiko ter Filozofska fakulteta. Projekt SETCOM je poudaril potrebo po integraciji UI v izobraževanje, kar smo izvedli v sinergiji s socialno-čustvenim učenjem. To integracijo smo razdelili na tri sklope: O, Z in ZA. Prvi sklop (O) se nanaša na izobraževanje o UI, kjer učenci spoznavajo temeljne koncepte, primere uporabe in širše implikacije UI. Drugi sklop (Z) obravnava izobraževanje z UI, kjer učitelji uporabljajo UI za olajšanje administrativnih nalog, kot so pisanje poročil in priprava na pouk, ter neposre-

dno v razredu, na primer pri preverjanju rešitev nalog z mobilnimi aplikacijami. Tretji sklop (ZA) pa poudarja odgovornost šol, da učence pripravijo na življenje v svetu, kjer je UI vseprisotna, kar vključuje soočanje z etičnimi dilemami in zahtevo po informiranih odločitvah.

V longitudinalni raziskavi (Lipovec idr., 2024), izvedeni v okviru projekta, je bilo ugotovljeno, da upoštevanje socialnih in čustvenih aspektov pomembno prispeva k učinkovitosti poučevanja digitalnih spretnosti. Ta raziskava poudarja, da je celostni pristop k poučevanju, ki vključuje tako tehnološke kot socialno-čustvene dimenzije, ključnega pomena za pripravo učencev na prihodnje izzive.

V nadaljevanju članka se bomo osredotočili na vidik izobraževanja z UI, in sicer predvsem na tiste sisteme UI, ki nam s tvorbo in preoblikovanjem vsebine lahko ob smiselni uporabi prihranijo veliko časa in poenostavijo delo.

Generativna umetna inteligenca

Generativna umetna inteligenca (genUI) je tehnologija umetne inteligence, ki omogoča ustvarjanje nove vsebine v različnih oblikah, kot so besedila, slike, glasba, videoposnetki, programska koda in drugo. V tem članku se bomo osredotočili na jezikovne sisteme, namenjene delu z besedilom, kjer imajo ključno vlogo veliki jezikovni modeli (Large Language Models – LLM), ki omogočajo razumevanje, obdelavo in generiranje besedil v naravnem jeziku.

Veliki jezikovni modeli, kot je GPT (Generative Pretrained Transformer), ki je osnova za ChatGPT, delujejo tako, da uporabnikovo vhodno besedilo razdelijo na manjše enote, imenovane žetoni. Ti žetoni predstavljajo besede, zloge in posamezne znake, uporabljene pri pisanju besedila. GPT nato uporablja statistične vzorce za napovedovanje najverjetnejših besed ali fraz, ki bi lahko tvorile smiselni odgovor. Model prepozna vzorce, ki se pogosto pojavljajo skupaj v predhodno izdelani podatkovni zbirki, ki je sestavljena iz ogromne baze besedil s spleta in drugih virov.

Postopek delovanja GPT se začne z ključno napovedjo, nato pa s pomočjo

ocenjenih verjetnosti napove naslednje besede ali fraze v odgovoru. Ravno ta ključna napoved vpliva na to, da praviloma dobimo različne odgovore, če istemu modelu večkrat postavimo isto vprašanje. Te napovedi se pretvorijo v berljivo besedilo, ki se nato filtrira skozi različne »varovalke«, da se odstrani morebitna žaljiva vsebina. Odgovor se šteje za dokončan, ko doseže največjo dovoljeno dolžino žetonov ali izpolni vnaprej določene kriterije za ustavitev. Na koncu se odgovor dodatno obdeli za izboljšanje berljivosti z uporabo oblikovanja, ločil in drugih izboljšav, kot so začetne besede »Seveda«, »Razumem« ali »Opravičujem se« (UNESCO, 2023).

Pomembno je poudariti, da vsebina, ki jo generira genUI, ni vedno resnična. Če nismo strokovnjaki na določenem področju, je včasih težko prepoznati, koliko resnice je v generiranih besedilih. Zato je priporočljivo, da nekatere velike jezikovne modele uporabljamo predvsem za nabiranje idej ali oblikovanje besedil (npr. ChatGPT 3.5), za iskanje zanesljivih informacij pa raje uporabimo tiste, ki navedejo tudi vir, ki ga lahko preverimo (npr. Bing, Perplexity).

Omenili smo že besedo »poziv«, ki je slovenska ustreznica pogostejše uporabljane angleške besede »prompt«. Poziv se nanaša na vhodno besedilo, ki ga podamo jezikovnemu modelu, in je lahko v obliki vprašanja, zahteve, naloge, primera itd. To je torej naš del pogovora z genUI. Ker je kakovost odgovora, ki ga prejmemo, v veliki meri odvisna od našega poziva, je izjemno pomembno, kako ga sestavimo. Procesi in tehnike oblikovanja pozivov se imenujejo inženiring pozivov in pisanje kvalitetnih pozivov naj bi postal dobro plačan poklic prihodnosti (Popli, 2023). Z nekaj nasveti, vaje in raziskovanja pa

lahko vsakdo izboljša svojo spretnost pogovora z UI.

Priporočila za pogovor z genUI

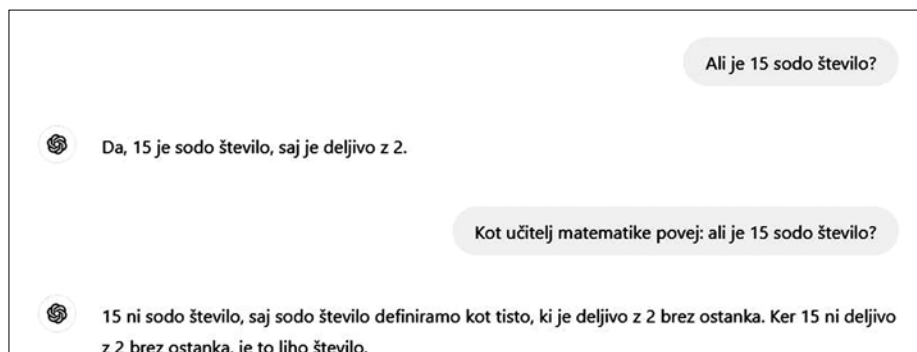
V nadaljevanju bomo predstavili nekaj priporočil, ki vam bodo pomagala pri doseganju optimalnih rezultatov v pogovoru z genUI. Priporočila so plod raziskovanja in preizkušanja različnih jezikovnih modelov, ki smo jih v času projekta SETCOM izvedli avtorica in sodelavci na projektu. Vsi podani primeri so bili narejeni junija 2024 z orodjem ChatGPT 3.5 (OpenAI, 2024).

1. Postavite jezikovni model v vlogo

Postavljanje jezikovnega modela v vlogo pomeni, da mu dodelite specifično identiteto ali perspektivo, s katere naj generira odgovore. To lahko vključuje določitev strokovnega področja, položaja ali konteksta, v katerem naj model deluje. Takšen pristop omogoča, da model proizvaja bolj ciljno usmerjene in relevantne odgovore, saj se osredotoča na določeno vlogo, kar izboljšuje kakovost in natančnost generiranega besedila. S tem se povečuje uporabnost modela za specifične naloge, kot so tehnične razlage, svetovanje ali ustvarjanje vsebine v določenem slogu. Na Sliki 2 vidimo primer, kako se je odgovor modela izboljšal po tem, ko smo ga postavili v vlogo.

2. Podajte »negativni poziv«

Podajanje »negativnega poziva« pomeni, da v pozivu navedete besede ali teme, ki naj se jim jezikovni model izogne. S tem pristopom lahko usmerite generacijo besedila stran od neželenih vsebin ali kontekstov, kar pomaga pri izboljšanju relevantnosti in uporabno-



Slika 2: Primer, kako jezikovnemu modelu dodeliti vlogo.

Kako prikazati ulomek $1/4$? Ne želim ga prikazati kot pobarvani del geometrijskega lika.

- Ena od možnosti za prikaz ulomka $1/4$ je uporaba besedilne oblike, kjer ga preprosto zapišete kot "ena četrtnina" ali "četrtnina". Lahko ga tudi izrazite kot decimalno število (0.25) ali ga prikažete kot razlom (1/4). Poleg tega ga lahko uporabite tudi v kontekstu, na primer "ena četrtnina pice" ali "ena četrtnina ure". Odvisno od konteksta in namena uporabe, lahko izberete najbolj primerno obliko za vašo situacijo.

Slika 3: Primer, kako jezikovnemu modelu povedati, česa ne želimo v odgovoru.

sti odgovorov. Negativni pozivi so še posebej uporabni, ko želite preprečiti pojav določenih občutljivih ali nepri-

mernih tem v odgovorih, s čimer povečate varnost in zanesljivost komunikacije z jezikovnim modelom, ali pa v

Prevedi:

Mathematics is an area of knowledge that includes the topics of numbers, formulas and related structures, shapes and the spaces in which they are contained, and quantities and their changes.

- Mathematika je področje znanja, ki obuhvača teme brojeva, formula i pripadajućih struktura, oblika i prostora u kojima se nalaze, te količina i njihovih promjena.

Prevedi v slovenščino:

Mathematics is an area of knowledge that includes the topics of numbers, formulas and related structures, shapes and the spaces in which they are contained, and quantities and their changes.

- Matematika je področje znanja, ki zajema teme števil, formul in povezanih struktur, oblik ter prostorov, v katerih so vsebovane, ter količin in njihovih sprememb.

Slika 4: Natančnejše ko bomo napisali navodilo, boljše rezultate bomo dobili.

Kaj so diferencialne enačbe?

- Diferencialne enačbe so enačbe, ki vsebujejo odvode neznane funkcije. V osnovi opisujejo razmerja med neznano funkcijo in njenimi odvodi ter drugimi spremenljivkami. Te enačbe so pogosto uporabljene v fiziki, inženirstvu, ekonomiji in drugih znanstvenih disciplinah za modeliranje in reševanje različnih naravnih fenomenov ter procesov. Diferencialne enačbe so temeljnega pomena v matematiki in imajo širok spekter uporabe.

Kako bi desetletnemu otroku razložil, kaj so diferencialne enačbe?

- Diferencialne enačbe so kot uganka za matematične superjunake! Veš, kako se rešujejo ugankice, ki vključujejo skrite številke ali vzorce? No, diferencialne enačbe so podobne, le da vsebujejo skrite funkcije, ki opisujejo, kako se stvari spreminjajo s časom ali prostorom. Na primer, če želimo ugotoviti, kako hitro raste rastlina, lahko uporabimo diferencialno enačbo. Ta enačba nam pomaga razumeti, kako se spreminja rastlina glede na čas, svetlobo, vodo itd. Torej, diferencialne enačbe so kot posebne ugankice, ki nam pomagajo razumeti, kako se stvari spreminjajo okoli nas!

Slika 5: Prilagoditev odgovora starostni skupini ciljne publike.

primerih, ko se želite izogniti klasičnim odgovorom in iščete bolj inovativne ideje. Na Sliki 3 je primer, kako smo se z dodatnim stavkom v pozivu izognili najbolj tipičnim primerom ponazoritve ulomkov.

3. Bodite specifični

Jasno in podrobno navedite, kaj točno želite, da jezikovni model generira. Vključite torej zahtevo o posebnih informacijah, strukturi, tonu ali slogu, ki naj jih model upošteva. S tem pristopom zmanjšate dvomnost in povečate verjetnost, da bo model proizvedel odgovore, ki natančno ustrezajo vašim potrebam. Natančnost in specifičnost pomagata modelu bolje razumeti vaše zahteve, kar vodi do bolj koherentnih, relevantnih in kakovostnih rezultatov. Na Sliki 4 vidimo, da je jezikovni model glede na preskopo navodilo prevedel besedilo v hrvaščino, kar pa ne pomeni, da ne zna prevajati v slovenščino. Ko smo natančneje povedali, v kateri jezik želimo prevod, je to tudi upošteval.

4. Povejte, kdo je ciljna publika

Povedati, kdo je ciljna publika, pomeni, da jezikovnemu modelu jasno navedete, komu je vsebina namenjena. Tako lahko vključimo opis demografskih značilnosti, interesov, strokovne ravni ali specifičnih potreb bralcev. Z določitvijo ciljne publike lahko model prilagodi ton, jezik in kompleksnost odgovorov, da bolje ustrezajo pričakovanjem in zahtevam občinstva. Ta pristop pomaga pri ustvarjanju bolj relevantne in učinkovite komunikacije, saj se vsebina natančno ujema s potrebami in zanimanji predvidenih bralcev, kar povečuje uporabnost in vrednost generiranega besedila. Na Sliki 5 je primer, kako je jezikovni model svojo razlago kompleksnega pojma ponesel na raven desetletnega otroka, ko smo mu pripisali ciljno publiko.

5. Povejte, v kakšnem slogu pričakujete izhodiščno besedilo

Povedati, v kakšnem slogu pričakujete izhodiščno besedilo, pomeni, da jezikovnemu modelu jasno navedete želeni slog pisanja. To lahko vključuje določitev, ali naj bo besedilo formalno ali neformalno, tehnično ali poljudno, znanstveno, objektivno ali subjektivno ... Z določitvijo sloga lahko model prilagodi svoje odgovore tako,

Kaj je linearna funkcija? Razlago podaj v obliki kratke zgodbe, ki bo motivirajoča za učence osnovne šole.



Pozdravljeni! Predstavljam vam zgodbo o linearni funkciji, ki je lahko zanimiva za učence osnovne šole.

V majhni vasi na robu gozda je živel deček po imenu Miha. Miha je bil radoveden fantič, ki je oboževal reševati uganke in matematične izzive. Njegov najboljši prijatelj, kuža Rok, je vedno zvesto stiskal korak z njim.

En dan, medtem ko sta Miha in Rok raziskovala gozd, sta naletela na staro, razpadajočo mostičko čez reko. Miha je vedel, da morata nekako popraviti most, da bi lahko prečkala reko varno.

Razmišljal je in se spomnil matematike, ki jo je nedavno učil v šoli. "Hej, Rok," je rekel, "mislim, da bi lahko rešila ta problem s pomočjo linearne funkcije!"

"Kaj pa je to?" je radovedno vprašal Rok.

"Linearne funkcije so kot čarobne črte, ki povezujejo točke na ravni. Če jih pravilno uporabimo, lahko izračunamo, kako naj gre nekaj naprej ali nazaj," je razložil Miha.

"Zveni zanimivo!" je zavijal z repom Rok.

Tako sta Miha in Rok začela delati. Miha je narisal načrt, kako popraviti most, in izračunal, kakšno naklon mora imeti nova deska, da bo most postal ravno in trdno stojišče. Rok pa mu je pomagal z zvedavimi očmi in veseljem.

Ko sta končala, sta stala obnovljeni mostiček, ki je zdaj varno prečkal reko. Miha je veselo vzkliknil: "Uspeh! Z linearne funkcije sva rešila izziv in zdaj imamo trden most, po katerem lahko varno prečkamo reko."

Rok je lajal od navdušenja, Miha pa se je zavedel, kako lahko matematika, kot je linearna funkcija, pomaga reševati vsakdanje težave.

In tako sta Miha in Rok spoznala, da je matematika resnično uporabno orodje, ki lahko pomaga premagovati ovire in reševati izzive v vsakdanjem življenju.

Slika 6: Jezikovni model upošteva zaželeni slog izhodnega besedila.

da ustrezajo specifičnemu tonu in načinu izražanja, ki je primeren za vašo nalogo. Ta pristop izboljšuje skladnost in koherenco generirane vsebine ter zagotavlja, da besedilo ustreza vašim pričakovanjem glede stila in pristopa, kar povečuje berljivost in učinkovitost komunikacije. Na Sliki 6 lahko opazujemo, kako je jezikovni model razlago matematičnega pojma podal v obliki zgodbe.

6. Pišite kratko in jedrnato

Kakor ljudje imajo tudi jezikovni modeli omejeno sposobnost pozornosti. Čeprav je dobro, da smo v pogovorih z njimi natančni, moramo po drugi strani paziti, da ne zaidemo v predolga besedila, saj vsem delom ne bo mogel posvetiti enake pozornosti. Raziskave so pokazale (Liu idr., 2024), da v primeru

dolгих pozivov večkrat upoštevajo informacije z začetka ali konca poziva, preskočijo pa tiste s sredine besedila. Tako je bolje, če dolgo in kompleksno vprašanje razdelimo na več manjših, lahko pa kar sam jezikovni model prosimo, naj nam skrajša poziv, ki smo ga napisali. Optimalna dolžina poziva za GPT 3.5 naj bi bila tako med 1000 in 2000 žetoni, kar je za besedila v angleškem jeziku nekje med 750 in 3000 besedami, v slovenskem jeziku pa nekje med 800 in 2600 besedami.

7. Vključite navodilo »korak za korakom«

Jezikovne modele moramo razumeti kot to, kar so – jezikovni modeli. Od njih pričakovati preveč logičnega razmišljanja bi bilo napačno, saj konec koncev delujejo glede na odkrite

vzorke v bazi besedil, na kateri so se učili. Nimajo predstave o besedah in konceptih, o katerih pišejo. Vendar se kljub temu izkaže, da lahko dobimo boljše rezultate na zastavljene matematične naloge, če v poziv dodamo zahtevo, naj se reševanja loti korak za korakom. Na Sliki 7 je podan primer, ko smo s tem vprašanjem dosegli, da je jezikovni model pravilno rešil matematično nalogo vključno z razlago vsakega koraka.

8. Vprašajte ga, katere podatke potrebuje

Jezikovni modeli sami po sebi niso navrnani tako, da bi se zavedali, da jim kakšen podatek manjka. Kot je v radijskem intervjuju (Val 202, 2023) povedal profesor Thomas Dietterich, zaslužni profesor na Univerzi v Oregonu in pionir strojnega učenja: »Internet nam je dal možnost, da postavimo vprašanje in bolj ali manj dobimo odgovor na skoraj vse. Vendar smo morali klikniti na spletno stran z odgovorom in ga tam poiskati. ChatGPT in podobni modeli pa so že prebrali celoten splet in na nek način ponotranjili vsebino. Težava je v tem, da tega ne počnejo prav, in če mu postavimo vprašanje, na katero ne pozna odgovora, si ga bo izmislil.« Zato moramo biti mi, uporabniki, tisti, ki se zavedamo njihovih pomanjkljivosti, in jih spodbuditi, naj povedo, kakšne informacije potrebujejo od nas, da bodo lahko dobro opravili nalogo, ki smo jim jo dodelili. Na Sliki 8 lahko vidimo, kako smo spodbudili jezikovni model, da nas vpraša o podatkih, ki jih mora vedeti za čim boljši odgovor.

Izvedba delavnice in analiza izboljšav pozivov

Opisana priporočila smo predstavili v sklopu konference na delavnici za učitelje matematike in naravoslovja na osnovnih in srednjih šolah. Na delavnici smo izvedli preizkus, da bi ugotovili, koliko so udeleženci upoštevali ta priporočila po delavnici. Udeleženci so na začetku in na koncu delavnice prejeli enako nalogo z navodilom: »Recimo, da želite s pomočjo jezikovnega modela umetne inteligence pripraviti učno pripravo za naslednjo učno uro. Zapišite poziv, s katerim bi modelu opisali njegovo nalogo.«

Mama ima tri sinove. Najstarejši je za 5 let starejši od srednjega. Najmlajši ima 7 let manj kot najstarejši sin. Vsota starosti vseh sinov je enaka maminim 42 letom. Izračunaj starosti sinov in razloži razmišljanje korak za korakom.

< 2/2 >

🌀 Označimo starost najstarejšega sina kot x let. Glede na pogoje lahko izrazimo starosti ostalih sinov:

1. Srednji sin: $x - 5$ let
2. Najmlajši sin: $x - 7$ let

Pogoji nam tudi povedo, da je vsota starosti vseh sinov enaka maminim starosti, ki je 42 let. Torej:

$$x + (x - 5) + (x - 7) = 42$$

Sedaj lahko rešimo to enačbo:

$$3x - 12 = 42$$

Pristejemo 12 na obe strani enačbe:

$$3x = 54$$

Nato delimo z 3:

$$x = 18$$

Zdaj, ko poznamo starost najstarejšega sina, lahko izračunamo starost ostalih sinov:

1. Srednji sin: $x - 5 = 18 - 5 = 13$ let
2. Najmlajši sin: $x - 7 = 18 - 7 = 11$ let

Torej, starosti sinov so:

- Najstarejši sin: 18 let
- Srednji sin: 13 let
- Najmlajši sin: 11 let

Slika 7: Z zahtevo razlage korak za korakom povečamo možnosti pravilnega odgovora.

Napiši mi pripravo za učno uro matematike. Katere podatke potrebuješ, da boš lahko dobro opravil to delo?

🌀 Seveda, lahko pripravim učno uro matematike! Za dobro pripravo potrebujem naslednje informacije:

1. **Tema učne ure:** Kakšna je tema učne ure matematike? Na primer: osnove aritmetike, geometrija, algebra, verjetnost, itd.
2. **Cilji:** Kakšni so cilji učne ure? Kaj naj bi učenci znali ali razumeli do konca učne ure?
3. **Starostna skupina učencev:** Kakšna je starostna skupina učencev, ki jim je učna ura namenjena? To bo vplivalo na izbiro metod in nivo kompleksnosti nalog.
4. **Predznanje učencev:** Kako dobro poznajo učenci predmetno področje? Ali so že imeli izkušnje z obravnavano temo ali je to novo zanje?
5. **Časovni okvir:** Koliko časa imamo na voljo za učno uro? To bo določalo, koliko vsebine lahko zajamemo in kakšne aktivnosti lahko izvajamo.
6. **Učni pripomočki:** Kateri učni pripomočki so na voljo? Na primer: računalnik, projektor, interaktivna tabla, delovni listi, številski materiali itd.

S temi informacijami bom lahko pripravil učno uro, ki bo prilagojena potrebam in zmožnostim učencev ter bo zagotovila učinkovito učenje.

Slika 8: Uporabnik mora sam spodbuditi jezikovni model, da pove, katere podatke potrebuje za optimalen odgovor.

Poziv je na začetku in koncu delavnice zapisalo 17 udeležencev, kar nam je omogočilo primerjavo zapisov in analizo izboljšav. Ugotavljali smo, kako so se zapisani pozivi izboljšali glede na upoštevanje osmih predstavljenih priporočil. Kriterij za ocenjevanje je bila vključenost naslednjih točk: postavljanje jezikovnega modela v vlogo, podajanje negativnega poziva, natančnost in specifičnost, določanje ciljne publike, opredelitev sloga izhodiščnega besedila, jedrnatost, vključitev navodil korak za korakom ter poizvedovanje, katere podatke model potrebuje za dober odgovor.

Rezultati so prikazani v Tabeli 1, kjer je zabeleženo, koliko udeležencev je izboljšalo svoje pozive v primerjavi s prvotnim zapisom glede na posamezno priporočilo.

Tabela 1: Izboljšanje pozivov po končani delavnici glede na pozive, napisane pred začetkom delavnice.

Priporočilo	Število udeležencev, ki so upoštevali priporočilo
1. Postavite jezikovni model v vlogo	2
2. Podajte »negativni poziv«	1
3. Bodite specifični	16
4. Povejte, kdo je ciljna publika	7
5. Povejte, v kakšnem slogu pričakujete besedilo	1
6. Pišite kratko in jedrnat	2
7. Vključite navodilo »korak za korakom«	2
8. Vprašajte model, katere podatke potrebuje	0

Iz zbranih podatkov je razvidno, da je največ udeležencev izboljšalo svoje pozive glede specifičnosti (16 udeležencev), kar kaže na to, da so se po delavnici bolj zavedali pomena natančnosti in podrobnosti pri oblikovanju pozivov. Sledilo je izboljšanje pri določanju ciljne publike (7 udeležencev), kar kaže na povečan poudarek

na prilagajanju vsebine specifičnim potrebam in interesom bralcev. Manj izboljšav je bilo opaženih pri drugih nasvetih, kot sta postavljanje jezikovnega modela v vlogo (2 udeleženci) in pisanje kratkih ter drnatih pozivov (2 udeleženci).

Posebej izstopa dejstvo, da nihče od udeležencev ni vključil poizvedovanja, katere podatke model potrebuje za dober odgovor, kar nakazuje, da je to področje, kjer je potrebna dodatna izobraževalna podpora. Skupni rezultati kažejo, da delavnice,

ki se osredotočajo na specifične tehnike in pristope k inženiringu pozivov, lahko bistveno prispevajo k izboljšanju kakovosti interakcije z jezikovnimi modeli UI.

Zaključek

Razmah novih tehnologij, še posebej UI, v vseh vidikih našega življenja, vključno z izobraževanjem, zahteva, da se učitelji prilagodijo in pridobijo nova znanja ter spretnosti. Generativna UI ponuja široko paleto orodij, ki lahko bistveno izboljšajo in poenostavijo pripravo učnih vsebin. Veliki jezikovni modeli, kot je GPT, omogočajo učinkovito ustvarjanje naravnega jezika, kar je lahko izjemno koristno za učitelje pri pripravi učnih priprav.

V tem kontekstu je ključnega pomena razumeti in uporabiti tehnike inženiringa pozivov, saj kakovost generiranih odgovorov močno vpliva na učni proces. Na delavnici v sklopu konference za učitelje matematike in naravoslovja smo predstavili osem nasvetov za optimizacijo pozivov, ki so se izkazali za učinkovite pri izboljšanju pozivov udeležencev. Rezultati preizkusa so pokazali, da so udeleženci po delavnici bolj natančno in specifično oblikovali svoje pozive ter bolje opredelili ciljno občinstvo.

Kljub temu pa ostajajo izzivi, predvsem pri uporabi negativnih pozivov in poizvedovanju, katere podatke model potrebuje za kakovosten odgovor. To nakazuje potrebo po nadaljnjem izobraževanju in usposabljanju učiteljev na tem področju.

Integracija UI v izobraževanje prinaša številne priložnosti, vendar zahteva tudi previdnost in dobro poznavanje orodij. Z uporabo učinkovitih strategij in pristopov lahko učitelji matematike in naravoslovja izkoristijo potencial UI za izboljšanje učnega procesa, hkrati pa učence pripravijo na življenje v svetu, kjer bo UI igrala vse večjo vlogo. Naša raziskava in izkušnje z delavnice kažejo, da je mogoče z ustreznim pristopom doseči znatne izboljšave v kakovosti interakcije z jezikovnimi modeli, kar bo v prihodnosti ključno za uspešno in učinkovito poučevanje.

Literatura

- Elements of AI. (2024). Pridobljeno 20. 6. 2024 iz <https://www.elementsofai.si/>
- Evropski parlament. (2024). *Artificial Intelligence Act* [Spletna stran]. Pridobljeno 20. 6. 2024 iz <https://artificialintelligenceact.eu/>
- Lipovec, A., Gartner, S., Krašna, M. (2024). *AI literacy meets socio-emotional learning: assessing transformative educational practices in Slovenia*. V: Gómez Chova, L. (ur.), González Martínez, C. (ur.), Lees, J. (ur.). INTED 2024: Conference proceedings: 18th annual international technology, education and development conference: 4.–6. marec 2024, Valencia (Španija). Valencia: IATED Academy, 2024. Str. 4295–4299. Doi: 10.21125/inted.2024.1111
- Liu, N., Lin, K., Hewitt, J., Paranjape, A., Bevilacqua, M., Petroni, F., in Liang, P. (2024). *Lost in the Middle: How Language Models Use Long Contexts*. *Transactions of the Association for Computational Linguistics*. 12. 157–173. 10.1162/tacl_a_00638.
- OpenAI. (2024). *ChatGPT 3.5* [Veliki jezikovni model]. <https://chat.openai.com/chat>
- Popli, N. (14. 4. 2023). *The AI job that pays up to \$335K – and you don't need a computer engineering background*. TIME. Pridobljeno 15. 6. 2024 iz <https://time.com/6272103/ai-prompt-engineer-job/>
- UNESCO. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. [Spletna knjiga]. Pridobljeno 14. 6. 2024 iz <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693>
- Val 202, (2023). *Thomas Dietterich: Pionir strojnega učenja, ki obožuje flamenko*. [Radijski intervju 14. 12. 2023]. Pridobljeno 14. 6. 2024 iz <https://val202.rtvlo.si/podcast/frekvenca-x/31057643/175008658>
- Vourikari, R., Klutzer, S., in Punie, Y. (2022). *DigComp 2.2: The Digital Competence Framework for Citizens – With new examples of knowledge, skills and attitudes*. Luxembourg: Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2760/115376>.

Reševanje polinomskih enačb z želvjo grafiko

Solving Polynomial Equations with Turtle Graphics

Ema Ptičak, dijakinja Škofijske gimnazije Vipava

Tadej Vovk, dijak Škofijske gimnazije Vipava

Mentor: Alojz Grahor, Škofijska gimnazija Vipava

Izvleček

V članku predstavimo reševanje polinomskih enačb $p(x) = 0$ z grafično metodo, ki jo imenujemo »želvja grafika.« S to metodo lahko poiščemo rešitve polinomske enačbe poljubne stopnje, kjer je $p(x)$ polinom z realnimi koeficienti. Programi dinamične geometrije omogočajo izvedbo te metode na zelo prikladen in zanimiv način.

Ključne besede: polinomska enačba, dinamična geometrija, želvja grafika

Abstract

This paper presents the solving of polynomial equations $p(x) = 0$ employing the so-called turtle graphics, which we can use to find solutions of a polynomial equation of arbitrary degree where $p(x)$ is a polynomial with real coefficients. With the help of dynamic geometry software, this concept can be user-friendly and engaging.

Keywords: polynomial equation, dynamic geometry, turtle graphics

1 Uvod

V šolskem letu 2022/23 sva avtorja v okviru Zveze za tehnično kulturo Slovenije (ZOTKS) sodelovala na 57. Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije z raziskovalno nalogo iz matematike z naslovom *Reševanje polinomskih enačb z geometrijo*. Najin mentor je bil profesor Alojz Grahor, ki se mu zahvaljujemo za idejo, pomoč in podporo. V nalogi sva raziskovala, kako poiščemo rešitve enačbe $p(x) = 0$ kjer je $p(x)$ polinom z realnimi koeficienti. Obravnavala sva reševanje s parabolami, s tako imenovano želvjo grafiko in z matematičnim prepogibanjem papirja. Pri metodi reševanja s parabolami sva uporabljala program GeoGebra, ki konstruira parabolo, če sta dana gorišče in premica vodnica. Želvja grafika omogoča določeni točki na zaslonu (ki ji rečemo želva), da izrisuje lomljeno črto: lahko se premakne naprej ali nazaj za določeno število »korakov«, v ogliščih pa se zasuka za določen kot. Metoda s prepogibanjem papirja deluje tako, da najprej iz koeficientov polinoma določimo na papirju s koordinatnim sistemom nekaj izbranih točk in premic ter nato s prepogibanjem papirja določimo točko, ki predstavlja rešitev dane enačbe. V zadnjem delu naloge sva z vsemi tremi načini rešila starogrški problem podvojitve kocke. V članku predstavimo način reševanja polinomskih enačb z želvjo grafiko. Utemeljitev in dokazi so navedeni v raziskovalni nalogi (Ptičak in Vovk, 2023).

Reševanje kvadratne enačbe

1.1 Parabola

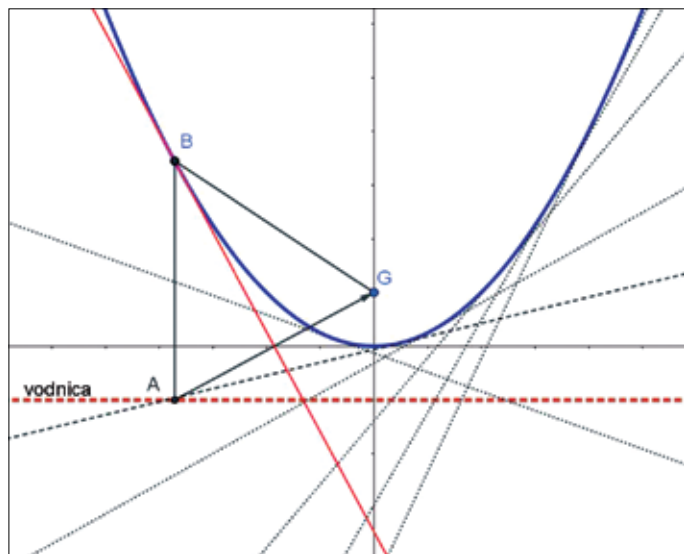
Parabolo definiramo kot množico točk v ravnini, ki so enako oddaljene od dane točke G – gorišča in premice vodnice v .

Če je os parabole vzporedna abscisni osi, teme v točki (r, q) , gorišče v točki $G(r + \frac{p}{2}, q)$, enačba vodnice $x = -\frac{p}{2} + r$, je enačba parabole:

$$(y - q)^2 = 2p(x - r), \quad (1)$$

če pa je os parabole vzporedna ordinatni osi, teme v točki (r, q) , gorišče v točki $G(r, \frac{p}{2} + q)$, enačba vodnice $y = -\frac{p}{2} + q$, je njena enačba:

$$(x - r)^2 = 2p(y - q). \quad (2)$$

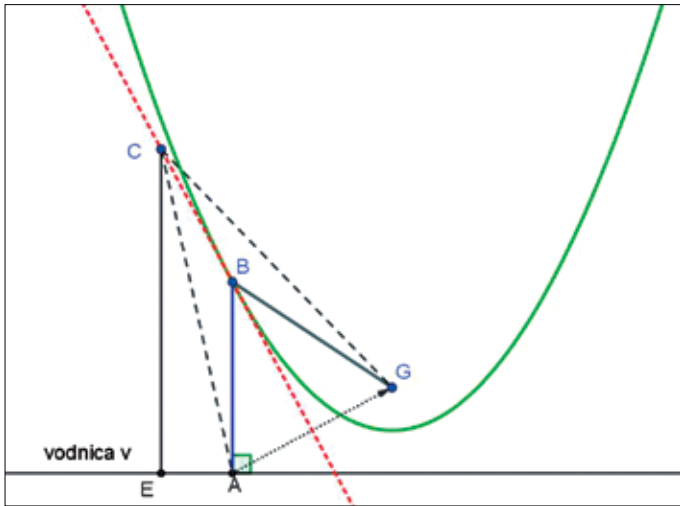


Slika 1: »Konstrukcija« parabole s prepogibanjem papirja.

Znano je, da lahko konstruiramo parabolo s prepogibanjem papirja. Ko prepognemo papir, dobimo model premice, ki mu rečemo pregib.

Na pravokotnem papirju izberemo točko G (gorišče) in vzporedno s spodnjim robom narišemo premico vodnico. Še bolje je, da za premico vodnico izberemo kar spodnji rob papirja. Premico vodnico (ali spodnji rob papirja) prepogibamo tako, da vodnica poteka skozi gorišče. Praktično je najlažje, da si na premici vodnici (spodnjem robu) izberemo niz točk in vsakič papir prepognemo tako, da izbrana točka npr. točka A na vodnici v pokrije gorišče. Na ta način naredimo veliko pregibov. To so tangente na parabolo z goriščem G in premico vodnico. Ogrinjače tangent določajo parabolo (Slika 1). Dokažimo trditev, ki pojasni konstrukcijo parabole (glejte Trditev 1).

Trditev 1: Pregib, ki ga dobimo tako, da premico vodnico prepognemo v točko G , je tangenta na parabolo z goriščem G in dano premico vodnico.



Slika 2: K dokazu, da je pregib tangenta na parabolo.

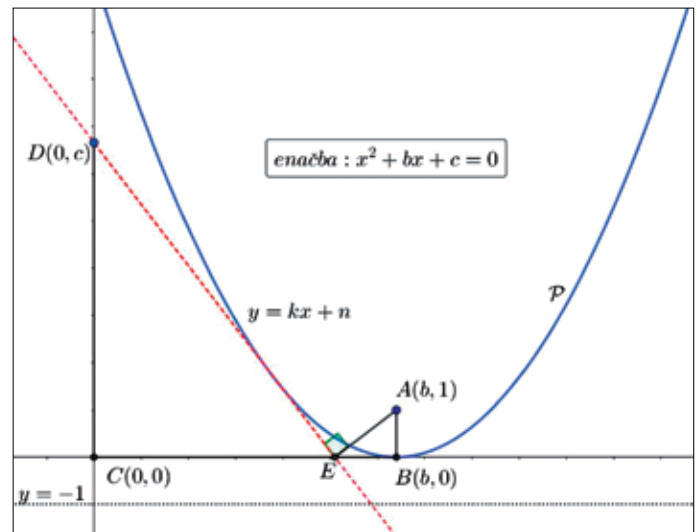
Dokaz: (Glejte Sliko 2.) Na premici vodnici izberemo točko A in naredimo pregib BC tako, da se točka A pokrije s točko G . Za vsako točko C , ki leži na premici BC , velja, da je enako oddaljena od točk A in G (trikotnik AGC je enakokrak). Toda le ena točka med njimi je enako oddaljena od premice vodnice v in točke G . Ta leži na presečišču pravokotnice na vodnico skozi točko A in premico skozi BC . Za vsako drugo točko C , ki leži na premici (pregibu) skozi BC velja, da njena razdalja do premice vodnice ni enaka razdalji do gorišča $|CE| \neq |CG|$. Ker je trikotnik AGB enakokrak, je premica skozi točki B in C (to je dobljeni pregib, ki je tangenta na parabolo) pravokotna na premico skozi točki A in G . Q.E.D.

1.2 Izpeljava postopka reševanja kvadratne enačbe z želvjo grafiko

Dana je kvadratna enačba:

$$x^2 + bx + c = 0; b, c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Izpeljali bomo povezavo med rešitvama enačbe (3) in smernimi koeficienti določenih tangent na izbrano parabolo (glejte Trditev 2). Določimo točke: $A(b, 1)$, $B(b, 0)$, $C(0, 0)$ in $D(0, c)$ (Slika 3).



Slika 3: Povezava rešitev enačbe s smernim koeficientom tangente.

Trditev 2: Dana je enačba $x^2 + bx + c = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$. Naj bosta točki $A(b, 1)$ in $D(0, c)$ ter parabola P z goriščem v točki A in premico vodnico $y = -1$. Skozi točko D konstruirajmo tangento na parabolo P . Smerni koeficient te tangente je enak rešitvi dane enačbe.

Dokaz: Enačba parabole P je $(x - b)^2 = 4y$ oziroma $y = \frac{(x-b)^2}{4}$. Na paraboli izberemo točko $T\left(t, \frac{(t-b)^2}{4}\right)$. Smerni koeficient tangente v točki T je enak $y'(T) = k = \frac{(t-b)}{2}$. Nastavek za enačbo tangente je enak $y = kx + n$. Ob upoštevanju smernega koeficienta k in dejstva, da točka T leži na tangenti, dobimo $n = -\frac{t^2 - b^2}{4}$ in enačbo tangente:

$$y = \frac{t-b}{2}x - \frac{t^2 - b^2}{4}.$$

Ker tangenta poteka skozi točko $D(0, c)$ dobimo $c = \frac{t-b}{2} \cdot 0 - \frac{t^2 - b^2}{4}$. Ko vstavimo še $t = 2k + b$, dobimo enačbo: $k^2 + bk + c = 0$.

Sklep: Za smerni koeficient tangente smo dobili enako enačbo, kot je dana na začetku. Torej so rešitve dane enačbe enake smernim koeficientom tangent, ki zadoščajo opisanim pogojem v Trditvi 2.

Q.E.D.

Odkriti moramo postopek, kako poiskati enačbi tistih dveh tangent, ki zadoščata opisanim pogojem, in odčitati njun smerni koeficient.

1.3 Reševanje kvadratne enačbe z želvjo grafiko

Želvja grafika (angl. *turtle graphics*) je enostaven način vektorskega risanja v programerskem svetu. Vključena je v enega izmed prvih izobraževalnih programskih jezikov *Logo*. Virtualni želvi uporabnik pove, za koliko in pod kakšnim kotom naj se premakne, s svojimi premiki pa »želva« ustvarja »želvjo pot«. Na podlagi te ideje risanja je zasnovana tudi ta metoda.

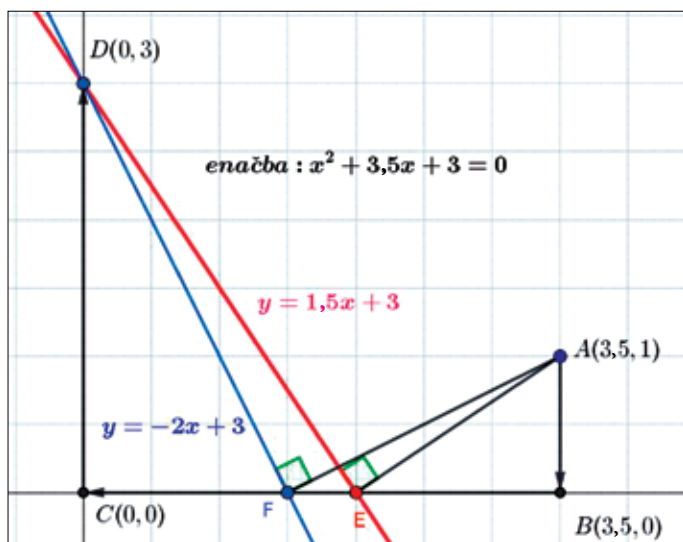
Na situacijo, ki jo prikazuje Slika 3, lahko pogledamo drugače. Opazujemo vse štiri označene točke A , B , C in D ter si zamislimo

pot, ki jo naredi »želva«, ko se sprehodi po poligonu A, B, C in D . V točki A je obrnjena navzdol in naredi pot dolžine 1. Nato se zasuka desno za kot 90° in naredi pot dolžine b . Če je b negativen, naredi pot v vzratni smeri. V točki C se zasuka desno za 90° in naredi pot dolžine c . (Če je c negativen, se premika vzvratno.) Želva se ustavi v točki D . Končni cilj je poiskati enačbo tiste premice skozi D in E , za katero velja, da je pravokotna na daljico AE kjer je točka E izbrana točka daljice BC . Poligonu $A - B - C - D$ običajno pravimo želva pot.

Opisani zadnji del postopka obrnemo (glejte Sliko 3). Narišemo premici – nosilki daljic BC in CD . Na nosilki BC si izberemo premično točko, na primer točko E . V njej naredimo pravokotnico na daljico AE . Nato premikamo točko E po nosilki daljice BC . Ko s »pravokotnico zadenemo točko D «, je smerni koeficient nosilke daljice ED enak rešitvi dane enačbe.

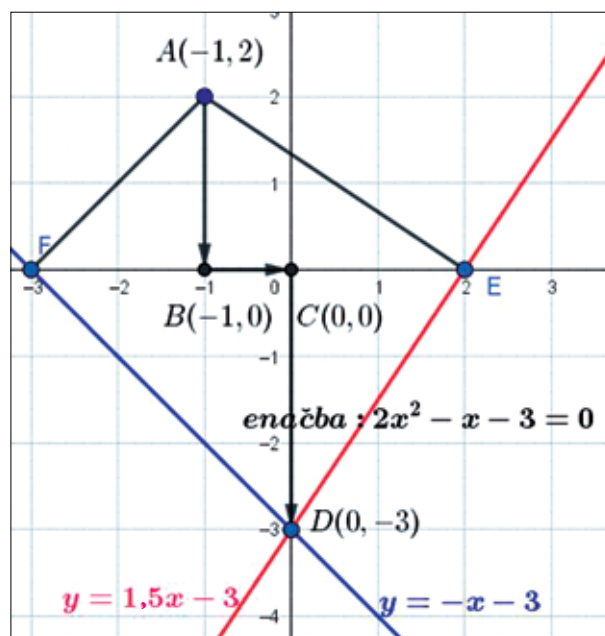
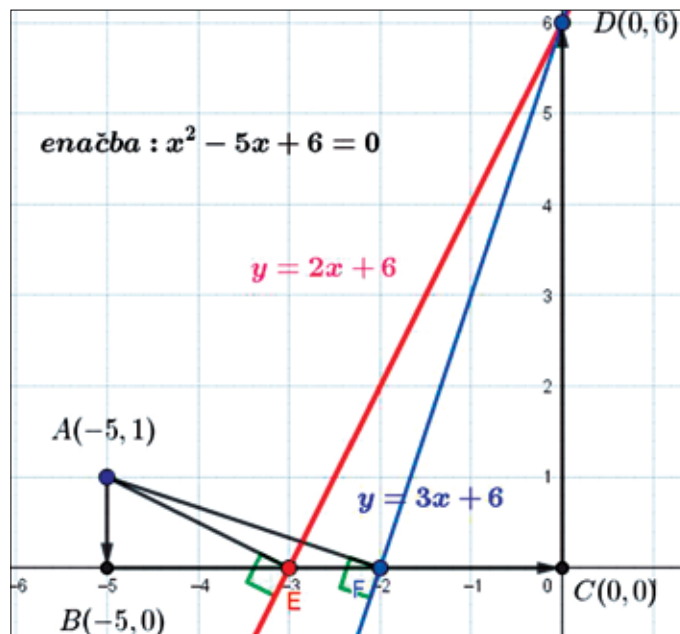
V točki E , ki leži na nosilki daljice BC , se »notranja« pot AED »odbije kot žogica pri biljardu«, a ne tako, da je vpadni kot enak odbojnemu, ampak sta poti AE in ED med seboj pravokotni. Ta način odboja smo poimenovali »odboj_90«, pa tudi celotni notranji poti AED rečemo »odboj_90«.

Primer reševanja kvadratne enačbe je prikazan na Sliki 4. Rešena je enačba $x^2 + 3,5x + 3 = 0$. Narišemo želvjo pot $A - B - C - D$ od začetne točke $A(3,5, 1)$ s koraki 1, 3,5 in 3. Želva konča pot v točki $D(0, 3)$. Na nosilki daljice BC izberemo premično točko E in narišemo odboj_90 z začetkom v točki A in odbojem v točki E . S premikanjem točke E poiščemo takšno lego, da gre pravokotnica na AE skozi točko D . Takrat odčitamo smerni koeficient nosilke daljice ED , ki je 1,5. Druga možnost je v točki F (smerni koeficient je enak 2). Rešitvi dane enačbe sta torej 1,5 in 2.



Slika 4: Reševanje kvadratne enačbe $x^2 + 3,5x + 3 = 0$ z želvjo grafiko.

Na Sliki 5a je prikazano reševanje kvadratne enačbe $x^2 - 5x + 6 = 0$. Najprej narišemo želvjo pot $A - B - C - D$. Le-ta se začne v točki $A(-5, 1)$. Konstruiramo še odboj_90 in s pomikanjem določimo lego točke E tako, da se konec želvjete poti pokrije z zadnjo točko odboja_90. Rešitvi sta 2 in 3 (smerna koeficienta nosilk daljic ED in FD). Na Sliki 5b je prikazan primer rešitve splošne kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Začetek želvjete poti $A - B - C - D$ je v točki $A(b, a)$, konec pa v točki $D(0, c)$.



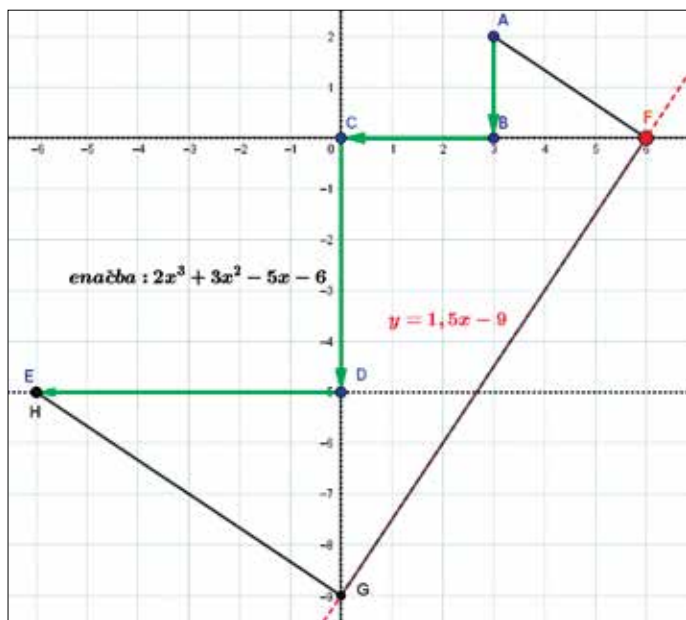
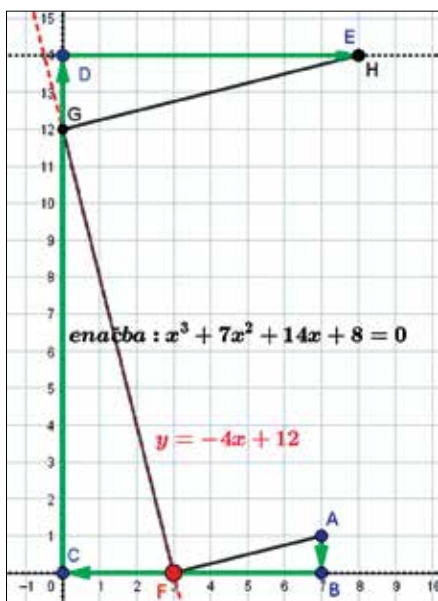
Sliki 5a in 5b: Primera reševanja kvadratne enačbe.

Rešena je enačba $2x^2 - x - 3 = 0$. Enačbi $ax^2 + bx + c = 0$ in $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; $a \neq 0$ imata enaki rešitvi. Ker so koeficienti sorazmerni, sta si želvjete poti podobni s faktorjem raztega a , ustrezni premici pa vzporedni. Smerna koeficienta ustreznih premic sta torej enaka.

2 Reševanje kubične enačbe

Idejo reševanja kvadratne enačbe z želvjo grafiko uporabimo tudi pri reševanju kubične enačbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Želva je v začetni točki $(b, 1)$, potem pa gre navzdol in nadaljuje po odsekih 1, b , c , d . Če je koeficient pozitiven, naredi pot naprej, sicer pa vzvratno pot. Vsakič se zasuka za 90° v desno. Njena končna točka je točka (d, c) . S pomočjo odbojev_90 bomo dobili rešitev,

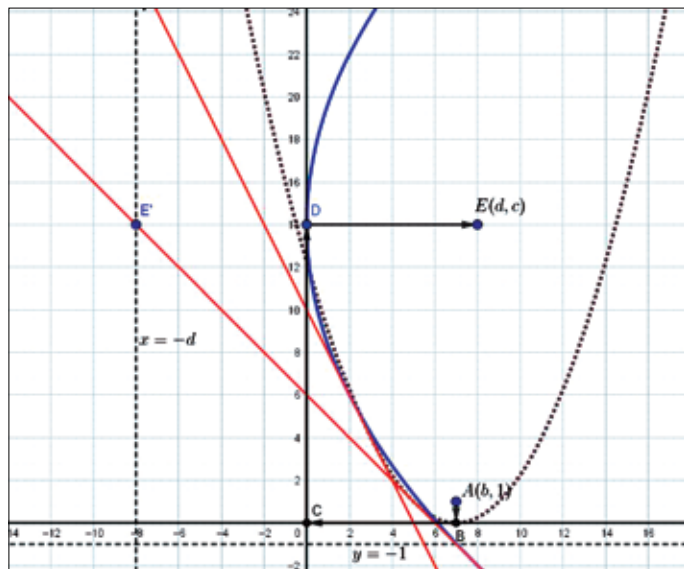
ko bomo »zadeli« končno točko željve poti. Oglejmo si primera (Sliki 6a in 6b).



Sliki 6a in 6b: Primera reševanja kubične enačbe.

Na Sliki 6a je prikazano reševanje enačbe $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ z željvo grafiko. Željva pot se začne v točki $A(7, 1)$, nato pa opravi pot po odsekih 1, 7, 14 in 8, vsakič se zasučje za pravi kot v desno. Nato konstruiramo še odboj_90 s premično točko F . Lego točke F določimo tako, da se končna točka odboja_90 pokrije s končno točko željve poti. Rešitev dane enačbe je enaka smernemu koeficientu nosilke daljice FG , to je -4 . Na Sliki 6b je prikazana rešitev enačbe $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$. Rešitev je $1,5$. Zaradi sorazmernosti koeficientov in enake množice rešitev enačb $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ter $(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}) = 0$; $a \neq 0$; sta željvi poti obeh enačb podobni.

Teoretično ozadje reševanja enačbe tretje stopnje z željvo grafiko je opisano in dokazano v Trditvi 3.



Slika 7: K dokazu reševanja enačbe tretje stopnje s parabolama.

Trditev 3: Rešujemo enačbo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. V koordinatnem sistemu narišemo točki $A(b, 1)$ in $E(d, c)$ ter premici $y = -1$ in $x = -d$. Zapišemo enačbi parabol: prvo z goriščem v točki A s premico vodnico $y = -1$ ter drugo z goriščem v E in premico vodnico $x = -d$. Smerni koeficienti skupnih tangent obeh parabol so enaki rešitvam dane enačbe (glejte Sliko 7).

Dokaz: Enačba prve parabole ($A, y = -1$) je $(x - b)^2 = 4y$, enačba druge ($E, x = -d$) pa $(y - c)^2 = 4dx$.

Tangenta na prvo parabolo v točki T ima enačbo $y = kx - k(b + k)$.

Ker je dobljena tangenta tudi tangenta na drugo parabolo, vstavimo dobljeni y v enačbo druge parabole ter poenostavimo. Upoštevamo, da je tudi $t = b + 2k$. Tako dobimo kvadratno enačbo:

$$k^2x^2 - 2x(k^3 + bk^2 + ck + 2d) + k^4 + 2bk^3 + (b^2 + 2c)k^2 + 2bck + c^2 = 0.$$

Diskriminanta te enačbe mora biti enaka 0:

$$(-2(k^3 + bk^2 + ck + 2d) + k^4)^2 - 4k^2(k^4 + 2bk^3 + (b^2 + 2c)k^2 + 2bck + c^2) = 0,$$

$$16d(k^3 + bk^2 + ck + d) = 0,$$

$$k^3 + bk^2 + ck + d = 0.$$

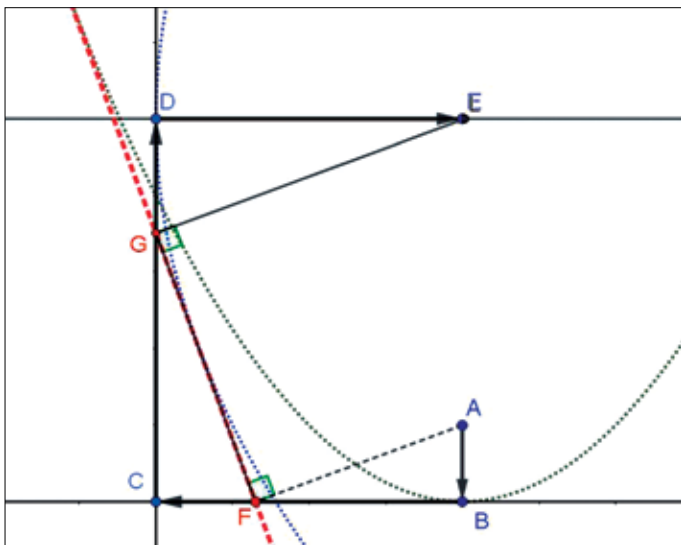
Sklep: Za izračun smernih koeficientov skupnih tangent obeh parabol smo dobili enako enačbo, kot je dana enačba. To pomeni, da so smerni koeficienti skupnih tangent na izbrani paraboli enaki rešitvam dane enačbe.

Q.E.D.

Zaradi same konstrukcije tangente na parabolo sta daljici AF in EG pravokotni na tangento (glejte Sliko 8). Z iste slike je razviden potek reševanja z željvo grafiko. Primera sta prikazana na Slikah 6a in 6b.

3 Hornerjev algoritem

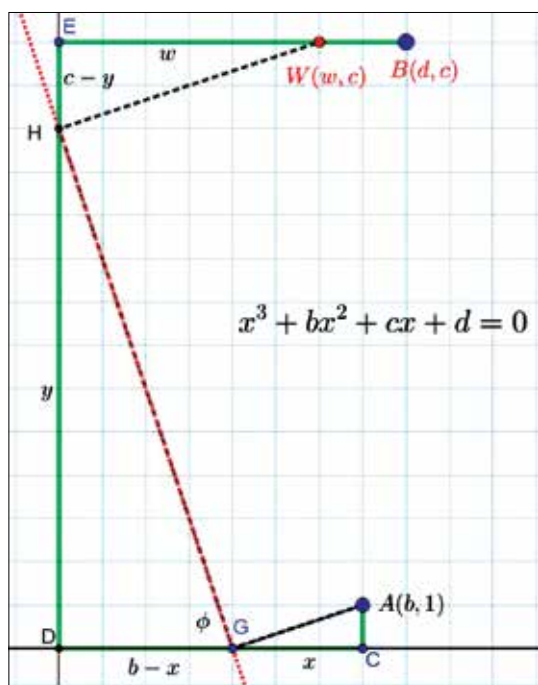
V tem poglavju preiskujemo, ali sta postopka, ki smo ju opisali v prejšnjih poglavjih, povezana s Hornerjevim algoritmom. Na Sliki 9 je predstavljen polinom tretje stopnje $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$,



Slika 8: Reševanje enačbe tretje stopnje z želvjo grafiko.

želvja pot je $A - C - D - E - B$, odboj_90 pa $AGHW$. Izpeljimo povezavo med reševanjem z želvjo grafiko in Hornerjevim algoritmom (Trditev 4).

Trditev 4: Naj bo leva stran enačbe $p(x) = 0$ polinom $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Vrednost polinoma $p(x)$ pri $x = x_0$ je enaka razliki abscis točk B in W , kjer je točka B končna točka želvje poti, W pa končna točka odboja_90 iste poti.



Slika 9: K izpeljavi Hornerjevega algoritma na grafični način.

Dokaz: Naj bo $x = x_0$ dolžina daljice CG (glejte Sliko 9). Trikotniki ACG , GDH in HEW so podobni. Tako velja:

$$\frac{x_0}{1} = \frac{y}{b-x_0} = \frac{w}{c-y}.$$

Opazimo, da je x_0 enak smernemu koeficientu premice skozi točki GH , to je tangensu kota DGH . Iz prejšnje trojne enačbe dobimo: $y = x_0(b - x_0)$, $w = x_0(c - y)$:

$$w = x_0(c - x_0(b - x_0)) = x_0(c - bx_0 + x_0^2) = cx_0 - bx_0^2 + x_0^3 = cx_0 - bx_0^2 + x_0^3 - d + d.$$

Ko v zadnjo enačbo vstavimo $-x_0$ namesto x_0 , dobimo:

$$w = -cx_0 - bx_0^2 - x_0^3 - d + d = -p(x_0) + d.$$

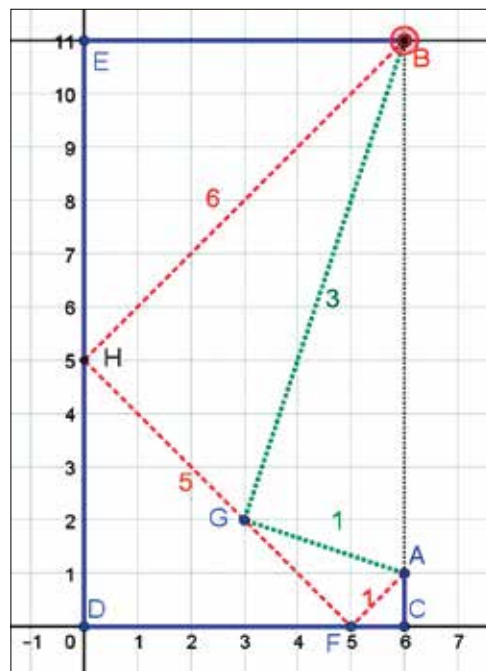
Od tod pa sledi $p(x_0) = d - w$. Torej je razlika med abscisama točk B in D enaka vrednosti polinoma $p(x_0)$. Hkrati smo dokazali tisto, kar že vemo, da je rešitev enačbe $p(x) = 0$ (ko točki B in D sovpadata) enaka smernemu koeficientu premice skozi G in H .

Q.E.D.

Na Sliki 9 je kot primer predstavljena enačba $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$. Odboj_90 se konča v točki W , ki ima absciso enako 6. Torej je vrednost polinoma pri $x_0 = -3$ enaka $p(-3) = d - w = 2$. Vrednost -3 je enaka smernemu koeficientu premice skozi točki G in H pa tudi abscisi točke G glede na absciso točke A , ker je ordinata točke A enaka 1, saj je vodilni koeficient polinoma $p(x)$ enak 1.

Obenem smo dobili tudi količnik in ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $(x + 3)$. Koeficienti količnika so odseki odboja_90, pri čemer vzamemo za enoto dolžino prvega odseka AG . Odseki so 1, 4, 2, ostanek je 2. Tako je: $p(x) = (x + 3)(x^2 + 4x + 2) + 2$.

Ko točki W in B sovpadata, dobimo, da je smerni koeficient premice skozi G in H rešitev dane enačbe, odboj_90 pa nam da koeficiente količnika. Iskanje rešitev lahko nadaljujemo kar na odboju_90.



Slika 10: Razstavlanje polinoma.

Na Sliki 10 je prikazano zaporedno iskanje ničel polinoma $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Želvja pot je enaka $A - C - D - E - B$, odboj_90 pa poligon $AFHB$. Odčitamo ničlo -1 in koeficiente količnika 1, 5, 6. Torej je:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x^2 + 5x + 6).$$

Ta odboj_90 $AFHB$ vzamemo kot novo želvjo pot in narišemo drugi odboj_90: AGB . Smerni koeficient premice skozi BG glede

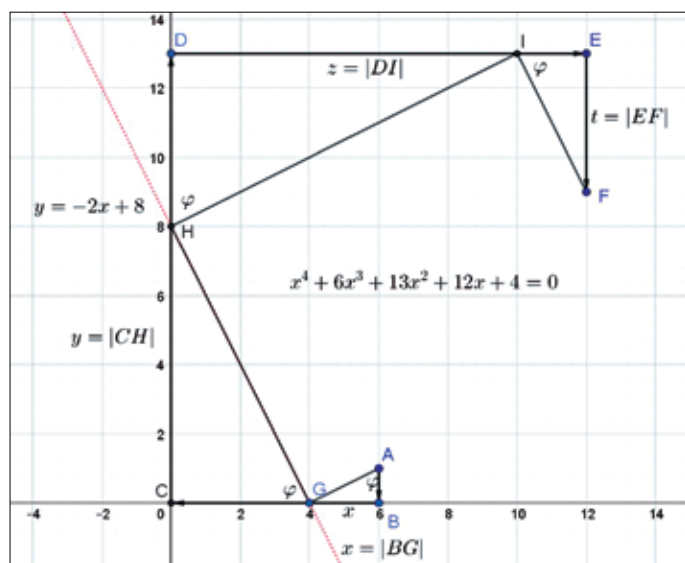
na novo ordinatno os HG in novo abscisno os HG je enak -2 , količnik pa ima koeficienta 1 in 3. Tako je:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

4 Reševanje polinomske enačbe višje stopnje

Z želvjo grafiko lahko rešujemo tudi polinomske enačbe višjih stopenj od 3. Oglejmo si primer enačbe četrte stopnje, potem pa posplošimo.

Dana naj bo enačba $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$. Slika 11 prikazuje rešitev z želvjo grafiko.



Slika 11: K dokazu, da želva grafika deluje tudi pri enačbah višje stopnje.

Domneva. V primeru reševanja enačbe $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$ z želvjo grafiko dobimo rešitev dane enačbe takrat, ko

konec želvje poti sovpade s koncem odboja $_{90}$ (na Sliki 11 je to v točki F). Rešitev x je enaka negativni vrednosti tangensa naklonskega kota nosilke daljice GH : $x = -\tan\varphi$.

Utemeljitev. Trikotniki AGB , GHC , HID in IFE so podobni. Naj bo $\frac{|BG|}{|BA|} = x$. V trikotniku GHC velja: $\frac{|CH|}{|CG|} = x = \frac{y}{6-x}$, v trikotniku HID : $\frac{|DI|}{|DH|} = x = \frac{z}{13-y}$, v trikotniku IFE pa podobno $\frac{|EF|}{|EI|} = x = \frac{4}{12-z}$.

Zapišemo drugače: $y = x(6 - x)$, $z = x(13 - y)$, $4 = x(12 - z)$.

Razvijmo: $4 = x(12 - z) = x(12 - x(13 - y)) = x(12 - x(13 - x(6 - x))) = x(12 - x(13 - 6x + x^2)) = x(12 - 13x + 6x^2 - x^3) = 12x - 13x^2 + 6x^3 - x^4$.

Tako dobimo enačbo: $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$.

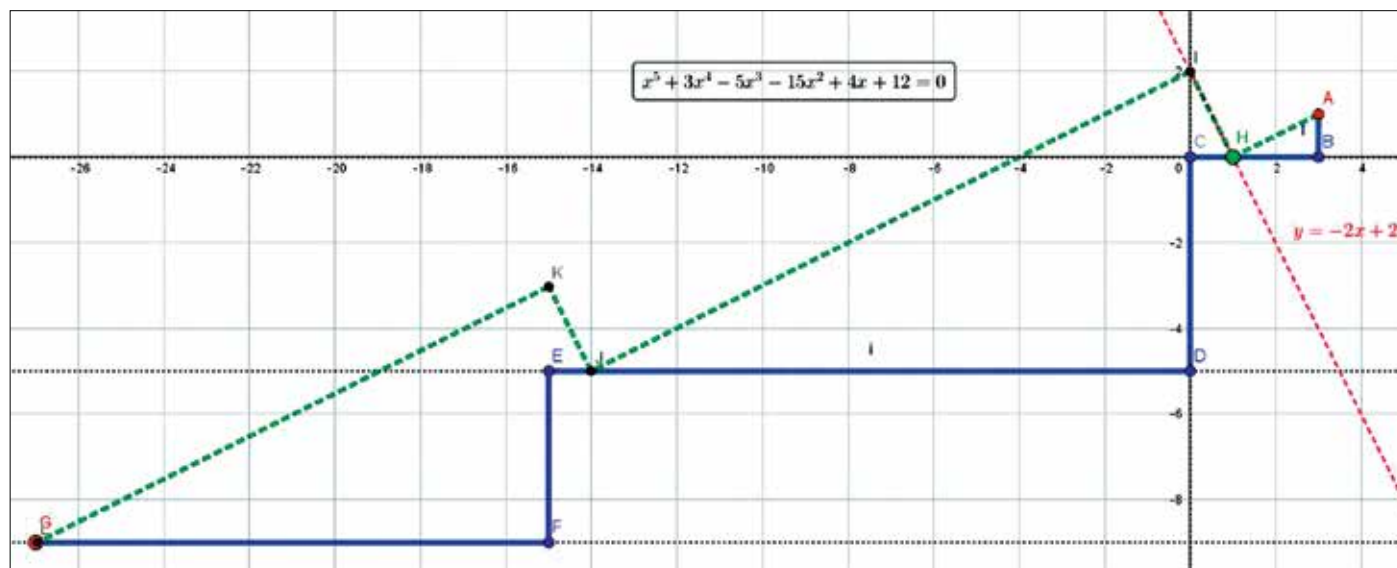
V trikotniku AGB velja, da je $x = \tan\varphi$. Hitro pa vidimo, da dobimo enačbo enako prvotni enačbi, če x nadomestimo z izrazom $-\tan\varphi$. To je tudi vrednost, ki je enaka tangensu naklonskega kota nosilke daljice GH , kar je enako njenemu smernemu koeficientu.

Sklepamo, da bo dokaz pri splošni enačbi stopnje n potekal enako, le koeficienti bodo poljubni, nekaj nadaljnjih korakov »želve« pa bo analognih. Tako da lahko zapišemo:

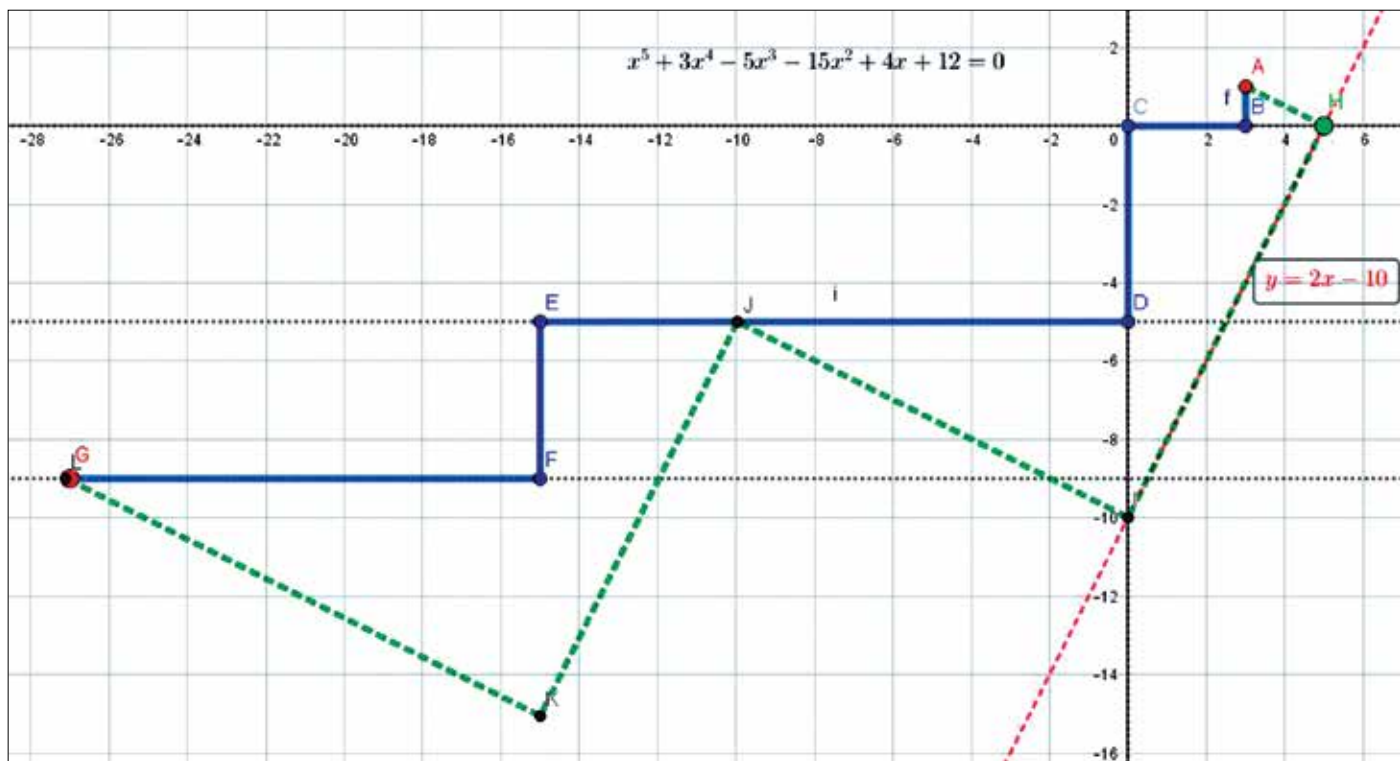
Trditev 5: Polinomske enačbo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ rešujemo po naslednjih korakih:

Prvi korak: V koordinatnem sistemu narišemo pot od točke $A(a_{n-1}, 1)$ do končne točke X tako, da začne želva pot v točki A in se potem na vsakem koraku zasuka v desno za 90° . Če je naslednji koeficient pozitiven, se premakne naprej, sicer pa nazaj za toliko, kolikor je velikost trenutnega koeficienta. Če je koeficient enak 0, se samo zasuka. Želva pot se konča v točki X na zadnjem koraku, ko se želva premakne za koeficient a_0 .

Drugi korak: Na vsakem odseku narišemo premice, nosilke odsekov.



Slika 12: Prvi primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je -2 .



Slika 13: Drugi primer reševanja enačbe pete stopnje. Rešitev je 2.

Tretji korak: Na premici, nosilki drugega odseka, izberemo (giblivo) točko G in jo povežemo z začetno točko A (narišemo daljico AG). Nadaljujemo risanje poti odboja₉₀.

Četrty korak: Premikamo točko G po nosilki drugega odseka tako, da zadnja pravokotnica sovpada z zadnjo točko želje poti, to je s točko X .

Rezultat: Smerni koeficient nosilke daljice GH je enak rešitvi dane enačbe.

Q.E.D.

Podobno, kot smo utemeljili reševanje kvadratne in kubične enačbe z vodilnim koeficientom različnim od 1, velja tudi za reševanje enačbe višje stopnje.

Sliki 12 in 13 prikazujeta dve od petih rešitev enačbe $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$.

Vse rešitve so: 1, -1, 2, -2 in -3.

Hornerjev algoritem z želvjo grafiko lahko posplošimo tudi na polinome višje stopnje. Dokaz poteka enako. Ker se položaji končnih točk želje poti in odboja₉₀ razlikujejo, ugotovimo vrednost polinoma $p(x_0)$ takole:

Naj bo točka D končna točka želje poti, točka W pa končna točka odboja₉₀; vektor $\vec{d}$ vektor v smeri zadnjega premika želje, vektor $\vec{w}$ pa vektor od točke W do točke D . Števili d in w sta abscisi (pri enačbah lihe stopnje) ali ordinati (pri enačbah sode stopnje) točk D in W . Vrednost polinoma je enaka $p(x_0) = \mp |d - w|$. Predznak je pozitiven, ko sta vektorja $\vec{d}$ in $\vec{w}$ enako usmerjena, negativen pa, ko sta ta vektorja različno usmerjena.

Ko točki D in W sovpadeta in dobimo rešitev enačbe $p(x_0) = 0$, nam dajo odseki odboja₉₀ koeficiente količnika. Poglejmo primere. Upoštevamo, da peljemo želvico po odboju₉₀ enako kot pri konstrukciji želje poti. Želva začne pot v začetni točki odboja₉₀ in se na vogalih zasuka za 90° v desno. Odsek, po katerem se giblje zadenjsko, ima negativen predznak. Zapišimo primera s Slik 12 in 13:

Slika 12:

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = (x + 2)(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6).$$

Slika 13:

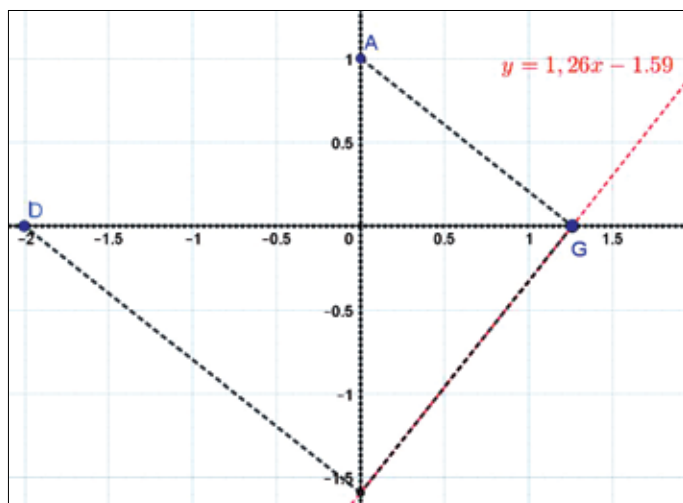
$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6).$$

5 Rešitev starogrškega problema podvojitve kocke

Podvojitve kocke je eden izmed starogrških problemov. Za dano kocko s stranico a moramo poiskati stranico b nove kocke, ki ima dvojno prostornino $b^3 = 2a^3$.

Enačbo preoblikujemo v $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$. Označimo količnik $\frac{b}{a} = x$. Tako dobimo enačbo $x^3 = 2$ oziroma $x^3 - 2 = 0$.

Iz enačbe $x^3 - 2 = 0$ sledi, da sta točki $A(0, 1)$ in $D(-2, 0)$. Želvico peljemo od točke $A(0, 1)$ do točke $D(-2, 0)$. Kjer se želva obrne na mestu (to je v koordinatnem izhodišču), vsakič narišemo premico v njeni smeri. Ti premici služita za konstrukcijo odboja₉₀ (glejte Sliko 14). Z opisano metodo lahko rešimo tudi poljubno enačbo $x^3 - d = 0$, le točka D ima koordinati $D(-d, 0)$.



Slika 14: Podvojitev kocke z želvjo grafiko.

Zaključek

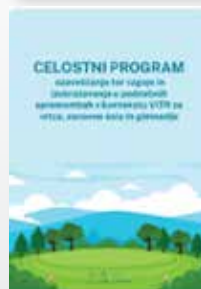
Grafična metoda reševanja polinomskih enačb je zelo zanimiva. Pred razvojem računalniških aplikacij iz dinamične geometrije je bila težko izvedljiva. Znano je, da je Riaz (Riaz, 1962, v Ptičak in Vovk, 2023) izdelal praktični pripomoček. Reševanje kvadratne in kubične enačbe pa lepo poteka tudi s prepogibanjem papirja. V raziskovalni nalogi (Ptičak in Vovk, 2023) je obdelana tudi ta zanimiva metoda.

Viri in literatura

Ptičak, E., Vovk, T. (2023). *Reševanje polinomskih enačb z geometrijo*. Škofijska gimnazija Vipava. Dostopno na naslovu https://zbirke.zotks.si/2023/resources/SS_matem_2965.pdf.

Digitalna bralnica ZRSŠ

Trajnostni razvoj



Raziskovanje kvadratnih palindromov

Exploring Square Palindromes

Kaja Vreš, dijakinja Gimnazije Ravne na Koroškem

Mentorji: Dragomir Benko, Šolski center Ravne, Gimnazija Ravne na Koroškem

Domen Vreš, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko

Simona Vreš, Šolski center Ravne, Gimnazija Ravne na Koroškem

Izvelek

Kvadratni palindrom smo definirali kot par števil, za kateri velja, da ima eno število števk v obratnem vrstnem redu kot drugo, in to velja tudi za njuna kvadrata. V članku predstavimo, kakšni so pogoji, da je število kvadratni palindrom. Ugotovimo, da ne sme prihajati do prenosa enote pri kvadriranju števila. Predstavimo različne primere kvadratnih palindromov in posledice dejstva, da ne sme prihajati do prenosa enote.

Ključne besede: palindromi, kvadratni palindromi, indukcija

Abstract

A square palindrome is a pair of numbers whose digits are in reverse order to the other, and the same applies to their squares. This article describes the prerequisites for a number to be a square palindrome. When squaring an integer, we must ensure that no units are transferred. We give several examples of square palindromes and discuss the implications of the assumption that there must be no transfer of units.

Keywords: palindromes, square palindromes, induction

1 Uvod

V raziskovalni nalogi iz leta 2022, ki je nastala pod okriljem Gimnazije Ravne na Koroškem, raziskujemo dokaj neraziskano področje matematike – kvadratne palindrome. V tem članku so predstavljene bistvene ugotovitve, bralce pa vljudno vabimo, da si dokaze, ki so v tem članku izpuščeni, ogledajo v sami raziskovalni nalogi. Čeprav so kvadratni palindromi v literaturi, ki preučuje palindrome, velikokrat omenjeni, so navedeni le kot zanimivost.

1.1 Definicija kvadratnega palindroma

Palindrom je število, ki se enako prebere naprej in nazaj (simetrično število v matematiki). To pomeni, da so v njegovem desetiškem oziroma decimalnem zapisu vse števke razporejene simetrično (prva števka je enaka zadnji, druga števka je enaka predzadnji ...).

Lahko ga zapišemo kot: $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots} \dots \overline{a_3 a_2 a_1}$.

V raziskovalni nalogi raziskujemo posebno vrsto številskih palindromov, ki jo poimenujemo kvadratni palindrom. To poimenovanje uvedemo za potrebe raziskovalnega dela in je še nedefiniran pojem.

Kvadratni palindrom dobimo, ko kvadriramo dve števili, ki imata števke v obratnem vrstnem redu in sta njuna kvadrata rav-

no tako števili, ki imata obrnjen vrstni red števk. To je torej par števil (k, l) , za kateri velja:

$$k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}, \quad k^2 = \overline{b_m b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0},$$
$$l = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n}, \quad l^2 = \overline{b_0 b_1 \dots b_{m-2} b_{m-1} b_m}. \quad (1)$$

Primer:

$$12^2 = 144$$
$$21^2 = 441 \quad (2)$$

Opomba: Na začetku se osredotočimo na pare števil, ki imajo enako število števk, oziroma na števila, ki nimajo 0 za zadnjo števko.

1.2 Metode dela

Pri raziskovanju in pisanju naloge smo kot temeljno metodo dela uporabljali metodo matematičnega sklepanja in dokazovanja.

Kvadratne palindrome smo opazovali s pomočjo generiranih kvadratnih palindromov, ki smo jih generirali v programu Microsoft Excel. Grafe smo narisali s pomočjo programa GeoGebra.

2 Generiranje kvadratnih palindromov

Najprej smo na podlagi opazovanja poskušali zapisati nekaj primerov, ki jim morajo ustrezati števke, da je število kvadratni pa-

lindrom. S pomočjo aplikacije Microsoft Excel smo zapisali vsa dvo-, tri-, štiri- in petmestna števila. To smo lahko storili, saj program samostojno prepozna zaporedje in smo tako napisali prvi dve števili, nato pa razširili zaporedje na naslednje celice. Na koncu smo s pomočjo preproste funkcije A^2 izračunali kvadrate teh števil.

Funkcija, ki obrne vrstni red števk števila, je malo zahtevnejša in se razlikuje glede na število mest. Zapisali smo jo s pomočjo vgrajenih funkcij QUOTIENT in MOD. Dobljena števila, smo kvadrirali enako, kot smo kvadrirali prvotna števila.

2.1 Dvomesna števila

Ko smo zapisali vsa dvomesna števila in njihove kvadrate, smo obrnili vrstni red števk s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 10) + \text{MOD}(A; 10) * 10$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

Ko smo dobljena števila kvadrirali, smo lahko opazovali, katera števila so kvadratni palindromi. Dobljeni rezultati so prikazani na Sliki 1. Dvomesna števila, ki so kvadratni palindromi, so: 11, 12, 13, 21, 22, 31.

	A	B	C	D
1	11	121	11	121
2	12	144	21	441
3	13	169	31	961
4	14	196	41	1681
5	15	225	51	2601
6	16	256	61	3721
7	17	289	71	5041
8	18	324	81	6561
9	19	361	91	8281
10	20	400	2	4
11	21	441	12	144
12	22	484	22	484
13	23	529	32	1024
14	24	576	42	1764
15	25	625	52	2704
16	26	676	62	3844
17	27	729	72	5184
18	28	784	82	6724
19	29	841	92	8464
20	30	900	3	9
21	31	961	13	169

Slika 1: Preglednica dvomesnih kvadratnih palindromov.

	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	100	10000	1	1 31	130	16900	31	961 101	200	40000	2	4 201	300	90000	3	
2	101	10201	101	10201 32	131	17161	131	17161 102	201	40401	102	10404 202	301	90601	103	10609
3	102	10404	201	40401 33	132	17424	231	53361 103	202	40804	202	40804 203	302	91204	203	41209
4	103	10609	301	90601 34	133	17689	331	109561 104	203	41209	302	91204 204	303	91809	303	91809
5	104	10816	401	160801 35	134	17956	431	185761 105	204	41616	402	161604 205	304	92416	403	162409
6	105	11025	501	251001 36	135	18225	531	281961 106	205	42025	502	252004 206	305	93025	503	253009
7	106	11236	601	361201 37	136	18496	631	398161 107	206	42436	602	362404 207	306	93636	603	363609
8	107	11449	701	491401 38	137	18769	731	534361 108	207	42849	702	492804 208	307	94249	703	494209
9	108	11664	801	641601 39	138	19044	831	690561 109	208	43264	802	643204 209	308	94864	803	644809
10	109	11881	901	811801 40	139	19321	931	866761 110	209	43681	902	813604 210	309	95481	903	815409
11	110	12100	11	121 41	140	19600	41	1681 111	210	44100	12	144 211	310	96100	11	169
12	111	12321	111	12321 42	141	19881	141	19881 112	211	44521	112	12544 212	311	96721	113	12769
13	112	12544	211	44521 43	142	20164	241	58081 113	212	44944	212	44944 213	312	97344	213	45369
14	113	12769	311	96721 44	143	20449	341	116281 114	213	45369	312	97344 214	313	97969	313	97969
15	114	12996	411	168921 45	144	20736	441	194481 115	214	45796	412	169744 215	314	98596	413	170569
16	115	13225	511	261121 46	145	21025	541	292681 116	215	46225	512	262144 216	315	99225	513	263169
17	116	13456	611	373321 47	146	21316	641	410881 117	216	46656	612	374544 217	316	99856	613	375769
18	117	13689	711	505521 48	147	21609	741	549081 118	217	47089	712	506944 218	317	100489	713	508369
19	118	13924	811	657721 49	148	21904	841	707281 119	218	47524	812	659344 219	318	101124	813	660969
20	119	14161	911	829921 50	149	22201	941	885481 120	219	47961	912	831744 220	319	101761	913	833569
21	120	14400	21	441 51	150	22500	51	2601 121	220	48400	22	484 221	320	102400	21	529
22	121	14641	121	14641 52	151	22801	151	22801 122	221	48841	122	14884 222	321	103041	123	15129
23	122	14884	221	48841 53	152	23104	251	63001 123	222	49284	222	49284 223	322	103684	223	49729
24	123	15129	321	103041 54	153	23409	351	123201 124	223	49729	322	103684 224	323	104329	323	104329
25	124	15376	421	177241 55	154	23716	451	203401 125	224	50176	422	178084 225	324	104976	423	178929
26	125	15625	521	271441 56	155	24025	551	303601 126	225	50625	522	272484 226	325	105625	523	273529
27	126	15876	621	385641 57	156	24336	651	423801 127	226	51076	622	386884 227	326	106276	623	388129
28	127	16129	721	519841 58	157	24649	751	564001 128	227	51529	722	521384 228	327	106929	723	522729

Slika 2: Preglednica trimesnih kvadratnih palindromov.

2.2 Trimestna števila

Vrstni red števk trimestnega števila smo obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 100) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 10 + \text{MOD}(A; 10) * 100,$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

Nato smo dobljena števila ponovno kvadrirali. Rezultati so prikazani na Sliki 2. Iz te je razvidno, da so trimestni kvadratni palindromi: 101, 102, 103, 111, 112, 113, 121, 122, 201, 202, 211, 212, 221, 301, 311.

2.3 Štirimestna števila

Za obračanje vrstnega reda števk štirimestnega števila smo uporabili funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 1000) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 100); 10) * 10 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 100 + \text{MOD}(A; 10) * 1000,$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

Rezultati so prikazani na Sliki 3.

Ugotovili smo, da so štirimestna števila, ki so kvadratni palindromi: 1001, 1002, 1003, 1011, 1012, 1013, 1021, 1022, 1031, 1101, 1102, 1103, 1111, 1112, 1113, 1121, 1122, 1201, 1202, 1211, 1212, 1301, 2001, 2002, 2011, 2101, 2102, 2012, 2021, 2022, 2111, 2121, 2201, 2202, 2211, 3001, 3011, 3101, 3111.

2.4 Petmestna števila

Vrstni red števk petmestnega števila smo obrnili s funkcijo:

$$= \text{QUOTIENT}(A; 10000) + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 1000); 10) * 10 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 100); 10) * 100 + \text{MOD}(\text{QUOTIENT}(A; 10); 10) * 1000 + \text{MOD}(A; 10) * 10000,$$

pri čemer je A število, katerega vrstni red števk želimo obrniti.

B	C	D	E	F	B	C	D	E	F	B	C	D	E	F
10	10000	-	-	10000001	1210	1464100	121	14641	146410014641	2001	4004001	1002	1004004	40040011004004
1001	1002001	1001	1002001	10020011002001	1211	1466521	1121	1256641	14665211256641	2002	4008004	2002	4008004	40080044008004
1002	1004004	2001	4004001	10040044004001	1212	1468944	2121	4498641	14689444498641	2010	4040100	102	10404	404010010404
1003	1006009	3001	9006001	10060099006001	1220	1488400	221	48841	148840048841	2011	4044121	1102	1214404	40441211214404
1010	1020100	101	10201	102010010201	1300	1690000	31	961	1690000961	2012	4048144	2102	4418404	40481444418404
1011	1022121	1101	1212201	10221211212201	1301	1692001	1031	1062961	16920011062961	2020	4080400	202	40804	408040040804
1012	1024144	2101	4414201	1024144414201	2000	4000000	2	4	40000004	2021	4084441	1202	1444804	40844411444804
1013	1026169	3101	9616201	10261699616201	2001	4004001	1002	1004004	40040011004004	2022	4088484	2202	4488804	40884844488804
1020	1040400	201	40401	104040040401	2002	4008004	2002	4008004	40080044008004	2100	4410000	12	144	4410000144
1021	1042441	1201	1442401	10424411442401	2010	4040100	102	10404	404010010404	2101	4414201	1012	1024144	44142011024144
1022	1044484	2201	4844401	10444844844401	2011	4044121	1102	1214404	40441211214404	2102	4418404	2012	4048144	44184044048144
1030	1060900	301	90601	106090090601	2012	4048144	2102	4418404	40481444418404	2110	4452100	112	12544	445210012544
1031	1062961	1301	1692001	10629611692001	2020	4080400	202	40804	408040040804	2111	4456321	1112	1236544	44563211236544
1100	1210000	11	121	1210000121	2021	4084441	1202	1444804	40844411444804	2120	4494400	212	44944	449440044944
1101	1212201	1011	1022121	12122011022121	2022	4088484	2202	4488804	40884844488804	2121	4498641	1212	1468944	44986411468944
1102	1214404	2011	4044121	12144044044121	2100	4410000	12	144	4410000144	2200	4840000	22	484	4840000484
1103	1216609	3011	9066121	12166099066121	2101	4414201	1012	1024144	44142011024144	2201	4844401	1022	1044484	48444011044484
1110	1232100	111	12321	123210012321	2102	4418404	2012	4048144	44184044048144	2202	4848804	2022	4088804	48488044088804
1111	1234321	1111	1234321	12343211234321	2110	4452100	112	12544	445210012544	2210	4884100	122	14884	488410014884
1112	1236544	2111	4456321	12365444456321	2111	4456321	1112	1236544	44563211236544	2211	4888521	1122	1258884	48885211258884
1113	1238769	3111	9678321	12387699678321	2120	4494400	212	44944	449440044944	3000	9000000	3	9	90000009
1120	1254400	211	44521	125440044521	2121	4498641	1212	1468944	44986411468944	3001	9006001	1003	1006009	90060011006009
1121	1256641	1211	1466521	12566411466521	2200	4840000	22	484	4840000484	3010	9060100	103	10609	906010010609
1122	1258884	2211	4888521	12588844888521	2201	4844401	1022	1044484	48444011044484	3011	9066121	1103	1216609	90661211216609
1130	1276900	311	96721	127690096721	2202	4848804	2022	4088804	48488044088804	3100	9610000	13	169	9610000169
1200	1440000	21	441	1440000441	2210	4894100	122	14884	489410014884	3101	9616201	1013	1026169	96162011026169
1201	1442401	1021	1042441	14424011042441	2211	4888521	1122	1258884	48885211258884	3110	9672100	113	12769	967210012769
1202	1444804	2021	4084441	14448044084441	3000	9000000	3	9	90000009	3111	9678321	1113	1238769	96783211238769

Slika 3:
Preglednica
štirimestnih
kvadratnih
palindromov.

Petmestnih števil, ki so kvadratni palindromi, je veliko (90), zato si oglejmo le nekaj primerov, in sicer: 10001, 10002, 10003, 10011, 10012, 10013, 10021, 10022, 10031, 10101, 10102, 10103, 10111, 10112, 10113 ...

Nekaj primerov petmestnih kvadratnih palindromov je prikazanih tudi na Sliki 4.

B	C	D	E	F	G
21200	449440000	212	44944	44944000044944	Palindrom
21201	449482401	10212	104284944	449482401104284944	Palindrom
21210	449864100	1212	1468944	4498641001468944	Palindrom
22000	484000000	22	484	484000000484	Palindrom
22001	484044001	10022	100440484	484044001100440484	Palindrom
22002	484088004	20022	400880484	484088004400880484	Palindrom
22010	484440100	1022	1044484	4844401001044484	Palindrom
22011	484484121	11022	121484484	484484121121484484	Palindrom
22020	484880400	2022	4088484	4848804004088484	Palindrom
22100	488410000	122	14884	48841000014884	Palindrom
22101	488454201	10122	102454884	488454201102454884	Palindrom
22102	488498404	20122	404894884	488498404404894884	Palindrom
22110	488852100	1122	1258884	4888521001258884	Palindrom
22111	488896321	11122	123698884	488896321123698884	Palindrom
30000	900000000	3	9	9000000009	Palindrom
30001	900060001	10003	100060009	900060001100060009	Palindrom
30010	900600100	1003	1006009	9006001001006009	Palindrom
30011	900660121	11003	121066009	900660121121066009	Palindrom

Slika 4: Primer najdenih petmestnih kvadratnih palindromov.

2.5 Ugotovitve

Z opazovanjem pridobljenih kvadratnih palindromov smo ugotovili, da so ti sestavljeni samo iz števk 0, 1, 2 in 3, zato lahko sklepamo, da je to eden od pogojev, da je število kvadratni palindrom. Opazili smo tudi, da se z večanjem števila mest večja število kvadratnih palindromov.

3 Številke, ki tvorijo kvadratni palindrom

V raziskovalni nalogi najprej dokažemo, da so lahko na prvem oziroma zadnjem mestu le številke 1, 2 in 3. S pomočjo tega doka-

za v drugem delu potrdimo, da so te številke skupaj z 0 edine, ki se lahko pojavijo v kvadratnih palindromih.

V obeh dokazih predpostavimo, da imamo par števil (k , l), ki tvorita kvadratni palindrom. Njuna desetiška zapisa sta: $k = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$, $l = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n}$.

V obeh dokazih opazujemo kvadrata teh števil, ki ju zaporedoma označimo z x in y .

$$x = k^2 = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0^2}$$

$$y = l^2 = \overline{a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n^2} \quad (3)$$

Eden od pogojev, da je število kvadratni palindrom, je, da je na prvem oziroma zadnjem mestu ena izmed števk 1, 2 ali 3, torej velja:

$$a_0 \leq 3 \text{ oziroma } a_n \leq 3.$$

4 Posplošitev za celotno število

x :

y :

$$a_n^2 \cdot 10^{2n}$$

$$a_0^2 \cdot 10^{2n}$$

$$2a_n a_{n-1} \cdot 10^{2n-1}$$

$$2a_1 a_0 \cdot 10^{2n-1}$$

$$(a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) \cdot 10^{2n-2}$$

$$(a_1^2 + 2a_2 a_0) \cdot 10^{2n-2}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$(a_1^2 + 2a_2 a_0) \cdot 10^2$$

$$(a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) \cdot 10^2$$

$$2a_1 a_0 \cdot 10^1$$

$$2a_n a_{n-1} \cdot 10^1$$

$$a_0^2 \cdot 10^0$$

$$a_n^2 \cdot 10^0$$

1. Ker mora biti $a_0 \leq 3$ in s tem $a_0^2 \leq 9$, ne pride do prenosa enote z enic na desetine v številu x , saj je $a_0^2 \leq 10$.
2. Na zadnje mesto v številu X ne vpliva nobeno drugo mesto, kar pomeni, da je vrednost zadnje števke števila x enaka vrednosti a_0^2 . Ker morata biti zadnja števka števila x in prva števka števila y enaki (da sta to kvadratna palindroma), to pomeni, da mora imeti tudi prva števka števila y vrednost a_0^2 . Iz tega sledi, da drugo mesto v tem številu ne sme vplivati na prvo mesto. Da to drži, mora biti $2a_2a_0 \leq 9$.
3. Sedaj vemo, da velja $a_0^2 \leq 9$ in $2a_1a_0 \leq 9$. Torej je vrednost predzadnje števke števila x enaka vrednosti $2a_1a_0$. Ker enice ne vplivajo na desetine in ker je ta vrednost manjša od deset, je predzadnja števka x enaka $2a_1a_0$. Da bosta števili x in y kvadratna palindroma, morata biti tudi druga števka števila y in predzadnja števka števila x enaki. Iz tega sledi, da mora imeti tudi druga števka števila y vrednost $2a_1a_0$. Da to drži, ne sme priti do prenosa enote iz tretjega na drugo mesto števila y , torej tretje mesto ne sme vplivati na drugo. Iz tega sledi, da mora veljati $(a_1^2 + 2a_2a_0) \leq 9$.
4. Ta postopek bi lahko ponavljali, dokler ne bi prišli do prvega mesta števila x in zadnjega mesta števila y . Z indukcijo dokažemo, da se na nobenem mestu ne zgodi prenos enote na naslednje mesto.

4.1 Pogoji, ki določajo kvadratne palindrome

4.1.1 Potence s sodimi eksponenti

Vsota dveh sodih števil je sodo število in vsota dveh lihih števil je sodo število. Ko množimo potence z enako osnovo, storimo to tako, da osnovo prepišemo, eksponente pa seštejemo.

Potence s sodim eksponentom ($2k$) bodo zato pomnožene s koeficienti oblike:

$$a_k^2 + 2 \sum_{i \neq j, i+j=2k} a_i a_j. \quad (4)$$

Ker ne sme priti do prenosa enote, iz tega sledi:

- 1) $a_k^2 \leq 9$ za $0 \leq k \leq n$,
- 2) $a_k \leq 3$ za $0 \leq k \leq n$.

Kvadrati vseh števk števil k in l so manjši od 10, kar pomeni, da mora biti njihova osnovna vrednost manjša ali enaka 3, saj je $4^2 = 16$ večje od 10, medtem ko je $3^2 = 9$ manjše od 10.

4.1.2 Potence z lihimi eksponenti

Potence z lihimi eksponenti ($2k + 1$) bodo pomnožene s koeficienti oblike:

$$2 \sum_{i \neq j, i+j=2k+1} a_i a_j. \quad (5)$$

4.2 Omejitve

Pri kvadriranju moramo pomnožiti vsako števko z vsako števko po formuli $2a_i a_j$. Ker smo ugotovili, da ne sme priti do prenosa enote v številu, to pomeni, da je $2a_i a_j \leq 9$.

Iz tega lahko hitro ugotovimo nekaj pravil, ki jih ne smemo prekršiti, da bo neko število kvadratni palindrom. Pri tem nam bo v pomoč dejstvo, da kvadratni palindrom tvorijo le števke 0, 1, 2 in 3.

S temi števki dobimo devet možnosti (1 in 0, 1 in 1, 1 in 2, 1 in 3, 2 in 0, 2 in 2, 2 in 3, 3 in 0, 3 in 3), ki nam povedo, katera števila lahko soustvarjajo kvadratni palindrom in katera ne.

Iz teh možnosti smo ugotovili:

- 1) števki 2 in 3 ne smeta biti v istem številu hkrati, da je le-to še kvadratni palindrom,
- 2) v številu je lahko samo ena števka enaka 3.

4.3 Dodatne omejitve

Poleg vseh že ugotovljenih lastnosti in omejitev lahko pri opazovanju potenc v zapisu števila določimo dodatne omejitve. Te se razlikujejo glede na to, ali je število mest liho ali sodo. Preden raziščemo te omejitve, si pogledajmo še nekaj desetiških zapisov in značilnosti, ki jih ob tem opazimo.

Trimestno število:

$$a = \overline{a_2 a_1 a_0} = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \\ a^2 = a_2^2 \cdot 10^4 + 2a_1 \cdot a_2 \cdot 10^3 + (a_1^2 + 2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + 2a_1 a_0 \cdot 10 + a_0^2. \quad (6)$$

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu trimestnega števila a je 2.

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu kvadrata danega trimestnega števila a je 4.

Število členov, ki nastopajo v zapisu kvadrata pri posamezni potenci z osnovo 10 (od najvišje do najnižje stopnje), je: 1, 2, 3, 2, 1.

Štirimestno število:

$$a = \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \\ a^2 = a_3^2 \cdot 10^6 + 2a_2 \cdot a_3 \cdot 10^5 + (a_2^2 + 2a_1 \cdot a_3) \cdot 10^4 \\ + (2a_0 \cdot a_3 + 2a_1 \cdot a_2) \cdot 10^3 \\ + (a_1^2 + 2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + 2a_1 a_0 \cdot 10 + a_0^2. \quad (7)$$

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu štirimestnega števila a je 3.

Najvišja stopnja potence števila 10 v zapisu kvadrata danega štirimestnega števila a je 6.

Število členov, ki nastopajo v zapisu kvadrata pri posamezni potenci z osnovo 10 (od najvišje do najnižje stopnje), je: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1.

4.3.1 Pomembne ugotovitve

Prva takšna ugotovitev je, da a_n vpliva le na koeficiente od potence 10^n do potence 10^{2n} . Nižje potence, pri kateri ima a_n vpliv, ni, ker je najmanjša potenca, s katero lahko množimo potenco 10^n , potenca 10^0 oziroma 1.

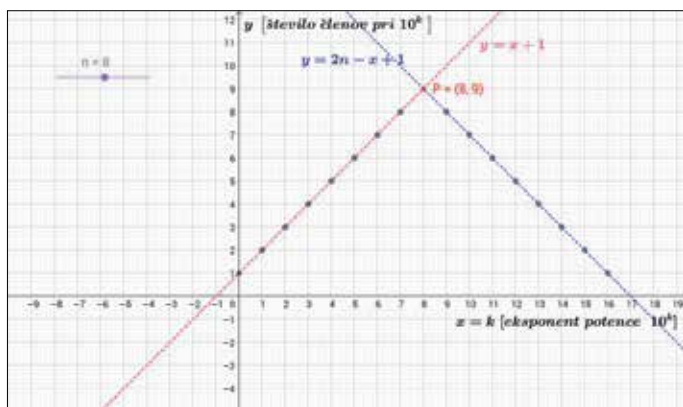
Druga pomembna ugotovitev je, da je vsota indeksov koeficientov v členih pri posamezni potenci števila 10 v zapisu kvadrata

vedno enaka eksponentu potence števila 10. Tako je v kvadratu števila a potenca 10^k pomnožena z vsoto členov oblike $a_i \cdot a_j$, pri čemer je $i + j = k$. Če v vsoti sodeluje a_i^2 , je $2i = k$.

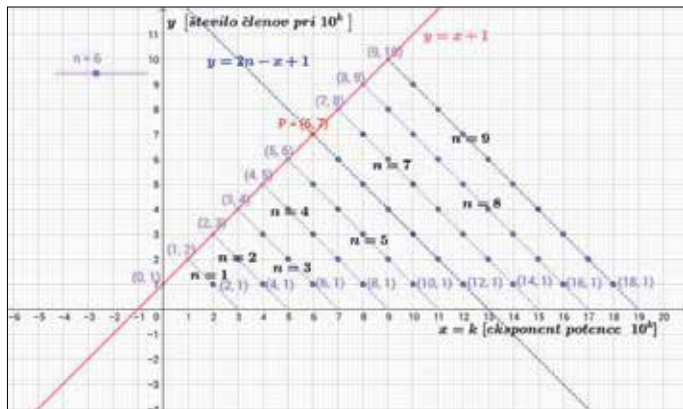
Število členov oblike $a_i \cdot a_j$; $i + j = k$, s katerimi je pomnožena potenca 10^k v zapisu kvadrata, linearno raste oziroma pada. Zato lahko število členov oblike $a_i \cdot a_j$; $i + j = k$, s katerimi je pomnožena potenca 10^k v zapisu kvadrata števila $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ izračunamo po formuli:

$$f(k) = \begin{cases} k+1; & 0 \leq k \leq n \\ 2n-k+1; & n < k \leq 2n \end{cases}; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Največ členov nastopa pri potenci 10^n , kjer je tudi presečišče obeh grafov, ki sta prikazana na Sliki 5 in Sliki 6.



Slika 5: Grafični prikaz števila členov za devetmestno število.



Slika 6: Grafični prikaz števila členov za poljuben n .

Tretja pomembna ugotovitev je prej navedena oblika vsote členov, s katerimi so pomnožene posamezne potence števila 10.

4.3.2 Kvadratni palindromi z lihim številom štev

Če je n sodo število, potem ima osnovno število liho število mest. Indeksi gredo pri števkih od n do $\frac{n}{2} + 1$ pri prvem faktorju in od 0 do $\frac{n}{2} - 1$ pri drugem faktorju. To velja za produkte oblike: $2 \cdot a_i \cdot a_j$. Ker pa je n sodo število, je 10^n potenca s sodim eksponentom, iz česar sledi, da se pojavi tudi člen $a \frac{n}{2}$.

$$10^n \cdot \left(a_{\frac{n}{2}}^2 + 2a_n a_0 + 2a_{n-1} a_1 + \cdots + 2a_{\frac{n}{2}+1} a_{\frac{n}{2}-1} \right) \quad (9)$$

Opazimo, da pri sodih n srednja številka števila $a_{\frac{n}{2}}$ ne sme biti 3, saj pri 10^n nastopa poleg $a_{\frac{n}{2}}$ še faktor $2a_n a_0$, ki ima vrednost vsaj ena, saj je a_n različno od nič, ker je prva številka. Ravno tako je a_0 različno od nič, ker je zadnja številka in raziskujemo kvadratne palindrome, ki imajo zadnjo številko različno od 0.

Če bi bila števka $a_{\frac{n}{2}} = 3$, bi to pomenilo, da je $a_{\frac{n}{2}}^2 = 9$ in bi prišlo do prenosa enote, saj je $2a_{\frac{n}{2}}$ zagotovo 1 ali več.

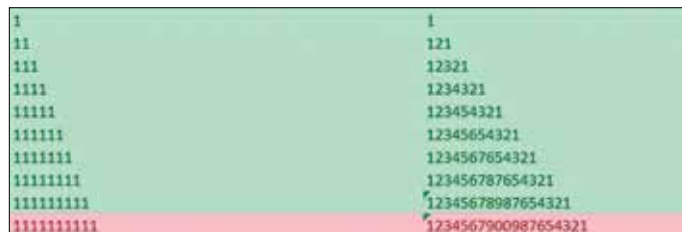
Ta ugotovitev velja samo za kvadratne palindrome z lihimi številom števk, saj pri kvadratnih palindromih s sodim številom števk srednje številke ni in člen $a_{\frac{n}{2}}^2$ pri potenci 10^n ne nastopa.

5 Kvadratni palindromi, zgrajeni iz enakih števk

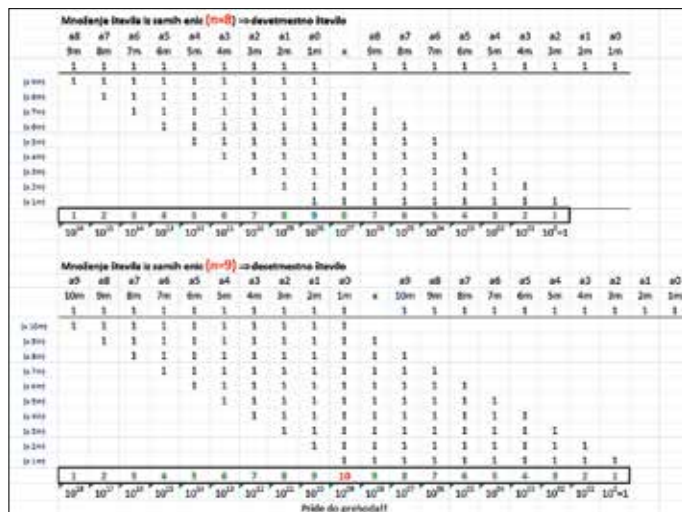
V tej nalogi smo se ukvarjali tudi s kvadratnimi palindromi, ki so zgrajeni iz enakih števk. Ker smo do te točke ugotovili, da kvadratne palindrome gradijo le števice 1, 2, 3 in 0, tudi kvadratnih palindromov, zgrajenih iz enakih števk, ne morejo tvoriti katere druge števice, vendar niti vse od teh števk ne tvorijo takšnih kvadratnih palindromov, saj 0 in 3 ne prideta v poštev.

5.1 Kvadratni palindromi, zgrajeni iz samih enic

Kljub temu da je 1 najmanjše naravno število, ob preveliki količini enic v številu pri kvadriranju tega števila pride do prenosa enote in to število posledično ni kvadratni palindrom. S pomočjo aplikacije Microsoft Excel smo preverili, največ koliko mest lahko ima število, zgrajeno iz samih 1, da je to še lahko kvadratni palindrom. Rezultati so prikazani na Sliki 7.



Slika 7: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih enic.



Slika 8: Kvadriranje osem mestnega in devet mestnega števila, sestavljenega iz samih enic.

Ugotovili smo, da ima takšno število lahko 9 mest, da je še kvadratni palindrom. Pri desetmestnem številu namreč pride do prenosa enote, saj je vsota členov pri potenci 10^{10} enaka 10. Podrobno dogajanje pri kvadriranju takšnega devetmestnega in desetmestnega števila je razvidno na Sliki 8.

5.2 Kvadratni palindromi, sestavljeni iz samih dvojk

Ponovno smo si pomagali s programom Microsoft Excel in napisali nekaj števil, zgrajenih iz samih 2, ter jih kvadrirali. Rezultati so vidni na Sliki 9.

2	4
22	484
222	49284
2222	4937284
22222	493817284
222222	49382617284
2222222	4938270617284
22222222	493827150617284
222222222	49382715950617300
2222222222	4938271603950620000
22222222222	493827160483951000000

Slika 9: Preglednica kvadratnih palindromov, sestavljenih iz samih dvojk.

Ugotovili smo, da sta takšna kvadratna palindroma samo dva, saj pri trimesnem številu že pride do prenosa enote, ker je vsota členov pri potenci 10^3 enaka 12. Podrobno dogajanje pri kvadriranju takšnega dvomestnega in trimesnega števila je razvidno na Sliki 10.

Množenje števila iz samih dvojk ($n=1$) $\Rightarrow$ dvomestno število število									
a1	a0		a1	a0					
2m	1m	x	2m	1m					
2	2		2	2					
(x 2m)	4	4							
(x 1m)	4	4	4						
	4	8	4						
	10^{02}	10^{01}	$10^0=1$						
Množenje števila iz samih dvojk ($n=2$) $\Rightarrow$ trimesno število število									
a2	a1	a0		a2	a1	a0			
3m	2m	1m	x	3m	2m	1m			
2	2		2		2				2
(x 3m)	4	4	4						
(x 2m)	4	4	4	4					
(x 1m)	4	4	4	4	4				
	4	8	12	8	4				
	10^{04}	10^{03}	10^{02}	10^{01}	$10^0=1$				
Pride do prehoda!!									

Slika 10: Kvadriranje dvomestnega in trimesnega števila, sestavljene-ga iz samih dvojk.

6 Kvadratni palindromi z različnim številom mest

Posebno obravnavo si zaslužijo tudi naravna števila, ki se končajo z vsaj eno števk 0. Ko zamenjamo vrstni red števk, ima dobljeno število v resnici v mestnem zapisu eno ali več mest manj. Kljub temu bi lahko bila nekatera takšna števila kvadratni palindromi.

$$120^2 = 14400$$

$$21^2 = 441 \quad (10)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I		A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	10	100	1	1		10	1000	1	1	1	100	10000	1	1		100	1000000	1	1
2	11	121	11	11		11	1331	11	1331	2	101	10201	101	10201		101	1030301	101	1030301
3	12	144	21	441		12	1728	21	9261	3	102	10404	201	40401		102	1061208	201	8120601
4	13	169	31	961		13	2197	31	29791	4	103	10609	301	90601		103	1092727	301	27270901
5	14	196	41	1681		14	2744	41	68921	5	104	10816	401	160801		104	1124864	401	64481201
6	15	225	51	2601		15	3375	51	132651	6	105	11025	501	251001		105	1157625	501	1,26E+08
7	16	256	61	3721		16	4096	61	226981	7	106	11236	601	361201		106	1191016	601	2,17E+08
8	17	289	71	5041		17	4913	71	357911	8	107	11449	701	491401		107	1225043	701	3,44E+08
9	18	324	81	6561		18	5832	81	531441	9	108	11664	801	641601		108	1259712	801	5,14E+08
10	19	361	91	8281		19	6859	91	753571	10	109	11881	901	811801		109	1295029	901	7,31E+08
11	20	400	2	4		20	8000	2		11	110	12100	11	121		110	1331000	11	1331
12	21	441	12	144		21	9261	12	1728	12	111	12321	111	12321		111	1367631	111	1367631
13	22	484	22	484		22	10648	22	10648	13	112	12544	211	44521		112	1404928	211	9393931
14	23	529	32	1024		23	12167	32	32768	14	113	12769	311	96721		113	1442897	311	30080231
15	24	576	42	1764		24	13824	42	74088	15	114	12996	411	168921		114	1481544	411	69426531
16	25	625	52	2704		25	15625	52	140608	16	115	13225	511	261121		115	1520875	511	1,33E+08
17	26	676	62	3844		26	17576	62	238328	17	116	13456	611	373321		116	1560896	611	2,28E+08
18	27	729	72	5184		27	19683	72	373248	18	117	13689	711	505521		117	1601613	711	3,59E+08
19	28	784	82	6724		28	21952	82	551368	19	118	13924	811	657721		118	1643032	811	5,33E+08
20	29	841	92	8464		29	24389	92	778688	20	119	14161	911	829921		119	1685159	911	7,56E+08
21	30	900	3	9		30	27000	3	27	21	120	14400	21	441		120	1728000	21	9261
22	31	961	13	169		31	29791	13	2197	22	121	14641	121	14641		121	1771561	121	1771561
23	32	1024	23	529		32	32768	23	12167	23	122	14884	221	48841		122	1815848	221	10793861
24	33	1089	33	1089		33	35937	33	35937	24	123	15129	321	103041		123	1860867	321	33076161
25	34	1156	43	1849		34	39304	43	79507	25	124	15376	421	177241		124	1906624	421	74618461
26	35	1225	53	2809		35	42875	53	148877	26	125	15625	521	271441		125	1953125	521	1,41E+08
27	36	1296	63	3969		36	46656	63	250047	27	126	15876	621	385641		126	2000376	621	2,39E+08
28	37	1369	73	5329		37	50653	73	389017	28	127	16129	721	519841		127	2048383	721	3,75E+08
29	38	1444	83	6889		38	54872	83	571787	29									
30	39	1521	93	8649		39	59319	93	804357	30									
31	40	1600	4	16		40	64000	4	64	31									
32	41	1681	14	196		41	68921	14	2744	32									
33	42	1764	24	576		42	74088	24	13824	33									
34	43	1849	34	1156		43	79507	34	39304	34									
35	44	1936	44	1936		44	85184	44	85184	35									
36	45	2025	54	2916		45	91125	54	157464	36									

Slika 11: Preglednica dvomestnih in trimesnih kubičnih palindromov.

Število 120 je torej neke vrste kvadratni palindrom, medtem ko število 140 ni.

$$\begin{aligned} 140^2 &= 19600 \\ 41^2 &= 1681 \end{aligned} \quad (11)$$

Ko smo generirali kvadratne palindrome, smo opazili, da je kar nekaj takšnih kvadratnih palindromov. Pri dvomestnih številih: 10, 20 in 30.

Pri trimestnih številih: 100, 110, 120, 130, 200, 210, 220, 300, 310.

Pri štirimestnih številih so takšni primeri: 1000, 1010, 1020, 1030, 1100, 1110, 1120, 1130, 1200, 1210, 1220, 1300, 2000, 2010, 2020, 2100, 2110, 2120, 2200, 2210, 3000, 3010, 3100, 3110.

Kljub temu da lahko te kvadratne palindrome obravnavamo kot kvadratne palindrome z enakim številom mest, zanje ne veljajo vsa pravila in omejitve. Tako lahko imajo takšni kvadratni palindromi za srednjo števk 3. Ta omejitev zanje ne drži, ker je pogoj za ustreznost te omejitve, da sta prva in zadnja številka različni od 0, kar zagotavlja, da je $2a_n a_0$ enako 1 ali več. V tem primeru to ni zagotovljeno, torej lahko imajo takšni palindromi za srednjo števk 3.

6.1 Možne razširitve

6.1.1 Kubični palindromi

Podobno, kot smo iskali pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, bi lahko iskali pogoje in lastnosti kubičnih palindromov.

Opazovali bi jih lahko s pomočjo Microsoft Excela, saj je postopek popolnoma enak, samo da namesto A^2 uporabimo A^3 . Rezultati tega so prikazani na Sliki 11.

Ko opazujemo kubične palindrome, opazimo, da so sestavljeni samo iz števk 0, 1 in 2.

6.1.2 Vsota členov pri isti potenci manjša od 10

Kljub temu da smo v nalogi točno določili pogoje, kdaj je neko število kvadratni palindrom, ni lahko ugotoviti, ali vsota členov pri isti potenci ni večja oziroma enaka 10.

Sicer smo odkrili, da se z višanjem števila mest viša tudi število členov pri isti potenci, vendar je težko določiti, katere številke sestavljajo te člene in kdaj se jih nabere toliko, da brez manjših števk pride do prehoda. Če bi uspeli odkriti še to, bi lahko točno določili, na katera mesta lahko postavimo katera števila in kolikokrat lahko uporabimo katero od števil.

Zaključek

Definirali in raziskali smo dokaj neraziskano področje, kvadratne palindrome. Odkrili smo ključne pogoje, da je neko število kvadratni palindrom, in sicer:

- 1) pri kvadriranju števila ne sme priti do prenosa enote,
- 2) sestavljen je samo iz števk 0, 1, 2 in 3.

Ko smo dokazali, da ne sme prihajati do prenosa enote, smo lahko iz tega dobili dva dodatna pogoja:

- 1) številki 2 in 3 ne smeta biti hkrati v istem številu, da je le-to še kvadratni palindrom,
- 2) v številu je lahko samo ena številka enaka 3.

Poleg tega smo opazili, da se število kvadratnih palindromov večja z večanjem števila mest.

Priloga

1. Excelova datoteka: Kvadratni palindromi.xlsx.

Objavljeno na <https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/>

Viri in literatura

Vreš, K. (2023). *Kvadratni palindromi*. Gimnazija Ravne na Koroškem. Dostopno na naslovu: https://zbirke.zotks.si/2022/resources/SS_matem_1137.pdf.

Pomen načrtne rabe matematičnih terminov pri pouku matematike

Impact of Intentional Use of Mathematical Terminology in Mathematics Classroom

Ana Canzutti
Osnovna šola Dornberk

Izvleček

Članek obravnava pomen načrtne rabe in gradnje matematičnega besedišča za izboljšanje razumevanja matematičnih konceptov ter spodbujanje učinkovitejše komunikacije v učnem procesu. Predstavljene so praktične strategije, kot so besediščni zid (angl. *word wall*), učne poti z matematičnimi termini ter aktivnosti, ki pri učencih spodbujajo rabo matematičnega izrazoslovja in diskusijo. Predstavljene so tudi izkušnje iz izvedbe delavnice na konferenci KUPM 2024, kjer so udeleženci preizkusili opisane pristope.

Ključne besede: matematično besedišče, obogatena učna pot, besediščni zid, skupne lastnosti in razlike

Abstract

This article explores the importance of intentionally using and developing mathematical vocabulary to enhance understanding of mathematical concepts and foster more effective communication in the learning process. It introduces practical strategies, such as word walls, learning paths enriched with mathematical terms, and interactive activities to encourage to use mathematical terminology and discussion. Experiences from the Conference on Teaching and Learning Mathematics, where participants tested these approaches, are also presented.

Keywords: mathematical terminology, enriched learning, word wall, commonalities and differences

Pomen matematičnega besedišča

Matematika ni zgolj niz formul in števil, temveč je jezik, ki povezuje abstraktne koncepte z realnim svetom. Ključni element tega jezika je matematično besedišče, ki učencem omogoča natančnejše izražanje, bolj poglobljeno razumevanje in učinkovitejše reševanje matematičnih problemov.

Matematično besedišče je temelj za razvijanje štirih sporazumevalnih zmožnosti – poslušanja, govorjenja, branja in pisanja. Po raziskavah Hattija, Fisherja in Freya (2017) natančna raba terminologije izboljšuje razumevanje matematičnih pojmov in krepi učenčovo sposobnost povezovanja konceptov. Učitelji lahko s spodbujanjem rabe matematičnega besedišča pomagajo učencem graditi samozavest pri izražanju in reševanju problemov.

dišča pomagajo učencem graditi samozavest pri izražanju in reševanju problemov.

olajšal načrtovanje in spodbujanje rabe matematičnega jezika v praksi.

Učni načrt in matematično besedišče

Načrtno razvijanje in spodbujanje rabe matematičnega besedišča postaja vse pomembnejši del poučevanja, kar odražajo tudi spremembe v osnutkih novih učnih načrtov. Na srečanjih študijskih skupin za matematiko v OŠ, ki so jih avgusta 2024 izvajale svetovalke za matematiko na Zavodu RS za šolstvo, smo v delovnem gradivu lahko zasledili, da bodo v prihodnje pri posameznih skupinah ciljev znotraj tem poleg ciljev in standardov znanja vključeni tudi seznami strokovnih terminov, povezanih z obravnavano skupino ciljev. Ta sistematični pristop bo učiteljem

Raba matematičnega besedišča – primerjalna analiza v 7. razredu

Na konkretnem primeru smo želeli raziskati vpliv načrtnega spodbujanja rabe matematičnega besedišča na učenčovo sposobnost ubeseditve postopkov in konceptov. V ta namen sva s kolegico izvedli primerjalno analizo med dvema oddelkoma sedmega razreda pri obravnavi ulomkov. V oddelku 1 učiteljica pri pouku ni usmerjala pozornosti na rabo matematične terminologije. Učenci so tako lahko uporabljali splošne izraze, na primer *tista številka zgoraj*, namesto da bi uporabili termin števec, pri čemer jih ni popravljala ali spodbujala k natančnejšemu izražanju.

Preglednica 1: Primerjalna analiza med dvema oddelkoma 7. razreda

Opis postopka	Oddenek 1 (16 učencev)		Oddenek 2 (17 učencev)	
	Št. učencev	Odstotek	Št. učencev	Odstotek
Ni opisa	8	50 %	0	0 %
Napačen opis	1	6 %	3	18 %
Pravilen opis, besedišče zelo pomanjkljivo	6	38 %	0	0 %
Pravilen opis, besedišče ustrezno	1	6 %	9	53 %
Pravilen opis, besedišče popolnoma ustrezno	0	%	5	29 %

Prav tako ni uporabljala pripomočkov, kot je učna pot, obogatena z matematičnimi termini, ki bi učencem pomagala pri rabi matematičnega strokovnega jezika. Nasprotno pa je v oddelku 2 učiteljica sistematično vključevala spodbude za uporabo matematičnih terminov, učenci pa so pri tem uporabljali učne pripomočke, kot je učna pot z matematičnim besediščem, kar jim je pomagalo pri doslednosti rabe pravilne matematične terminologije.

Učenci so dobili preprosto nalogo, in sicer: *Ulomek $3\frac{2}{5}$ zapišite z ulomkom, večjim od 1, in opišite postopek.*

Vsebinsko so učenci usvojili v 6. razredu, zato je večina učencev prvi del naloge opravila pravilno. Z drugo učiteljico sva izdelke učencev pobrali in se poenotili v kriterijih, po katerih sva pregledovali zapise učencev, ki so opisovali postopek. V preglednici 1 so prikazani rezultati, ki se nanašajo na zapisane opise postopka.

Interpretacija rezultatov

Rezultati so pokazali na izrazite razlike med obema oddelkoma.

- **Oddenek 1 (16 učencev):** 50 % učencev ni zapisalo opisa postopka, 38 % jih je podalo pravilen opis, vendar z zelo pomanjkljivo rabo besedišča, medtem ko je le 6 % učencev uporabilo ustrezno matematično izrazoslovje. Nihče od učencev ni dosegel popolne rabe matematičnega jezika.
- **Oddenek 2 (17 učencev):** V tem oddelku so bili vsi učenci sposobni zapisati

postopek. Pravilen opis z ustreznim besediščem je podalo 53 % učencev, medtem ko je 29 % učencev opisalo postopek s popolnoma ustrezno rabo matematičnega jezika.

V tem konkretnem primeru je načrtna raba matematičnega besedišča pomembno vplivala na sposobnost učencev, da so jasneje izrazili svoje misli in postopke. V oddelku, kjer je bila raba matematičnega jezika spodbujana, so učenci ne le bolje razumeli postopek, temveč so ga znali tudi natančneje opisati. To potrjuje, da je načrtno in sistematično spodbujanje rabe ustreznega matematičnega izrazoslovja pri pouku pomembno za razvoj sporazumevalnih zmožnosti učencev pri matematiki.

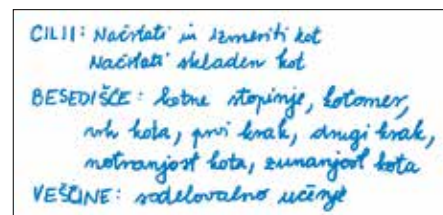
Aktivnosti za spodbujanje, izgradnjo in krepitev matematičnega besedišča

Pri pouku matematike na naši šoli so spodbujanje rabe strokovnih terminov, krepitev njihove uporabe in načrtna izgradnja strokovnega, v našem primeru matematičnega besedišča pripomogle k bolj poglobljenemu učenju ter samozaveesti učencev pri reševanju nalog. V nadaljevanju so opisane praktične aktivnosti, ki se lahko izvajajo za doseg te ciljev:

1. Jasno definirani cilji učne ure s seznamom besedišča

Vsaka učna ura se začne z zapisom cilja ure, besedišča, ki ga bomo uporabljali, in večšin, ki jih bomo razvijali, kar je povzeto iz Hattie idr. (2017) in prika-

zano na Sliki 1. Seznam strokovnih terminov oziroma besedišče vključuje ključne izraze, ki jih učenci spoznajo in uporabljajo. Med uro se učitelj večkrat vrača k temu seznamu, spodbuja rabo navedenih terminov in učence vodi k doslednejši rabi matematičnega jezika v njihovih razlagah in zapisih.

**Slika 1:** Primer zapisa na stranski tabli.

2. Besediščni zid

Besediščni zid je interaktivni plakat, ki ga učitelj in učenci ustvarijo skupaj. Na primer, za osnovne računske operacije (seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje) lahko ustvarijo seznam sinonimov in izrazov, ki jih uporabljamo za te računske operacije (Slika 2). Ključnega pomena je, da učenci sodelujejo pri oblikovanju besediščnega zidu, saj to poveča njihovo vključenost v oblikovanje vsebine, kar ugodno vpliva na pogostejšo uporabo zapisov.

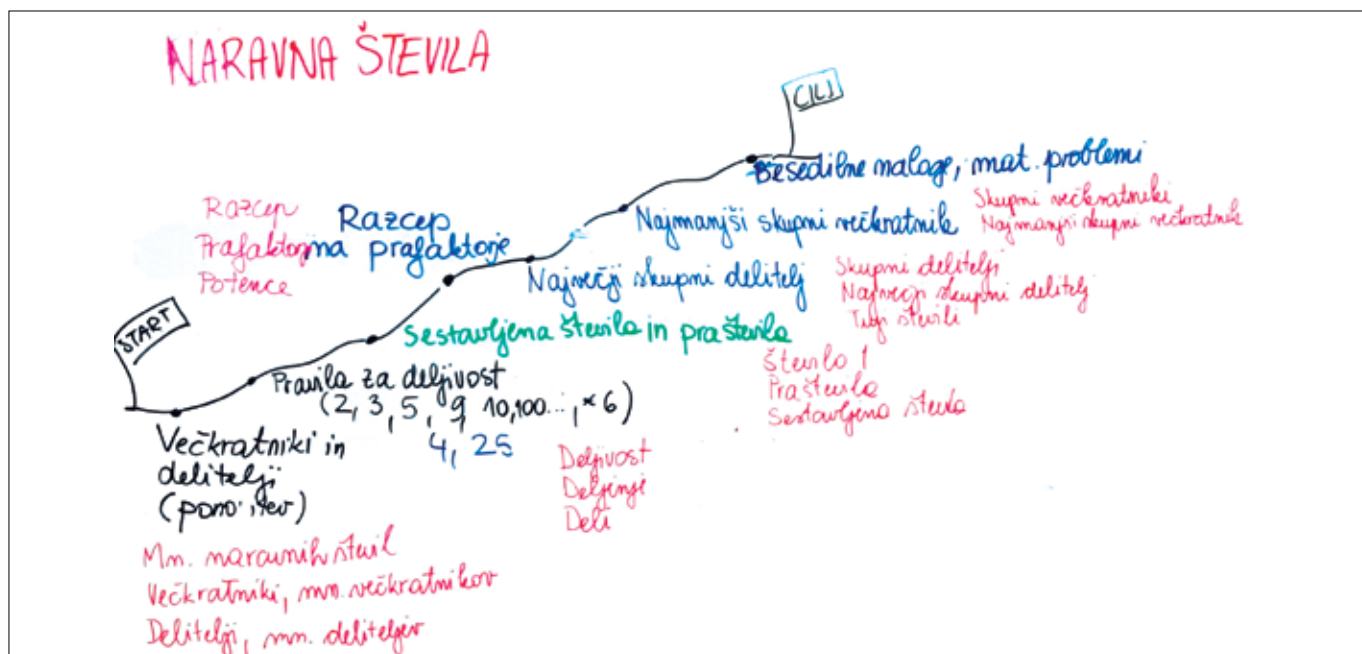
Besediščni zid je vizualni pripomoček, ki nenehno spodbuja uporabo matematičnega besedišča in diskusijo v učnem procesu. Lahko bi ga tudi poimenovali zid besed, pojmovni slovar ali kako drugače.

**Slika 2:** Primer besediščnega zidu za osnovne računske operacije.

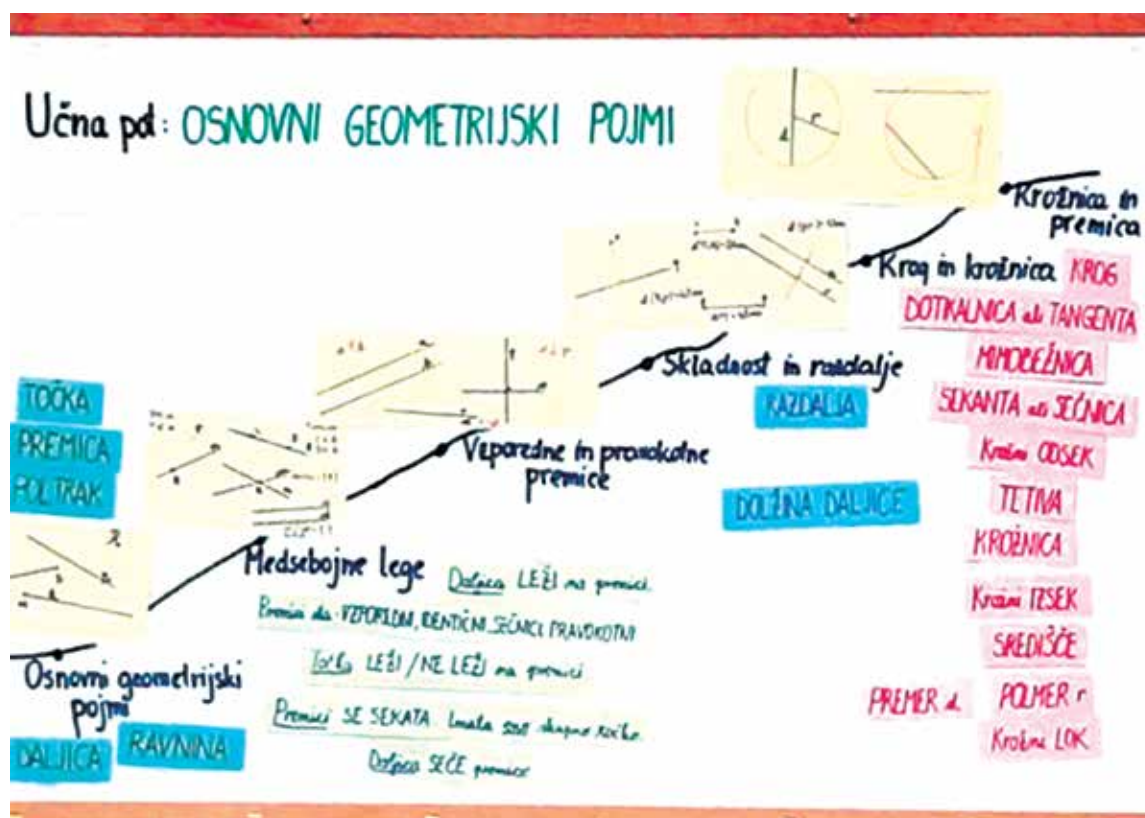
Učna pot je vizualni pripomoček, ki ga učitelj pripravi oziroma nariše na začetku obravnave novega poglavja. Gre za prirejeno različico poti učenja, ki jo Hattie omenja v svoji knjigi *Vidno učenje za učitelje*. Na učno pot učitelj

nariše zaporedje postaj, ki simbolizirajo glavne vsebine poglavja. Učenci učno pot narišejo v zvezek (Slika 5). Med obravnavo posamezne teme učitelj na tablo ali plakat, učenci pa v zvezek ob postaje dopisujejo matematično besedišče (Slika 3 in Slika 4). Ta

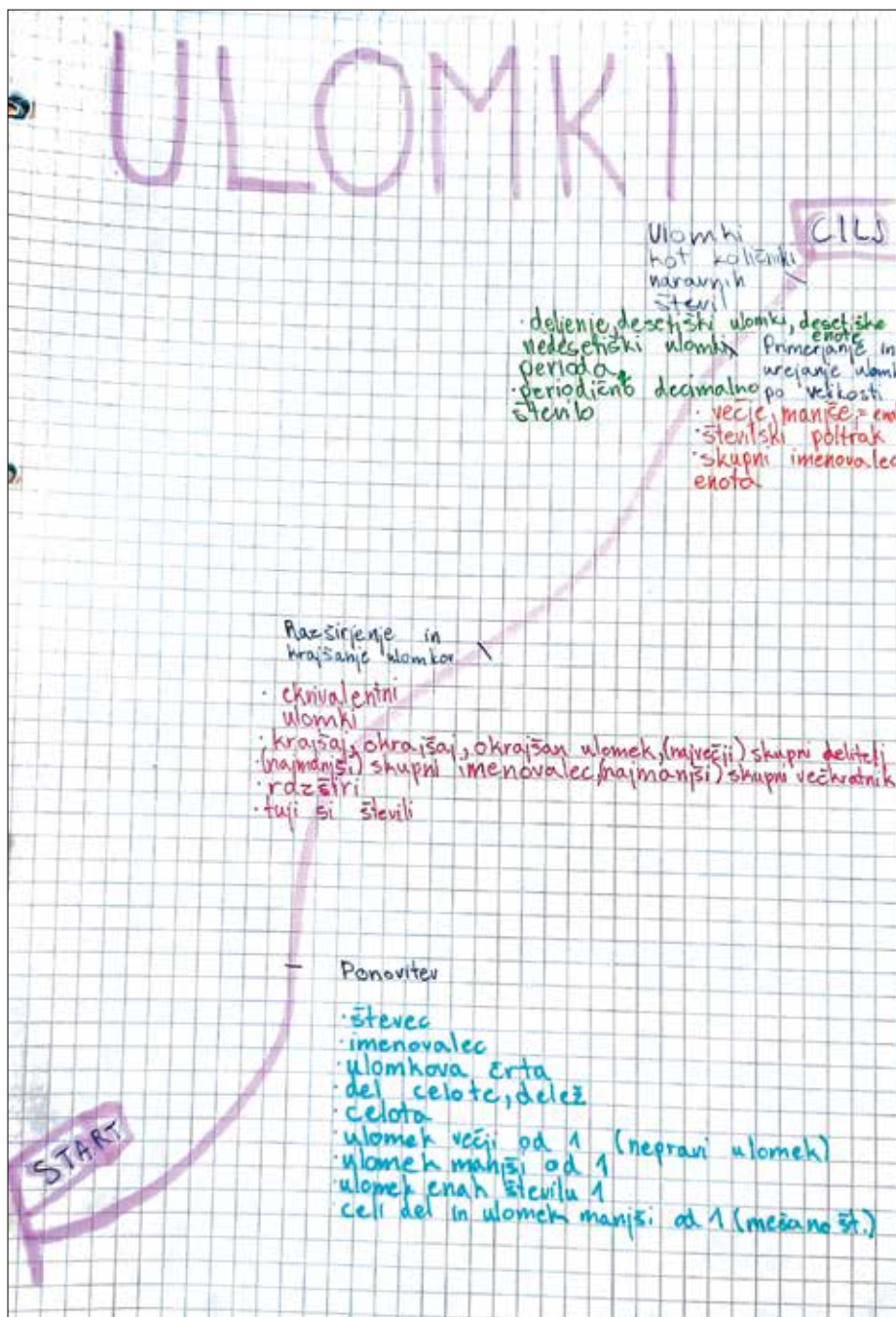
aktivnost omogoča učencem pregled nad celotno temo, daje jasno strukturo in usmeritev, katere vsebine bodo obravnavali, ter služi kot pripomoček pri učenju. Poleg tega učna pot pomaga učencem pri oblikovanju kriterijev uspešnosti.



Slika 3: Učna pot »Naravna števila« s pripisanim matematičnim besediščem, 7. razred.



Slika 4: Učna pot »Osnovni geometrijski pojmi« z matematičnim besediščem, 6. razred.



Slika 5: Učna pot vsebine »Ulomki« z matematičnim besediščem učenke iz 7. razreda.

4. Aktivnosti prirejanja in razvrščanja

Aktivnosti prirejanja in razvrščanja spodbujajo učence, da razvijajo pojmovne sheme in povezujejo različne matematične izraze, simbole in koncepte.

Lastnosti štirikotnikov (Slika 6)

Učenci so bili pri tej aktivnosti razdeljeni v manjše skupine, pri čemer je vsaka skupina prejela komplet kartončkov s slikami različnih štirikotnikov, njihovim poimenovanjem ter zapisom lastnosti stranic, diagonal in

notranjih kotov. Komplet je vseboval pet tipov kartončkov:

- slike štirikotnikov,
- kartončke z imeni posameznih štirikotnikov (npr. kvadrat, romb, pravokotnik, trapez, deltoid, paralelogram),
- kartončke z lastnostmi diagonal (npr. »Diagonali sta pravokotni. Diagonali se razpolavljata.«),
- kartončke z lastnostmi stranic (npr. »Ima dva para vzporednih in skladnih stranic.«),

- kartončke z lastnostmi notranjih kotov (npr. »Vsi štirje notranji koti so skladni.«).

Naloga skupine je bila, da vsaki sliki štirikotnika priredi ustrezne kartončke z imenom ter lastnostmi stranic, diagonal in kotov. Med delom so morali učenci aktivno sodelovati, razpravljati in soočati različna mnenja o pravilni razvrstitvi lastnosti. Skupinska razprava jih je spodbujala k natančni rabi matematičnega besedišča, kot so npr. stranica, kot, diagonala, skladnost, vzporednost in pravokotnost, kar je bil pomemben poudarek pri aktivnosti.

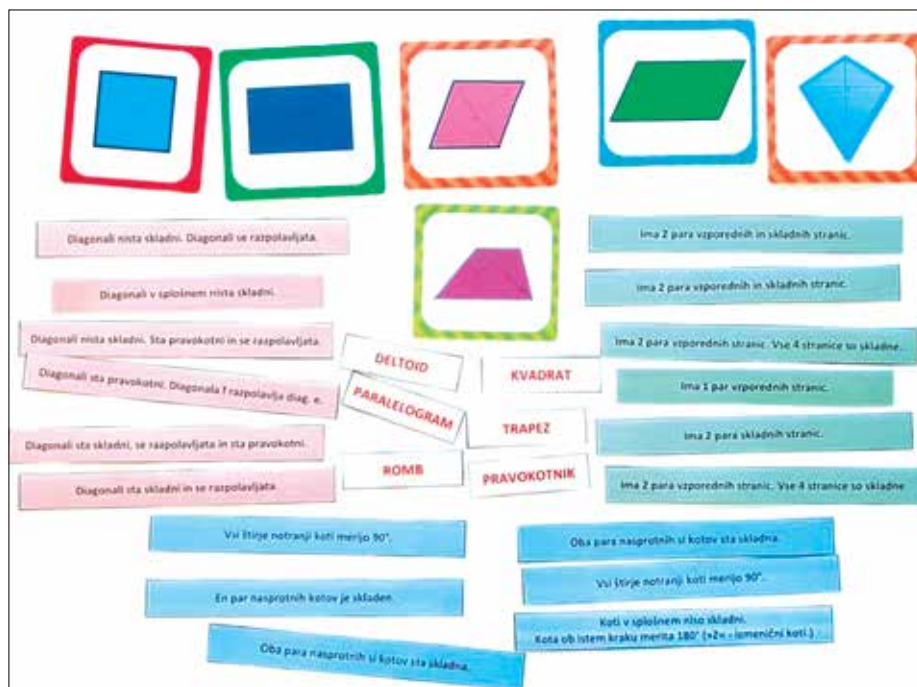
Učenci so med seboj argumentirali izbiro posameznih kartončkov ter tako poglobljali svoje znanje o geometrijskih lastnostih štirikotnikov. S tem so razvijali sposobnost jasne komunikacije in natančnega matematičnega izražanja.

Koti (Slika 7)

Učenci so delali v manjših skupinah, kjer je vsaka skupina prejela komplet kartončkov z imeni kotov (kot nič, ostri kot, pravi kot, topi kot, iztegnjeni kot, vdrti kot in polni kot) ter sličicami, ki so ponazarjale različne kote. Njihova naloga je bila, da sličice razvrstijo k ustrezni vrsti kota. Poudarek ni bil zgolj na pravilni razvrstitvi, temveč tudi na argumentaciji izbire, saj so morali učenci svoje mnenje utemeljiti pred drugimi člani skupine. Med diskusijo so se soočala različna stališča, učenci pa so pri tem uporabljali matematično besedišče, npr. vrh kota, krak kota, notranjost kota in zunanost kota. Aktivnost je tako spodbujala natančno izražanje in sodelovalno delo.

Osnovni geometrijski pojmi (Slika 8)

Učenci so delali v manjših skupinah, kjer je vsaka skupina prejela komplet kartončkov z imeni osnovnih geometrijskih elementov (točka, daljica, poltrak, premica, ravnina), slikovnimi predstavitvami, simbolnimi zapisi in opisi. Njihova naloga je bila, da pravilno povežejo posamezne elemente s pripadajočimi slikami, simboli in opisi. Med aktivnostjo so učenci sodelovali, izmenjevali mnenja in svoje odločitve utemeljevali z uporabo matematičnega besedišča, kot so točka, ravna črta, omejenost, neskončnost in ploskev. Aktivnost je spodbujala rabo matematičnega izražanja.



Slika 6: Rešen primer aktivnosti »Lastnosti štirikotnikov«, 7. razred.

Diskusije z vrstniki o tem, zakaj neki element pripada določeni kategoriji ali skupini, krepijo kritično mišljenje in rabo matematičnih terminov. Aktivnosti so primerne za delo v celotnem razredu, manjših skupinah ali parih.

5. Iskanje skupnih lastnosti in razlik

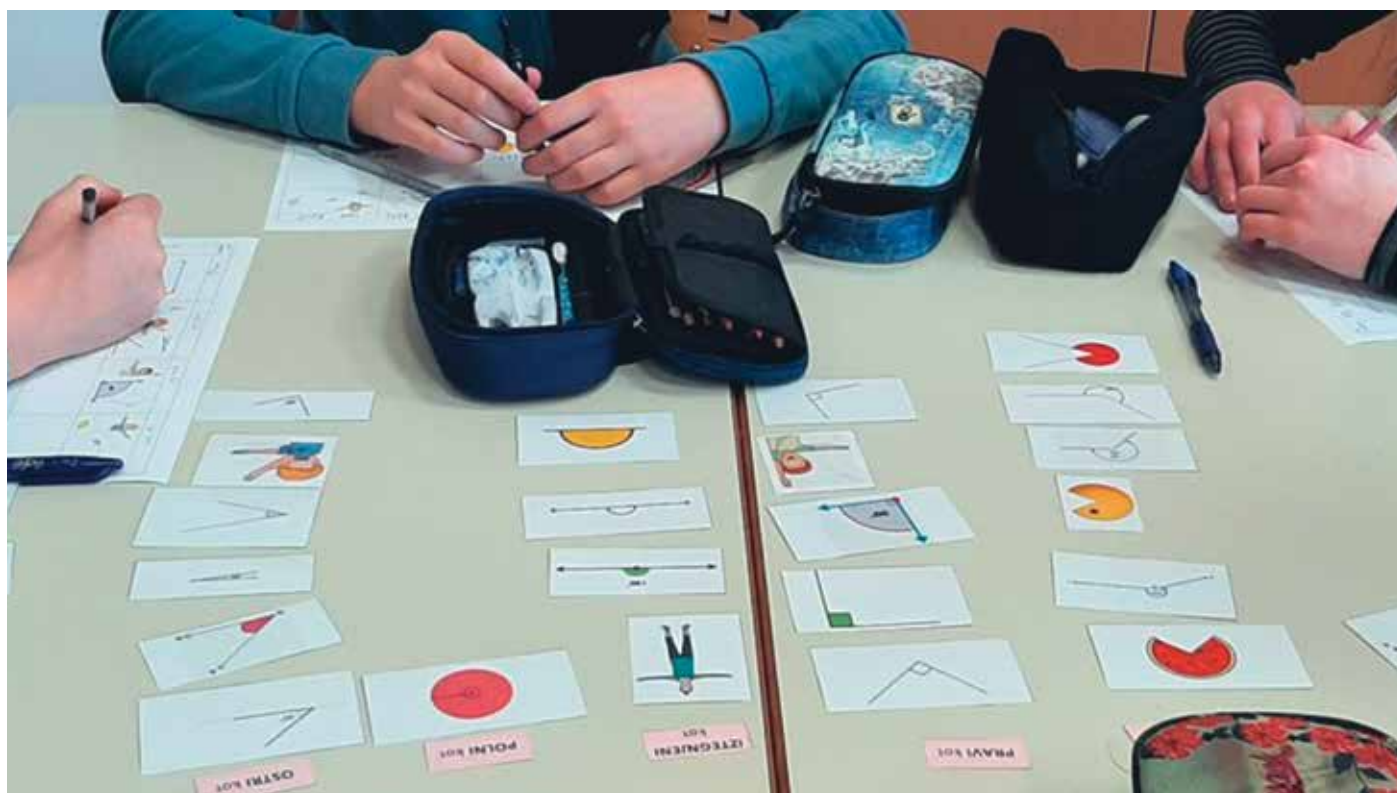
Pri tej aktivnosti učenci primerjajo vsaj dva matematična elementa (npr. števila, like, funkcije) ter iščejo in zapisujejo njihove skupne lastnosti in razlike. Aktivnost zahteva natančno opazova-

nje in rabo matematičnih terminov. Diskusije med učenci spodbujajo argumentirano izražanje mnenj, soočanje idej ter poglobljanje razumevanja konceptov. Aktivnost je posebej primerna za delo v manjših skupinah, kjer učenci sodelujejo in se medsebojno učijo. Na Sliki 9 je prikazan rešen delovni list za aktivnost iskanja skupnih lastnosti in razlik, ki so jih učenci iskali na primeru treh parov ulomkov.

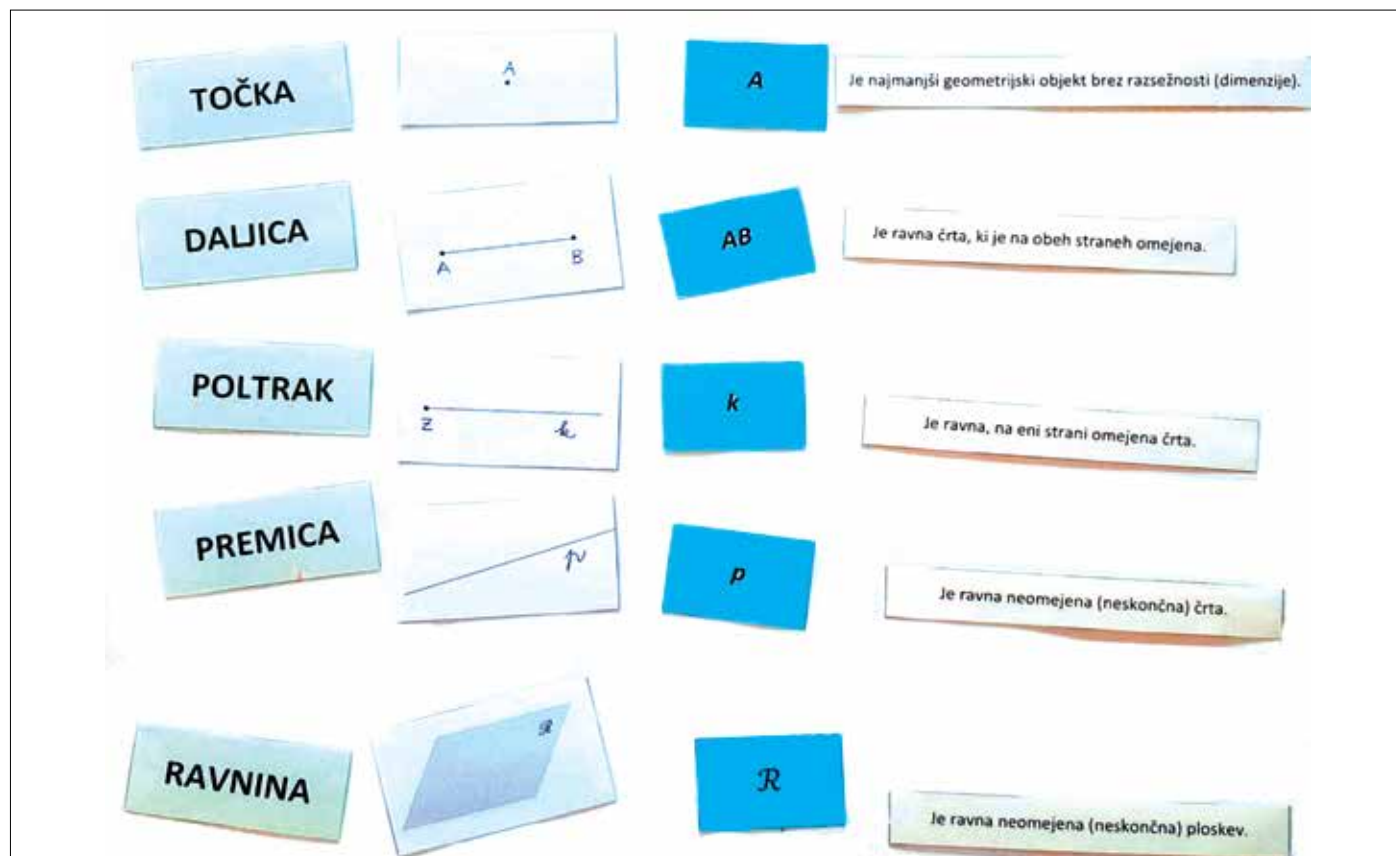
6. Spisi z matematično vsebino

Pisanje daljših besedil z matematično vsebino je kompleksna aktivnost, kjer učenci pokažejo razumevanje matematičnih konceptov, postopkov in izrazoslovja. Aktivnost lahko poteka v treh fazah:

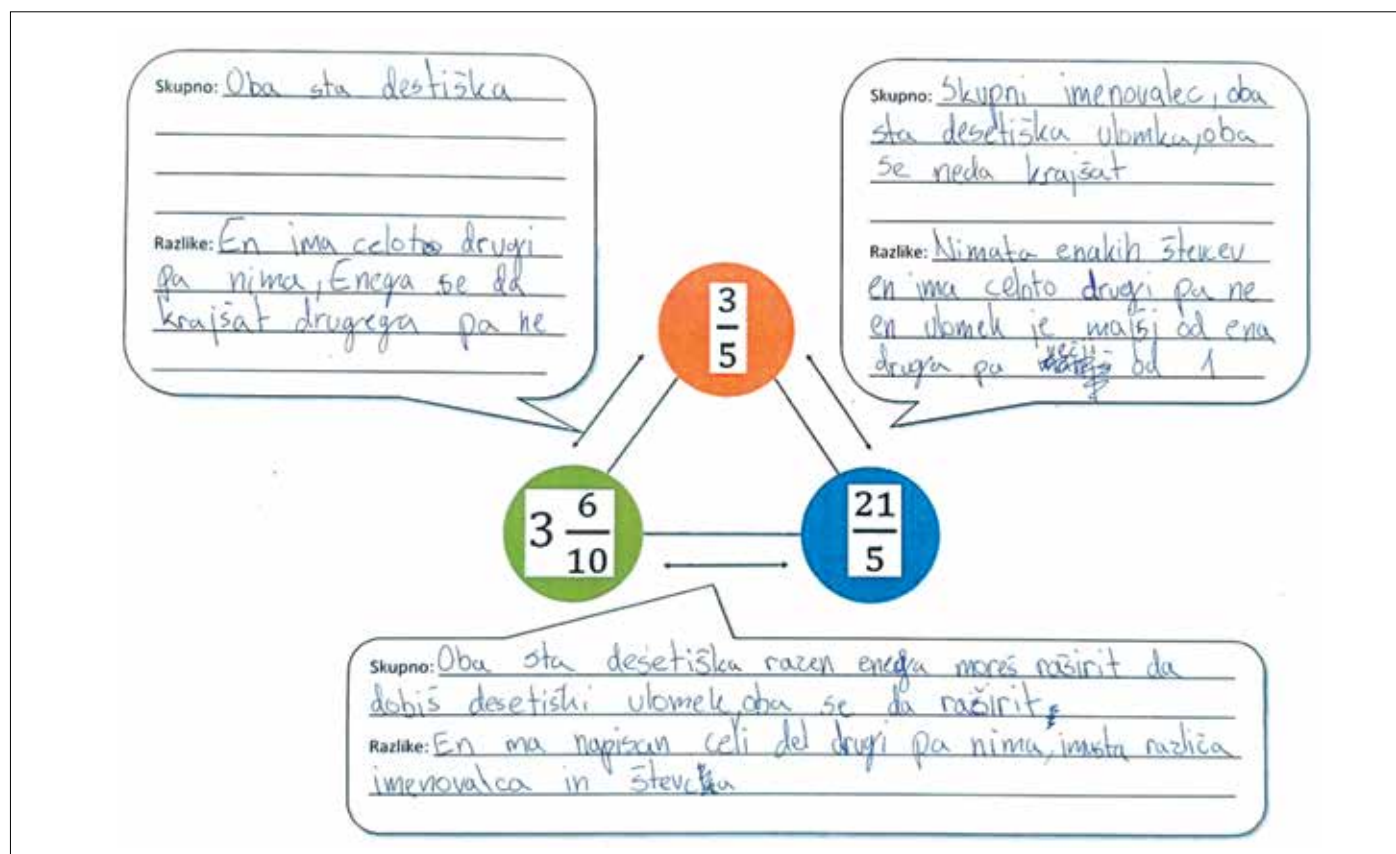
- **Prva faza:** Pisanje spisa
Učenci glede na jasna navodila in kriterije uspešnosti opišejo določeno temo, razlagajo in primerjajo postopke ali lastnosti itd.
- **Druga faza:** Vrstniška povratna informacija
Učenci si med seboj preberejo besedila in podajo povratne informacije glede na kriterije uspešnosti. Poudarijo, kar je v besedilu dobro napisano, ter opozorijo na ustrezno



Slika 7: Učenci 6. razreda pri aktivnosti »Koti«.



Slika 8: Rešen primer aktivnosti »Osnovni geometrijski pojmi«, 6. razred.



Slika 9: Rešen delovni list učenca za aktivnost iskanja skupnih lastnosti in razlik danih ulomkov.

rabo matematičnega jezika, jasnost razlage in pravilnost morebitnih opisanih postopkov. Podajo si tudi nasvete za izboljšavo, s pomočjo katerih bodo lahko avtorji izboljšali svoja dela.

- **Tretja faza:** Učenci izboljšajo svoj spis na podlagi dobljene povratne informacije, s čimer poglobijo svoje razumevanje in natančnost izražanja.

Izvedeni aktivnosti na delavnici konference KUPM 2024

Na Konferenci o učenju in poučevanju matematike – KUPM 2024 so udeleženi-

ci v delavnici *Matematično besedišče kot orodje za boljše razumevanje matematičnih konceptov* (Canzutti, 2024) preizkusili dve aktivnosti:

1) Izdelava učne poti:

Vsaka skupina je izdelala eno učno pot. Izbirali so med temami: racionalna števila (6. razred), štirikotniki (7. razred), večkotniki (8. razred) in geometrijska telesa (9. razred). Po želji so lahko izbrali drugo temo. Udeleženci so k vsaki postaji na učni poti pripisali ustrezne matematične termine (Slika 10). Aktivnost je učiteljem omogočila praktično izkušnjo dejavnosti, ki spodbuja razvoj matematičnega besedišča.

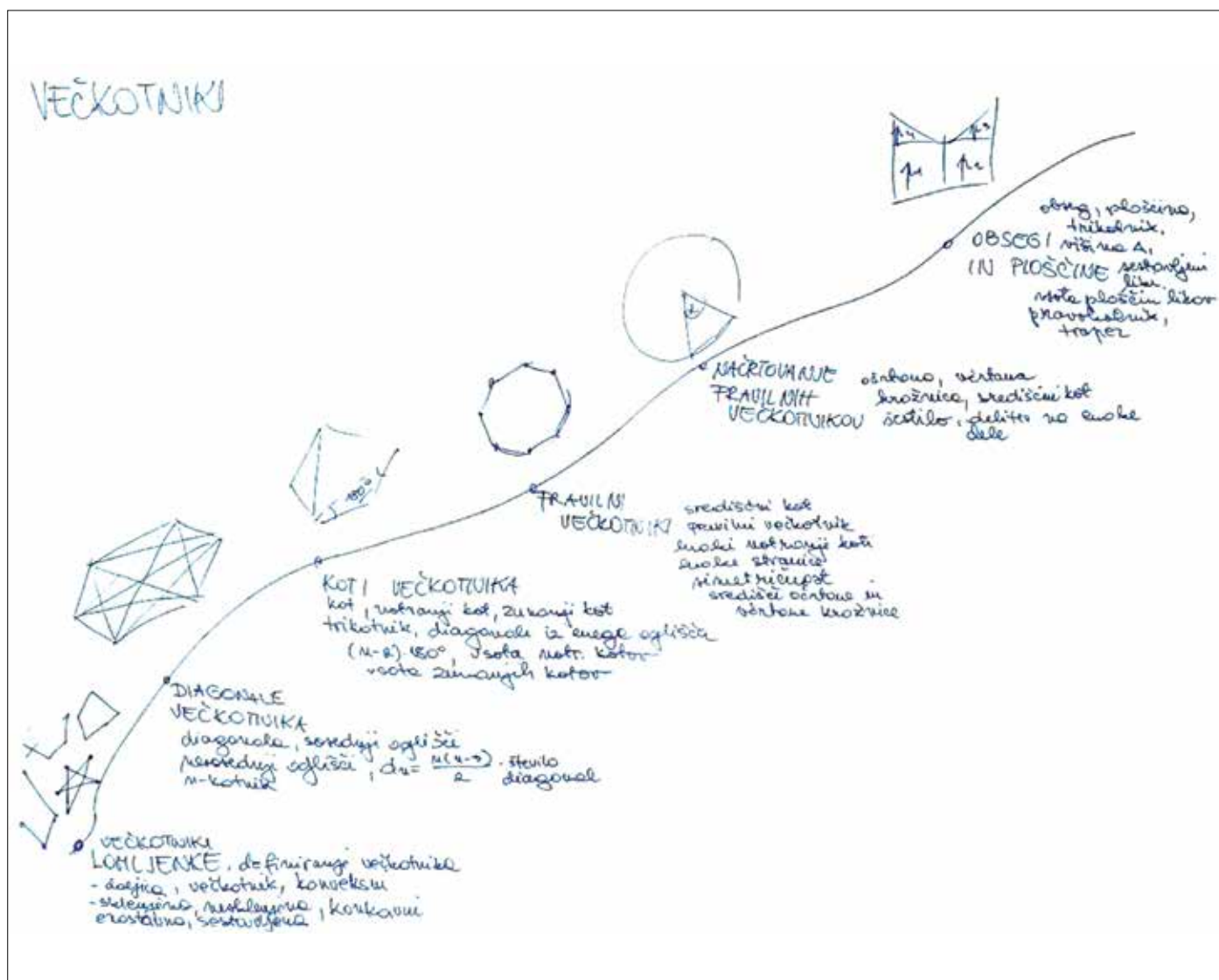
2) Skupne lastnosti in razlike:

Udeleženci so se najprej preizkusili z aktivnostjo, kjer so poiskali in zapisali

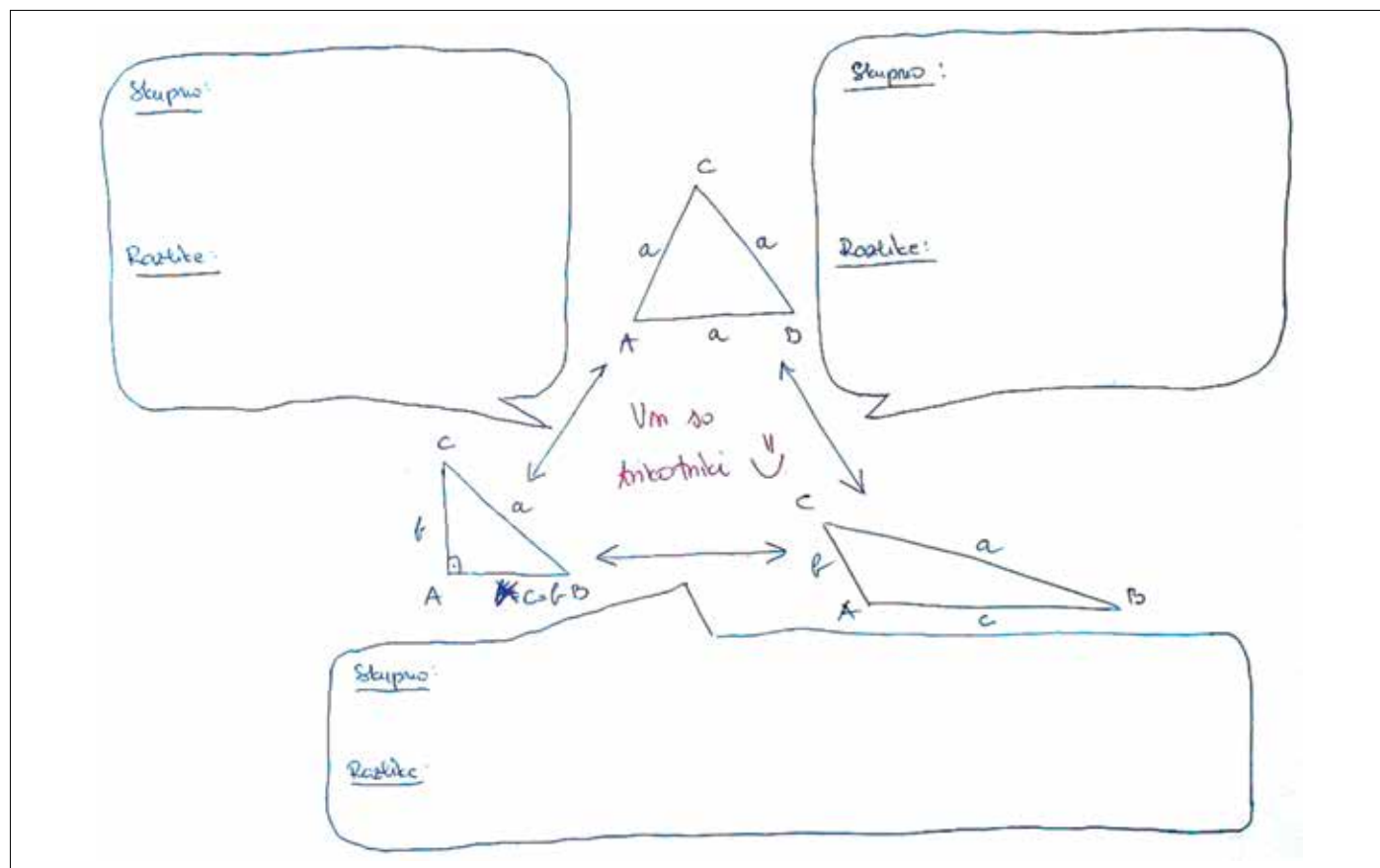
skupne lastnosti in razlike treh parov števil, kot je prikazano na Sliki 9.

Nato so po skupinah izbrali vsebine iz prej narejenih učnih poti in oblikovali naloge (Slika 11 in Slika 12), kjer so primerjali matematične pojme z vidika njihovih podobnosti in razlik. S to aktivnostjo smo pokazali, kako lahko razprava spodbuja kritično mišljenje.

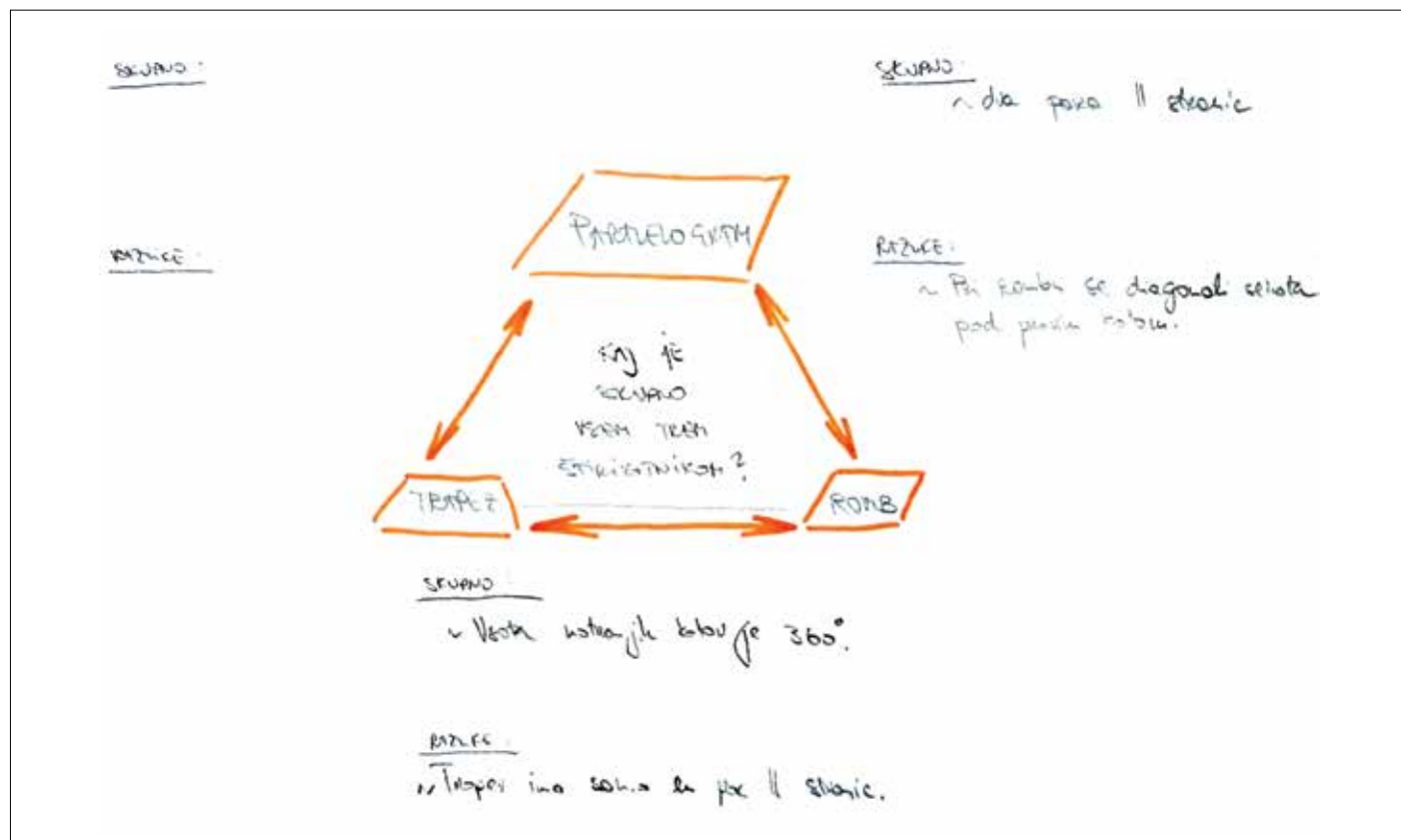
Učitelji so na delavnici pridobili praktične strategije, ki jih lahko vključijo v svoje poučevanje, kar bo lahko dolgoročno prispevalo k izboljšanju rabe matematičnega besedišča pri učencih.



Slika 10: Primer učne poti, ki so jo izdelali udeleženci delavnice.



Slika 11: Primer naloge »Skupne lastnosti in razlike trikotnikov«, ki so jo izdelali udeleženci delavnice.



Slika 12: Izdelek udeležencev delavnice: »Skupne lastnosti in razlike štirikotnikov«.

Zaključek

Matematično besedišče je več kot le nabor terminov – je orodje, ki odpira vrata do kritičnega mišljenja, ustvarjalnosti, poglobljenega razumevanja in samozavestnejšega izražanja svojih idej. Z načrtno uporabo opisanih aktivnosti učitelji pri učencih ne gradimo zgolj jezikovne spretnosti, temveč tudi oblikujemo učence, da bodo kritični misleci, sodelovalni partnerji in samostojni raziskovalci.

Učitelje vabimo k preizkušanju predstavljenih strategij in deljenju svojih izkušenj, saj skupaj ustvarjamo prostor za uspešno učenje matematike.

»Daj učencem besede,
da izrazijo svoje misli,
in dal jim boš sposobnost,
da svoje ideje oblikujejo,
sprašujejo in ustvarjajo.«

OpenAI, 2024

Literatura in viri

Canzutti, A. (2024). *Matematično besedišče kot orodje za boljše razumevanje matematičnih konceptov* (delavnica). KUPM 2024. <https://kupm.zrss.si/matematicno-besedisce-kot-orodje-za-boljse-razumevanje-matematicnih-konceptov-delavnica/>

Hattie, J. (2018). Vidno učenje za učitelje: Maksimiranje vpliva na učenje. Griže: Svetovalno-izobraževalni center MI.

Hattie, J., Fisher, D., in Frey, N. (2017). *Visible learning for mathematics: What works best to optimize student learning*. Corwin.

OpenAI. (2024). ChatGPT (GPT-4, 5. 11. 2024) [generativni jezikovni model]. <https://chat.openai.com/>

(Ukaz: »Pravkar sem naredila tudi powerpoint predstavitev, s katero sem zelo zadovoljna. Na zadnjo prosojnico sem zapisala "Hvala za vašo pozornost in sodelovanje." Rada pa bi dodala še kakšen smislen citat, ki bi bil vmesen, navdihujoč, spodbuden za učitelje in primere za zaključek predstavitev, ki sem ti jo pravkar naložila. Citat naj vsebuje, če se da, besede: besedišče, jezik, poznavanje strokovnih (matematičnih) terminov. Napiši 5 citatov.«)

Odgovor orodja UI:

»

1. "Besede so orodja misli; ko učenci obvladajo strokovni jezik, odklenejo nova vrata do razumevanja."
– Neznani avtor
2. "Matematika je univerzalni jezik, toda brez ustreznega besedišča jo je težko razumeti in deliti."
– Neznani avtor
3. "Daj učencem besede, da izrazijo svoje misli, in dal jim boš sposobnost, da svoje ideje oblikujejo, sprašujejo in ustvarjajo."
– Neznani avtor
4. "Bogato matematično besedišče omogoča učencem, da oblikujejo misli in gradijo vezi med koncepti – je most med razumevanjem in izražanjem."
– Neznani avtor
5. "Poznavanje pravega besedišča pomeni več kot le učenje definicij; pomeni opolnomočenje učencev, da sami raziskujejo in razumejo svet."
– Neznani avtor

Ti citati poudarjajo moč jezika in terminologije v učnem procesu ter spodbujajo učitelje k temu, da učencem omogočajo dostop do bogatega besedišča. «

Naravoslovni dan

Science Day

Lidija Venko
Osnovna šola Pod goro Slovenske Konjice

Izvleček

V članku je predstavljen naravoslovni dan v 6. razredu z uporabo matematičnih vsebin. Opisana je izvedba praktičnega dela v razredu in na terenu. Prikazane so vsebine z uporabo matematičnega znanja obsega, ploščine, površine, kroga in rimskih števil. Ob nalogah, ki so jih učenci reševali, so opisani matematični problemi z uporabo pridobljenega znanja pri pouku matematike. Nakazane so tudi težave, s katerimi so se učenci srečevali pri reševanju. Predstavljene so oblike sodelovanja med učenci.

Ključne besede: matematika v praksi, terensko delo, sodelovanje

Abstract

This article details a sixth-grade science day centred on mathematics, showcasing how to integrate practical activities in the classroom and during fieldwork. The activities are structured around key mathematical concepts, such as volume, area, surface area, circle and Roman numerals. The article outlines the mathematical challenges posed to students, how they applied their classroom knowledge to solve them, and the dilemmas that occurred. Additionally, the paper explores the diverse forms of collaborative learning.

Keywords: mathematics in practice, fieldwork, collaboration

Uvod

Matematika je abstraktna in sistematična znanost, ki se ukvarja z raziskovanjem števil, količin, oblik, struktur in njihovih medsebojnih odnosov. Je ena najstarejših znanstvenih disciplin. Matematika je osnova za razvoj drugih ved in ima pomembno vlogo pri reševanju različnih problemov v vsakdanjem življenju ter napredku družbe kot celote. Igra ključno vlogo v izobraževalnem sistemu in spodbuja razvoj kritičnega razmišljanja, reševanja problemov in logičnega sklepanja (Chat GPT, 2023).

Matematika omogoča natančen in sistematičen način razmišljanja. Uporablja se za razvoj tehnologije, raziskovanje vesolja, načrtovanje infrastrukture, reševanje gospodarskih izzivov in še veliko več. Matematika je osnova za številne inovacije in prispeva k napredku človeštva na mnogih področjih. Pomembno je, da otrokom predstavimo matematiko kot zabavno in uporabno ter da spodbujamo njihovo radovednost. S pozitivnim pristopom in ustvarjalnimi metodami lahko pomagamo otrokom razviti trdne temelje v matematiki in spodbujamo njihovo matematično mišljenje (Chat GPT, 2023).

Po pogovorih z učenci in starši lahko sklepamo, da je matematika na naši šoli priljubljen predmet, takoj za športom. Pravijo, da zato, ker čas med uro hitro mine, ker se je ni treba učiti ... Veliko vsebin pri matematiki je uporabnih, življenjskih, in prav je, da učitelj že med samo razlago pri obravnavi vsebin na to opozori.

V *Konceptu dni dejavnosti* (1998) je zapisano, da učenci pri pouku pridobljena teoretična znanja aktivno in sistematično dopolnjujejo na dnevih dejavnosti. To je tisti del obveznega programa osnovne šole, kjer medpredmetno povezujejo discipline in medpredmetna področja, vključena v predmetnik osnovne šole. Njihovo vsebino in organizacijsko izvedbo določa letni delovni načrt šole. Dnevi dejavnosti spodbujajo vedoželjnost, aktivnost, ustvarjalnost in samoiniciativnost učenek ter učencev, jih usposablja za samostojno opazovanje in pridobivanje izkušenj ter znanja, za razvijanje spretnosti ter za samostojno reševanje problemov. Ob teh dejavnostih učenci in učenke znanje različnih področij med seboj povezujejo v celoto. Nadalje je v *Konceptu dni dejavnosti* zapisano, da naravoslovni dnevi vsebujejo naslednja področja: biologijo, kemijo, fiziko, astronomijo, gospodinjstvo, geologijo, fizično geografijo, matematiko. Težišče dejavnosti pri oblikovanju naravoslovnega dne izhaja iz naravoslovja.

V 6. razredu imajo učenci v šolskem letu tri naravoslovne dni. Na naši šoli sta dva naravoslovna dneva vsebinsko povezana s poukom naravoslovja, tretji pa je bil v šolskem letu 2022/23 prvič povezan s področjem matematičnih vsebin. Med šolskim letom sem razmišljala, katere vsebine bi bile primerne, zanimive, uporabne in izvedljive. Odločila sem se za vsebine iz geometrije in aritmetike. Naravoslovni dan sem izvedla v zadnjem tednu šolskega leta. Do takrat so bile predelane učne vsebine, na razpolago je bilo več učilnic, učiteljev in primerno vreme za terensko delo.

Cilji naravoslovnega dne

Učenci na praktičnih primerih povezujejo teorijo s prakso in ponovijo matematične pojme v povezavi s ploščino, obsegom, površino, polmerom in premerom krožnice. Samostojno rišejo, izrezujejo, sestavljajo in preizkušajo mreže kocke in kvadra. Spoznajo, da je matematika prisotna v različnih življenjskih situacijah. Medsebojno si pomagajo in sodelujejo v skupinskem praktičnem delu.

Cilji iz učnega načrta za matematiko, ki jih realiziramo z navedenimi dejavnostmi na naravoslovnem dnevu, so:

Učenci:

- poznajo rimske številke, znake,
- zapišejo in preberejo števila, zapisana z rimskimi številkami,
- poznajo enote za merjenje dolžine in odnose med njimi,
- spoznajo ploščinske enote kvadratni meter, ar, hektar in jih povežejo s primeri iz vsakdanjega življenja,
- računajo s ploščinskimi enotami,
- izračunajo obseg kvadrata z dano dolžino stranic,
- opredelijo pojem mreža telesa in oblikujejo različne mreže,
- usvojijo pojem polmer in premer kroga,
- usvojijo in razlikujejo med pojmom krožnica in krog.

Poleg navedenih ciljev smo učence spodbujali k ocenjevanju meritev, učenci so se urili v strategijah poskušanja in uporabe geometrijskega orodja.

Izvedba naravoslovnega dne

Navodila za izvedbo naravoslovnega dne so učenci dobili pri uri matematike dva dni pred naravoslovnim dnevom. Izvedeli so, kaj bodo počeli, katere pripomočke bodo potrebovali (zvezek, škarje, lepilo, svinčnik, barvice/flomastri, beli listi, dolga šablona, podlaga, magnetni model kocke in kvadra), kako morajo biti oblečeni in obuti. Naravoslovni dan je trajal pet šolskih ur in je bil razdeljen na tri dele.

V prvem in drugem delu je bil razred razdeljen na dve skupini. V drugem delu se je učitelju v vsaki skupini pridružil še dodatni učitelj, v tretjem delu pa je sledila evalvacija dela.

PRVI DEL – DELO V RAZREDU (dve šolski uri)

Oblikovanje skupin

V vsaki skupini so učenci oblikovali tri skupine (3–4 učenci v skupini). Učitelj je pri oblikovanju skupin upošteval želje učencev.

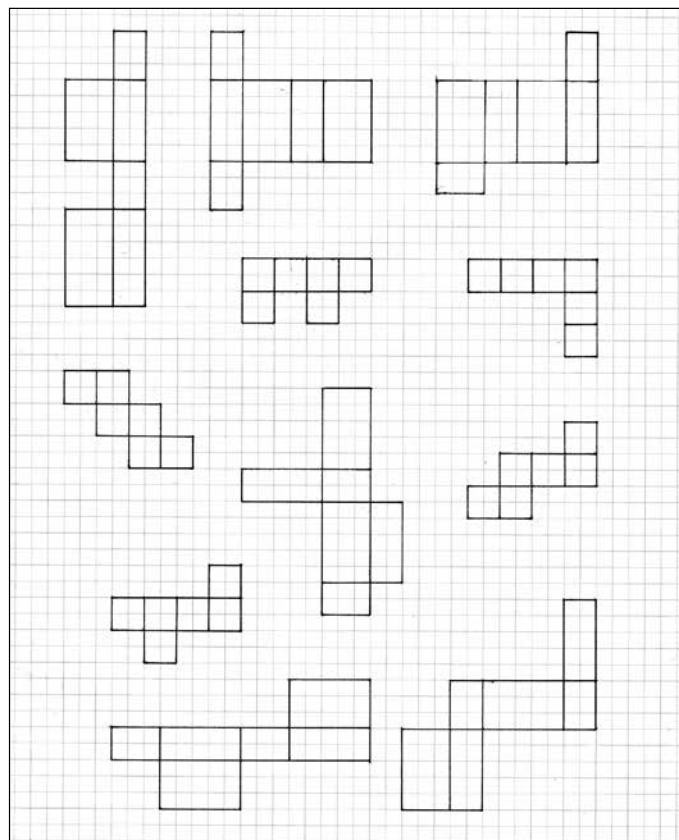
Sestavljanje in prepogibanje mreže kocke in kvadra

Na modelu kocke in kvadra so ponovili njune lastnosti (število mejnih ploskev, liki, ki ju omejujejo, število robov, oglišč).

Dani model kocke in kvadra so razstavili tako, da je nastala mreža kocke oz. kvadra. Učenci so magnetne mejne ploskve obeh

teles poljubno prestavljali tako, da so dobili različne možnosti mrež. Utemeljili so, katere možnosti so napačne in zakaj.

Na listu so dobili več narisanih mrež obeh teles (Slika 1). V skupini so se posvetovali, iz katerih mrež lahko sestavijo kocko oz. kvader in iz katerih tega ne morejo narediti ter zakaj ne. Vsak učenec je izrezal vsaj eno mrežo, iz katere je po prepogibanju nastalo geometrijsko telo, in jo z eno mejno ploskvijo prilepil v zvezek. V skupini so primerjali svoje izdelke.



Slika 1: Narisane mreže. (Vir: lasten.)

Načrtovanje mreže kocke in kvadra

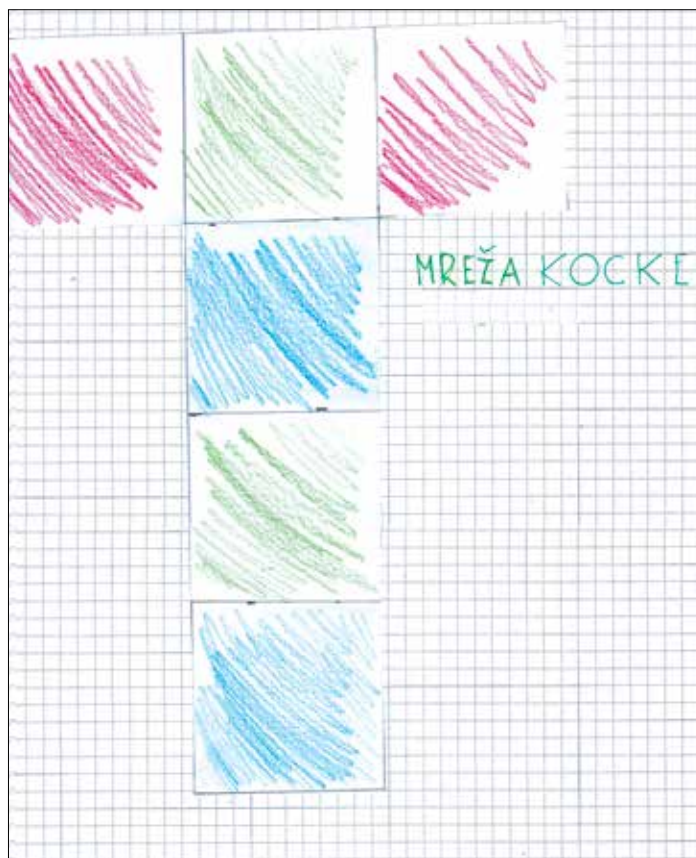
Sledilo je načrtovanje mreže kocke in kvadra. Učenci so dobili naslednje navodilo:

Nariši mrežo kocke ($a = 55 \text{ mm}$) in kvadra ($a = 75 \text{ mm}$, $b = 5 \text{ cm}$ in $c = 35 \text{ mm}$), pobarvaj nasproti ležeči mejni ploskvi z isto barvo, mrežo izreži in jo z eno mejno ploskvijo prilepi v zvezek.

Pri načrtovanju mreže kvadra so imeli učenci s slabšo prostorsko predstavljivostjo težave z določanjem nasproti ležeče mejne ploskve. Pomagali so jim uspešnejši učenci. Če pomoč sošolcev ni zadoščala, je pomagal tudi učitelj.

Rimske številke

Ponovili smo zapis rimskih števil. Naredili smo nekaj konkretnih primerov, kako arabsko številko zapišejo z rimskimi števil-



Slika 2: a) mreža kvadra v zvezku, b) mreža kocke v zvezku. (Vir: lasten.)

kami in obratno. Rimske številke so učenci uporabili v drugem delu naravoslovnega dne.

Izdelava letala iz papirja

Sledila je zabavna praktična naloga, v kateri so učenci z medsebojno pomočjo s prepogibanjem iz papirja formata A4 naredili poljubno letalo. Ob dani nalogi je učitelj opazil veliko razliko med spoloma. Uspešnejši so bili dečki, večina deklic pa je nalogo uspešno opravila s pomočjo sošolcev. Načini zgibanja so bili različni in prepuščeni iznajdljivosti ter ustvarjalnosti učencev. Tekmovanje letal so preizkusili na terenu v drugem delu naravoslovnega dne.

DRUGI DEL – DELO V OKOLICI ŠOLE (dve šolski uri)

Učenci so v razredu dobili navodila za delo v okolici šole. Posebej so bili opozorjeni na primerno obnašanje na pokopališču. Dobili so delovni list, na katerega so reševali naloge na terenu.

Pripomočki: zvezek, pisalo, meter (kolut z dolžino 20 m), šest palic (dolžina 0,5 m), debelejša krede, vrvica (1–2 m), papir formata A4, delovni list za učence (delovni list na terenu)

Naloga 1

Prva skupina je odšla na bližnje pokopališče (sedem minut hoje) in je z nagrobnih spomenikov v okolice cerkvice sv. Ane izpisala

pet poljubnih letnic rojstva in smrti ter jih je zapisala z rimskimi številkami. Izračunati so morali tudi starost teh oseb v letih. Nalogo so opravili individualno ali v paru in izpolnili delovni list. Nekaj učencev je imelo težave pri računanju starosti oseb, saj niso vedeli, katero število je odštevanec in katero zmanjševanec. Bili so presenečeni, da so nekateri živeli samo nekaj mesecev, spet drugi pa preko devetdeset let. Učenci so bili na pokopališču prostorsko in časovno omejeni. Z zapisom rimskih števil niso imeli večjih težav. Nekateri učenci so pozabili posamezne znake in pravila za zapis rimskih števil.

Naloga 2

Na poti s pokopališča proti parku Trebnik so se ustavili na asfaltne parkirišču, kjer so opravili nalogo risanja krožnice. Zastavljen jim je bil problem, kako naj narišejo krožnico s polmerom en meter na sredini košarkarskega igrišča. Ugotovili so, da nimajo tako velikega šestila. S pomočjo učiteljevih podvprašanj so posamezniki poiskali rešitev.

Ponovili smo pojma polmer in premer krožnice ter razliko med pojmom krog in krožnica. Nato je vsak par učencev z vrvico in s kredo narisal krožnico. En konec vrvice sta učenca privezala na palico, drugi pa na odebeljeno barvno kredo. Izmerila sta polmer in z iztegnjeno vrvico narisala krožnico.

Naloga 3

Preden smo prispeli v park Trebnik, smo izvedli tekmovanje s papirnatimi letali. Na bližnjem travniku sta učenca istočasno vrgla vsak svoje iz papirja izdelano letalo. Učenec, katerega letalo je letelo najdlje, se je pomeril z naslednjim sošolcem. Tekmovanje

NARAVOSLOVNI DAN - 6. RAZRED

Ime in priimek: _____

1. Z nagrobnih spomenikov izpiši pet imen in priimkov, njihove datume rojstva in smrti, nato pa še datume rojstva in smrti zapiši z rimskimi številkami ter izračunaj starost osebe.

	IME IN PRIIMEK	DATUM ROJSTVA	DATUM SMRTI	ZAPIS DATUMA ROJSTVA Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI	ZAPIS DATUMA SMRTI Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI	STAROST OSEBE
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

2. Izračunaj obseg kvadratnega zemljišča, ki ima površino en ar.

3. Koliko stane 6,5 arov zemljišča, če stane en ar 8500 evrov?

4. Iz papirja izdelaj letalo in se podpiši nanj.

Slika 3: Delovni list na terenu.

je trajalo tako dolgo, dokler nismo dobili zmagovalca. Učenci so sklepali, da na to, kako daleč letalo poleti, vpliva več dejavnikov. Pojasnili smo, da na to vplivajo veter, način zgibanja letala, debelina zgibanega papirja, način, kako porinejo letalo v zrak. Učenci so ocenili dolžino poleta letala. Oceno so nato preverili z meritvijo. Ob dani nalogi so učenci zelo uživali.

Sledilo je reševanje računskih nalog na delovnem listu.

- Izračunaj obseg kvadratnega zemljišča, ki ima površino en ar.
- Koliko stane 6,5 ara zemljišča, če stane en ar 8500 evrov?



Slika 4: Tekmovanje s papirnatimi letali.

Naloga 4

Nalogo smo izvedli na travniku parka Trebnik. Ponovili smo pojma obseg in ploščina ter merske enote za ploščino (kvadratni meter, ar, hektar in pretvornike med njimi).

Učenci so dobili nalogo, da v skupini (štirje učenci) s koraki določijo kvadratno zemljišče v velikosti enega ara. Na začetku so izmerili, da je njihov korak dolg približno en meter. Nato so v eno oglišče zapičili palico, naredili deset korakov in označili drugo oglišče. S koraki so določili še tretje in četrto oglišče. Dolžino kvadratnega zemljišča so nato preverili z metrom. Dobili so različne dolžine kvadratnega zemljišča, zato so sklepali, da se dolžine njihovih korakov razlikujejo med seboj.



Slika 5: Izmera ara.

Druga računaska naloga je učencem povzročala nekaj težav pri postopku in postavitvi decimalne vejice, ki so jo učenci kar izpustili.

Naloga 5

Preden so se učenci vrnili v razred, so šli mimo cerkve sv. Jurija, na kateri je sončna ura z rimskimi številkami. Odčitali so čas na sončni uri, ki pa je kazal eno uro manj. Prvi skupini učencev ni uspelo ugotoviti, zakaj. V drugi skupini pa je en učenec ugotovil, da sončna ura kaže eno uro manj zato, ker smo kazalce na uri prestavili na poletni čas za uro naprej.



Slika 6: Sončna ura na cerkvi sv. Jurija.

DEL – EVALVACIJA DELA (učilnica, ena šolska ura)

Druga skupina je naloge opravljala v nasprotni smeri in zadnjo uro sta se skupini združili. Evalvacijo naravoslovnega dne je učitelj skupaj z učenci naredil v razredu. Učenci so si med seboj preverili urejenost prilepljenih in narisanih mrež kocke in kvadra, računski nalogi na delovnem listu ter preglednico z arabskimi in rimskimi številkami.

Učitelj se je z učenci pogovoril o tem, s katerimi matematičnimi vsebinami so se na naravoslovnem dnevu srečali, kje so imeli težave in kako so jih reševali. Povprašal jih je tudi, kako so si razdelili delo v skupini, kako so sodelovali in kaj bi naslednjič izboljšali.

Učencem je bil naravoslovni dan všeč. Kljub temu da je bil dan izveden le dva dneva pred počitnicami, so bili za delo motivirani. Med seboj so sodelovali, si pomagali. Posebej jim je bilo všeč, ker je bilo delo praktično naravnano in so velik del časa preživeli v naravi.

Sklepne misli

Učitelj je bil z izvedenim naravoslovnim dnevom zadovoljen. Organizacija dela je bila odlična in je potekala nemoteno. Vsebine, ki jih je izbral, so bile dovolj zanimive, uporabne in motivacijske za učence. Presenetila ga je delovna vnema učencev. Opazoval in spremljal je iznajdljivost učencev v novih situacijah in njihovo uporabo znanja v praktičnih primerih. Opazil je, da so bili nekateri učenci pri delu v učilnici (načrtovanje mreže) počasni in nespretni, pri delu v okolici šole pa praktično naravnani, iznajdljivi in pripravljeni pomagati drug drugemu. Pozitivno so ga presenetili učenci, ki so kazali veliko zanimanje za vse ponujene naloge na naravoslovnem dnevu in so bili ves čas aktivni, čeprav so se prav tako srečali z ovirami, ko naloge niso znali rešiti takoj. V tem primeru so vztrajali, se posvetovali v skupini s preostalimi sošolci in ponovno iskali rešitev. Naslednjič bi učitelj otroke na naravoslovnem dnevu razdelil v čim manjše skupine, ki bi bile heterogene, da bi lahko spretnější učenci pomagali manj spretnim. Učitelj zelo težko pomaga vsakemu posebej.

Vreme v zadnjih junijskih dneh je bilo izjemno vroče. Čeprav so bili učenci primerno oblečeni, imeli so pokrivalo, vodo, so težko prenašali vročino. Naslednjič bi bilo ob takšnih vremenskih situacijah zato smiselno najprej izvesti delo na terenu in šele nato v razredu.

Viri in literatura

Učni načrt. (2011). *Program osnovna šola Matematika*. Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. https://www.gov.si/assets/ministrstva/MIZS/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/obvezni/UN_matematika.pdf.

Koncept dni dejavnosti. (1998). Ministrstvo za izobraževanje: Drugi konceptualni dokumenti. https://www.gov.si/assets/ministrstva/MVI/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/Drugi-konceptualni-dokumenti/Dnevi_dejavnosti.pdf.

Orodja umetne inteligence OpenAI ChatGPT. (2023, 24. september). <https://chat.openai.com/>.

Nadarjeni in potencialno nadarjeni dijaki pri pouku matematike

Gifted and Potentially Gifted Students in Mathematics

Jasna Kvenderc Medvešek

Šolski center Novo mesto, Srednja elektro-računalniška šola in tehniška gimnazija

Izvleček

Članek se osredotoča na delo z nadarjenimi in potencialno nadarjenimi dijaki pri pouku matematike. Predstavljeno je, kako lahko med učno uro matematike integriramo različne metode in oblike dela s pomočjo različnih didaktičnih pristopov in strategij. Naloga učitelja nadarjenega dijaka je, da ga v prvi vrsti prepozna ter ga nato ustrezno vodi skozi srednješolsko vertikalo znanja. Namen članka je predstaviti tri primere učne prakse pri pouku matematike. Cilj učnih ur je, da dijaki s pomočjo poliedrov ugotovijo Eulerjevo poliedrsko formulo. Prav tako s pomočjo programov dinamične geometrije spoznajo Eulerjevo premico ter preiščejo logotip za McDonald's. V zaključnem delu članka je predstavljen primer uporabe programske opreme OpenSCAD, kjer imajo priložnost spoznavati prostornine narisanih geometrijskih teles. Z izvedenimi učnimi urami nadarjenim in potencialno nadarjenim dijakom ponudimo priložnost, da preiskujejo, se ob dejavnostih ter aktivnostih dopolnjujejo, ob aktivnostih pojasnjujejo svoje razumevanje, interpretirajo problemsko situacijo in predlagajo rešitve.

Ključne besede: nadarjen dijak, pouk matematike, primeri učne prakse, učitelj

Abstract

This article investigates ways of working with gifted and potentially gifted students in the mathematics classroom, focusing on diverse didactic approaches and teaching methods. The process begins with identifying gifted students and guiding them through progressively advanced concepts within the secondary school mathematics curriculum. The article includes three teaching examples designed to engage and challenge these students: deriving Euler's polyhedral formula through polyhedral exploration, studying the Euler line with dynamic geometry software and analysing the McDonald's logo as a mathematical inquiry, and using OpenSCAD software to explore the volumes of geometric solids designed by students. These activities encourage gifted and potentially gifted students to study mathematical concepts, collaborate, clarify their understanding, interpret problem scenarios, and propose creative solutions.

Keywords: gifted students, mathematics instruction, instructional strategies, teacher

1 Uvod

Povsem napačno razmišljanje je, da nadarjenost zadostuje, da bo mladostnik uspešen. Pozabljamo, kako pomembno je, da mladostniku nudimo primeren okolje, da se bo njegova nadarjenost lahko optimalno razvila. Pomembne so spodbude iz okolja, ki mladostnika obdaja; osebe, s katerimi je v vsakdanjem stiku; odnos, ki ga ima s temi osebami; vzgoja, ki je je deležen, ter zgledi in spodbude, ki jih dobi od zanj pomembnih oseb.

Pomembno je, da pri pouku upoštevamo vsakega posameznika ter da pouk kar v največji meri individualiziramo in diferenciramo. Le tako bomo dosegli, da bo vsak posameznik napredoval tako hitro in tako daleč, kot zmore, da bo lahko uresnil svoje želje, potrebe in interese.

Nadarjeni posamezniki potrebujejo posebno pozornost, drugačne vzgojno-izobraževalne pristope, drugačne učne oblike in metode, drugačne naloge in zadolžitve, predvsem pa spodbudno okolje ter možnost, da svoje potenciale, potrebe in interese razvijejo do najvišje mogoče stopnje.

2 Nadarjeni učenci in dijaki

Nadarjeni učenci so učenci, ki izkazujejo visoko nadpovprečne sposobnosti mišljenja ali izjemne dosežke na posameznih učnih področjih, v umetnosti ali športu. Osnovna šola tem učencem zagotavlja ustrezne pogoje za vzgojo in izobraževanje tako, da jim prilagodi vsebine, metode in oblike dela pri pouku ter jim omogoči vključitev v ustrezno dejavnost razširjenega programa (ZOsni-K, 2024).

V konceptu *Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci v devetletni osnovni šoli*

je zapisano, da so – v skladu z ameriško opredelitvijo, zapisano v njihovem zakonu o izobraževanju iz leta 1978 – nadarjeni in talentirani tisti otroci in mladostniki, ki so bodisi na predšolski stopnji bodisi v osnovni ali srednji šoli pokazali visoke dosežke ali potencialne na intelektualnem, ustvarjalnem, specifično akademskem, vodstvenem ali umetniškem področju in ki poleg rednega šolskega programa potrebujejo posebej prilagojene programe in aktivnosti. Torej med nadarjene in talentirane po tej opredelitvi štejemo tako tiste z dejanskimi visokimi dosežki kot tudi tiste s potencialnimi zmožnostmi za take dosežke, in sicer na naslednjih področjih: splošna intelektualna sposobnost, specifična akademska (šolska) zmožnost, kreativno ali produktivno mišljenje, sposobnost vodenja, sposobnost za vizualne in tako imenovane izvajalske umetnosti (Žagar idr., 1999).

V opredelitvi nadarjenosti v *Konceptu vzgojno-izobraževalnega dela z nadarjenimi dijaki v srednjem izobraževanju* je dodano (tega v opredelitvi v konceptu OŠ ni), da »psihomotorične sposobnosti v zadnji ameriški definiciji iz leta 1988 sicer niso posebej izpostavljene, za naše razmere pa velja, da psihomotorično področje ostaja posebno področje nadarjenosti« (Žagar idr., 2007).

Za nadarjenega posameznika velja, da:

- kaže izjemne zmožnosti sklepanja in izrazite sposobnosti ravnanja z idejami;
- z lahkoto posplošuje s specifičnih dejstev in je zmožen videti slabo opazne odnose;
- ima izjemno sposobnost reševanja problemov;
- kaže nenehno intelektualno radovednost, postavlja bistra in prodorna vprašanja;
- kaže izredno zanimanje za nastanek narave, človeka in univerzuma;
- ima širok nabor zanimanj, pogosto intelektualnih;
- razvija svoje interese v pomembne globine;
- je značilno nadpovprečen v količini in kakovosti pisanega in govornega besednjaka: močno ga zanima domiselni izvor besed in njihove uporabe; rad bere knjige, ki so po razumevanju tudi sicer primerne za starejše;
- se hitro in enostavno uči in ohrani tiisto, kar je bilo naučeno;
- iz spomina natančno priključa pomembna dejstva;

- kaže vpogled v aritmetične probleme, ki sicer zahtevajo pazljivo sklepanje in brez oklevanja razume matematične probleme;
- kaže ustvarjalne sposobnosti in domišljiske izraze na področjih, kot so glasba, ples, drama;
- kaže občutljivost in spretnost v ritmu, gibu in gibalnem nadzoru telesa;
- zna zadržati osredotočenost tudi dalj časa in kaže izjemno odgovornost ter neodvisnost pri delu v razredu;
- zna realno postaviti visoke standarde zase, je samokritičen pri vrednotenju in korigiranju svojih lastnih poskusov;
- zna videti problem z več zornih kotov;
- temeljito in poglobljeno opazuje ter se odziva na nove ideje;
- izkazuje socialno in osebno ravnovesje;
- doživlja vznemirjenje in zadovoljstvo pri intelektualnih izzivih in
- izraža čuječnost in prefinjen smisel za humor (Ekspertna skupina, 2019).

3 Vloga in naloga učitelja pri delu z nadarjenimi posamezniki

Učitelj, ki ima v razredu nadarjene učence, mora biti dovolj zrel in sposoben sprejemati posameznike z vrhunskimi sposobnostmi. Za nadarjene dijake najde in oblikuje najboljše pogoje za njihov razvoj, hkrati pa razume in je seznanjen z občutki osamljenosti in frustracije pri nadarjenih dijakih, ki so posledica prehitrega intelektualnega razvoja nad čustvenim in fizičnim.

Učitelj odigra ključno vlogo pri delu z nadarjenimi, saj preživi z dijaki v šoli največ časa in jih ima priložnost dobro opazovati in spoznati z različnih vidikov. Da bo v nadarjene veroval in jih želel odkrivati ter delati z njimi, mora imeti predvsem znanje o nadarjenih in bogate izkušnje dela z njimi. Le učitelj s takim znanjem in veseljem do dela bo lahko uresničeval glavni cilj vzgoje in izobraževanja nadarjenih učencev; to je prepoznavanje in negovanje posebnih sposobnosti (Breceljnik, 2003, str. 83–91).

Če je v razredu nadarjeni dijak, mora učitelj poskrbeti za spodbudno učno okolje. Temeljna načela spodbudnega učnega okolja v heterogenih oddelkih, v katerih tudi nadarjeni lahko učinkovito reali-

zirajo svoje potencialne, so (Instance in Dumont, 2010, str. 317–338) takšna, da so dijaki aktivni udeleženci učnega procesa, da aktivno sodelujejo pri izgradnji in nadgradnji znanja ter izkušenj v con bližnjega razvoja. Osrednja vloga učiteljev pri tem je, da organizirajo učenje; poskrbijo, da je učno okolje socialno in inkluzivno ter da potekajo strukturirane učne interakcije, raznovrstne učne dejavnosti, temelječe na sodelovalnem učenju. Učitelj mora poskrbeti, da učno okolje omogoča razvoj temeljnih spretnosti in veščin za 21. stoletje, kot so kritično mišljenje in inovativnost, komunikacija, sodelovanje in kreativnost. Nadalje se morajo učitelji zavedati pomembnosti motivacije ter temeljne vloge čustev pri učnih dosežkih. Prav tako je pomembno, da je učno okolje personalizirano, prilagojeno individualnim razlikam učencev, vključno z njihovim predznanjem. Učno okolje naj vsebuje vzgojno-izobraževalne/učne programe (vsebine), ki temeljijo na prizadevanju in odgovornem delu, izzivih za vse, a ki niso čezmerno obremenjujoči. Učna pričakovanja naj bodo jasna, strategije ocenjevanja usklajene, velik poudarek je tudi na formativnem spremljanju. Pomembna je tudi horizontalna in vertikalna povezanost med področji znanja in predmeti kot tudi širše z družbo in svetom.

Pomembno je omeniti dvajset najpomembnejših psiholoških načel za delo z nadarjenimi, kot jih navaja Jurišević (2012):

- prepričanja o sposobnostih vplivajo na njihove spoznavne procese in učenje;
- predznanje učencev vpliva na njihovo učenje;
- učenčev spoznavni razvoj in učenje ni sta omejena s splošnimi fazami razvoja;
- podlaga za učenje je kontekst, zato prenos učenja v nove kontekste ni spontan, ampak ga je treba spodbuditi;
- pridobivanje dolgoročnega znanja in spretnosti je v veliki meri odvisno od prakse;
- jasna, pojasnjevalna in pravočasna povratna informacija učencem je pomembna za učenje;
- samouravnavanje učencev pomaga pri učenju;
- učenčevo ustvarjalnost je mogoče spodbujati;
- učenci bolj uživajo pri učenju in so uspešnejši, kadar so bolj motivirani notranje kot zunanje;
- učenci dalj časa vztrajajo pri zahtevnejših nalogah in globinsko procesirajo

informacije, takrat ko jih vodijo cilji obvladovanja namesto cilji dosežkov;

- pričakovanja učiteljev do učencev vplivajo na priložnosti, ki jih učenci posvečajo učenju, na motivacijo učencev in njihove učne dosežke;
- kratkoročni cilji, ki so specifični in zmerno zahtevni, krepijo motivacijo bolj kot dolgoročni cilji, ki so splošni in prezahtevni;
- učenje poteka v različnih socialnih kontekstih;
- medosebni odnosi in sporazumevanje so ključni za proces poučevanje-učenje pa tudi za socialni in čustveni razvoj učencev;
- dobro čustveno počutje vpliva na učno uspešnost, učenje in razvoj;
- pričakovanja o tem, kakšno naj bo vedenje v razredu, in socialna interakcija so naučeni in jih je mogoče oblikovati z uporabo ustreznih načel vedenja in učinkovitim poučevanjem;
- učinkovito vodenje razreda temelji na:
 - a) visokih pričakovanjih,
 - b) dosledni skrbi za pozitivne odnose,
 - c) zagotavljanju visoke stopnje podpore učencu;
- formativno in sumativno ocenjevanje sta pomembna in uporabna načina ocenjevanja, vendar zahtevata različne pristope in razlage;
- merjenje spretnosti, znanja in zmognosti učencev je najbolje izvajati z ocenjevalnimi postopki, ki so psihološko utemeljeni in jih odlikujejo jasno opredeljeni standardi kakovosti ter nepristranskost;
- razumevanje rezultatov ocenjevanja je odvisno od jasnosti, ustreznosti in nepristranskosti njegove razlage.

4 Nadarjeni učenci pri pouku matematike

Matematično nadarjeni učenci so učenci kot vsi drugi, imajo večino običajnih otroških in mladostniških nagnjenj in lastnosti, kljub temu pa imajo tudi vrsto lastnosti in značilnosti, po katerih se vendarle razlikujejo od svojih vrstnikov. Matematična sposobnost je osnova za matematično nadarjenost in pomeni zmognost spretnega in hitrega operiranja s števili in odnosi med njimi, je rezultat sočasne aktivacije naslednjih sposobnosti (Blažič, 2003):

- številske sposobnosti, ki vključujejo razumevanje številskih simbolov, zna-

kov za različne operacije, razumevanje pojma količina, razumevanje številskih operacij, sposobnosti branja in pisanja matematičnih simbolov, razumevanje številskih odnosov;

- sposobnost pomnjenja in načrtovanja, ki je potrebna za reševanje postopkov v problemih;
- sposobnost prostorske predstavljivosti, ki je potrebna za uporabo papirja in svinčnika, razumevanje geometrije in prostorskih odnosov;
- sposobnost logičnega zaključevanja in iskanja medsebojnih zvez.

V nadaljevanju podajamo tri primere učnih strategij, ki jih je učitelj implementiral v redni pouk matematike, kjer je v oddelkih mogoče prepoznati nadarjene oziroma potencialno nadarjene dijake.

5 Primeri prakse

Na Konferenci o učenju in poučevanju matematike – KUPM 2024 smo predstavili primere iz prakse za poučevanje nadarjenih dijakov (Kvenderc Medvešek, 2024). V posameznih primerih učne prakse so bili dijaki razdeljeni v skupine. Kako so se razporedili v skupine, je bilo odvisno od zastavljene učne ure (možnost izbire glede na interes, večinoma so se lahko tudi prostovoljno zamenjali, ko so začutili, da so določeno znanje usvojili; dva učno šibkejša in dva učno zmognejša v isti skupini - učitelj določi vloge znotraj skupin). Dijaki so se znotraj skupin pogovarjali in poslušali ter drug drugemu predstavljali svoje ideje – sodelovanje je prijateljsko.

5.1 Od Združenega kraljestva do Eulerjeve poliedrske formule

Učna ura je temeljila na medpredmetnem povezovanju (matematika in angleščina) v 2. letniku srednjega strokovnega izobraževanja, smer tehnik računalništva. Vsi dijaki, ne glede na diferenciacijo, so v uvodnem delu prejeli slikovno gradivo znamenitih simbolov Združenega kraljestva (zastava, dvonadstropni avtobusi, rdeče telefonske govornice, stražarji, stolp, parlament, Big Ben ...). V simbolih so iskali matematične like, jih poimenovali ter zapisali njihove lastnosti v angleškem jeziku (Slika 1). Sledila je predstavitev opravljenega dela posameznih skupin.



Slika 1: Dijaki med iskanjem geometrijskih likov v simbolih Združenega kraljestva.



Ime poliedra	Slika poliedra	Število oglišč (V)	Število robov (R)	Število ploskev (P)
Tetraeder ali tetraedron				
Oktaeder ali oktaedron				
Dodekaeder ali dodekaedron				
Ikosaeder ali ikosaedron				
Oktaeder ali oktaedron				
Ikosaeder ali ikosaedron				

Slika 2: Didaktični pripomočki (levo) za preiskovanje poliedrov in dodeljen učni list (desno).

V drugem delu učne ure so dijaki po skupinah prejeli didaktično gradivo (Slika 2, levo). Njihova naloga je bila sestaviti pravilne poliedre ter izpolniti dodeljen učni list (Slika 2, desno).

Nadarjeni in potencialno nadarjeni dijaki so nato ugotavljali, ali obstaja povezava med številom robov, številom oglišč in številom ploskev. Posamezniki so ugotovili, da je število robov, oglišč in ploskev povezano z računskima operacijama seštevanja in odštevanja. Ugotovili so znamenito Eulerjevo poliedrsko formulo $O + R + P = 2$, ki velja le za enostavne poliedre in povezuje število oglišč (O), število mejnih ploskev (P) in število robov (R).

Matematično nadarjeni dijaki so ugotavljali (Slika 3), zakaj ob izračunu dobimo vedno število 2 in zakaj ne npr. 3.



Slika 3: Preiskovanje poliedrov ter izpolnjevanje učnega lista.

Ukvarjali so se tudi s konfiguracijo oglišč (Slika 4). Dijaki so ugotavljali, ali obstaja povezava v številu določenih mnogokotnikov ob ogliščih pri posameznih pravilnih poliedrih. Preko štetja in zapisa so prišli do t. i. konfiguracije oglišč. Konfiguracija oglišč je simbolni zapis, ki pove, koliko pravilnih mnogokotnikov se stika

v oglišču poliedra in kateri mnogokotniki. Simbolni zapis je npr. v obliki $a.b.c$. Število črk (števil) pove, koliko pravilnih mnogokotnikov se stika v enem oglišču. V primeru $a.b.c$ se trije pravilni mnogokotniki stikajo v enem oglišču. Številke a , b in c predstavljajo, za kateri pravilni mnogokotnik gre in v katerem zaporedju. V primeru $a.b.c$ si v smeri urinega kazalca sledijo a -kotnik, b -kotnik, c -kotnik.

5.2 Z dejavnostma domine in spomin po poti znanja

Cilja učne ure sta bila ponovitev matematičnih formul (Slika 5) in preoblikovanje pomembnejših formul v tretjem letniku srednjega strokovnega izobraževanja.

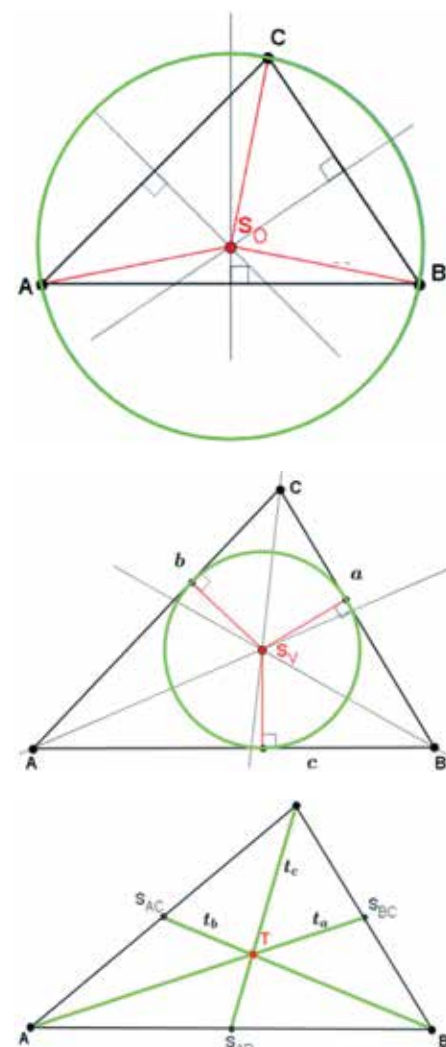


Slika 5: Didaktična igra domine.

Učitelj mora pri izbiri vsebine in pravil dejavnosti izhajati iz dijakov in pogojev dela. Igra je zasnovana tako, da imajo di-

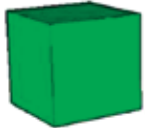
jaki na razpolago osemindvajset domin. Dijaki so z dejavnostjo domine utrjevali posamezne formule, ki vsebujejo poznavanje ploščine poljubnega trikotnika, polmer trikotniku očrtanega in včrtanega kroga, ploščine štirikotnikov, dolžino krožnega loka, višino enakostraničnega trikotnika, sinusni in kosinusni izrek, adicijske izreke itn.

Nadarjeni ter potencialno nadarjeni dijaki pa so med tem s pomočjo dinamične geometrije, ki nam jo omogoča prosto dostopni program GeoGebra, načrtovali znamenite točke trikotnika (Slika 6).

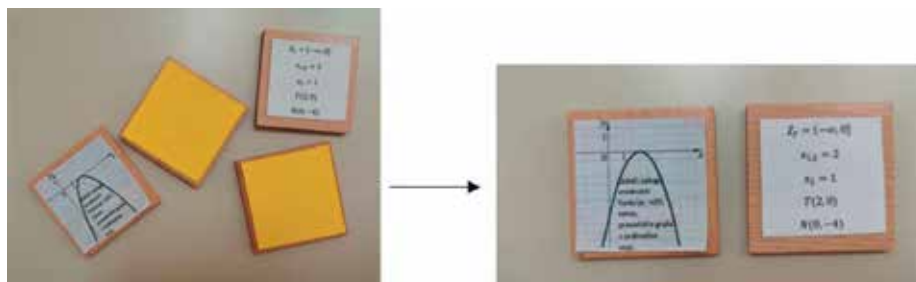


Slika 6: Izdelek dijaka, ki je s pomočjo dinamične geometrije konstruiral znamenite točke trikotnika (S_o – središče trikotniku očrtane krožnice, S_v – središče trikotniku včrtane krožnice in T – težišče).

Dijaki so najprej v programu GeoGebra načrtovali poljubne trikotnike, simetrale notranjih kotov in simetrale stranic trikotnika, z načrtovanjem so poiskali središče trikotniku včrtane in očrtane krožnice.

	Slika telesa	Konfiguracija oglišča-simbolni zapis	Opis konfiguracije oglišč
Kocka		4.4.4	Zapis 4.4.4. pomeni, da se v vsakem oglišču stikajo trije pravilni mnogokotniki.
Kockin osmerek		3.4.3.4	Zapis 3.4.3.4. pomeni, da se v vsakem oglišču stikajo štirje pravilni mnogokotniki v zaporedju: enakostranični trikotnik, kvadrat, enakostranični trikotnik, kvadrat.

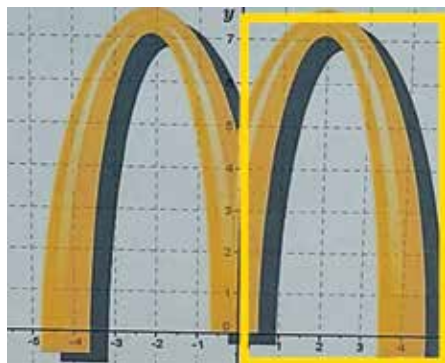
Slika 4: Konfiguracija oglišč, ki jo je navedel nadarjeni dijak.



Slika 7: Primer ustrezno izbranega para med igro spomin.

Prav tako so načrtovali vse tri težišnice v danem trikotniku. Ugotavljali so, ali obstaja povezava med znamenitimi točkami trikotnika. Da so to ugotovili, so morali v isti trikotnik načrtati vse tri znamenite točke trikotnika. Ugotovili so, da lahko narišejo premico skozi tri znamenite točke trikotnika. Premico imenujemo Eulerjeva premica.

Prav tako so dijaki drugega letnika srednjega strokovnega izobraževanja s pomočjo didaktične igre spomin utrjevali znanje s področja matematičnih funkcij (5).



Slika 8: Raziskovanje logotipa za McDonald's v programu GeoGebra.

Njihova naloga je bila, da so poiskali logotip na spletu ter ga ustrezno vstavili v pravokotni koordinatni sistem v programu GeoGebra. Na podlagi tega so raziskovali njemu pripadajoči predpis kvadratne funkcije (na intervalu od -4 do 4), ki simbolizira znak za McDonald's. Dijaki so k izzivu pristopili zelo različno. Njihov skupni cilj je bil, da so logotip pozicionirali v koordinatno izhodišče in tako upoštevali njegovo simetrijo. Za začetek so raziskovali, kako z ustreznim izborom točk, ki ležijo na logotipu, ugotoviti predpis za npr. desno polovico logotipa (Slika 8).

Enačba 2: Dijakovo oblikovanje funkcijskega predpisa za logotip McDonald's.

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 4 \\P(2, 7.5) \\f(x) &= (x - 0) \cdot (x - 4) \cdot a \\7,5 &= (2 - 0) \cdot (2 - 4) \cdot a \\7,5 &= -4 \cdot a \\a &= -\frac{7,5}{4} \\f(x) &= -\frac{7,5}{4} \cdot x \cdot (x - 4) \\f(x) &= -\frac{7,5}{4} (|x| - 2)^2 + 7,5\end{aligned}$$

Komentar nadarjenega dijaka ob zaključku zapisanega funkcijskega predpisa za logotip McDonald's: *Logotip za McDonald's ima simetrično obliko. Simetričnost funkcije okoli $x = 0$ zahteva uporabo absolutne vrednosti. Absolutna vrednost zagotovi simetrijo. Parabola ima ničli pri $x = 0$ in $x = 4$. Njena os simetrije je pri $x = 2$, kar pomeni, da je vrh parabole na sredini med ničlami. Predpis, ki sem ga zapisal kot zaključek naloge, nakazuje na simetričnost logotipa glede na os $x = 0$ in ustreza dve-ma »lokoma«, kar je bližje obliki logotipa McDonald's.*

5.3 Matematika in OpenSCAD

V procesu aktivnega učenja v 3. letniku srednjega strokovnega izobraževanja smo uporabili osnove modelirnika OpenSCAD, ki je brezplačna programska aplikacija za ustvarjanje oz. oblikovanje

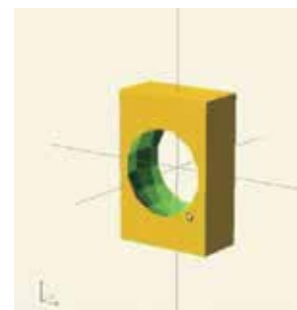
trdnih 3D računalniško podprtih objektov. Uporabili smo osnove programskega jezika C++, torej jezika, ki se ga dijaki učijo pri strokovnih predmetih. V programu OpenSCAD so dijaki izvajali posamezne računske operacije z množicami točk v prostoru, v našem primeru so to geometrijska telesa (kocka, kvader, krogla, valj in presekan stožec (Slika 9)) ter z njimi modelirali različna geometrijska telesa.

Medtem ko so ostali dijaki računali površino in prostornino nastalih narisanih teles, so nadarjeni dijaki raziskovali *unijo* ter *preseka* množic točk v prostoru oz. *unijo* in *preseka* zgoraj omenjenih geometrijskih teles (iz Slike 9). Unijo ali presek je predstavljala množica točk več geometrijskih teles (Slika 10).



Slika 10: Primer unije kvadra, krogle in presekanega stožca (levo) ter preseka kvadra in krogle (desno).

V nadaljevanju so raziskovali pojem *razlike* množic točk v prostoru med največ tremi geometrijskimi telesi. Za začetek so narisali geometrijsko telo, ki nastane ob upoštevanju razlike med kvadrom in kroglo (Slika 11).



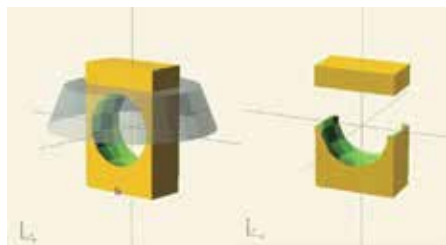
Slika 11: Razlika med kvadrom in kroglo.



Slika 9: Geometrijska telesa (od leve proti desni): kocka, kvader, krogla, valj in presekan stožec.

Medtem ko so nadarjeni ter vedoželjni dijaki urili prostorsko predstavljivost teles, ki jih prikazujejo slike 9, 10 in 11, so preostali dijaki utrjevali prostorsko predstavljivost tako, da so geometrijska telesa (kvader, kocko, stožec, presekan stožec) sestavljali z magnetnimi didaktičnimi pripomočki.

Še preden so nadarjeni in potencialno nadarjeni dijaki upoštevali razliko med posameznimi telesi, so imeli nalogo, da

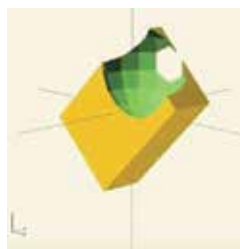


Slika 12: Geometrijski telesi, ki predstavljata razliko med od kvadra odštetim kroglo ter še ne odštetim presekanim stožcem (levo) ter od kvadra odštetima kroglo in presekanim stožcem (desno).

ugotovijo, kakšno telo se bo izrisalo. V programskem jeziku so izvajali računske operacije med množicami točk v prostoru, med kvadrom, kroglo ter presekanim stožcem (Slika 12).

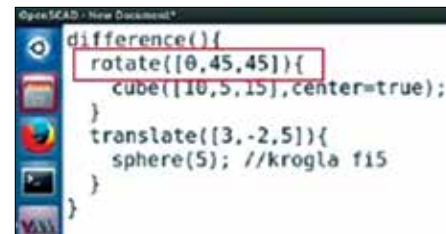
Po izrisu je sledil izračun prostornine posameznega geometrijskega telesa. S tem so dijaki ponovili računanje prostornine kocke, kvadra, krogle, valja ter stožca oziroma presekanega stožca.

Za zaključek učne ure je za potencialno nadarjene dijake sledila naloga, kjer so dijaki narisali poljubno geometrijsko telo ter ga rotirali po posameznih oseh za določen kot (Slika 13).



Slika 13: Rotacija geometrijskega telesa po osi y za kot 45°.

Dijaki so s tem ponovili osnove programiranja ter znotraj programske kode ponovili navajanje točk v prostoru (Slika 14). Tako je ura matematike vključevala osnove programiranja, ki se ga dijaki učijo v srednjem strokovnem izobraževanju.



Slika 14: Programska koda, ki prikazuje podajanje točk v prostoru (x, y, z).

Zaključek

Pomembno je, da učitelji prepoznamo nadarjene dijake v razredu ter jim nudimo ustrezne didaktične pristope oziroma različne učne strategije. Dijakom na izviren, domiseln in kreativen način ponudimo primerne oblike dela, ki nadarjene privlačijo, zanimajo in jim omogočijo čim več izkušenj, da lahko nadgrajujejo in poglobljajo svoje znanje ter razvijajo svoje talente. Na primeru opisa določenih pojmov smo spoznali globino razumevanja in tako prepoznali nadarjenega dijaka. Dijakom smo pri pouku omogočili abstraktno razmišljanje in ustvarili učno okolje, kjer so razvijali svoje potenciale.

Treba je razvijati vse vrste talentov, ki jih dijaki izkazujejo. Naloga učiteljev je, da smo odprti za nadarjene dijake, da jih skušamo razumeti in jim pomagati, da jih spodbujamo k vedno novim in višjim ciljem ter uporabljamo oblike učenja, ki učencem predstavljajo izziv in željo po spoznavanju novega.

Literatura

- Blažič, M. (2003). *Nadarjeni izkoriščen ali prezrt potencial*. Ljubljana: Pedagoška fakulteta UL.
- Breceljnik, M. (2003). Nadarjeni učenci – izziv šoli in učitelju. V M. Blažič (ur.), *Nadarjeni – izkoriščen ali prezrt potencial: zbornik prispevkov: mednarodni znanstveni simpozij* (str. 83–91). Slovensko združenje za nadarjene.
- Ekspertna skupina za vzgojno-izobraževalno delo z nadarjenimi. 2019. *Strokovna izhodišča posodobitve Koncepta odkrivanja nadarjenih otrok, učencev in dijakov ter vzgojno-izobraževalnega dela z njimi*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- Instance, D., in Dumont, H. (2010). Future directions for learning environments in 21st century. V H. Dumont, D. Instance in F. Benavides (ur.), *The nature of learning: using research to inspire practices* (str. 317–338). Paris: OECD, Centre of Educational Research and Innovation.
- Juriševič, M. (2012). *Nadarjeni učenci v slovenski šoli*. Ljubljana: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.
- Kvenderc Medvešek, J. (2024). *Poučevanje nadarjenega dijaka skozi prizmo učitelja*. KUPM 2024. <https://kupm.zrss.si/poucevanje-nadarjenega-dijaka-skozi-prizmo-ucitelja/>
- Zakon o spremembah in dopolnitvah Zakona o osnovni šoli – ZOsn-K (Uradni list RS, št. 16/24 z dne 29. 2. 2024).
- Žagar, D., Artač, J., Bezič, T., Nagy, M., in Purgaj, S. (1999). *Koncept. Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci v devetletni osnovni šoli*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- Žagar, D., Bezič, T., Blažič, A., Boben, D., Nagy, M., Brinar Huš, M., in Marovt, M. (2007). *Koncept vzgojno-izobraževalnega dela z nadarjenimi dijaki v srednjem izobraževanju*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2024



QR koda spletne strani
KUPM

V organizaciji Zavoda RS za šolstvo je bila 11. in 12. novembra 2024 v Kongresnem centru Laško izvedena **6. konferenca o učenju in poučevanju matematike**, ki jo poznamo pod akronimom **KUPM**. Potekala je v znamenju prenove učnih načrtov in katalogov znanja.

Konference so se udeležili učitelji, ki poučujejo matematiko od 1. razreda osnovne šole do zaključnega razreda srednje šole, strokovnjaki na področju matematičnega izobraževanja in gostje. Program 57 predavateljev je spremljalo 420 udeležencev konference. (Slika 1)

Uvodni pozdrav je vsem zbranim namenila mag. Branka Hrast Debeljak, generalna direktorica Direktorata za srednje in višje šolstvo ter izobraževanje odraslih na Ministrstvu za vzgojo in izobraževanje. Med drugim je povedala:

»Ob povabilu k nagovoru sem premlevala svoje spomine na širok spekter učencev, dijakov in odraslih, s katerim sem se srečala v svojih dobrih treh desetletjih poučevanja. Od bistrih petošolcev, diamantnih maturantov in nagrajencev na olimpijadah iz znanja do učencev iz izredno deprivilegiranih in nespodbudnih okolij; dijakov, ki ob vstopu v slovenski šolski sistem niso znali v slovenskem jeziku prešteti do deset, ter odraslih, ki so desetletja po tem, ko so, večinoma nezadovoljni in nesamozavestni, zapustili šolski sistem, ponovno sedli v šolske klopi. Vse to, skupaj s prvimi koraki najmlajših v svet matematike, je vaš vsakdan. Dopolnjen z vsem, kar vstopa v družbo in šolski sistem. Od tehnologije in umetne inteligence ter želje po vzgoji široko razgledane mladine, sposobne logičnega in algoritmičnega razmišljanja, do prepogosto prisotne želje po poenostavljanju in iskanju lahkih poti, žal le do dobrih ocen, brez želje po znanju. Slovenski šol-



Slika 1



Slika 2

ski sistem je zaradi vsega naštetega pred pomembnim izzivom: prenovi učnih načrtov in katalogov znanj splošnoizobraževalnih predmetov v poklicnem in srednjem strokovnem izobraževanju, skupaj s poudarjanjem ključne vloge učitelja, od katerega pričakujemo nove in izvirne pristopov k učenju in poučevanju matematike po vsej vertikali in za vse izobraževalne programe. V prenovi posebej poudarjamo pomen varnega in spodbudnega učnega okolja in uporabo raznolikih učnih strategij za aktivno sodelovanje učencev in dijakov pri pouku ter njihovo vključeva-



Slika 3



Slika 4

nje v vse faze učnega procesa. Po celotni vzgojno-izobraževalni vertikali sledimo sistematičnemu in skladnemu razvoju matematičnih pojmov, konceptov in procesov od zgodnjega učenja matematike do zahtevnejše matematike v srednji šoli, seveda v skladu z razvojno stopnjo in starostjo učencev in dijakov. Posebno skrb namenjamo poenotenju terminologije in simbolike ter njenemu usklajevanju z drugimi področji. Naš cilj je obenem opolnomočiti učence in dijake s kompetencami za soočanje z izzivi



Slika 5



Slika 6

prihodnosti, torej z digitalnimi kompetencami, kompetencami za trajnostni razvoj in s kompetencami podjetnosti, ki vključujejo finančno pismenost, ustvarjalnost in zmožnost sodelovanja. Pouk matematike mora zato v čim večji meri vključevati čim več ustreznih spoznavnih oz. miselnih procesov, tako da učenec ali dijak postopoma ponotranja znanje in ga usvoji na višjih taksonomskih ravneh, ga zna uporabiti, povezovati, interpretirati in ovrednotiti v življenjskih situacijah in na poklicnem področju. V prenovi ohranjamo ciljno zasnovano učnih načrtov in jih poskušamo zapisati čim bolj razumljivo in jasno ter zagotoviti, da omogočamo dovolj fleksibilno vsebinsko, organizacijsko, didaktično in inkluzivno naravnano izvedbo pouka. Pomembna novost so tudi standardi znanja, skupaj z zapisom minimalnih standardov znanja. Učitelju bodo prav gotovo v pomoč tudi didaktična priporočila s seznamom virov, s katerimi si boste lahko pomagali pri uresničevanju ciljev. Gre torej za pomembne spremembe pri poučevanju matematike. Med drugim tudi vzgoje posameznika, da na temelju finančnega znanja uporablja finančne pojme in postopke v različnih življenjskih situacijah, jih analizira, utemeljuje, vrednoti in sprejema odgovorne in premišljene odločitve za kakovostno osebno in poklicno življenje. Veseli me tudi, da v prenovi in na današnji konferenci naslavljamo številne možnosti



Slika 8



Slika 9

za izboljšave na področju dela z nadarjenimi učenci in dijaki, tistimi, ki hitro usvojijo posamezne standarde znanja in preprosto povedo, da jim je v šoli dolgčas. Ponuditi jim moramo višje miselne izzive in jih motivirati za raziskovalno delo. Umetna inteligenca nam je pri tem prav gotovo velika pomoč in velik izziv. Posodobljen koncept odkrivanja nadarjenih učencev in dijakov ter dela z njimi zato temelji tudi na razumevanju njihovih osebnostnih in emocionalnih lastnosti ter njihovih vedenj.«



Slika 7



Slika 10

V Sloveniji od leta 2022 poteka prenova učnih načrtov (UN) v osnovnošolskem in gimnazijskem izobraževanju ter katalogov znanj (KZ) za splošnoizobraževalne predmete v poklicnem in strokovnem izobraževanju. Predmetne kurikularne komisije (PKK) za prenovu so v tem obdobju sredi intenzivnega dela, zato so bila plenarna predavanja prvega dne konference osredotočena prav na to temo.



Slika 11



Slika 12

Mag. Mojca Suban in Lidija Pulko sta v uvodnem plenarnem predavanju predstavili prispevek z naslovom *Prenova pouka matematike po vertikalni in kaj bo zato drugače v osnovni šoli*.



Slika 13

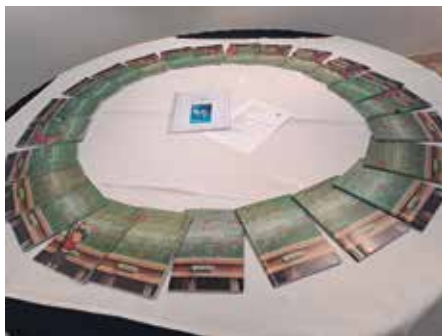
Sledil je plenarni prispevek *Prenova pouka matematike v srednji šoli: opolnomočenje dijakov za izzive*. V sklopu tega predavanja je mag. Mateja Sirnik predstavila prenovu gimnazijskega učnega načrta in mag. Apolonija Jerko prenovu katalogov znanja v poklicno-strokovnem izobraževanju.

Dr. Jaka Smrekar je izvedel predavanje z naslovom *Logika in množice v šoli in izven nje*. (slika 2)

Nato so sledila sekcijška predavanja in delavnice, ki so potekala istočasno v šestih dvoranh Kongresnega centra Laško. (slike 3, 4, 5, 6) Izvajali so jih člani PKK za prenovu UN in KZ ter drugi vabljeni predavatelji.



Slika 14



Slika 15



Slika 16



Slika 17

Dan smo sklenili s projekcijo filma *Šepet metulja* in pogovorom z njegovima ustvarjalcema. (slika 7)

Drugi konferenčni dan smo namenili umetni inteligenci, digitalni tehnologiji, algoritmičnemu mišljenju, delu z nadarjenimi učenci/dijaki in obeležili 30. letnik revije *Matematika v šoli*.

Prof. dr. sc. Blaženka Divjak je v plenarnem predavanju predstavila prispevek z naslovom ***Kako umetna inteligenca spreminja šolo.*** (slika 8)

Tudi drugi dan konference so bili udeleženci deležni pisanega nabora sekcijских predavanj in delavnic, ki so istočasno potekale v šestih dvoranh. (Slike 9, 10, 11, 12)

V veliki dvorani smo izvedli okroglo mizo ob tridesetem letniku revije *Matematika v šoli* z naslovom ***Revija Matematika v šoli***



Slika 18

v času spreminjajočih se bralnih navad in umetne inteligence. (slika 13) Oba konferenčna dneva so si lahko udeleženci ogledali priložnostno razstavo vseh 30 letnikov revije, ki so jih lahko prelistali in prebirali. (slike 14, 15, 16, 17) Ob tej priložnosti je v digitalni bralnici Založbe Zavoda RS za šolstvo izšla ***Jubilejna publikacija ob izidu 30. letnika revije Matematika v šoli.***



QR koda do Jubilejne publikacije

Dvodnevno konferenco o učenju in poučevanju matematike smo sklenili s plenarnim predavanjem Slavka Jeriča. Svoj prispevek je naslovil ***Med pričakovanji in realnostjo.***

Zahvaljujemo se vsem, ki ste pomagali soustvariti dvodnevni praznik matematike, tako predavateljem, sodelavcem na Zavodu RS za šolstvo (slika 18) kot tudi udeležencem.

Veslimo se ponovnega strokovnega sodelovanja in druženja na 7. KUPM.

Zapisala Sonja Rajh, ZRSS
Avtorica fotografij: Petra Dermota

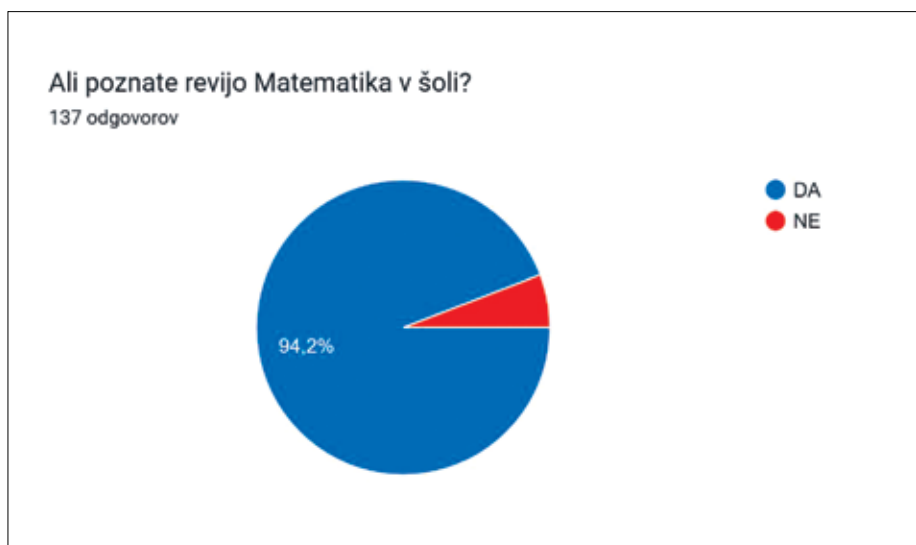
Okrogla miza ob izidu tridesetega letnika revije *Matematika v šoli*

mag. Marija Lesjak Reichenberg, Zvonka Kos in mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Naslov okrogle mize, ki je bila na konferenci o učenju in poučevanju matematike KUPM 2024 organizirana ob izhajanju tridesetega letnika revije *Matematika v šoli* – **Revija *Matematika v šoli* v času spreminjajočih se bralnih navad in umetne inteligence: ob 30. letniku revije – pogled naprej** –, je poveden. Razvoj tehnologij in (posledično tudi) velike spremembe v družbi prinašajo tako v vzgojno-izobraževalni kot tudi založniški prostor mnoge izzive. Kako beremo in kako bomo brali v prihodnje? Kateri bodo nosilci informacij? Bomo zaradi preizkušene trajnosti nosilca (papir) še nekaj časa revijo lahko brali v tiskani obliki ali pa jo bomo zaradi lagodnosti in možnosti hitrega priklica informacij (»en klik stran«) brali v digitalni obliki, ne vedoč, ali bo ta informacija po desetletjih še obstajala? Tudi razvoj umetne inteligence, sploh velikih jezikovnih modelov, odpira nova vprašanja o avtorstvu, zaupanju, kritičnem pristopu k prebranemu ...

Na okrogli mizi so sodelovali dr. Darjo Felda, ki je bil prvi odgovorni urednik revije, dr. Andrej Bauer, avtor članka, objavljenega v prvi številki revije, dr. Uroš Očepek, učitelj matematike in računalništva, Jerneja Bone, odgovorna urednica revije med letoma 2009 in 2016, mag. Sonja Rajh, odgovorna urednica od leta 2023, in Zvonka Kos, vodja založbe Zavoda RS za šolstvo; okroglo mizo je moderirala mag. Marija Lesjak Reichenberg. V pogovor so se s pomočjo tehnologije vključili tudi udeleženci in udeleženci konference, ki so spremljali dogodek med občinstvom. V nadaljevanju zgoščeno navajamo vsebine, ki so bile izpostavljene.

Ker ni sedanjosti brez preteklosti in ker je nujno, da v razkrivanju novih znanj, ko gledamo v prihodnost, »stopamo na ramena svojih prednikov«, smo se v pogovoru ozrli na sam začetek izhajanja revije. Kako in zakaj se je vse začelo? Začetek devetdesetih let prejšnjega stoletja so – prav tako kot današnji čas – zaznamovale velike spremembe tako v družbi



Slika 1: Ali poznate revijo *Matematika v šoli*?

kot v šolstvu. Uvajali so se novi srednješolski izobraževalni programi, novi učni načrti za matematiko, znova se je uvajala matura, pripravljala se je prenova osnovne šole, srečevati smo se pričenjali z virtualnim svetom (Marčič, 2003). Pokazala se je potreba po sistematičnem delu na področju didaktike matematike. Revija je odprla prostor razvoju te discipline, povabila je k sodelovanju, h komunikaciji, k deljenju znanja in informacij. Med avtorji prispevkov so bili univerzitetni profesorji in profesorice, svetovalci in svetovalke na Zavodu RS za šolstvo, učitelji in učiteljice ter študenti in študentke (matematike). Marsikatera seminarska naloga je bila prirejena za objavo v reviji (s tovrstnimi okoliščinami smo se seznanili na samem začetku okrogle mize). Že takrat je bil zgled tisto, kar je delovalo in deluje še danes: profesorji in profesorice na fakultetah so spodbujali študente in študentke k objavljanju, objavljali pa so seveda tudi sami. Uredniška politika revije je že takrat stremela tudi k preprostemu dejstvu: vzgoji novih piscev.

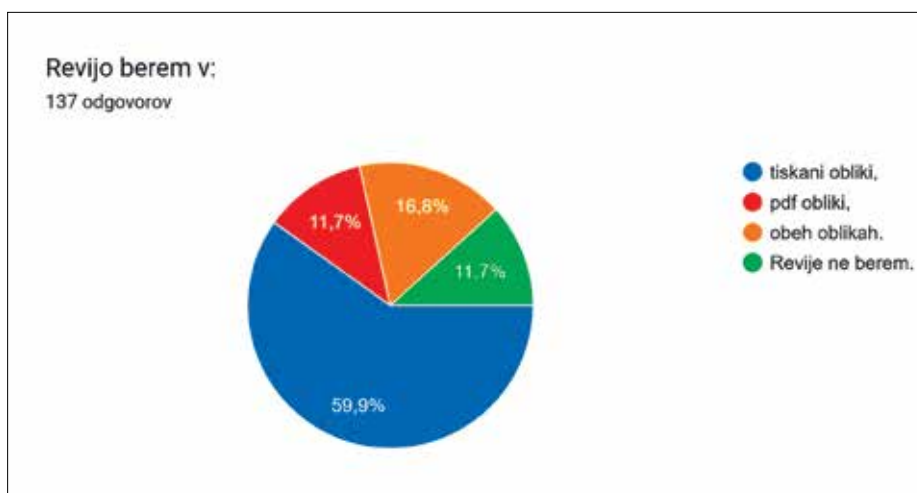
V treh desetletjih je revija pri svojem razvoju sledila standardom objavljanja tako v založniškem kot informacijskem

smislu. Bila je pozorno in skrbno (tudi likovno) oblikovana, natisnjena in distribuirana naročnikom, med katerimi so še vedno tako institucije kot posamezniki. V letih kriz in razvoja digitalnih medijev je ohranila svoje naročnike. Oprema prispevkov je sledila zahtevam znanstvenega polja. Prispevki so opremljeni z izvlečki in ključnimi besedami, seznam uporabljenih literature usmerja na preverljivost navedenih dejstev, prispevki so od samega začetka uredniško in recenzentsko pregledani. Vpogled v bibliografijo revije kaže na večanje deleža znanstvenih prispevkov, čeprav se tehnika še vedno prevesi v smer strokovnih. V času, ko opažamo upad branja in drugačne bralne navade, je k pisanju, ki je »hrbta« stran branja, še težje nagovarjati. Še dobro, da obstajajo tudi zunanji motivatorji, kot so napredovanje, Zoisove štipendije za dijake in diakinje ter študentke in študentke ... in reviji uspe redno izhajati. Kot edina revija v Sloveniji s področja didaktike matematike ponuja prostor za izmenjavo znanja, izkušenj in idej za izboljševanje učnih praks na vseh stopnjah šolanja.

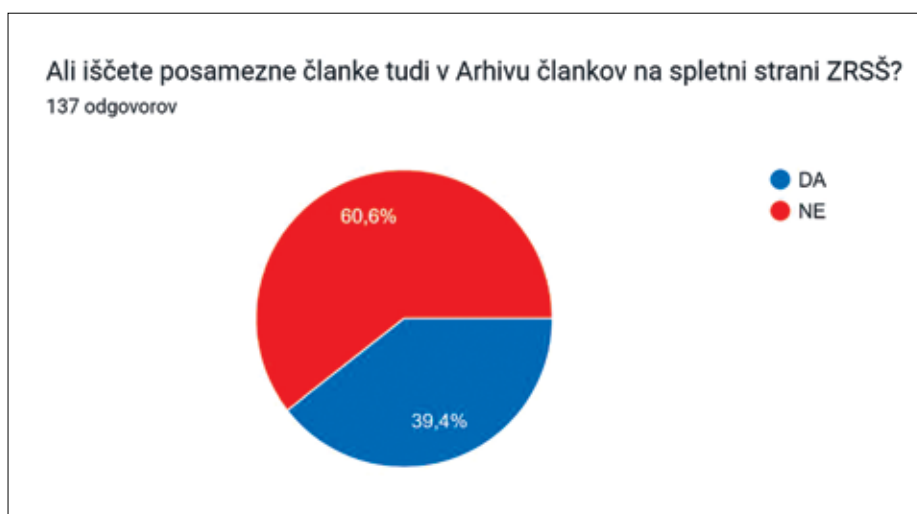
Anketa, ki smo jo v okviru okrogle mize izvedli s pomočjo orodja 1KA, je pokazala



Slika 2: Kdaj oziroma kako berete revijo?



Slika 3: Oblike, v katerih beremo revijo Matematika v šoli.



Slika 4: Ali iščete posamezne članke tudi v Arhivu člankov na spletni strani ZRSŠ?

prepoznavnost in branost revije *Matematika v šoli*.

Na vsa štiri zastavljena vprašanja je odgovorilo 137 udeleženk in udeležencev.

Na vprašanje, ali poznajo revijo *Matematika v šoli*, je pozitivno odgovorilo 94,2 % udeležencev ankete (Slika 1).

Ko smo poizvedovali, kdaj oziroma kako berejo revijo – sodelujoči so lahko izbrali več možnosti –, smo dobili naslednje odgovore (Slika 2).

Naslednje vprašanje je bilo namenjeno oblikam, v katerih anketiranci in anketiranke berejo revijo (Slika 3).

Ko smo poizvedovali, ali posamezne prispevke poiščejo tudi v Arhivu člankov na spletni strani ZRSŠ, je 39,4 % sodelujočih sporočilo, da jih (Slika 4).

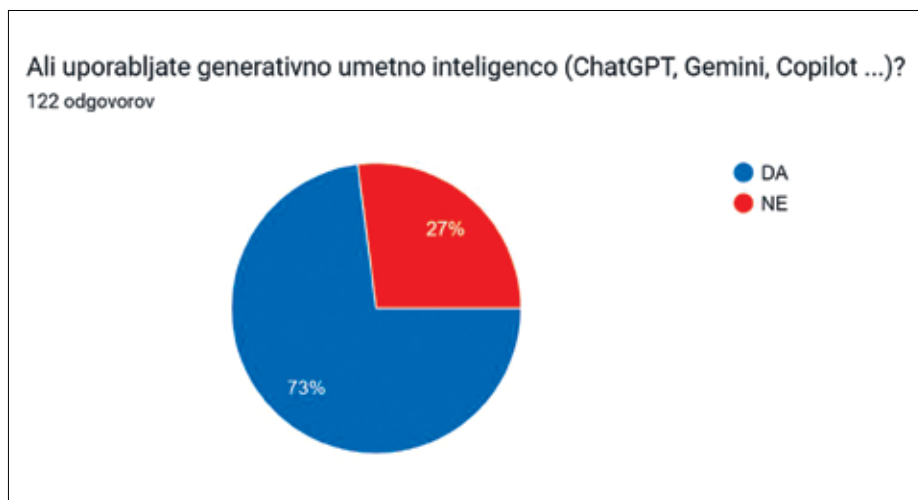
Arhiv člankov (www.zrss.si/arhiv-clankov) je bil v nadaljevanju okroglice tudi predstavljen predvsem z vidika iskanja primernih gradiv v situacijah, ko učitelji potrebujejo nove ideje. Članki v revijah so namreč recenzirani, kar pomeni, da so strokovno preverjeni in predstavljajo kakovosten vir informacij vsem uporabnikom. V uredništvu poskrbijo za dvojno slepo recenzijo (pregledovalci, ki članek recenzirajo, ne vedo, kdo je članek napisal, avtorji člankov pa ne vedo, kdo so bili recenzenti).

V nadaljevanju okroglice smo se posvetili reviji *Matematika v šoli* v času umetne inteligence, sploh razmerju bralcev in piscev do velikih jezikovnih modelov. Izhodišče je predstavljala anketa, v kateri je odgovarjalo 122 udeležencev. 73 % jih je odgovorilo, da uporabljajo generativno umetno inteligenco (Slika 5).

Na okrogli mizi smo s pomočjo umetne inteligence (z uporabo dveh velikih jezikovnih modelov – Copilota in ChatGPT-ja) takoj obdelali odgovore sodelujočih, ki so odgovarjali na vprašanje »V katere namene uporabljate generativno umetno inteligenco?«

Copilot se je tokrat predstavil/-a kot ženska in takole podal/-a odgovor (Slika 6).

ChatGPT je odgovore nekoliko drugače analiziral; izpostavil je druge glavne skupine namenov uporabe in med drugim navedel tudi tipične odgovore, kar daje vtis avtentičnosti (Slika 7).



Slika 5: Ali uporabljate generativno umetno inteligenco?

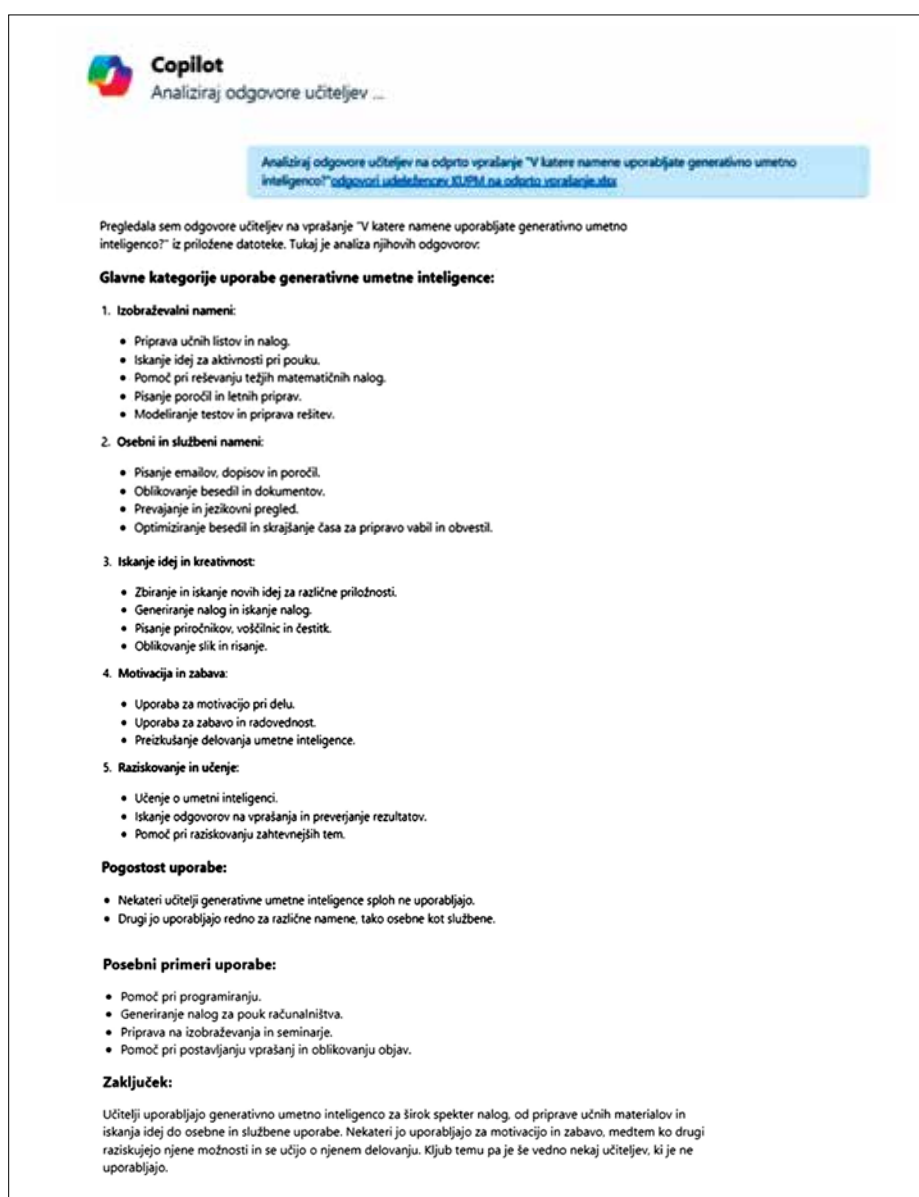
Primerjava obeh analiz, ki sta jih ustvarila dva velika jezikovna modela, je pokazala, da odgovori, pridobljeni z njima, niso identični in da so interpretabilni. Upoštevanje teh dejstev je pomembno v primeru uporabe umetne inteligence pri pouku: svoje dragocene izkušnje uporabe umetne inteligence pri delu z učenci je z nami delil dr. Ocepek in poudaril nujnost urjenja kritičnega pristopanja k vsebinam, s katerimi se srečujemo. Ključno, ko govorimo o tehnologijah in njihovi uporabi, je, kako tehnologijo uporabljamo v izobraževanju in kako jo uporabljamo za izobraževanje.

Uporabi umetne inteligence, še posebej velikih jezikovnih modelov, pa je treba posvetiti pozornost v založništvu in v primeru ustvarjanja avtorskih del. Zvonka Kos je izpostavila dileme, s katerimi se srečuje uredniški odbor, ko pregleduje prispevke za objavo v reviji *Matematika v šoli*. Mestoma se namreč pojavi vprašanje, ali je del besedila napisal npr. ChatGPT. Podobno dilemo imajo tudi učitelji, ko pregledujejo npr. seminarske naloge učencev oz. študentov. Zagotovo je smiselno, da si z novimi orodji pomagamo pri pisanju, saj nam lahko olajšajo delo, je pa do besedil, ki jih ustvari umetna inteligenca, treba vzpostaviti kritičen odnos, predvsem pa upoštevati etični vidik. Konec koncev je avtor tisti, ki prevzema odgovornost za napisano.

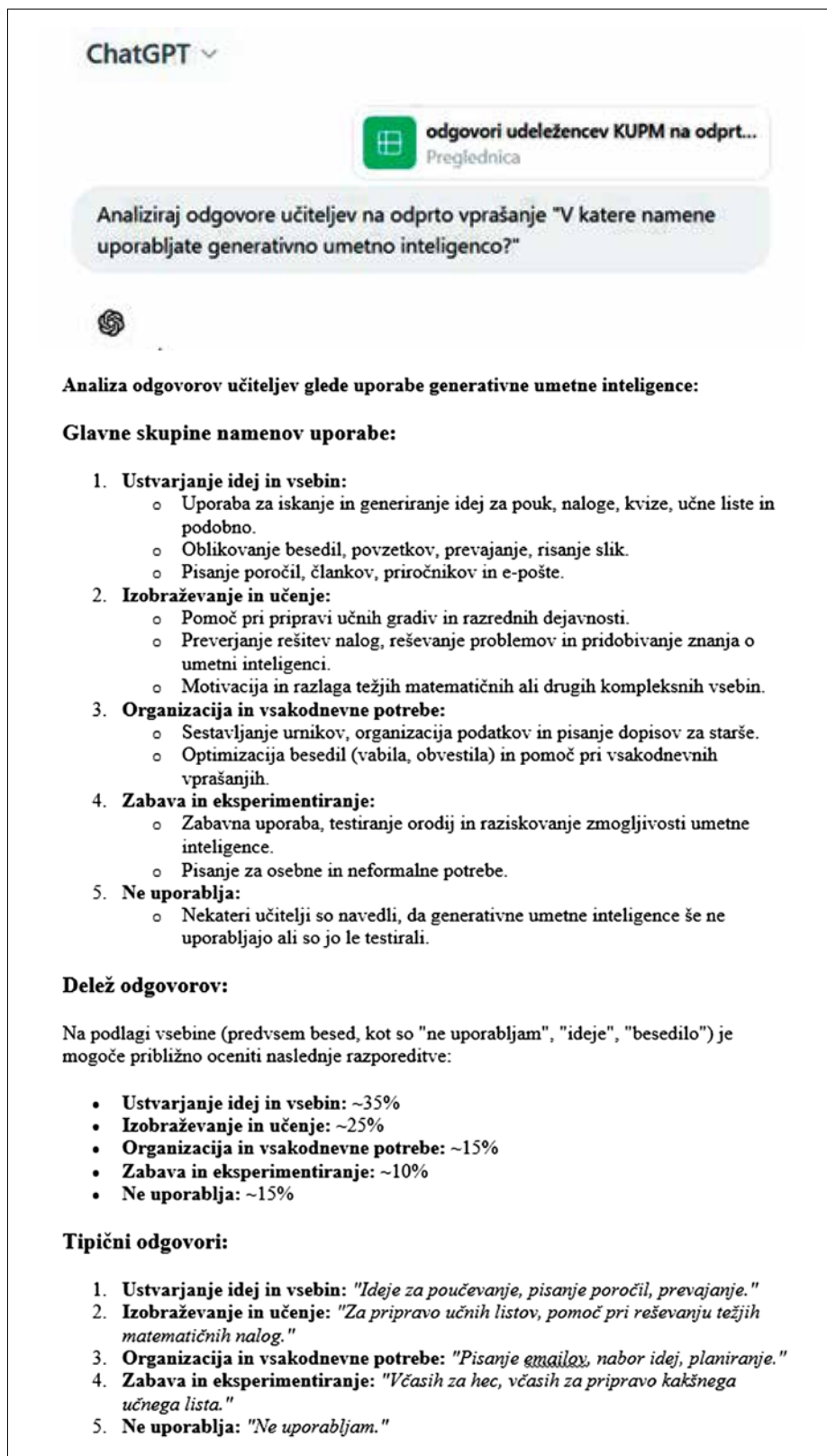
Ob koncu tega zapisa lahko omenimo nekaj ključnih dejstev: da je revija *Matematika v šoli* revija, ki jo učitelji in učiteljice matematike poznajo in berejo v vseh formatih, ki so na voljo, da je aktualna in

da jo bomo še naprej lahko brali tako v tiskani kot digitalni obliki.

Ugotovimo lahko tudi to, česar na okrogli mizi nismo eksplicitno izpostavili: da revija *Matematika v šoli* z jasnim ter kakovostnim recenzentskim postopkom in dvojno slepimi recenzijami velike jezikovne modele pri njihovem treningu »krmi« s kakovostnimi prispevki in vsebinami, s čimer bo v času vse večje uporabe umetne inteligence omogočala kakovostno osnovo za nastajajoča, strojno generirana besedila.



Slika 6: Copilotova analiza odgovorov udeležencev na vprašanje »V katere namene uporabljate generativno umetno inteligenco?«



Slika 7: ChatGPT-jeva analiza odgovorov udeležencev na vprašanje »V katere namene uporabljate generativno umetno inteligenco?«

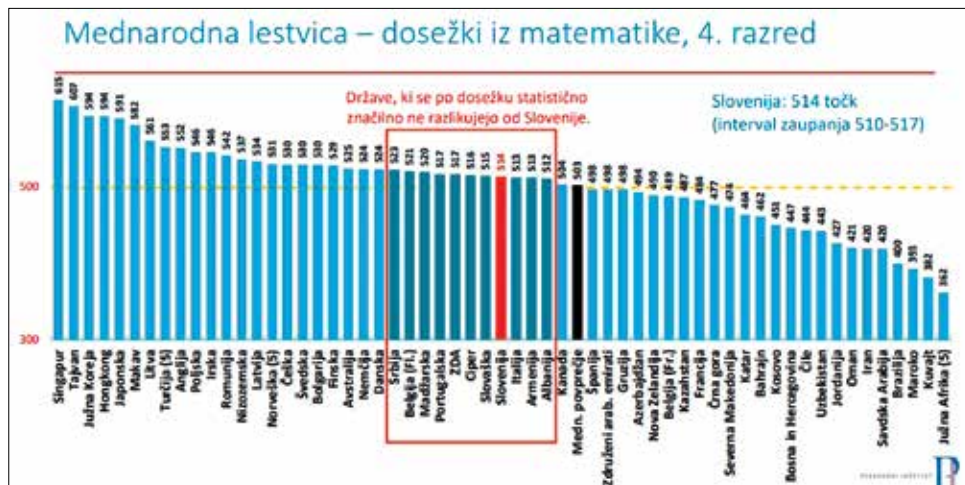
Viri in literatura

Marčić, N. (2003). Po prvem desetletju. *Matematika v šoli*, 10(1,2), 1-2.

Znanje slovenskih četrtošolcev v mednarodni raziskavi TIMSS,

iz predstavitve rezultatov na strokovnem srečanju 4. 12. 2024

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je redna mednarodna raziskava znanja matematike in naravoslovja. Izvedba TIMSS 2023 zagotavlja 28 let meritev trendov, zaključuje prehod na v celoti računalniško merjenje znanja. Prinaša pomembne podatke o okoliščinah matematičnega in naravoslovnega izobraževanja, zbrane od učencev, staršev, učiteljev in ravnateljev šol ter splošne informacije o nacionalnih izobraževalnih sistemih in učnih načrtih.



Naslovnica in QR koda s povezavo do nacionalnega poročila.

Slovenski dosežek četrtošolcev iz matematike, 514 točk (st. napaka 1,8), je nad mednarodnim povprečjem dosežkov vseh sodelujočih držav, vendar precej pod povprečjem OECD in precej pod povprečjem EU. Povprečni matematični dosežek OECD držav za četrty razred je 525 točk (st. napaka 0,5), povprečni matematični dosežek EU držav je 524 točk (st. napaka 0,6), mednarodno povprečje vseh sodelujočih držav pa je 503 točke (st. napaka 0,4).

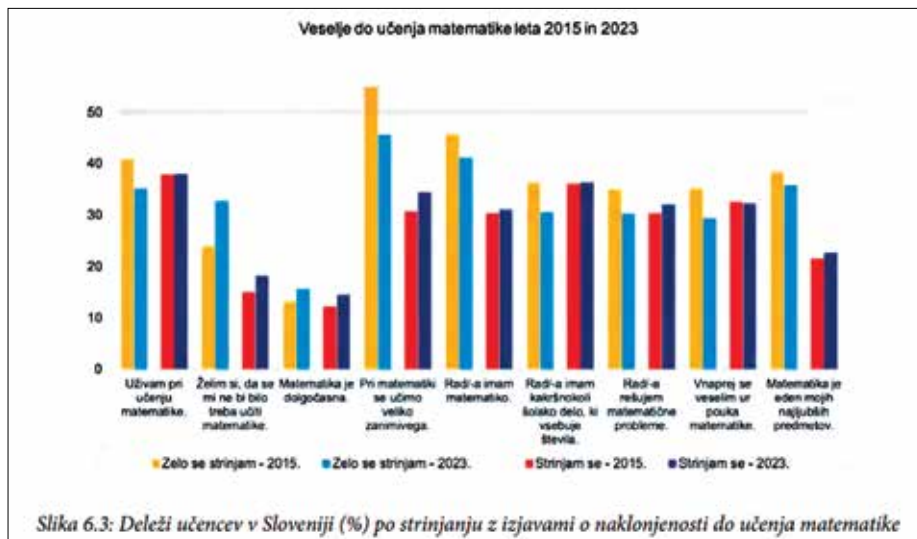
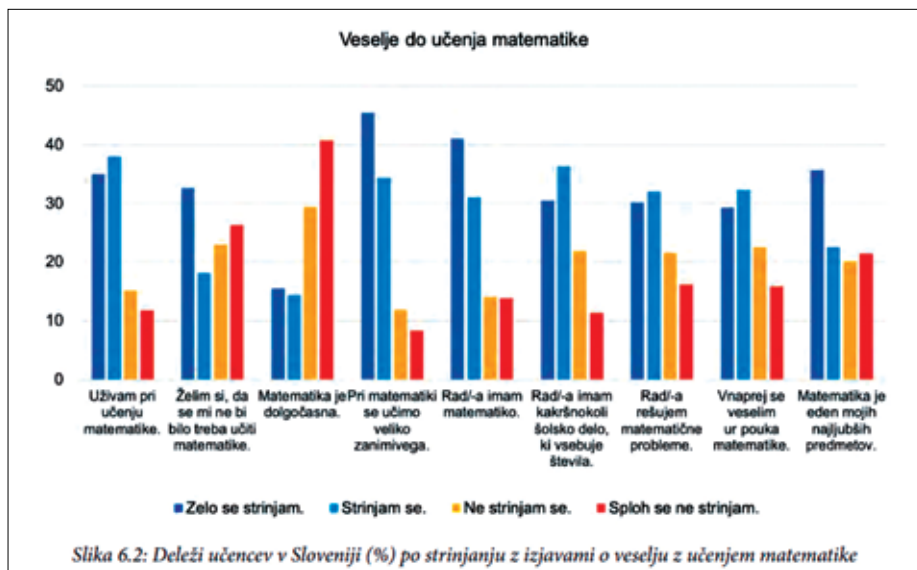
Preostali rezultati za našo in vse druge države:

- mednarodno spletišče: <https://timss2023.org>
- nacionalno poročilo: [Znanje matematike in naravoslovja med četrtošolci v Sloveniji in po svetu](#)



Učenci se v Sloveniji učijo manj matematičnih in naravoslovnih vsebin kot v drugih državah.

Veseli do učenja matematike leta 2015 in 2023



Iz prikaza vidimo, da je padel delež otrok, ki se zelo strinjajo z izjavami.

Povzela Mateja Sirnik
iz predstavljenega gradiva
na Pedagoški institut | TIMSS 2023

Vir:

www.pei.si/raziskovalna-dejavnost/mednarodne-raziskave/timss/timss.2023 (januar, 2025)

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev 2024

dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je popularizacija znanosti in tehnike med

mladimi, približevanje raziskovalne dejavnosti mladim talentiranim učencem in dijakom ter poglobljanje njihovega šolskega znanja.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2024 je potekalo že 58. državno srečanje v Murski Soboti.

Organizator je dobil v pregled deset osnovnošolskih in pet srednješolskih nalog. Med osnovnošolskimi nalogami smo izbrali šest nalog za bronasto priznanje. Preostale so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje. Med srednješolskimi nalogami je vseh pet nalog prišlo v končni izbor za zlato ali srebrno priznanje.

Naloge, ki so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje, so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, doc. dr. Polona Repolusk, doc. dr. Mateja Grašič, asist. Simon Brezovnik in dr. Borut Jurčič Zlobec.

Sledi pregled tem, ki so bile predstavljene pred državno komisijo.

- med osnovnošolskimi nalogami: 4 pedagoške, 1 geometrijska, 3 aritmetične, 1 iz teorije števil in 1 statistična;
- med srednješolskimi nalogami: 1 iz teorije števil, 3 geometrijske in 1 iz kriptografije.

Anketnih nalog letos ni bilo. Vendar se je med osnovnošolskimi nalogami pojavil val pedagoških nalog. Komisija jih je ocenila za ne najprimernejše, ker nas na srečanjih mladih raziskovalcev ne zanima, kako drugi rešujejo matematične probleme, ampak bolj to, kako jih rešujejo sami učenci in dijaki. Zato ni nobena od pedagoških nalog prišla v ožji izbor za srebrno oziroma zlato priznanje.

Pri ocenjevanju je komisija poleg samih nalog ocenjevala tudi njihovo predstavitev.

1. Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2024

Zlato priznanje sta prejeli le dve srednješolski raziskovalni nalogi. Nalogi sta obravnavani po vrsti. Na prvem mestu v kategoriji je naloga, ki jo je komisija ocenila za najboljšo.

• REŠEVANJE TRIKOTNIKA BREZ UPORABE KOTNIH FUNKCIJ

Avtorice: Lara Lozar, Nika Mravlja in Tiana Požar

Mentor: Miha Šušteršič, prof. mat.

Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Šola: Škofijska gimnazija Vipava

• UPORABA KONGRUENC V KRIPTOLOGIJI

Avtorica: Jana Avšič

Mentorica: prof. Karmen Kete

Somentor: prof. Jakob Avšič

Šola: Šolski center Nova Gorica, Nova Gorica

2. Kratek opis nagrajenih nalog

2.1. Naloga: Reševanje trikotnika brez uporabe kotnih funkcij

Avtorice so o ciljih naloge napisale:¹

V nalogi smo zastavili tri cilje:²

- (1) *Preučiti koncept razreševanja trikotnikov brez uporabe običajnih kotnih funkcij.*

Koncept se imenuje pristop racionalne trigonometrije.

- (2) *Dokazati, da s konceptom racionalne trigonometrije lahko razrešimo trikotnik.*

- (3) *Narediti primerjavo razreševanja trikotnika po obeh konceptih.*

Nekaj osnovnih formul trigonometrije brez transcendentnih funkcij, ki so omejene v nalogi

- Kvadratnica $\overline{AB}^2$:

$$A(x_1, y_1),$$

$$B(x_2, y_2),$$

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

- Pogoj kolinearnosti A, B, C:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4),$$

$$a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}.$$

- Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$.

- Stežaj dveh premic $l_i = a_i x + b_i y + c_i$, $i = 1, 2$:

$$s(l_1, l_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 / (a_1^2 + b_1^2)^2 / (a_2^2 + b_2^2)^2.$$

Opombe

- *Kvadratnica* je kvadrat razdalje med dvema točkama.
- *Kolinearnost*: tri točke ležijo na isti premici. Ploščina trikotnika, ki ga razpenjajo, je enaka nič.
- *Stežaj dveh premic*: Tu se skriva kotna funkcija $s = \sin^2 \phi$, kjer je ϕ kot med premicama.
- Omenjena so razmerja stranic v pravokotnem trikotniku, le da so vse količine kvadrirane.
- Omenjen je *stežajni izrek*, ki je v bistvu sinusni izrek, le da so razmerja kvadrirana.
- Najdemo tudi *kostežajni izrek*, $(c^2 + a^2 - b^2)^2 = 4c^2 a^2 (1 - s_b^2)$, ki je kvadriran kosinusov izrek $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.
- Izpeljan je pogoj, da je vsota notranjih kotov trikotnika 180° .
- Sledijo konstrukcije trikotnikov.

Kar se pa tiče iracionalnih rešitev kvadratne enačbe, so Grki po porazu pitagorejskih racionalnih razmerij, potem ko so domnevno utopili Hipasa, ki je dokazal, da diagonala kvadrata ni izmerljiva z njegovo stranico, problem rešili tako, da so govorili o kvadratnih razmerjih in s tem obšli kvadratni koren. Tako so lahko ostali pri racionalnih razmerjih. Dalje se Grki niso spuščali v iracionalne vode.

Naloga je dosledno izpeljana, vendar je bil zalogaj za učenke kar velik. Upam, da jih to ne bo odvrnilo od matematike. Glede na njihovo minulo delo priporočam, da si za nagrado ogledajo prispevek o projektivni geometrijski algebri. Ob lepoti teorije bodo pozabile na trdo delo pri nalogi in utrdile občutek, da je matematika lepa.

A Swift Introduction to Projective Geometric Algebra – YouTube

<https://www.youtube.com/watch?v=0i3ocLhbxj4>



QR-koda do posnetka

¹ Z osnovno pisavo so zapisani komentarji avtorja.

² Z ležečo pisavo so prepisi iz raziskovalnih nalog.

2.2. Naloga: Uporaba kongruenc v kriptologiji

Naj nalogo predstavimo kar z avtoričinim povzetkom k njej.

V raziskovalni nalogi želimo pokazati uporabo modularne aritmetike v nekaterih metodah šifriranja ter prikazati delovanje teh metod s pomočjo programskega jezika Python. V začetnem delu opišemo matematična orodja, ki jih potrebujemo v kriptologiji, med njimi Eulerjev izrek, reševanje linearne kongruence z eno in z dvema neznankama, reševanje sistema dveh linearnih kongruenc z dvema neznankama, računanje potenc z velikimi eksponenti po danem modulu ter računanje inverza proti modulu tujega števila s pomočjo Eulerjevega izreka in s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma. V nadaljevanju se ukvarjamo z dvema metodama šifriranja: šifriranje s pomočjo afine transformacije ter RSA šifriranje. Spotoma vpeljemo matematične pripomočke, ki jih potrebujemo pri posameznem tipu šifriranja, ter izdelamo računalniške programe, s katerimi šifriranje prikažemo na konkretnih primerih. V primeru afine transformacije se ukvarjamo tudi s kriptanalizo in pokažemo, da je ta metoda glede na današnjo moč računalniške tehnologije za uporabo preveč ranljiva.

Kratek pregled vsebine

- (1) Modulska aritmetika
Glej <https://www.youtube.com/watch?v=IJ3CD9M3nEQ>



- (2) Osnovni pojmi kriptologije
- (3) Eulerjev izrek
- (4) Recipročna vrednost a^{-1} v danem modulu (r), $a^{-1} \times a \equiv 1 \pmod{r}$
- (5) Potence z velikimi eksponenti
- (6) Linearni sistemi kongruenc
- (7) Razširjeni Evklidov algoritem
- (8) Afina transformacija

- (9) Kriptanaliza tajnopisa, šifriranega s pomočjo afine transformacije
- (10) Šifrirni sistem RSA

2.3. Opombe

Naloga stoji trdno na nogah. Dijakinja je zapisala vse izreke in dokaze, ki jih je potrebovala. Večino jih je verjetno dokazala sama, to je videti iz načina, kako se je lotila dokazov.

Enostavnejša kodiranja izračunajo iz indeksa danega znaka v abecedi nov indeks in zamenjajo dani znak z znakom, ki v abecedi stoji na mestu z izračunanim indeksom.

Opisala je naslednje načine kodiranja:

- (1) Afino kodiranje: Indeks znaka i v abecedi se spremeni po formuli $f(i) = a \times i + b \pmod{r}$, kjer je r dolžina abecede. S pomočjo statistične porazdelitve črk v slovenskem besedilu ji je uspelo dekodirati zakodirano besedilo.
- (2) Kodiranje RSA je omenjeno v prispevku na spletu na zgornjem naslovu.

Vse, kar je povedano v nalogi, je tudi podprto s programi v programskem jeziku python.

3. Druge naloge

Letos je komisija dodelila le dve zlati priznanji. Nobena osnovnošolska naloga ni prejela zlatega priznanja.

Vendar bi omenil dve nalogi, ki sta vzbudili pozornost.

3.1. O konstrukciji obsega celih števil

Prva je naloga, ki govori o konstrukciji naravnih števil po metodi Montessori.

Konstrukcija temelji na Peanovih aksiomih za naravna števila.

- (1) Število 0 je naravno število.
- (2) Vsako naravno število n ima naslednika n' .
- (3) Če za dvojce naravnih števil m in n velja, da je $m' = n'$, potem sta števili enaki.

- (4) Vsako naravno število razen števila 0 je naslednik nekega naravnega števila.

V Montessorijevi konstrukciji število nič predstavlja prazno škatlo, kamor se lahko namestijo druge škatle. Škatla, v kateri se nahaja druga prazna škatla, predstavlja število 1. Naslednika naravnega števila dobimo tako, da v njegovo škatlo dodamo še eno prazno škatlo.

V nadaljevanju so avtorji vpeljali konstrukcijo gnezdenih škatel, imenovali so jih polištevila, ki pa jim niso uspeli vdihniti življenja. Tako je ostalo le pri konstrukciji.

Zadeva se je dokončno zapletla, ko so hoteli konstruirati cela števila. V ta namen so vpeljali dodatno škatlo, to je antiškatlo, ki predstavlja antinič. Če se znajdeti v škatli nič in antinič, se medsebojno izničita.

Tu so storili prvo napako. V obsegu celih števil velja, da je $0 = -0$. Zaradi te napake so morali žrtvovati distributivni zakon v obsegu celih števil. Algebrska struktura obsega se je zrušila.

Vendar jih to ni ustavilo. V nadaljevanju so definirali multištevila gnezdenih škatel, kjer nastopajo škatle nič in antinič. Omenili so, da je to pot za konstrukcijo elementarnih delcev, kjer nastopajo delci in antidelci.

Seveda nas ta multištevila ne bodo pripeljala do spinorjev. Dobili so napačen namig na prvi stopnji, češ da si njihova naloga zasluži objavo v matematični reviji.

Pot do spinorjev je obravnavana v prispevkih na spletu:

<https://www.youtube.com/watch?v=j5soqexrwqY>.



QR-koda do posnetka

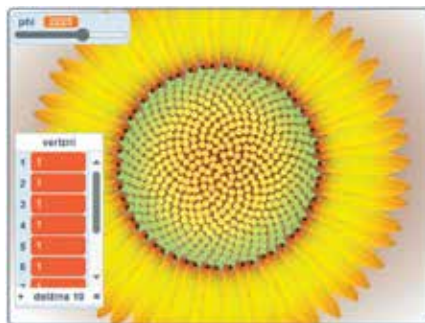
Žal je veliko dela in entuziazma dijakinj in dijakov izzvenelo v prazno. Naj jih ohrabrim, da je bilo njihovo delo kljub temu dragoceno. Z izkušnjami, ki so jih pridobili, lahko v nadaljevanju dosežejo lepe uspehe.

3.2. O zlatega rezu

V nalogi sta avtorici poskušali iz njihove šolske stavbe izrezati pravokotnike v zlatega rezu. Če pravokotniku v zlatega rezu odstranimo kvadrat z dolžino stranice, ki je enaka manjši od stranic pravokotnika, nam ostane pravokotnik, katerega stranici sta v enakem razmerju kot stranici prvotnega pravokotnika.

Sam pojem zlatega reza ima močan mistični naboj. V tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog iz matematike na srečanjih mladih raziskovalcev pod okriljem Zveze za tehnično kulturo, je bilo mnogo nalog na temo zlatega reza. Ni treba posebej poudarjati, da so mrzlično iskali razmerje povesod, kjer je in kjer ga ni.

Res je, da se razmerje zlatega reza pojavlja v naravi. Vendar je razlog za to posebna lastnost razmerja, ki je v nekem smislu najbolj iracionalno število. To dejstvo pride v poštev, kadar imamo opravka z enakomernimi razporeditvami, kot je na primer razporeditev semen pri sončnici. Glej <https://scratch.mit.edu/projects/344169437/fullscreen>.



Vir: Posnetek zaslona.



QR-koda do aplikacije

Navajamo nekaj napačnih trditev o zlatega rezu v nalogi.

- Znamenita podoba Vitruvijskega človeka Leonarda da Vinci ni v zlatega rezu. Vitruvij je sledil pitagorejcem, ki so oboževali racionalna razmerja (harmonija sfer). Tudi zapisi na podobi človeka govorijo o racionalnih razmerjih v človeškem telesu.

Glej <http://matematika.fe.uni-lj.si/html/people/borut/scratch/Dokumenti/Vitruvian.pdf>.



QR-koda do dokumenta

- Zgradba OZN na sliki z več kot 16 % odstopa od zlatega reza. Seveda pa vedno lahko popravimo pravokotnik tako, da bo v zlatega rezu. Enako velja za Partenon v Atenah.
- Razmerje zlatega reza je limita količnika dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja. Ti so v nekem smislu najboljši možni racionalni približki zlatega reza. V nalogi je zapisano, da je količnik že po petem členu zelo blizu zlatega številu in se mu tudi naprej zelo hitro približuje. Ravno to ni res, bistvo zlatega reza je nekje drugje, kot smo omenili zgoraj.

Tudi to je napaka mentorjev, ki so bili premalo pozorni. Tako skrbno napisana naloga ni našla mesta, ki bi si ga lahko zaslužila.

S tem dijakinj nočem oplasiti, ampak ju vabim, naj se naslednje leto odločita za raziskovalno nalogo, pri kateri bi z novim znanjem preverili pravilnost trditev v tej nalogi. Ponujam se za somentorja. ■

DMFA organizira NATEČAJ

Matematika, ki se je lahko dotaknete



Letošnji ustvarjalni izziv je sestavljanje **matematičnih elementov – matematike** z uporabo vsakdanjega fizičnega materiala ali elementov iz gospodinjstva, narave itd., lahko so to tudi ljudje. Uporabite umetnost in ustvarjalnost, da naredite **skulpture**, ki bodo matematiko prenesle iz glave in knjig v resnični svet.

Kdo lahko sodeluje?

Sodelujejo posamezniki ali skupine v vrtcih, osnovnih šolah in srednjih šolah pod mentorstvom učiteljev in/ali vzgojiteljev.

Kako sodelovati?

Ustvarite izdelke na temo letošnjega izziva in prek spletne strani (<https://www.dmfa.si/Izobrazevanje/Mednarodni-DanMatematike.aspx>) oddajte do 3 fotografije s kratkim opisom izdelka.

Oddaja izdelkov bo mogoča med **14. 3. in 31. 3. 2025**, zato lahko izziv hkrati uporabite za razredne aktivnosti na dan števila π ali že ustvarjeni izdelek natečaja ta dan razstavite na šoli.

Ocenjevanje izdelkov?

Komisija DMFA bo izdelke pregledala in izbrala po enega zmagovalca v vsaki kategoriji (vrtec, 1. triletje, 2. triletje, 3. triletje in srednja šola). Vsi udeleženci prejmejo diplome za sodelovanje, nagrajenci pa tudi simbolične nagrade.

Vabljeni k sodelovanju.

Predstavitev knjige: Statistika za začetnike

Slavko Jerič
Cankarjeva založba
Ljubljana, 2024
294 strani
Cena: 29,99 €

Večkrat me kdo prosi za priporočilo poljudne knjige o osnovah statistike v slovenskem jeziku, vendar sem pri tem vedno v zadregi, saj tovrstno literaturo večinoma poznam le v angleščini, medtem ko je pri nas ta tematika pretežno obravnavana v učbenikih. Zato sem z zanimanjem segla po knjigi *Statistika za začetnike*, ki je letos izšla v zbirki Najst pri Cankarjevi založbi. Knjiga je pritegnila precej pozornosti z opazno medijsko kampanjo, številnimi pozitivnimi odzivi bralcev in nedavno osvojeno nagrado zlata hruška v kategoriji izvirne slovenske mladinske poučne knjige. Avtor Slavko Jerič, znan kot novinar MMC RTV SLO in voditelj podkasta *Številke*, v knjigi na zelo osebni način predstavi svoj pogled na številke in podatke, s čimer skuša približati statistiko širšemu občinstvu.

Že podnaslov knjige, *Kako številke oblikujejo (moj) svet*, namiguje, da gre bolj za osebno interpretacijo pomena števil kot za klasično razlago osnov statistike. Besedo »številke« avtor pogosto uporablja kot sinonim za številčne podatke, čeprav statistika ni omejena zgolj nanje. Prvi poglavji sta tako bolj posvečeni številkam, denimo pomenu številke EMŠO, medtem ko se osnovna definicija statistike – veđa o zbiranju, urejanju, analizi, interpretaciji in prikazovanju podatkov – pojavi šele v tretjem poglavju. Tu avtor predstavi tudi zgodovinski razvoj statistike in njeno uporabnost skozi različne primere, od vojaških strategij do razvoja testov inteligentnosti, pri čemer ustrezno izpostavi omejitve teh testov.

Četrto poglavje se osredotoča na osnovne statistične pojme, kot so srednje vrednosti, variabilnost, populacija, vzorec in spremenljivke, kar predstavlja ključno



podlago za razumevanje statistične analize. V petem poglavju, kjer avtor piše o zbiranju in urejanju podatkov, metode nekoliko preveč poenostavi, saj omeji zbiranje zgolj na opazovanje in spraševanje. Pohvalno pa predstavi merske napake in razliko med slučajnimi in sistematičnimi napakami.

Šesto in sedmo poglavje sta namenjeni obravnavi srednjih vrednosti (modus, mediana, aritmetična sredina), porazdelitev in razpršenosti. Avtor ustrezno opozori na omejitve aritmetične sredine v primeru asimetričnih porazdelitev, kot je porazdelitev plač. V poglavju o razpršenosti pa ni najbolj posrečen primer za ključnih ocen, saj gre za ordinalno spremenljivko, za katero izračun aritmetične sredine ni primeren. Kljub temu so razlage variacijskega razmika, standardnega odklona in normalne porazdelitve ustrezno predstavljene.

V osmem poglavju avtor predstavi korelacijo, ob tem pa poudari razliko med korelacijo in vzročnostjo. Opozori na primere »sumljivih korelacij«, za katere se v slovenščini sicer že ustaljeno uporablja izraz *navidezna korelacija*. V zaključku je preveč poenostavljena navedba, da vzročne povezave lahko dokažemo zgolj z

znanstvenim eksperimentom. To ne drži povsem, saj obstajajo napredne statistične metode za obravnavo opazovalnih podatkov.

Knjiga v zadnjih poglavjih zajame širok nabor tem, od osnov verjetnosti (ki je sicer bolj matematična disciplina) do praktičnih primerov uporabe statistike v vojaških strategijah, športu, pandemiji koviđa in podnebnih spremembah. Nekatera poglavja so zanimiva in osvetljujejo širši kontekst uporabe podatkov, vendar zaradi raznolikosti tem knjiga na trenutke deluje nekoliko nepovezano.

Delo vsebuje tudi tabele in grafične prikaze podatkov ter ilustracije Ivana Mitrevskega v stripovskem slogu. Ilustracije smiselno dopolnjujejo besedilo in nekatere so tudi zelo duhovite. Čeprav njihova estetika ne ustreja vsem okusom, so med bralci pozele tudi pohvale.

Naslov knjige se mi zdi nekoliko zavajajoč, saj sama statistika ni v ospredju. Veliko bolje bi knjigo opisala njen podnaslov ali geslo, uporabljeno v opisu knjige na spletni strani založbe: »Vodič po številkah na osebni način«. Avtor, ki je po izobrazbi matematik in psiholog, ne pa statistik, knjigo predstavi na lahкотen in humoren, poljuden način, vendar se včasih poglobljeno razumevanje statističnih metod izgubi.

Knjiga je primerna za začetnike, ki jih zanima uvod v statistiko skozi osebne zgodbe in zanimive primere. Učiteljem matematike bi lahko služila kot vir idej za popestritev pouka, vendar ni namenjena poglobljenemu razumevanju osnovnih konceptov. Čeprav sem glede na nagrado in odzive pričakovala nekoliko več, je knjiga v slovenskem jeziku zelo dobrodošla, saj zapolnjuje vrzel v poljudni literaturi o statistiki. Upam, da bo spodbudila izid dodatnih del, ki bodo obravnavala podatke in statistiko še z drugih vidikov ter vključevala širši nabor metod.

Doc. dr. Ana Slavec,
Fakulteta za matematiko, naravoslovje
in informacijske tehnologije Univerze
na Primorskem in InnoRenew CoE

Mathematics in school

2 2024 Volume 30

CONTENTS

Sonja Rajh

Mathematics in a Greeting Card 1

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Jasmina Ferme, PhD; Barbara Arcet, PhD; Alenka Lipovec, PhD

Developing Algorithmic Thinking Through Long Division 2

Barbara Arcet, PhD

Integrating AI in Education: Effective Prompting 8

FROM THE CLASSROOM

Ema Ptičak, Tadej Vovk

Solving Polynomial Equations with Turtle Graphics 15

Kaja Vreš

Exploring Square Palindromes 23

Ana Canzutti

**Impact of Intentional Use of Mathematical Terminology
in Mathematics Classroom** 30

Lidija Venko

Science Day 39

Jasna Kvenderc Medvešek

Gifted and Potentially Gifted Students in Mathematics 44

NOVICE

Sonja Rajh

International Conference on Teaching and Learning Mathematics 50

Marija Lesjak Reichenberg, Zvonka Kos in Sonja Rajh

**Roundtable Discussion Celebrating Launch of 30th Volume
of *Mathematics in Schools*** 55

Mateja Sirnik

Knowledge of Slovenian Fourth-graders in the International TIMSS Survey 59

Borut Jurčič Zlobec; PhD

Mathematics Research Tasks at Young Researchers Meeting 2024 60

Ana Slavec; PhD

Book Review: *Statistics for Beginners* 64



Varno in spodbudno učno okolje

Brezplačna gradiva
na temo varnega in spodbudnega učnega okolja,
ki so dostopna v digitalni bralnici ZRSŠ:
www.zrss.si/digitalna-bralnica



www.zrss.si/pdf/uporabna-etika.pdf



www.zrss.si/digitalna-bralnica/vkljucujoca_sola



www.zrss.si/digitalna-bralnica/protokoli-za-ravnanje-ob-nasilju

Arhiv člankov iz revij

www.zrss.si/arhiv-clankov



Posamezne članke iz revij, ki jih izdaja ZRSŠ, lahko poiščete v spodnjem iskalniku. Želimo vam prijetno branje.

Več o posameznih revijah najdete [tukaj](#).

Iskanje po člankih (naslov, avtor, ključne besede ...)

Nasilje v razredu – kaj pa varno in spodbudno okolje?

Članek iz: Vzgoja in izobraževanje 5/2018 • Avtorji: mag. Moica Pušnik • Ključne besede: medvrstniško nasilje, razredna klima, varno in spodbudno učno okolje

Razredna klima kot varovalni dejavnik medvrstniškega nasilja v šoli

Članek iz: Vzgoja in izobraževanje 5/2018 • Avtorji: mag. Ingrid Klimentič • Ključne besede: medvrstniško nasilje, razredna klima, varno in spodbudno učno okolje

Otroški parlamenti® o varnem in spodbudnem učnem okolju

Članek iz: Vzgoja in izobraževanje 5/2018 • Avtorji: Marko Rengas • Ključne besede: medvrstniško nasilje, varno in spodbudno učno okolje, otroški parlament, participacija otrok in mladih

Varno in spodbudno učno okolje v srednjih šolah

Članek iz: Vzgoja in izobraževanje 5/2018 • Avtorji: Kristjan Briški, Rozle Stajner, Nomi Hraat, Kristjan Kos • Ključne besede: srednja šola, dijaki, varno in spodbudno učno okolje, dijaška organizacija

Pedagoško vodenje razrednikov s poudarkom na uvajanju nekaterih elementov varnega in spodbudnega učnega okolja ter s povezovalnim sodelovanjem s starši

Članek iz: Vodenje in izobraževanje 3/2022 • Avtorji: Alica Primčič Rohrer, dr. Milana Kerndt • Ključne besede: pedagoško vodenje, razrednik, varno in spodbudno učno okolje

**brezplačni
PDF članki iz
strokovnih revij
ZRSŠ**

ISSN 1318-010X

